PROVA II DE MATEMÁTICA DISCRETA

KAILANE EDUARDA FELIX DA SILVA | 125.769.454-57

1)
$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 2 \\ L_2 &= 1 \\ L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \end{aligned}\right\} n>2$$

$\boxed{* \text{ Base } n=3}$

$\ell_{4 \cdot 3+3} = \ell_{15}$ //

$\ell_{15} = 843$ //

$\frac{843}{3} = 281$ //

É (V) para base n=3 //

$\ell_3 = 1+2 = 3$ $\ell_5 = 4+3 = 7$ $\ell_7 = 7+11 = 18$ $\ell_9 = 29+18 = 47$

$\ell_4 = 3+1 = 4$ $\ell_6 = 7+4 = 11$ $\ell_8 = 18+11 = 29$ $\ell_{10} = 47+29 = 76$

$\ell_{11} = 76+47 = 123$ $\ell_{12} = 123+76 = 199$ $\ell_{13} = 322$, $\ell_{14} = 521$ $\boxed{\ell_{15} = 843}$

* PASSO INDUTIVO:

HIPÓTESE INDUTIVA: É (V) para n

TESE: PROVAR P/ n+1.

Sabemos que se $a|b+c$, $a|b \wedge a|c$.

1. $3/L_{4n+3} \rightarrow 3/L_{4n+2} \wedge 3/L_{4n+1}$
2. $3/L_{4n+3} \wedge 3/L_{4n+2} \rightarrow 3/L_{4n+4}$
3. $3/L_{4n+4} \wedge 3/L_{4n+3} \rightarrow 3/L_{4n+5}$
4. $3/L_{4n+5} \wedge 3/L_{4n+4} \rightarrow 3/L_{4n+6}$
5. $3/L_{4n+6} \wedge 3/L_{4n+5} \rightarrow \boxed{3|L_{4n+7}}$

PROVADO QUE 3 É DIVISOR DO TERMO L_{4n+7} //

2) a) $M(97) = M(M(108))$

$M(M(n+11))$, $n \leq 100$

$\boxed{M(102) = 92 \text{ (pois } n>100)}$

$M(98) = M(M(109))$

$M(99) = M(M(110))$

$\Downarrow$

$M(100)$

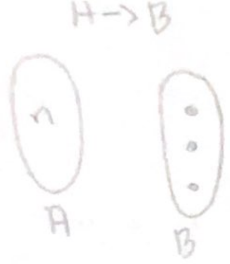
$M(M(111))$

$\boxed{M(101) = 91}$ //

b) FUNÇÃO M(n) //

```
IF (n>100) {
 return (n-10) }
ELSE IF (n≤100)
 return (M(n+11))
```

3) a)



como não especificamos se a função deve ser injetora, temos que os elementos de A, pelo princípio da multiplicação, podemos dizer que a quantidade de funções A->B corresponde a $\underline{\underline{3^n}}$.

b) Para que A->B seja injetora, cada elemento do domínio tem apenas 1 imagem. Logo, é possível formar funções injetoras apenas quando $n \leq 3$.

No caso de $n \leq 3$, a quantidade de funções injetoras é =>

$|A| = 1$, a quantidade é 3//

$|A| = 2$, a quantidade $3 \cdot 2 = 6$//

$|A| = 3$, a quantidade $= 3! = 6$//

c) 3^{n-2}, por que o elemento 1 e o elemento n são fixos no elemento 2 do conjunto B. Mas os outros elementos (n-2) podem corresponder aos 3 elementos de B (0,1 ou 2).

