Practica 4: Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Alberto Mateos Checa

1. Objetivos

El objetivo de esta práctica es el uso de la transformada Z para describir sistemas lineales e invariantes en el tiempo. La obtención de la función del sistema H (z) y su particularización a la circunferencia de radio unidad para obtener la respuesta en frecuencias H ($e^{j\omega}$).

2. Descripción de sistemas

Los sistemas lineales de coeficientes constantes se pueden describir en el dominio del tiempo por su ecuación en diferencias:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] a_0 = 1$$

Otra descripción de un sistema en el dominio del tiempo viene dada por su respuesta al impulso:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\inf} x(n)h(n-k)$$

Se pueden calular valores concretos de h(n) para n = 0, 1, 2... con la función filter de MATLAB, con $\delta(n)$ como señal de entrada, donde el sistema se describe a través de los coeficientes a_k y b_l. Esta función porporciona el valor de h(n) como:

$$h(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) + \sum_{l=0}^{M} b_l \delta(n-l)$$

Obteniendose para N > M:

$$h(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k)$$

Aplicando la transformada z a la ecuación en diferencias se obtiene una descripción en el dominio z:

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k+1}^{N} a_k z - k}$$

Considerando H(z) en la circunferencia de radio unidad z = exp(jω) se obtiene la respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l e^{-jl\omega}}{1 + \sum_{k+1}^{N} a_k e^{-jl\omega}}$$

$H(e^{j\omega})$ es una función periódica en ω de período 2π . Sus funciones componentes y otras relacionadas son:

$$P(e^{j\omega}) = Re\{H(e^{j\omega})\}$$

$$Q(e^{j\omega}) = Im\{H(e^{j\omega})\}$$

$$ln|H(e^{j\omega}| = Re\{ln(H(e^{j\omega})\}$$

$$fase\{H(e^{j\omega})\} = Im\{ln(H(e^{j\omega})\}$$

$$\tau_g \omega = -\frac{d\phi}{d\omega}$$

3. Realización práctica

3.1 Respuesta al impulso.-

Para obtener la respuesta al impulso de una señal utilizaremos la función de matlab filter(b,a,x) donde x será la señal impulso.

3.2 Respuesta en frecuencias.-

Para hallar la respuesta en frecuencia usaremos la función *freqz.* Más en concreto, la orden que utilizaremos será: *[H,W] = freqz(b, a,N',WHOLE')* que nos evalúa la transformada en la circunferencia unidad o sin la opción WHOLE si solo queremos evaluarla en la mitad superior.

3.3 Ejercicios.-

- Se nos pide que creemos los vectores a y b que contendrán los valores de las constantes de la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) + 0.9y(n-2) = 0.3x(n) + 0.6x(n-1) + 0.3x(n-2)$$

Para ello, tendremos que ejecutar el siguiente código:

```
a=zeros(1,3);
b=zeros(1,3);

%Vector coeficientes x(n)
a(1)=0.3;
```

```
a(2)=0.6;
a(3)=0.3;

%Vector coeficientes y(n)
b(1)=1;
b(2)=0;
b(3)=0.9;
```

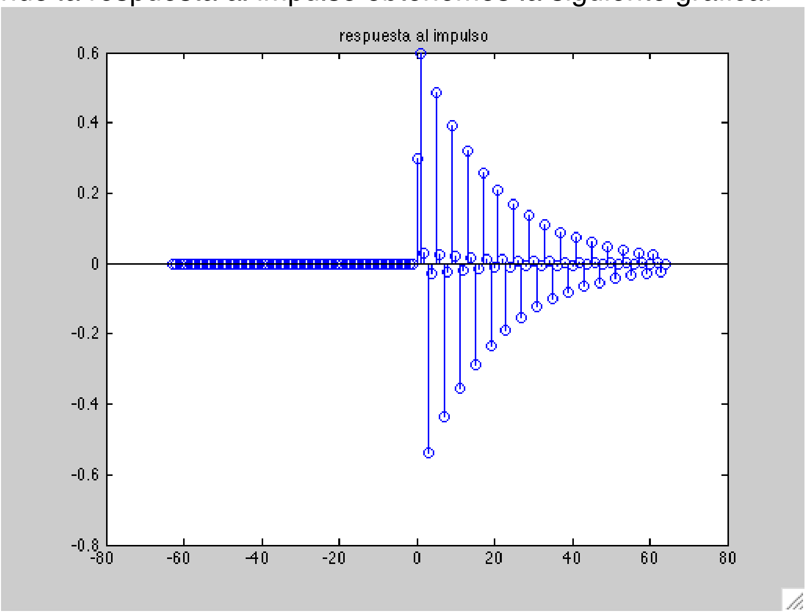
Una vez creados los vectores que contienen los coeficientes de x(n) e y(n) tenemos que hacer otro vector imp de longitud 128 que será nuestro **impulso**. Para ello:

```
impulso=zeros(1,128);
impulso(64)=1;
```

Una vez creado el impulso, ejecutamos la función filter para obtener la **respuesta al impulso:**

```
y=filter(a,b,impulso)
```

Representando la respuesta al impulso obtenemos la siguiente gráfica:



- Se nos pide que obtengamos ahora la respuesta al escalón. De amplitud 3 y que obtengamos la respuesta en régimen permanente.

