Práctica: Simulación de sistemas de colas

Sistemas de conmutación

Manuel Granero Valenzuela | Alberto Mateos Checa

Table of Contents

Apartado 1.-

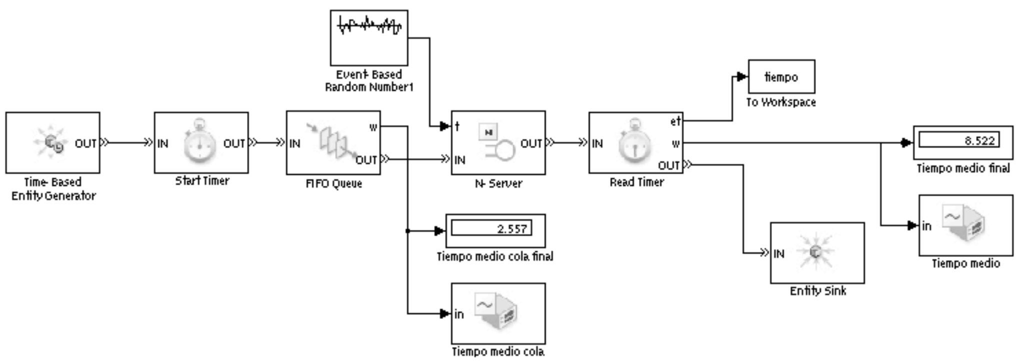
Se nos pide que se modele cada uno de las tres opciones que se detallan en el guión de prácticas mediante un sistema de colas y que se justifique por qué se selecciona dicho modelo. Una vez que se han elegido los modelos de colas se pide que se simulen y se comparen los tiempos medios de espera en cola. Posteriormente se calculará la probabilidad de que un cliente deba esperar más de 10 minutos.

Opción 1:

En la opción uno se nos dice que los clientes forman una sola cola y que pasan a cada una de las tres cajas disponibles cuando una de ellas queda libre. Esta opción la podemos modelar como un sistema de colas **M/M/3** puesto que tanto la llegada de clientes como el tiempo que emplean los cajeros en atender a los mismos sigue una distribución de Poisson. Debido a que tenemos 3 cajas disponibles el número de servidores del modelo será 3 también. La **tasa de llegada λ** será de **1/3** y la **tasa de servicio μ** será de **1/6** para cada uno de los servidores.

Simulación.

Para la simulación usaremos el siguiente modelo de simulink:

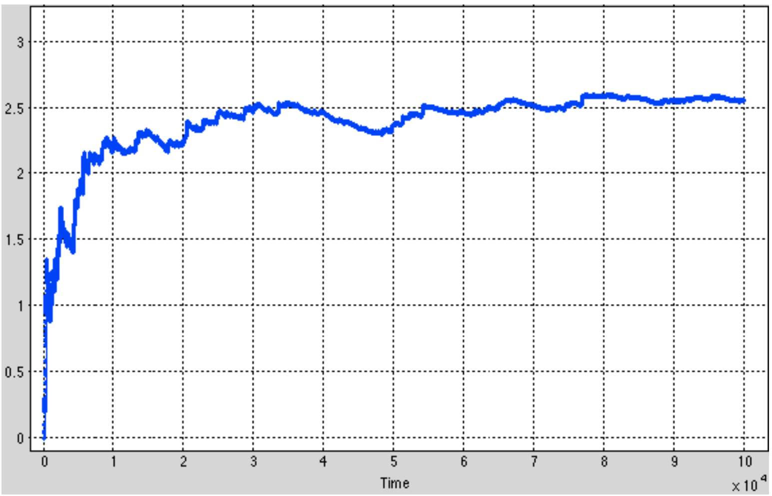


Para realizar la simulación usaremos los siguientes parámetros:

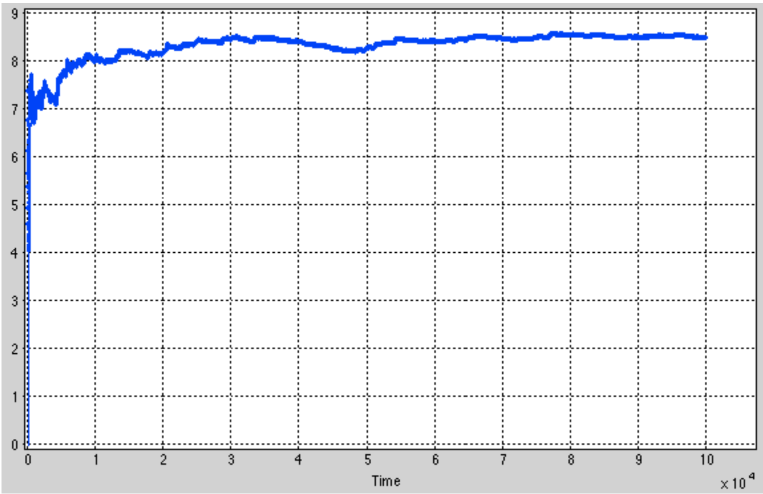
Tiempo simulación	Tiempo medio entre llegadas	Tiempo medio de servicio	Número de servidores	Número de colas

