UFPE – Cin – Prova 2/ Matemática Discreta / Ciência da Computação – 2020.1 (23/03/2021)

1. (1,5) Use as identidades que estudamos para calcular:

> **a)** O valor de $\binom{m-1}{p}$ sabendo que $\binom{m-1}{p-1} = 10$ e $\binom{m}{m-p}$ = 55.
> **b)** O valor de *p* sabendo que $\binom{15}{p+3} = \binom{15}{2p}$

2. (2,5) Responda cada um dos itens abaixo justificando a sua resposta conforme pedido.

a) Se $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}$= 1023 então podemos concluir que n = 10? Prove ou refute usando argumento combinatório.

b) Quantos pares ordenados de números inteiros (a,b) são necessários para garantir que haja dois pares ordenados (a_1,b_1) e (a_2,b_2), tal que $\boldsymbol{a_1 \equiv b_1}$ ***(mod 7)*** e $\boldsymbol{a_2 \equiv b_2}$ ***(mod 7).*** Use o princípio da casa dos pombos para justificar a sua resposta.

c) Qual a quantidade de números múltiplos de 5, 6 ou 7 existe no conjunto de inteiros positivos menores ou iguais a 500? Use o princípio da inclusão-exclusão para justificar a sua resposta.

d) Aplique o princípio da inclusão-exclusão para determinar a cardinalidade do conjunto $|(A \cup C) - B|$ sabendo que $|A| = 50$, $|B| = 45$, $|C| = 40$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 23$ e $|A \cap B \cap C| = 12$.

e) Aplique o teorema binomial para encontrar o sexto termo na expansão de $(a+b)^n$ sabendo que o terceiro termo é igual $21a^5b^2$.

3. (1,5) Responda os seguintes itens justificando conforme pedido.
a) Usando as propriedades da aritmética modular calcule o resto de $(2050.2051.2053) + (2056)^3$ por 8.
b) Aplique o algoritmo de Euclides no cálculo do inverso ao solucionar o seguinte problema: encontre um número inteiro entre 70 e 80 de forma que se você multiplicá-lo por 7, adicionar 5 e dividir o resultado por 11 você encontrará um resto igual a 2.

4. (1,5) Aplique o pequeno Teorema de Fermat para responder os seguintes itens.

> **a)** Sabendo 385 = 5.7.11, mostre que $385|(200^{300} - 1)$.
> **b)** Sabendo que 59 é um número primo, encontre o resto de 3^{62} por 59.

5. (1,5) Expresse o seguinte problema usando uma equação diofantina e use os resultados da aritmética modular para encontrar a solução pedida. Temos 2 copos de medida, um com a capacidade de 13 ml e o outro com 20 ml. Precisamos medir exatamente 2 ml de água e temos apenas 200ml no máximo de água para gastar. Também não podemos usar os copos com medidas fracionárias. Temos uma bacia grande para colocar ou retirar a água de forma que possamos ficar com a medida pedida com a segurança de que a água não derrama. Será que podemos solucionar esse problema de duas formas diferentes, gastando no máximo 200ml de água? Se sim, mostre de que forma. (*Dica: explore os valores de k para tentar encontrar a solução pedida*)

6. (1,5) Suponha que ao realizar computação em paralelo definimos o par *(a mod 23, a mod 5, a mod 7)* para representar inteiros entre 0 e 804. Nessa representação, x corresponde à tupla (4,0,1) e y corresponde à tupla (4,2,6). Que tupla corresponde a x+y? Use o teorema chinês do resto para encontrar o inteiro dentro da faixa acima definida que corresponde a x+y.