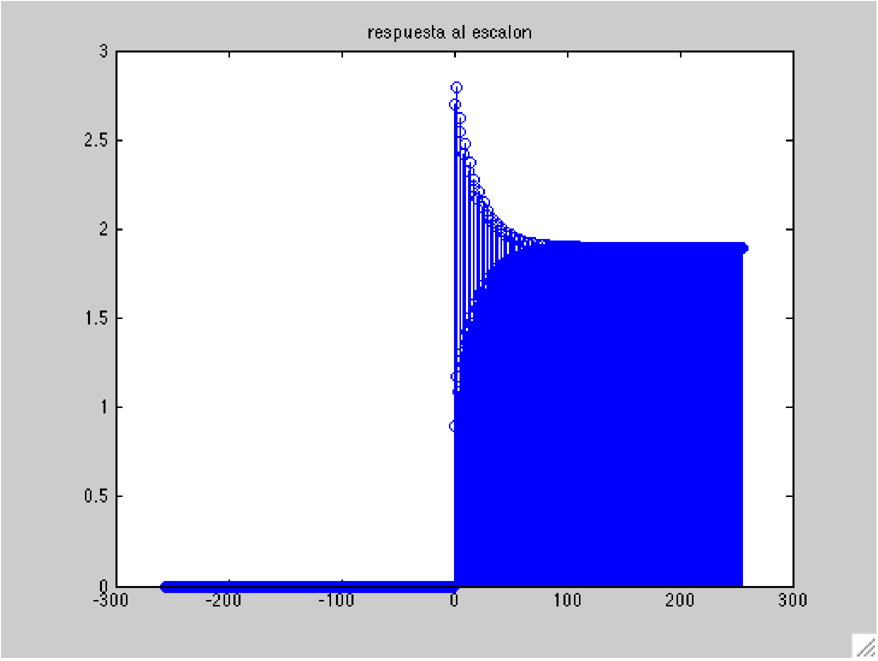
Primero creamos nuestra **función escalón** de la siguiente forma:

```
%Funcion escalon
escalon=zeros(1,512);
for i=256:512,
  escalon(i)=3;
end
stem(escalon)
```

Ahora obtenemos la **respuesta al escalón** mediante el código siguiente:

```
%Respuesta al escalon
n=-255:1:256
ye=filter(a,b,escalon)
```

Representando la respuesta al escalón obtenemos la gráfica que sigue:



Una vez que tenemos la respuesta al esclón podemos obtener la respuesta en régimen permanente, para lo cual tendremos que ver cuál es el valor de la última muestra de la respuesta. Esto lo hacemos de la siguiente manera:

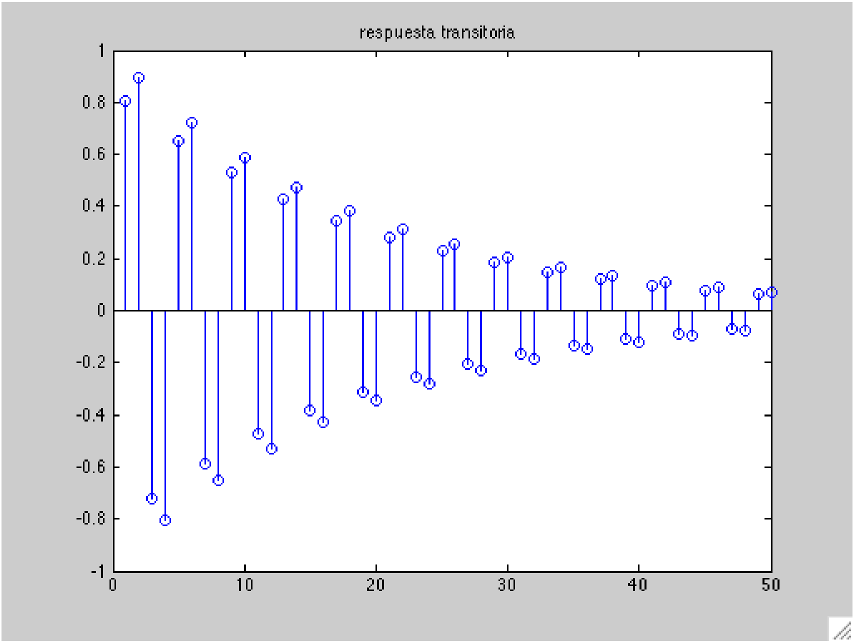
```
g0=ye(512)
```

El valor que obtenermos para la **respuesta en régimen permanente** es: **1.8947**

Una vez que sabemos el valor de la respuesta en régimen permanente podemos hallar la **respuesta transitoria** de la siguiente manera:

```
yt=zeros(1,50)
for j=1:50,
  yt(j)=ye(j+256)-g0;
end
```