100000 mins	3 min	6 min	3	1

Tras realizar la simulación obtenemos un **tiempo medio de espera en cola** de **2,557** minutos y la siguiente gráfica:



También obtenemos un **tiempo de estancia medio en el sistema** de **8,522** minutos y la siguiente gráfica para este tiempo:



Para calcular la probabilidad de que un cliente deba esperar más de 10 minutos hacemos uso del módulo **to workspace** que aparece en el modelo. Gracias a él, obtendremos los valores de espera de cada uno de los clientes de la simulación en un vector. Para hallar la probabilidad lo que haremos será recorrer dicho vector y contaremos cuántos clientes tuvieron que esperar más de 10 minutos. Si este número de clientes que obtenemos tras recorrer el vector lo dividimos entre el número total de clientes obtendremos el valor de la probabilidad que se nos pide.

El valor de la **probabilidad de que un cliente deba esperar más de 10 minutos** que hemos obtenido es **0,2983**.

Resultados obtenidos teóricamente.

Tenemos un sistema M/M/3 con tasa de llegada λ = 1/3 y tasa de salida μ = 1/6. Por tanto, la utilización $\rho = \lambda /(m\cdot \mu)=2/3$.

Sabemos que el retardo medio total viene dado por:

$$T = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$$

donde $P_Q = \frac{p_0 m^m \rho^m}{m!(1-\rho)}$ y $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\right]^{-1}$

Si sustituimos los valores correspondientes, obtenemos que $P_0 = 1/9$ y que $P_Q = 4/9$.

De esta forma, el **retardo medio** teórico es de **8,667 minutos**.

Sabemos que el tiempo medio de espera en cola viene dado por:

$$W = \frac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$$

Por tanto, el **tiempo medio de espera en cola teórico** es de **2,666** minutos.

Para calcular la probabilidad de que los clientes tengan que esperar más de 10 minutos tendremos que dar solución a la siguiente integral:

$$P_{T>10} = \int_{10}^{\infty} \left[1 - p_0 \cdot \left[\frac{m\rho^m}{m!(m-\rho)}\right]\right] \cdot \mu e^{-\mu\tau} - \left[\frac{\mu p_0 \rho^m \left[e^{-\mu(m-\rho)\tau} - e^{-\mu\tau}\right]}{(m-1)!(1-m-\rho)}\right] d\tau$$

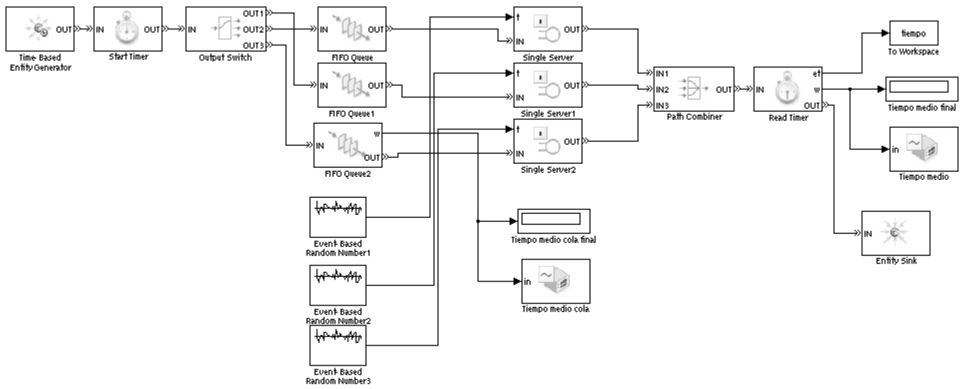
Si resolvemos la integral obtenemos una **probabilidad de que el cliente espere más de 10 minutos** de **0,1874**.

Opción 2:

En la opción dos se nos dice que los clientes forman tres colas independientes, una para cada caja. Esta opción la podemos modelar como **tres** sistemas de colas **M/M/1** puesto que tanto la llegada de clientes como el tiempo que emplean los cajeros en atender a los mismos sigue una distribución de Poisson. La **tasa de llegada λ** será de **1/9** para cada uno de las colas y la **tasa de servicio μ** será de **1/6**.

