RELAÇÕES

--> exemplo:

- Seja S um conjunto de pessoas
- Digamos que queremos pares ordenados de S×S de modo que os nomes do par comecem com a mesma letra.
- Esse subconjunto de S×S chamamos de relação binária sobre S.

S = {mara, maria, joão, Ana, Anjol., Alfredo, oto} ∈ S×S = $\{(x,y) \mid x \in S \wedge y \in S\}$

R_1 = {(mara, maria), (maria, mara), (Alfredo, Ana), (Ana, Alfredo)...}

$R_1 \subseteq S \times S$ --> subconjunto.

- Notações:

R = {(x, y) | x e y ∈ S e x e y começam com a mesma letra};

R = x R y ↔ x, y ∈ S e x e y começam com a mesma letra};

exemplo: seja S = {1, 2, 3}, liste os elementos das seguintes relações binárias:

1) $x R_1 y \leftrightarrow x = y$

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

2) $x R_2 y \leftrightarrow x < y$

$R_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

* DEFINIÇÃO: uma relação binária em S é um subconjunto de S×S. Assim como, uma relação binária de S para T é um subconjunto de S×T.

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots A_n$ --> tuplas de tam n

* uma função pode ser vista como um tipo especial de relação.

↳ uma função $f: A \to B$ é um subconjunto de A×B onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez como componente do par ordenado.

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES: --> binárias

1) Relação reflexiva: R em A:

$\forall a \in A \to (a,a) \in R$

exemplo: A = {1, 2, 3}

R.R = {(1,1), (2,2), (3,3)}

2) Relação simétrica: R em A

$(a,b) \in R \to (b,a) \in R$, p/ $a, b \in A$

exemplo: A = {1, 2, 3}

$R_1 = \{(1,1)\}$, $R_2 = \{(2,1), (1,2)\}$

$R_3 = \{(\emptyset)\}$ --> por vacuidade

3) Relação anti-simétrica

$(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ somente quando $a = b$, para a e b ∈ A.

associar com a relação de ≤, pois se x≤y e y≤x, então x=y.

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$; $R_2 = \emptyset$

* ~~que~~ Relações podem ser simétricas e anti-simétricas ao mesmo tempo.

não são o oposto uma da outra

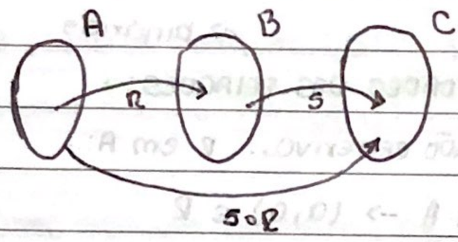
④ Relação Transitiva

$(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

exemplo: $A = \{1,2,3\}$

$R_1 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$; $R_2 = \emptyset$

Combinando relações

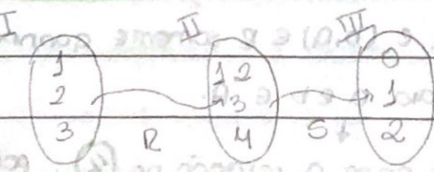


a composta SoR é a relação que consiste nos pares ordenados (a,c), tal que $\exists b$ tal que $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S$. $SoR \subseteq A \times C$.

exemplo: Encontre SoR. Onde R é uma relação de $\{1,2,3\}$ em $\{1,2,3,4\}$ e S é uma relação de $\{1,2,3,4\}$ em $\{0,1,2\}$.

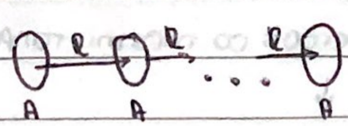
$R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$

$S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$



$SoR = \{(1,0),(1,1),(2,1),(3,0),(3,1)$
$(2,2)\}$

Potências de uma relação:



$\rightarrow RoRoR\ldots$

$R^1 = R \rightarrow R^{n+1} = R^n \circ R$ $(R^4 = R^3 \circ R)$

exemplo: seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$

encontre as potências R^n, $n = 1,2,3\ldots$

$A = \{1,2,3,4\}$

$R^2 = RoR = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

$R^3 = R^2 o R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

$R^4 = R^3 o R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

└> com $n \geq 4$; $R^3 = R^4 = R^n$

* Teorema: Uma relação R sobre o conjunto A só é transitiva se somente se $R^n \subseteq R$, para $n = 1,2,3\ldots$

Representação das relações

-> Usando matrizes:

① matriz de bits.

exemplo: $A = \{1,2,3\}$, e $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

podemos representar:

	1	2	3
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	1	1

⤳ matriz de bits.

onde $a_{ij} = 1$ quando $(i,j) \in R$ e $a_{ij} = 0$ quando $(i,j) \notin R$.