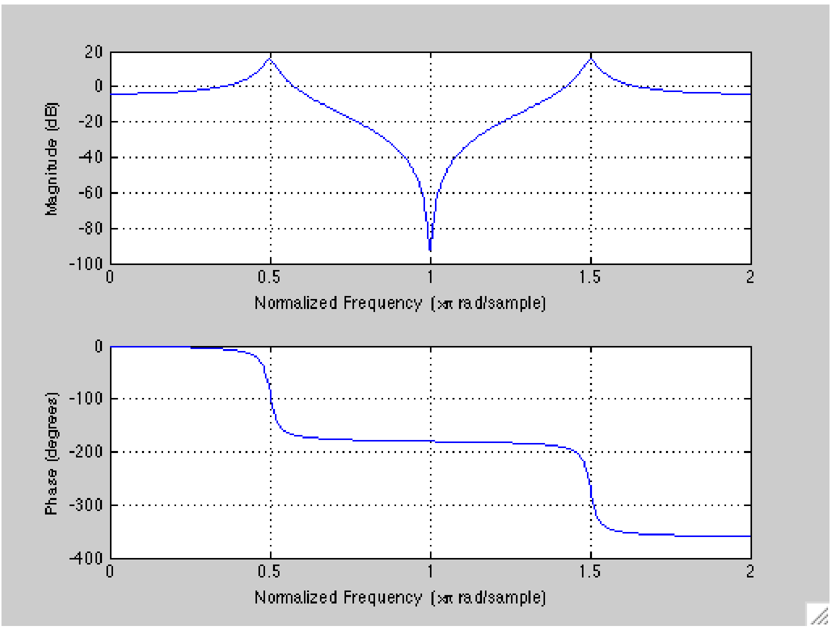
La gráfica de debajo de este texto representa la respuesta transitoria:



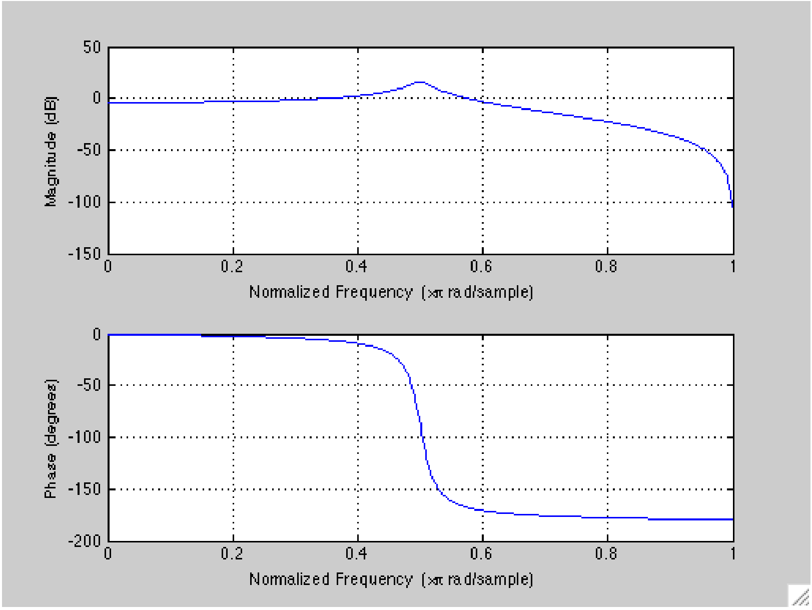
- Ahora, usando la función freqz tenemos que representar las gráficas de módulo y fase con 512 muestras en toda la circunferencia unidad y para la mitad superior. Para este fin he usado el siguiente código:

```
%Representacion toda la circunferencia
figure
freqz(a, b, 512,'WHOLE')
%Representacion mitad superior de la circunferencia
figure
freqz(a, b, 512)
```

Obtenemos las siguientes gráficas:



Gráfica para toda la circunferencia.



Gráfica para la mitad superior de la circunferencia.

Si nos fijamos en la segunda gráfica (válida según el guión para casos reales), vemos que el sistema definido por nuestra ecuación en diferencias se comporta como un **filtro paso bajo**.