Simulación.

Para la simulación usaremos el siguiente modelo de simulink:



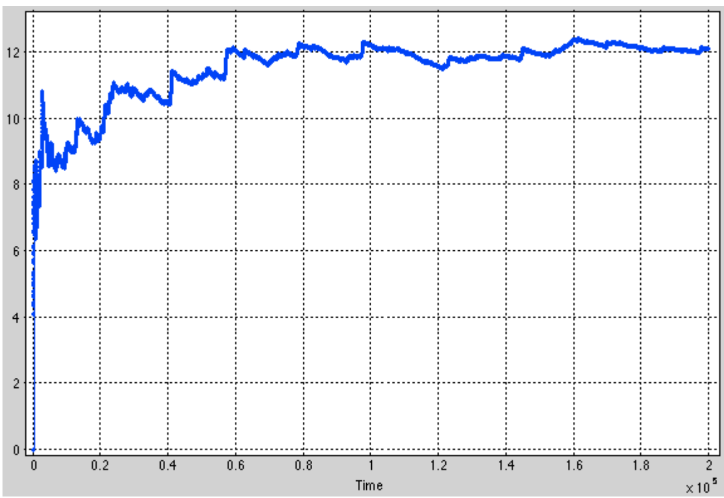
Para realizar la simulación usaremos los siguientes parámetros:

Tiempo simulación	Tiempo medio entre llegadas	Tiempo medio de servicio	Número de servidores	Número de colas
200000 mins	3 min	6 min	3	3

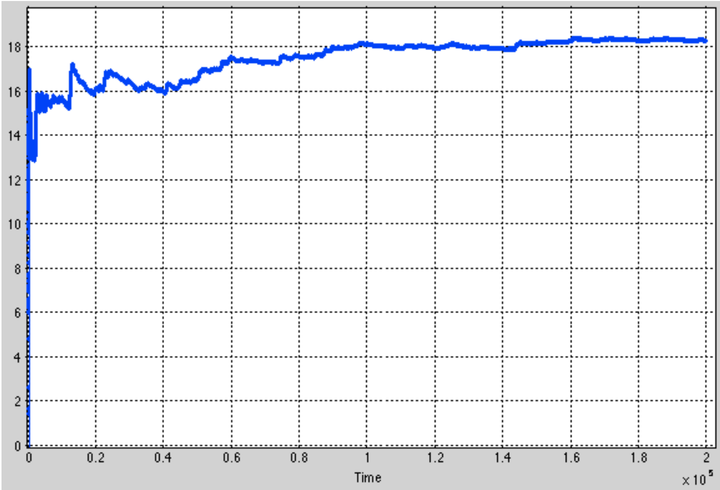
En este caso el tiempo de simulación lo hemos incrementado para que el sistema se comportara de forma estacionaria.

Tras realizar la simulación obtenemos un **tiempo medio de espera en cola** de **12,14** minutos. Hay que destacar que sólo calculamos el tiempo medio de espera de una de las colas ya que para las dos restantes se obtendrá un valor aproximadamente similar.

Para el tiempo medio de espera en cola obtenemos la siguiente gráfica:



También obtenemos un **tiempo de estancia medio en el sistema** de **18,32** minutos y la siguiente gráfica para este tiempo:



Para calcular la probabilidad de que un cliente deba esperar más de 10 minutos de nuevo haremos uso del módulo **to workspace** y del método que se explicó en el caso anterior. La **probabilidad** obtenida es de **0,5456.**

Resultados obtenidos teóricamente.

Tenemos un sistema M/M/1 con tasa de llegada λ = 1/9 y tasa de salida μ = 1/6. Por tanto, la utilización $\rho = \lambda / (m \cdot \mu) = 2/3$.

Sabemos que el retardo medio total viene dado por:

$$T = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

Si sustituimos los valores correspondientes obtenemos que el **retardo medio total** será de **18** minutos.

El tiempo medio de espera en cola podemos calcularlo con la siguiente expresión:

$$W = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \rho \cdot T$$

De esta forma obtenemos que el **tiempo medio de espera en cola** es de **12** minutos.