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdots \frac{1}{n} \Rightarrow 3^{n-2}$$ //

4) a) através da identidade de pascal $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$

Temos que provar que $\binom{n+3}{k}$ é igual a $\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$//

desenvolvendo...

$$\binom{n+3}{k} = \binom{n+2}{k-1} + \binom{n+2}{k}$$

$$= \binom{n+1}{k-2} + \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k}$$

$$= \binom{n+1}{k-2} + 2\binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k}$$

$$= \binom{n}{k-3} + \binom{n}{k-2} + 2\left(\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1}\right) + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-2} + 3\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-3}$$

4b) argumento combinatório:

O lado esquerdo conta subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho $n+3$. Seja T um conjunto arbitrário de forma que $|T| = n+3$, $|T_1| = n$ e $|T_2| = 3$ (dividindo T em T_1 e T_2). Fazendo a união $T_1 \cup T_2 = T$ e a intersecção $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

as combinações possíveis serão:

1. Pegar k elementos de T_1 e nenhum de T_2 $\binom{n}{k} \cdot \binom{3}{0}$
2. ou, k-1 elementos de T_1 e 1 de T_2 $\binom{n}{k-1} \cdot \binom{3}{1}$
3. ou, k-2 elementos de T_1 e 2 de T_2 $\binom{n}{k-2} \cdot \binom{3}{2}$
4. ou, k-3 elementos de T_1 e T_2 $\binom{n}{k-3} \binom{3}{3}$

Logo, somando os coeficientes binomiais correspondentes =>

$$\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3} \;//$$

5) Pelo teorema binomial => $(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \dots \binom{n}{n} x^0 a^n$

Sendo assim, podemos fazer $4 = 3+1$; $x = 3$ e $a = 1$.

então: $4^n = (3+1)^n$

$$(3+1)^n = \binom{n}{0} 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} \cdot 1^2 \dots \binom{n}{n} \cdot 3^0 \cdot 1^n$$

⇓ como, 1^k é 1 para qualquer k ...

$$\boxed{\begin{aligned} 4^n &= \sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \\ 4^n &= 3^k \cdot \binom{n}{k} \end{aligned}}$$

corresponde ao somatório //

a) (I) Divisível por 2 = 499.999
(II) Divisível por 3 = 333.333
(III) Divisível por 5 = 199999
(IV) Por 5 e por 2 = 99 999
(V) Por 5, 3 e 2 = 33.333
(VI) Por 2 e 3 = 166 666
(VII) Por 3 e 5 = 6666

Pelo teorema da inclusão exclusão, temos que:

(I) ∪ (II) ∪ (III) − (VI) − (VII) − (IV) + (V)

1033331 − 166666 − 66666 − 99999 + 33.333 = 733.333 //

b) Divisíveis por 3 − Div. por 3 ∪ Div. por 7

333 333 − 47619 = $\boxed{285714}$

* por 3 e por 7 = 47619

6/1

a) Pelo princípio da casa dos pombos, para garantir que ao menos 4 são da mesma cor, 7 chocolates devem ser pegos //

b) Se os 11 primeiros forem pretos, os 3 seguintes serão brancos. Logo 14 deverão ser pegos.

7 a) $a/c \wedge b/d$, então ab/cd

$b/d \Rightarrow b.n = d$

$a/c \Rightarrow a.m = c$

$amd = cd$

$ambn = cd$

$ab(mn) = cd \Rightarrow ab/cd$

b) • $-13 = 2(-7)+1$

$-13 \bmod 2 = 1$

• $-102 = 11(-10)+8$

$-102 \bmod 11 = 8$ //

c) I

mdc (87, 52) →
mdc (52, 35) →
mdc (35, 17) →
mdc (17, 1) →
mdc (1, 0)

* Combinação linear ⇒

$\boxed{52m + 87n = 1}$

Pelo algoritmo de Euclides, substituindo as equações do passo I

Temos:

$\boxed{3 \cdot 87 - 5 \cdot 52}$ //

7.d) $a = 2k+1$

$a+2 = 2k+3$

$mdc(2k+3,\ 2k+1) \rightarrow$

$mdc(2k+1,\ 2) \rightarrow$

$mdc(2,1)$

$mdc(1,0) = 1$ //

BÔNUS: Queremos provar que $3^n < n!$, para $n > 6$.

* Base:

$3^7 = 2187 < 7! = 5040$ (ok!)

* Passo indutivo:

queremos provar que $3^n < n!$ então $3^{n+1} < (n+1)!$

$3^{n+1} < (n+1)!$

$3 \cdot 3^n < (n+1)n!$

Nós sabemos que $3^n < n!$, então só precisamos mostrar que $3 < (n+1)$. Que é sempre verdade para $n > 6$ //