- Ahora tendremos que realizar los mismos pasos que en los apartados anteriores pero para la siguiente ecuación en diferencias:

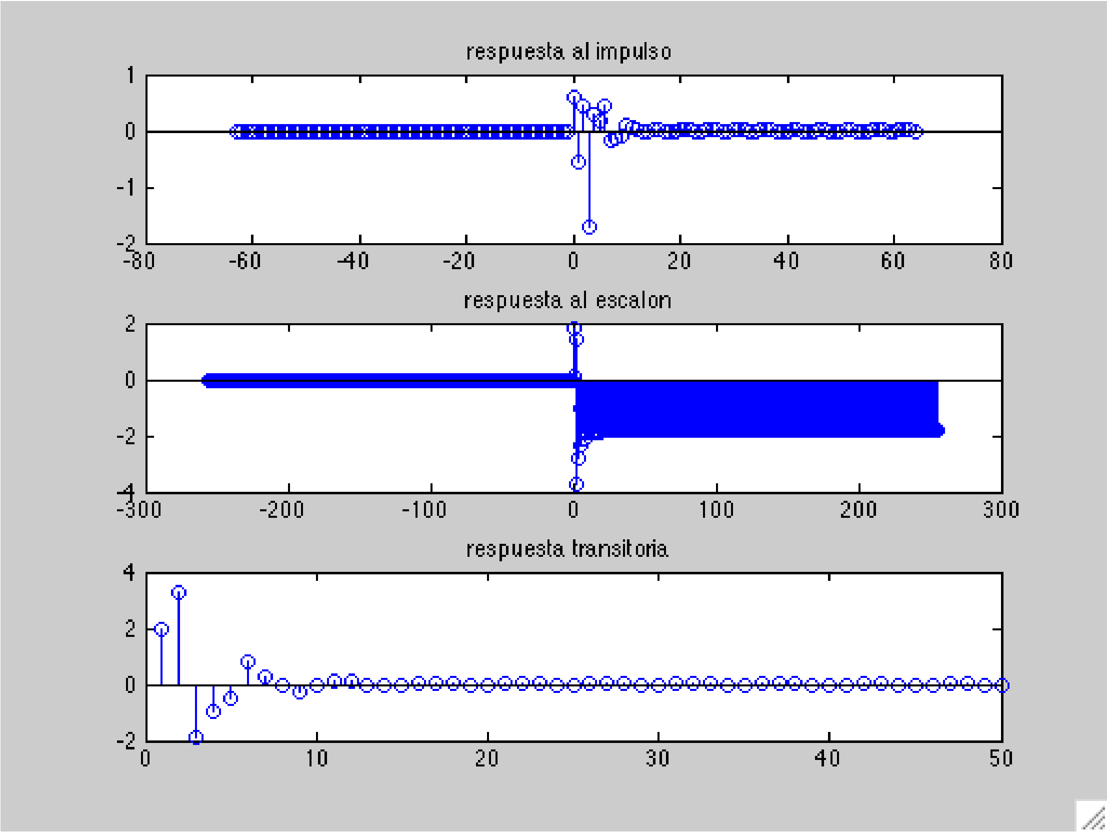
$$- y(n) + 0.13y(n-1) + 0.2y(n-2) + 0.3y(n-3) = \\ 0.6x(n) - 0.48x(n-1) + 0.48x(n-2) - 1.6x(n-3)$$

Puesto que es lo mismo que antes no me voy a detener mucho y paso a pegar a continuación el código que he usado para obtener lo que se nos pide:

```
%Ecuacion a:
a1=zeros(1,3);
b1=zeros(1,3);

%Vector coeficientes x(n)
a1(1)=0.6;
a1(2)=-0.48;
a1(3)=0.48;
a1(4)=-1.6;

%Vector coeficientes y(n)
b1(1)=1;
b1(2)=0.13;
b1(3)=0.2;
b1(4)=0.3;


%Respuesta al impulso
y1=filter(a1,b1,impulso)
```

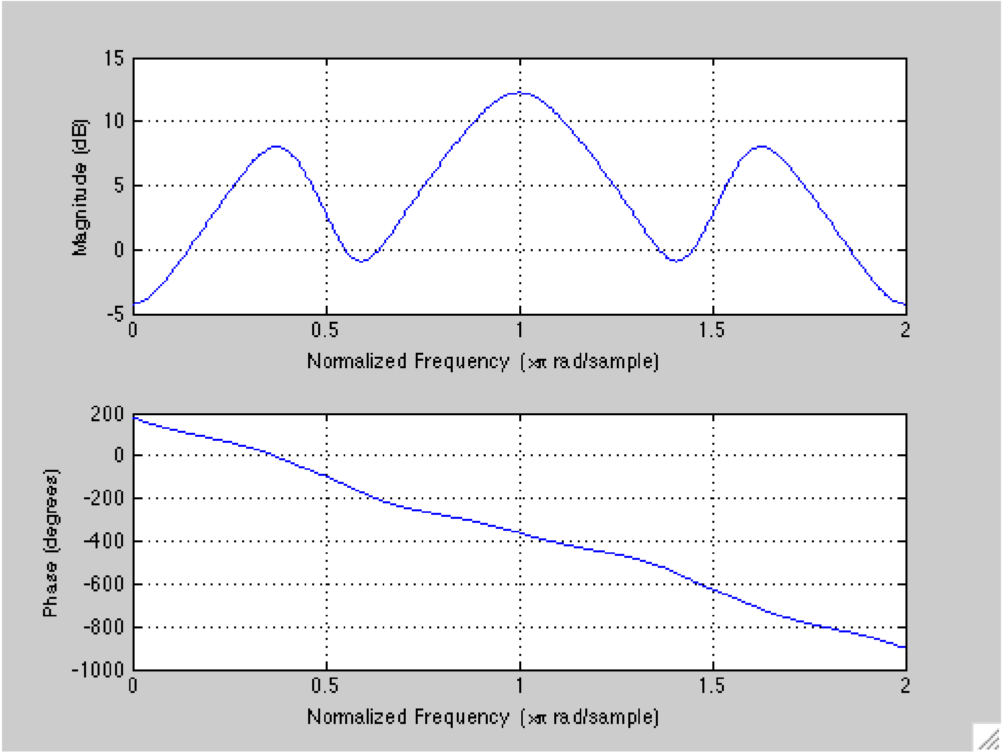
```
%Respuesta al escalon
n=-255:1:256
ye1=filter(a1,b1,escalon)


%Respuesta en regimen permanente
g0=ye1(512)
%Repuesta transitoria
yt1=zeros(1,50)
for j=1:50,
  yt1(j)=ye1(j+256)-g0;
end
```