La **probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos** se calcula realizando la siguiente integral:

$$P_{T>10} = \int_{10}^{\infty} (\mu - \lambda) \cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot\tau} d\tau$$

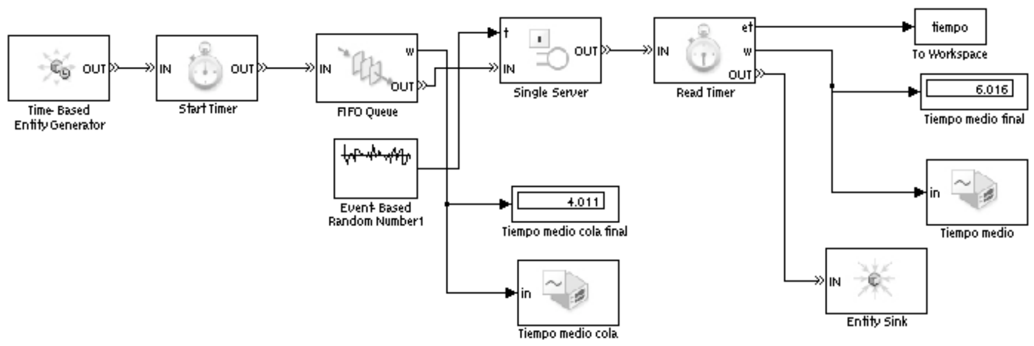
El valor teórico que obtenemos para dicha probabilidad es de **0,574** minutos.

Opción 3:

En la opción tres se nos dice que los clientes forman de nuevo una sola cola y que únicamente tendremos una caja disponible, esta vez con un dependiente que atiende tres veces más rápido que en los casos anteriores. Esta opción la podemos modelar como un sistemas de colas **M/M/1** puesto que tanto la llegada de clientes como el tiempo que emplea el cajero en atender a los mismos sigue una distribución de Poisson. La **tasa de llegada λ** será de **1/3** y la **tasa de servicio μ** será de **½**.

Simulación.

Para la simulación usaremos el siguiente modelo de simulink:

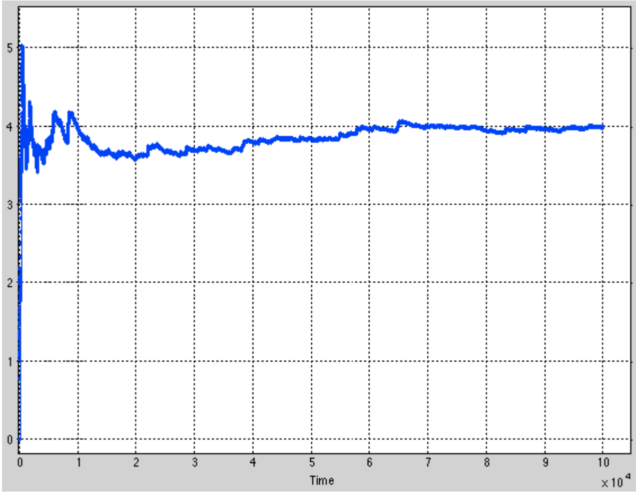


Para realizar la simulación usaremos los siguientes parámetros:

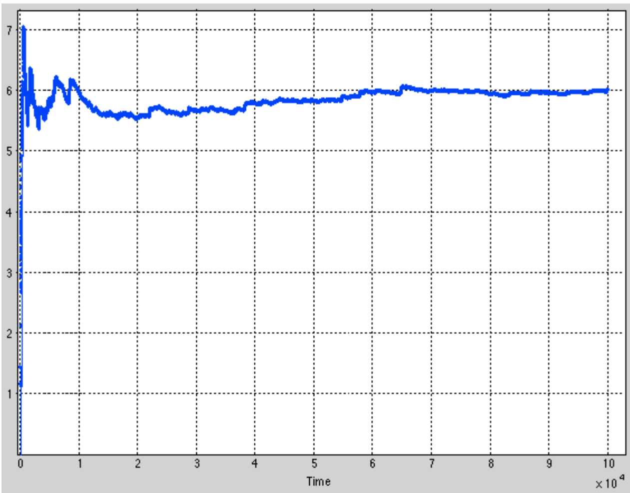
Tiempo simulación	Tiempo medio entre llegadas	Tiempo medio de servicio	Número de servidores	Número de colas
100000 mins	3 min	2 min	1	1

De nuevo volvemos a simular durante 100000 minutos que es un tiempo suficiente para que el sistema sea estacionario.

Tras realizar la simulación obtenemos un **tiempo medio de espera en cola** de **4,011** minutos y la siguiente gráfica:



También obtenemos un **tiempo de estancia medio en el sistema** de **6,016** minutos y la siguiente gráfica para este tiempo:



Para calcular la probabilidad de que un cliente deba esperar más de 10 minutos de nuevo haremos uso del módulo **to workspace** y del método que se explicó en el caso anterior. La **probabilidad** obtenida es de **0,1556**.

