Funções

Gabarito

Questão 01

Seja $f: N \ -> \ N$ uma função tal que $f(x) \ = \ piso(x/3)$. f é injetora?

Sabemos que a função piso de x retorna o maior inteiro que é menor ou igual a x e que numa função injetora nenhum elemento do contradomínio é imagem de 2 elementos distintos do domínio. Portanto, para provar que $f(x)$ não é injetora, basta encontrar um contraexemplo:

$x \ = \ 3 \ \rightarrow f(x) \ = \ piso(\frac{3}{3}) \ = \ piso(1) \ = 1$

$x \ = \ 5 \ \rightarrow f(x) \ = \ piso(\frac{5}{3}) \ = \ 1$

Assim, provamos que $f(x)$ não é injetora, pois para dois valores distintos de x ($x \ = \ 3$ e $x \ = \ 5$), obtemos o mesmo valor de $f(x)$, que no caso é 1.

Questão 02

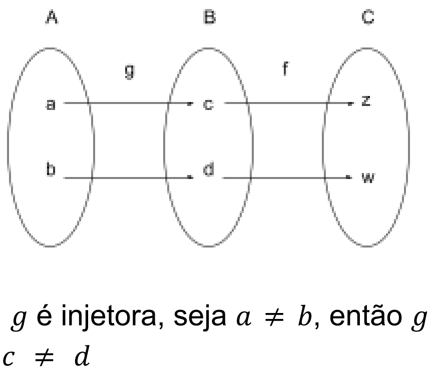
Se f é uma função de N em R, é possível afirmar que f não é bijetora?

É possível sim afirmar que f não é bijetora, pois, segundo o Argumento da Diagonalização de Cantor, o conjunto dos números reais é não enumerável, o que, por definição, significa dizer que não é possível construir uma bijeção entre tal conjunto e o conjunto dos números naturais.

Questão 03

A composição de duas funções injetoras é injetora. Prove ou refute.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $a \wedge b \in A$, $c \wedge d \in B$ e $z \wedge w \in C$, de modo que:



Como, segundo o enunciado, g é injetora, seja $a \ \neq \ b$, então $g(a) \ \neq \ g(b)$. Sabendo que $g(a) \ = \ c$ e $g(b) \ = \ d$, logo $c \ \neq \ d$

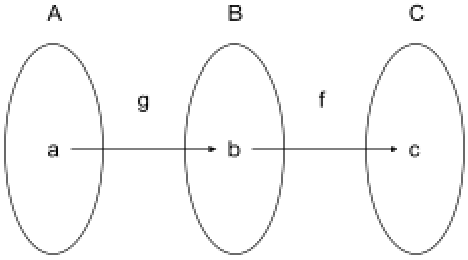
Assim, sabendo que f também é injetora e, como mostrado acima, $c \ \neq \ d$, podemos concluir que $f(c) \ \neq \ f(d)$

Então $f(g(a)) \ \neq \ f(g(b)) \ \rightarrow \ fog$ é injetora

Questão 04

A composição de duas funções sobrejetoras é sobrejetora. Prove ou refute.

Sendo f e g duas funções sobrejetoras, tais que:

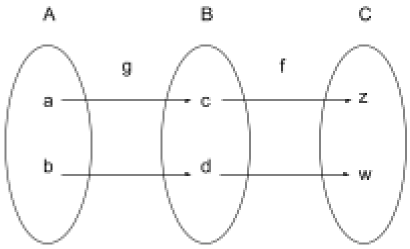


Se f é sobrejetora, então $\forall c\ \exists b\ (c \in C \wedge b \in B \mid f(b) = c)$
Da mesma forma, se g é sobrejetora, então $\forall b\ \exists a\ (b \in B \wedge a \in A \mid g(a) = b)$
Então, $\forall a\ \exists c\ (c \in C \wedge a \in A \mid f(g(a)) = c)$
Como o conjunto imagem de $g \subseteq dom\, f$, então fog é sobrejetora.

Questão 05

A composição de duas funções bijetoras é bijetora. Prove ou refute. (Dica: use os resultados das questões anteriores)

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $a \wedge b \in A$, $c \wedge d \in B$ e $z \wedge w \in C$, de modo que:



Para provar que uma função é bijetora, precisamos mostrar que ela é injetora e sobrejetora.

Como, segundo o enunciado, g é bijetora, ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.
Com isso, seja $a \neq b$, então $g(a) \neq g(b)$. Sabendo que $g(a) = c$ e $g(b) = d$, logo $c \neq d$
Assim, sabendo que f também é bijetora e, como mostrado acima, $c \neq d$, podemos concluir que $f(c) \neq f(d)$
Então $f(g(a)) \neq f(g(b)) \rightarrow fog$ é injetora

Se f é sobrejetora, então $\forall z\ \exists c\ (z \in C \wedge c \in B \mid f(c) = z)$
Da mesma forma, se g é sobrejetora, então $\forall c\ \exists a\ (c \in B \wedge a \in A \mid g(a) = c)$
Então, $\forall a\ \exists z\ (z \in C \wedge a \in A \mid f(g(a)) = z)$
Como o conjunto imagem de $g \subseteq dom\, f$, então fog é sobrejetora.

Assim, provamos que se f e g são bijetoras, então fog é sobrejetora e injetora, logo, bijetora.

Questão 06

Seja f uma função de A em B. O que podemos dizer acerca da cardinalidade dos conjuntos A e B, se:

a) f é injetora? Se f é injetora, então nenhum elemento do contradomínio é imagem de 2 elementos distintos do domínio. Assim, sendo A o domínio e B o contradomínio, $|A| \leq |B|$
b) f é sobrejetora? Se f é sobrejetora, então todos os elementos do contradomínio estão relacionados a elementos do domínio. Assim, sendo A o domínio e B o contradomínio, $|A| \geq |B|$
c) f é bijetora? A e B têm a mesma cardinalidade, já que numa função bijetora cada elemento do domínio está associado a um único elemento da imagem, e vice-versa.