Las gráficas que obtenermos para las respuestas tras ejecutar el código anterior son:

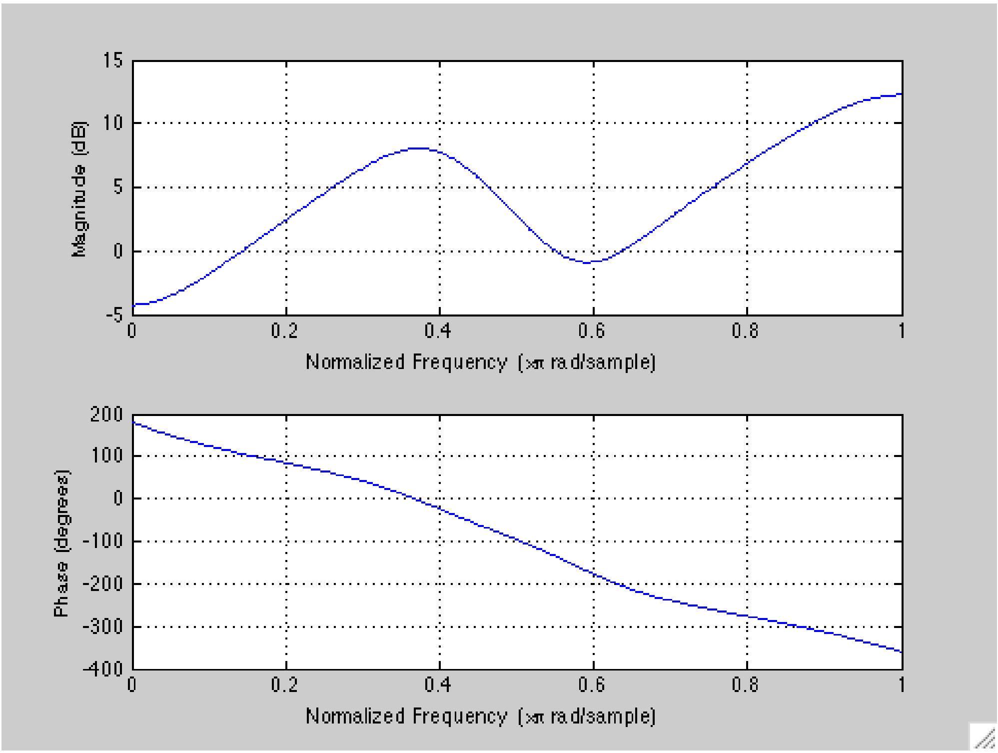


El valor que obtenemos para la **respusta en régimen permanente** es: - 1.8405

Las representaciones de módulo y fase para la circunferencia unidad y para la parte superior de la misma son las siguientes:



Gráfica para la circunferencia completa.



Gráfica para la mitad suprior de la circunferencia.