Resultados obtenidos teóricamente.

Tenemos un sistema M/M/1 con tasa de llegada $\lambda = 1/3$ y tasa de salida $\mu = 1/2$. Por tanto, la utilización $\rho = \lambda /(m\cdot \mu)=2/3$.

Sabemos que el retardo medio total viene dado por:

$$T = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

Si sustituimos los valores correspondientes obtenemos que el **retardo medio total** será de **6** minutos.

El tiempo medio de espera en cola podemos calcularlo con la siguiente expresión:

$$W = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \rho \cdot T$$

De esta forma obtenemos que el **tiempo medio de espera en cola** es de **4** minutos.

La **probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos** se calcula realizando la siguiente integral:

$$P_{T>10} = \int_{10}^{\infty} (\mu - \lambda) \cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot\tau} d\tau$$

El valor teórico que obtenemos para dicha probabilidad es de **0,189** minutos.

Conclusiones:

La siguiente tabla recopila todos los datos que hemos obtenido de forma experimental realizando las simulaciones:

Opción 1			Opción 2			Opción 3		
Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins	Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins	Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins
2,557	8,522	0,2983	12,14	18,32	0,5456	4,011	6,016	0,1556

A continuación se muestran los datos que se han calculado de forma teórica para cada una de las opciones:

Opción 1			Opción 2			Opción 3		
Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins	Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins	Tiempo medio espera en cola	Tiempo medio en el sistema	Probabilidad esperar más de 10 mins
2,666	8,667		12	18	0,574	4	6	0,189

Si analizamos los datos que se han obtenido tras el estudio atendiendo al tiempo medio de espera en cola el mejor sistema es el correspondiente a la **opción 1**. En cambio, si queremos que el tiempo medio que tardan los clientes en ser atendidos el mejor será la **opción 3**. Pensamos que el tercer modelo es el que haría que los clientes quedaran más satisfechos, pues, aunque tendrían que esperar en media más que en la opción 1, el tiempo total que tendrían que esperar sería menos, asi que la opción de una sola cola y un empleado más experimentado es la más eficiente.

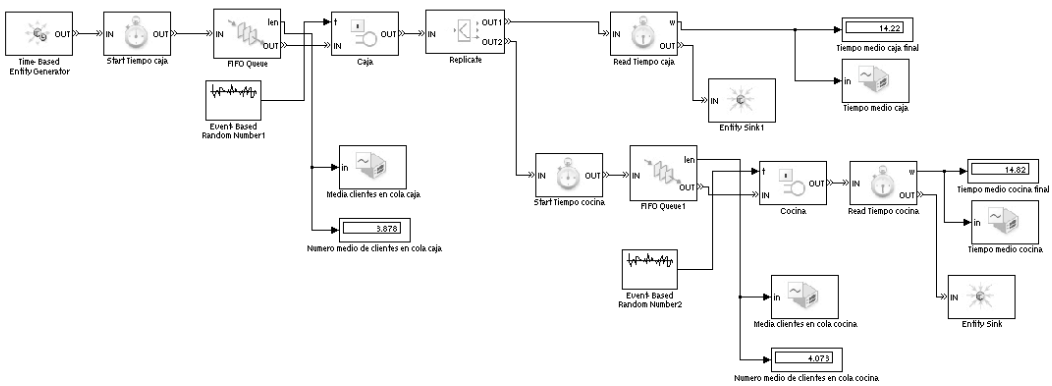
Por otra parte, podemos comprobar que los datos obtenidos mediante la simulación se ajustan de manera fiable a los que se han calculado de forma teórica.

Apartado 2.-

Se nos pide que se modele un sistema en el que los clientes, tras pagar en caja, deben esperar a que los empleados de cocina preparen los menús solicitados. Basándose en este sistema tendremos que calcular el tiempo medio que espera un cliente desde que entra en el restaurante hasta que recibe su menú, así como el número medio de clientes que esperan para pasar a caja y para recoger su menú. Además, se nos pregunta si es justificable suponer que ambos sistemas de colas son mútuamente independientes.

Simulación.