Propriedades:

① R é reflexiva quando os elementos da diagonal principal são todos = 1,

② se $a_{ij} = 1 \rightarrow a_{ji} = 1$, para R ser simétrica ($M = M^T$)

③ Para $i \neq j$, se $a_{ij} = 1 \rightarrow a_{ji} = 0$

RELAÇÕES COMO MATRIZES:

A = {a, b, c}

R	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	0	0

S	a	b	c
a	0	1	0
b	0	0	1
c	1	0	1

e sabemos que são válidas as operações:

∨ (ou booleano)	∧ (e booleano)
0 ∨ 0 = 0	1 ∧ 1 = 1
0 ∨ 1 = 1	1 ∧ 0 = 0
1 ∨ 0 = 1	0 ∧ 1 = 0
1 ∨ 1 = 0	0 ∧ 0 = 0
↓ ∪ (união)	↓ ∩ (intersecção)

R∪S	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	0	1

R∩S	a	b	c
a	0	0	0
b	0	0	0
c	0	0	0

A×A -> universo (todos os pares possíveis)

$\bar{R}$ = A×A − R (complemento.)

qual o matriz S∘R? Produto booleano:

$M_R \odot M_S$ -> multip = ∧ / soma = ∨.

S∘R	a	b	c
a	1	1	1
b	0	1	1
c	0	0	0

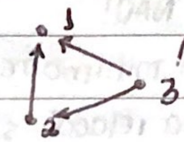
* S∘R = {(a,b), (a,c), (a,a), (b,b), (b,c)}

RELAÇÕES COMO DIGRAFOS:

A = {1, 2, 3}, B = {1, 2} e aRb <-> a>b

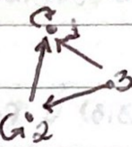
↳ R = {(2,1), (3,1), (3,2)}

como representar?



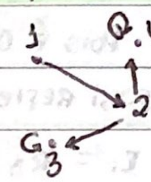
-> se relaciona com 1 e com 2.

Para aRb <-> a≥b =



laços ou loops => 1 <-> 1,,

exemplo (R em A): A = {1, 2, 3, 4}



qual a relação? R = {(1,2), (2,4), (4,4), (2,3), (3,3)}.

* Para R ser reflexiva, todos os nós devem ter loops.

* simétrica: se existe uma aresta de x para y -> existe de y para x.

* anti-simétrica: para x ≠ y, se existe uma aresta de x -> y, não pode existir de y -> x.

FECHOS REFLEXIVOS

$A = \{1,2,3\}$

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}$

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1)\}$

-> R_1 é reflexiva? NÃO!

-> Podemos completar minimamente de forma que a nova relação se torne reflexiva? SIM, adicionando (3,3).

> *quando adicionamos (3,3) a R_1, temos R_2 como resultado. Chamamos R_2 de "fecho reflexivo de R_1." Pois é o menor conjunto que contém R_1 e possui reflexão.

-> Respostas: o fecho de $R_1 = R_3$ ou $R_1 \cup (3,3)$; $R \cup \Delta$

Δ = relação diagonal em A (a,a)

FECHOS (GENÉRICOS)

O fecho de uma relação R com respeito a uma propriedade P é a menor relação que contém R e possui P.

Como podemos calcular o fecho?

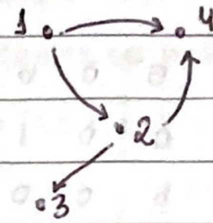
1. completar R minimamente
2. $\cap$ de todas as rel. que contém R e possuem P.

FECHO SIMÉTRICO

$R \cup R^{-1}$, exemplo: $R = \{(1,1),(2,3)\}$

$R^{-1} = \{(1,1),(3,2)\}$

CAMINHO EM UM DIGRAFO



1. caminhos de nó 1 para o nó 4:
   - (1,4)
   - (1,2),(2,4)

Teorema: seja R em A, existe um caminho de tamanho n de a p/ b se somente se $(a,b) \in R^n$.

exemplo: $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,2),(2,4),(2,3)\}$

$R^2 = R \circ R = \{(1,4),(1,3)\}$

↳ caminhos de tamanho 2 $\in R^2$.

Definição: R^* consiste nos pares (a,b) de forma que existe um caminho de a para b em R.

R^* de $R = \{(1,2),(2,3)\}$

$1 \to 2 \to 3$ $R^* = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

R^* => fecho transitivo de R.

* Teorema: seja a matriz de bits (M_R) que representa a relação R (n elementos) então o fecho transitivo:

$$\boxed{R^* \to M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \dots M_{R^n}}$$

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

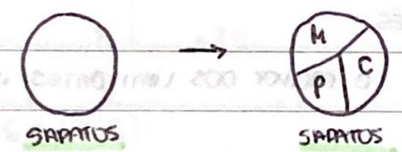
Uma relação de equivalência é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva ao mesmo tempo.