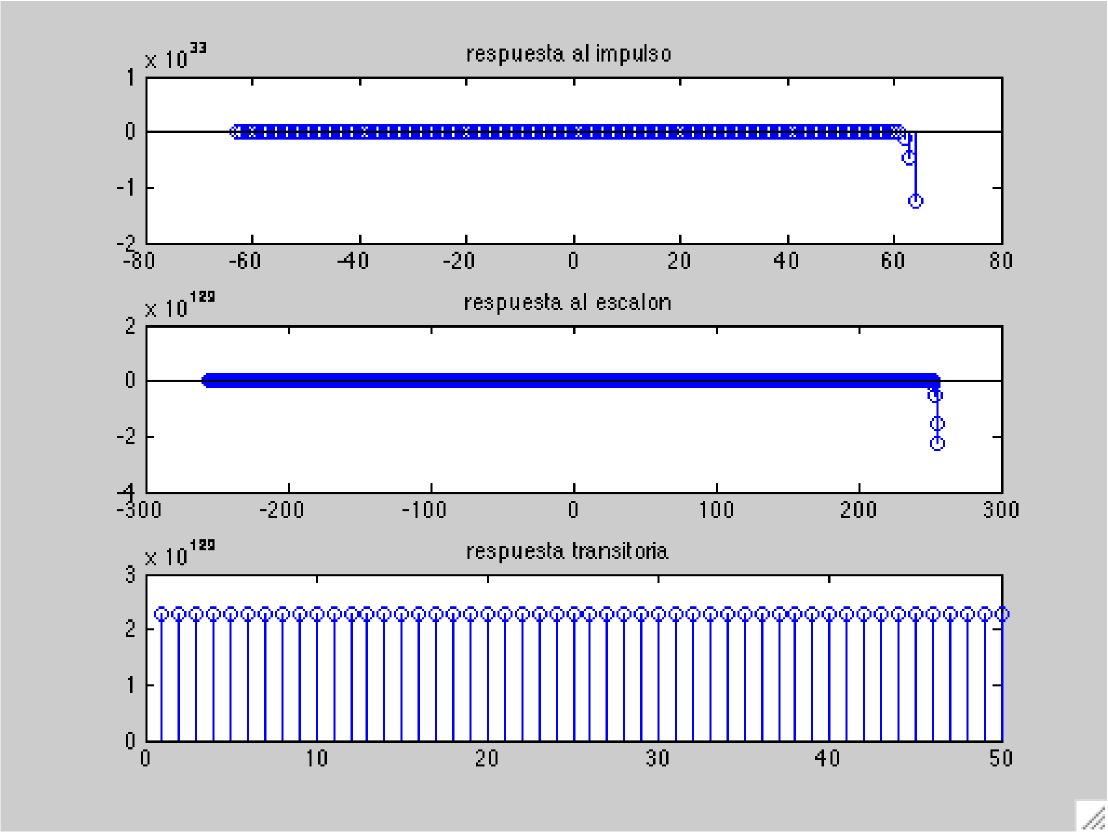
- Haremos lo mismo ahora para la siguiente ecuación:

$$-10y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = x(n) - 5x(n-1) + 10x(n-2)$$

Obtenemos las respuestas de la misma manera que antes ejecutando el siguiente código:

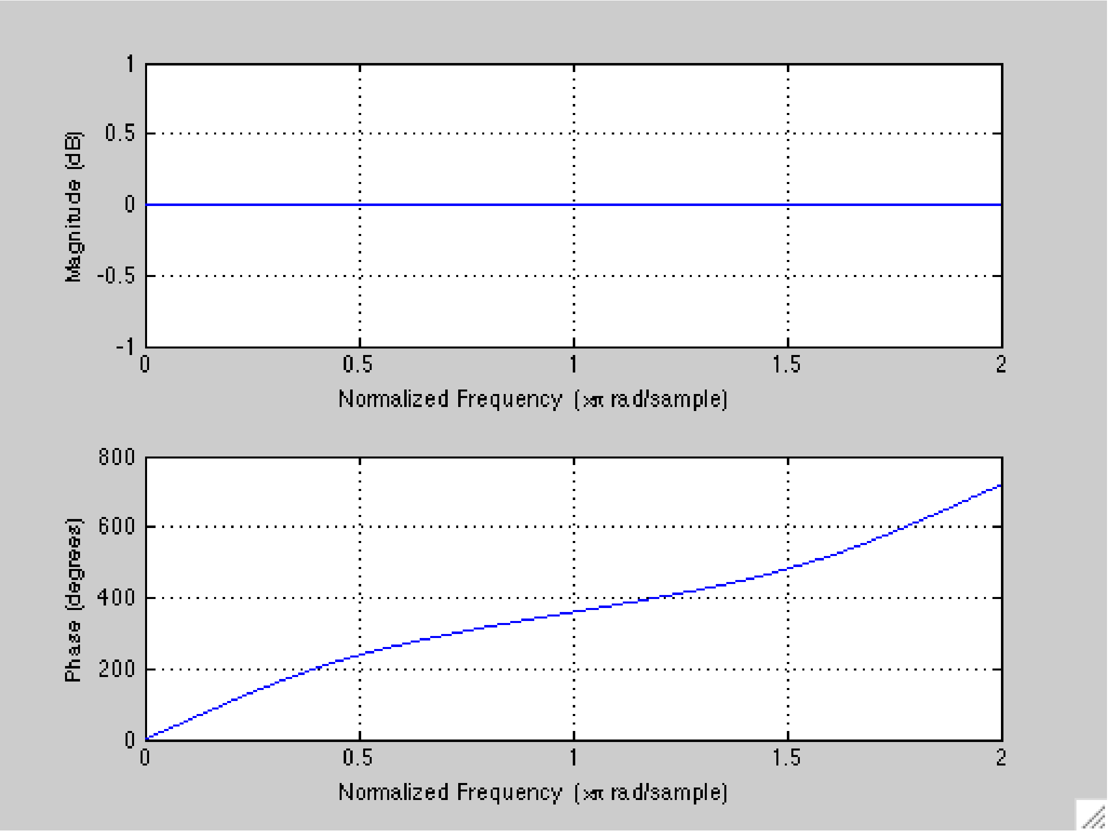
```
a2=zeros(1,3);
b2=zeros(1,3);

%Vector coeficientes x(n)
a2(1)=10;
a2(2)=-5;
a2(3)=1;

%Vector coeficientes y(n)
b2(1)=1;
b2(2)=-5;
b2(3)=10;

%Respuesta al impulso
y2=filter(a2,b2,impulso)

%Respuesta al escalon
n=-255:1:256
ye2=filter(a2,b2,escalon)

%Respuesta en regimen permanente
g0=ye2(512

%Repuesta transitoria
yt2=zeros(1,50)
for j=1:50,
  yt2(j)=ye2(j+256)-g0;
end

%Representacion de las respuestas
figure;
subplot(3,1,1);
n=-63:1:64
stem(n,y2)
title('respuesta al impulso');
subplot(3,1,2);
n=-255:1:256
stem(n,ye2)
title('respuesta al escalon');
subplot(3,1,3);
stem(yt2)
title('respuesta transitoria');
```