Para la simulación usaremos el siguiente modelo de simulink:

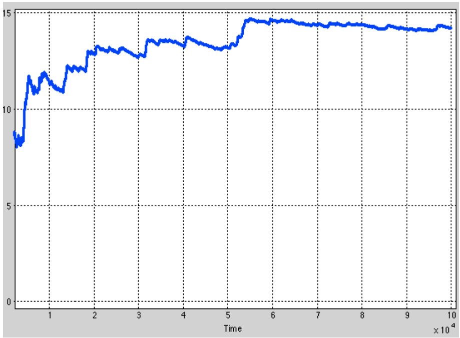


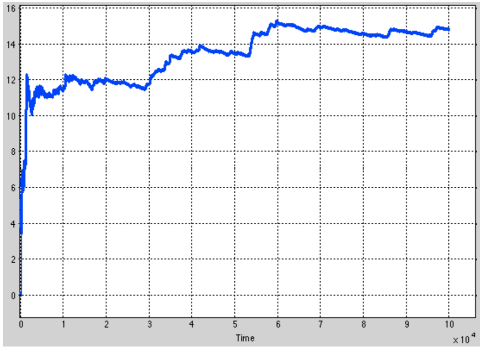
Para realizar la simulación usaremos los siguientes:

Tiempo simulación	Tiempo medio entre llegadas (cajas)	Tiempo medio de servicio (cajas)	Tiempo medio de servicio (cocina)
100000 mins	3 mins	2,5 mins	2,5 mins

Para calcular el tiempo medio de espera total en el sistema tendremos que sumar los datos que nos ofrecen los displays de la caja y de la cocina. El tiempo medio de espera en la caja es de 14,22 minutos y el de espera en la cocina es de 14,82 minutos. Por tanto, el **tiempo medio de espera total** es de **29,04** minutos.

La simulación nos muestra la siguientes gráficas para el tiempo medio de espera:



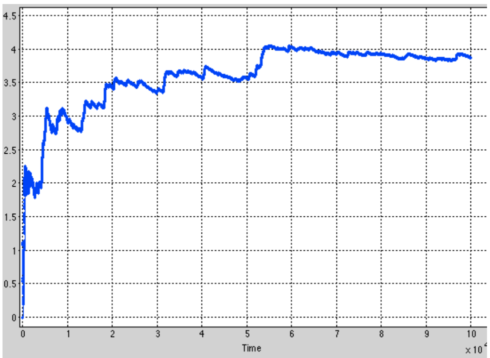


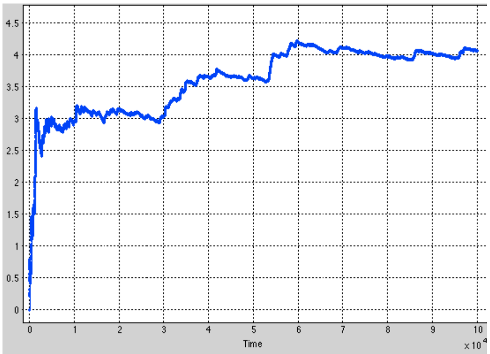
Tiempo medio espera en caja

Tiempo medio espera en cocina

En la simulación además también podemos observar que el **número medio de clientes en espera para pasar a la caja** es de **3,878** y que el **número medio de clientes en espera de su menú** es de **4,073**.

Las siguientes gráficas muestran el número medio de clientes en espera para la caja y la cocina:





Caja Cocina

Resultados obtenidos teóricamente.

Para calcular el retardo medio total descompondremos el sistema total en dos subsistemas M/M/1 de forma que calcularemos por separado el retardo de cada uno de ellos y posteriormente sumaremos ambos retardos para hallar el total. Además, sabemos gracias al teorema de **Burke** que la tasa de salida del primer sistema (el de la caja) será igual a la tasa de entrada del mismo. De esta forma, tenemos que ambos subsistemas se comportan de manera idéntica y por tanto, tendrán un retardo medio parcial idéntico.

Los datos que tenemos son los siguientes: $\lambda_1=\lambda_2=1/3$; $\mu_1=\mu_2=1/2{,}5$.

Para un sistema M/M/1 el retardo medio viene dado por la expresión:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sustituyendo ambas tasas tenemos que el retardo de cada uno de los subsistemas es de **14,99** minutos y que, por tanto, el **tiempo medio que espera un cliente desde que entra en el restaurante hasta que recibe su menú** es de aproximadamente **30** minutos.

De igual manera que ocurre con el retardo, el número medio de clientes que espera en cola será el mismo para ambos subsistemas y viene dado por el teorema de Little:

$$N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Asi, el **número medio de clientes que espera en cada una de las colas** es **4,167** clientes.