-> Partição de um conjunto: é a coleção de subconjuntos de modo que a união resulte no próprio conjunto e suas intersecções são vazias.

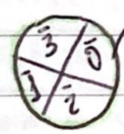
↓

Toda relação de equivalência cria uma partição no conjunto. A volta também é verdadeira.

exemplo: $R_1 = \{(x,y) \mid x \text{ e } y \in B \wedge x \text{ e } y$ possuem a mesma cor$\}$



* $R = \{(x,y) \mid x \equiv y \pmod 4\}$



-> classes de equivalência

$[0] = [4]$ representantes

Definição: Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O subconjunto de todos os elementos que se relacionam com a de A é chamado de classe de equivalência de a: $[a]_R$

$[a]_R = \{(a,s) \in R\}$ e qualquer elemento $b \in [a]_R$ pode ser representante da classe.

* As seguintes equivalências são válidas:

① se $a R b$:

$[a] = [b]$

$[a] \cap [b] \neq 0$

ORDENS PARCIAIS

É uma relação R em um conjunto S com as seguintes propriedades:

- reflexiva
- antissimétrica
- transitiva

exemplo: a relação $\leq$ no conjunto dos inteiros;

• conjunto parcialmente ordenado: é um conjunto S juntamente com uma ordem parcial R: (S,R)

exemplo: $(S,\leq)$ -> POSET.

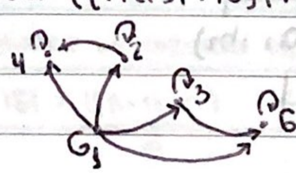
*OBS: "$\leq$" é uma notação genérica para ordens parciais. Em um POSET, $a \leq b$ significa que $(a,b) \in R$.

-> chamamos de ordens parciais porque nem todos os elementos do conjunto se relacionam entre si. São comparáveis se se relacionam e incomparáveis se não.

-> $a \leq b$ ou $b \leq b$ (relacionam)

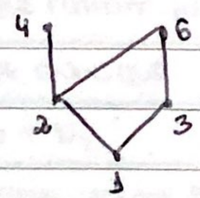
• Diagrama de Hasse:

POSET: $(\{1,2,3,4,6\}, |)$ em grafos:



completo

mais enxuto: sem loopings, com ordem e sem as setas de transitividade.



-> Hasse

CONJUNTO TOTALMENTE ORDENADO

• SE TODOS OS ELEMENTOS DO CONJUNTO SÃO COMPARÁVEIS (DIAGRAMA DE HASSE É UMA RETA), DIZEMOS QUE S É TOTALMENTE/LINEARMENTE ORDENADO E $\leq$ É UMA ORDEM TOTAL OU LINEAR. E O POSET É CHAMADO DE CADEIA.

ORDEM LEXICOGRÁFICA

$\Sigma = \{A, B, C, D \ldots Z\}$, $(\Sigma, \leq)$

ADA < ANA → (A, D, A) < (A, N, A)

↓ CADEIAS ↓ TUPLAS

ADA < ADAMASTOR →

|ADA| < |ADAMASTOR| (TAMANHO)

COMO CONSTRUIR UMA ORDEM PARCIAL DO PRODUTO CARTESIANO DE $(A, \leq_1)$ E $(B, \leq_2)$:

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

A ORDEM LEXICOGRÁFICA É DEFINIDA:

• SE $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ →

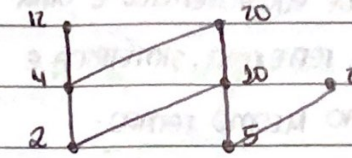
OU $a_1 \leq_1 a_2$
OU $a_1 = a_2$ E $b_1 \leq_2 b_2$

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$

$\leq_2$ (entre b_1 e b_2), $\leq_1$ (entre a_1 e a_2)

OS RELAÇÕES DOS DOIS POSETS PODEM SER DIFERENTES.

MAXIMAIS E MINIMAIS



ELEMENTOS MAXIMAIS: 12, 20, 25.
ELEMENTOS MINIMAIS: 2, 5

* QUANDO TEMOS APENAS 1 MINIMAL E/OU 1 MAXIMAL, DIZEMOS QUE ELE É O MENOR/MAIOR DO CONJUNTO.

LIMITANTES SUPERIORES E INFERIORES

→ É SOBRE UM SUBCONJUNTO DO POSET

• SUPREMO: O MENOR DOS LIMITANTES SUPERIORES

• ÍNFIMO: O MAIOR DOS LIMITANTES INFERIORES

(QUANDO EXISTEM SÃO ÚNICOS)