Estas son las gráficas que obtenemos de las respuestas:

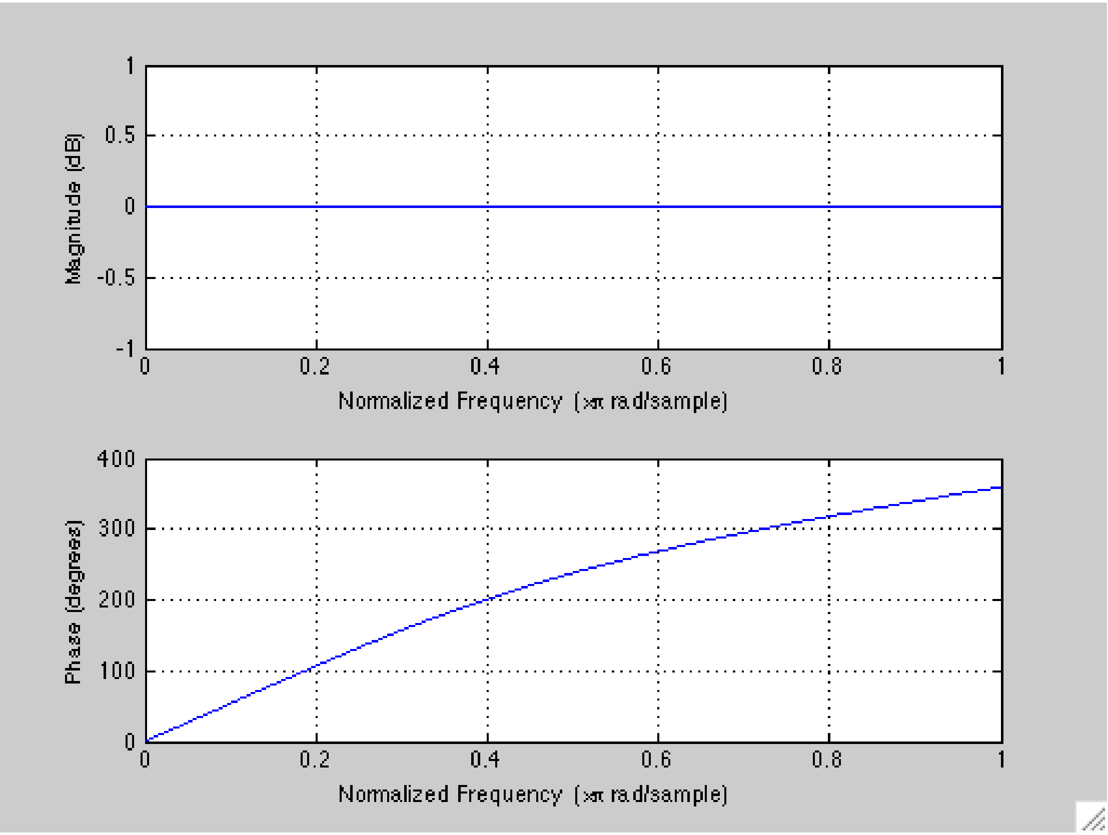


El valor que obtenemos para la **respusta en régimen permanente** es
-2.2832e+129

Las representaciones de módulo y fase para la circunferencia unidad y para la parte superior de la misma son las siguientes:



Gráfica para la circunferencia completa.



Gráfica para la mitad suprior de la circunferencia.