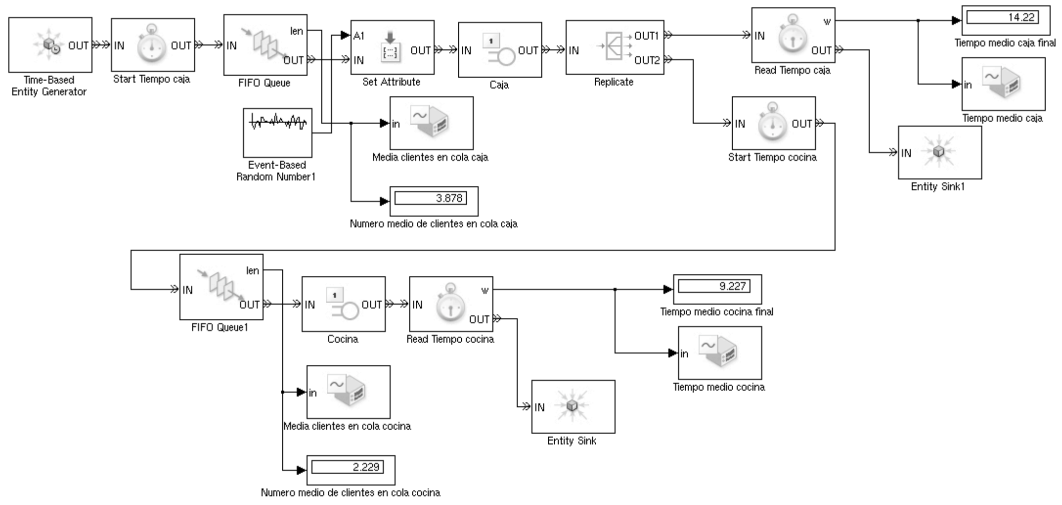
Conclusiones:

Ambos sistemas de colas se pueden suponer mutuamente independientes ya que ambos se comportan por separado como dos sistemas M/M/1 independientes con **tasa de llegada λ** será de **1/3** y **tasa de servicio μ** será de **1/2,5**. Esto viene refrendado por el teorema de Jackson.

Apartado 3.-

Se nos pide repetir el apartado 2 pero suponiendo que el tiempo que tardan los empleados en preparar el menú de un cliente es exactamente igual al tiempo que tardó el empleado de la caja en atender a ese mismo cliente. Para ello, modificaremos ligeramente el modelo de simulación anterior y usaremos un sistema de etiquetado mediante atributos para cada uno de los clientes de forma que ambos tiempos sean iguales.

El modelo usado para simulink es el siguiente:

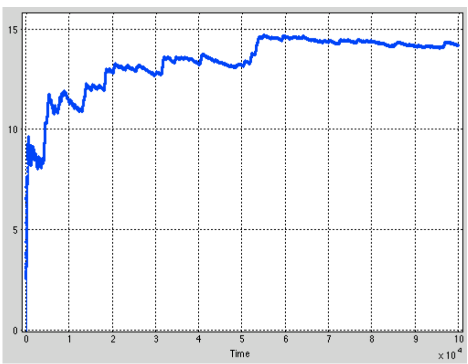


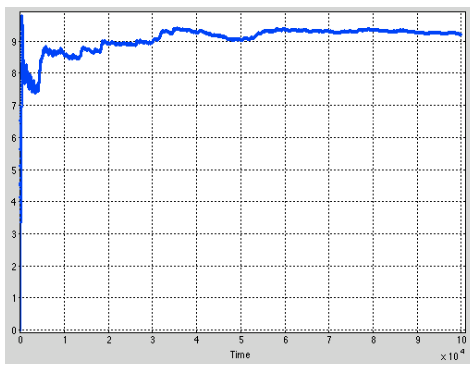
Para realizar la simulación usaremos los siguientes:

Tiempo simulación	Tiempo medio entre llegadas (cajas)	Tiempo medio de servicio (cajas y cocina)
100000 mins	3 mins	2,5 mins

De nuevo el tiempo medio total que espera un cliente lo calcularemos sumando los tiempos medios de la caja y de la cocina. De esta forma, el **tiempo medio que espera un cliente desde que entra al restaurante hasta que recibe el menú** es de **23,44** minutos.

La simulación nos muestra la siguientes gráficas para el tiempo medio de espera:

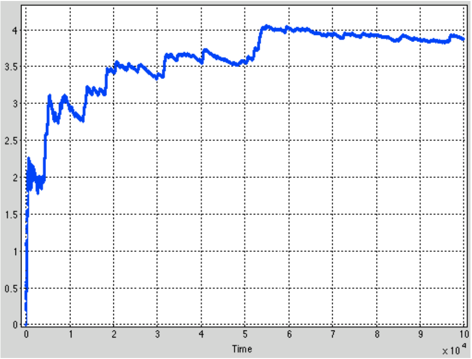




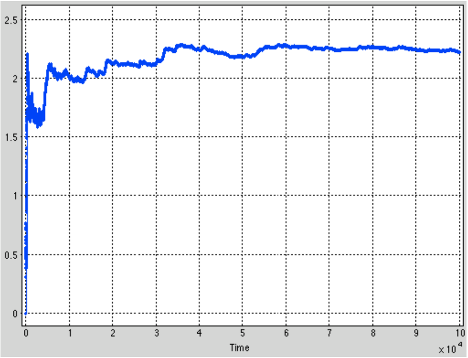
Tiempo medio espera en caja Tiempo medio espera en cocina

De nuevo observamos que el **número medio de clientes en espera para pasar a la caja** es de **3,878** y que el **número medio de clientes en espera de su menú** es de **2,229**.

Las siguientes gráficas muestran el número medio de clientes en espera para la caja y la cocina:



Caja



Cocina

Resultados obtenidos teóricamente.

En este caso, los resultados obtenidos en el apartado anterior no son válidos ya que, ahora si, el segundo subsistema depende del primero. Debido a ésto tendremos que recalcular el tiempo medio de espera y el número medio de clientes en cola para el segundo de los subsistemas (la cocina).

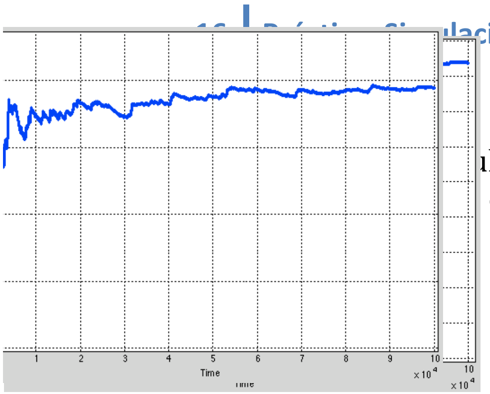
Conclusiones:

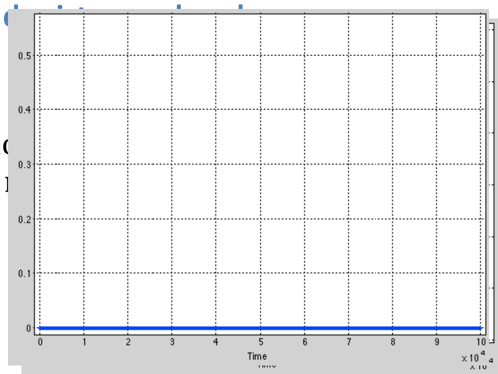
Podemos comprobar que tanto el tiempo medio que espera un cliente, el tiempo que un cliente espera para recibir su menú y el número medio clientes que esperan en la cola de la cocina se reducen con respecto al apartado 2. En cambio, el tiempo de espera para la cola de la caja y el número medio de clientes en la cola de la caja permanecen inalterados debido a que en realidad es el mismo caso que el del apartado 2.

Podemos deducir observando lo anterior que en este modelo los dos sistemas no son independientes ya que el tiempo de servicio de la cocina depende del tiempo de servicio de la caja.

Apartado opcional.-

El apartado opcional hay que hacerlo sólo una vez ya que al ser el tiempo empleado por los operarios constante el apartado 2 y 3 son idénticos. El modelo y parámetros de simulación son los mismos que los usados anteriormente con la salvedad del cambio de distribución exponencial por el de una constante de media 2,5. Para la simulación usaremos por tanto un sistema M/D/1 y D/D/1.





ulacio … **total** es de **10,891**
del … ina son:

Tiempo medio espera en caja Tiempo medio espera en cocina

Como vemos, el tiempo medio de espera para la cocina permanece constante durante toda la simulación a 2,5 minutos.

En cuanto al **número medio de clientes que esperan en la cola de la caja** es de **1,948** y **para la cocina** es de **0** clientes.

Las siguientes gráficas muestran el número medio de clientes en espera para la caja y la cocina:

Caja Cocina

Hay que destacar que el número medio de clientes que esperan para la cocina es 0. Por tanto, el sistema de la cocina no introduce ningún retardo a parte del tiempo que tardan los empleados de la cocina en preparar el menú (2,5 minutos).

Conclusiones:

Vemos que al hacer que los tiempos de servicio sean constantes hacemos que la tasa de llegada al sistema que modela la cocina sea siempre menor o igual que la tasa de salida del mismo (2,5 constante). De esta forma, el sistema de la cocina no tendrá ningún cliente en cola y el tiempo total que tardan en la cocina será 2,5 siempre.