- En este último apartado se nos pide que descompongamos en fracciones simples mediante el comando *residuez*, una ecuación con los siguientes coeficientes:

$$a = [\ 1\ \ -0.8741\ 0.9217\ 0.2672\ ]^T$$

$$b = [\ 0.1866\ 0.2336\ 0.2336\ 0.1866\ ]^T$$

```
%coeficientes a
a3=zeros(1,4);
a3(1)=1;
a3(2)=-0.8741;
a3(3)=0.9217;
a3(4)=0.2672;
%coeficientes b
b3=zeros(1,4);
b3(1)=0.1866;
b3(2)=0.2336;
b3(3)=0.2336;
b3(4)=0.1866;

%descomponemos en fracciones simples
[R, P ,k]=residuez(b3,a3);
```

```
R =

  -0.0428 - 0.1860i
  -0.0428 + 0.1860i
  -0.4262

P =

   0.5510 + 0.9323i
   0.5510 - 0.9323i
  -0.2278

k =

    0.6984
```

Ahora tenemos que calcular los polos y los ceros con la función tf2zp:

```
%calculamos los polos y los ceros
[ceros,polos,c]=tf2zp(b3,a3);
```

```
ceros =

  -1.0000
  -0.1259 + 0.9920i
```

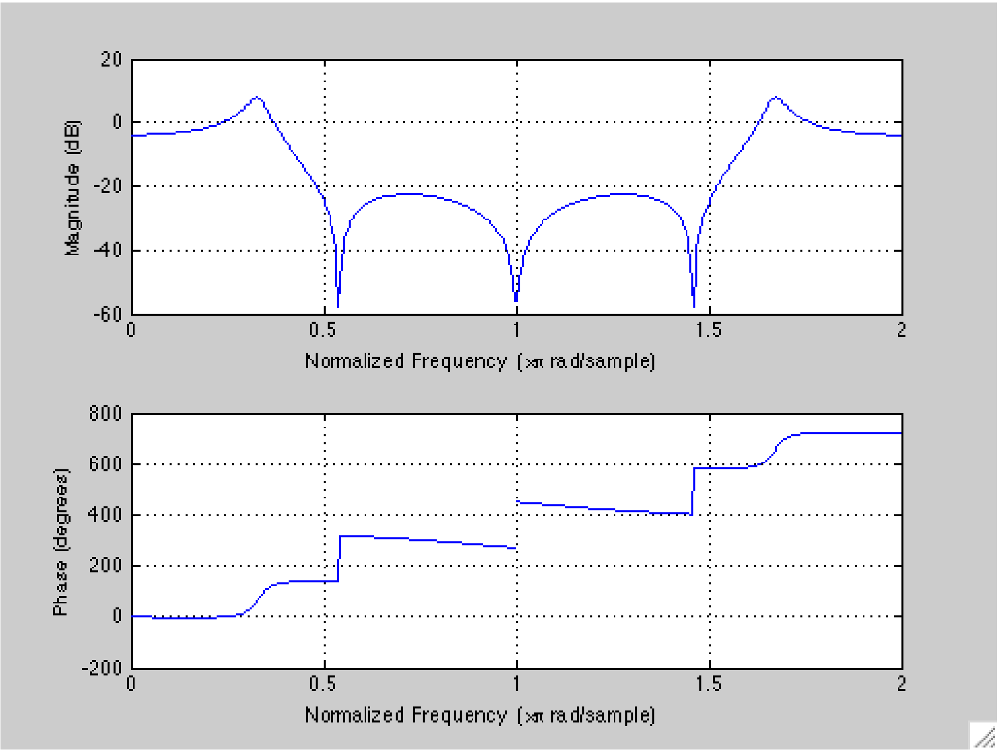
-0.1259 - 0.9920i

```
>> polos

polos =

   0.5510 + 0.9323i
   0.5510 - 0.9323i
  -0.2278

>> c

c =

    0.1866
```

Calculamos ahora la respuesta en frecuencia para 512 muestras:

```
%respuesta en frecuencia compleja
muestras=freqz(b3,a3,512,'whole');
```

La gráfica que obtenemos para la representación del módulo y la fase es la siguiente:



Ahora se nos pide que hallemos la respuesta al impulso con 100 muestras y que la comparemos con la respuesta con la expansión en fracciones simples.
Ya tenemos los valores de los vectores de la descomposición en fracciones simples R, P y K. Por tanto, tenemos una ecuación de la forma:

```
B(z)      r(1)                r(n)
---- = ------------ +...  ------------ + k(1) + k(2)z^(-1) ...
A(z)   1-p(1)z^(-1)  1-p(n)z^(-1)
```

Como tenemos los valores de r(n), p(n) y k podemos hacer la transformada inversa obteniendo:

r(1)*p(1)^n + r(2)*p(2)^n + r(3)*p(3)^n + k

Si representamos esta función nos tendría que dar la misma gráfica que la representación de la respuesta al impulso, pues ambas son la representación de la transformada en el dominio del tiempo.

Usamos el siguiente código para obtener la gráfica de la respuesta al impulso:

```
impulso=zeros(1,100);
impulso(1)=1;
ri=filter(b3,a3,impulso);
```

Para obtener la respuesta con la descomposición en fracciones simples, tenemos que hacer lo que se ha dicho más arriba:

```
for n=1:100

  trans_inver(n) = R(1)*P(1)^n + R(2)*P(2)^n + R(3)*P(3)^n + k

end
```