

## ***Matemática Discreta***

**Semestre de 2020.3 - 2ª Prova - 29 de Setembro de 2020**

**Questão 1. (30 pontos)** Seja  $n$  um número inteiro não negativo. Use indução matemática para provar que 8 divide  $3^{2n} + 7$ .

**Questão 2. (40 pontos)** A sequência dos números de Lucas, denotados por  $l_n$ , é definida de forma semelhante à sequência de Fibonacci:  $l_0 = 2$ ,  $l_1 = 1$  e  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$  para  $n \geq 2$ . Use indução que para  $n \geq 0$  a seguinte identidade é verdadeira.

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2 = l_n \cdot l_{n+1} + 2$$

**Questão 3. (30 pontos)** Defina recursivamente:

- a) Um algoritmo que calcule o  $n$ -ésimo número de Lucas.
- b) O conjunto das cadeias binárias de tamanho par. (*dica* : você pode usar a operação de concatenação).
- c) A sequência  $a_n = 2^n - 2$  para  $n$  inteiro positivo.

**Questão 4. (40 pontos)** Prove as seguintes identidades justificando conforme pedido.

- a) Use argumento combinatório.

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + \binom{n}{1}^3$$

- b) Use a identidade de Pascal.

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+2}{r+1} - 2\binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}$$

**Questão 5. (30 pontos)** O Sincronário das 13 luas propõe um calendário diferente do Gregoriano. Ao invés de termos 12 meses irregulares, temos 13 luas (ou 13 meses) de 28 dias cada que totalizam 364 dias mais o dia fora do tempo (25 de Julho no calendário Gregoriano). Essa contagem se aproxima da natureza na medida em que cada mês está associado a uma lua. A primeira lua é chamada de *Lua Magnética do Morcego*, a segunda de *Lua Lunar do Escorpião*, a terceira de *Lua Elétrica do Veado*, a quarta de *Lua Autoexistente da Coruja*, etc.

- a) Qual o menor número de pessoas que podemos ter em um grupo para garantir que pelo menos 5 nasceram na mesma lua? Aplique o princípio da casa dos pombos para justificar a sua resposta.
- b) Nesse calendário a pessoa nascida num determinado dia possui o que se chama de *kin* que é definido por um tom e por um selo. Existem 13 tons (de 1 a 13) e 20 selos, por exemplo: *Tormenta*, *Sol*, *Dragão*, etc. Quantos diferentes *kins* existem nesse calendário?
- c) Queremos formar uma comissão com 8 pessoas. Sendo que a metade são mulheres que nasceram na mesma lua e a outra metade são homens que possuem o mesmo selo. Temos 22 mulheres que nasceram na lua Lunar Escorpião, 2 que nasceram na lua Elétrica do Veado e 15 que nasceram na Lua Autoexistente da Coruja. E, 21 homens nasceram no selo da Tormenta, 12 no do Dragão e 4 no do Sol. De quantas maneiras podemos formar essa comissão?

**Questão 6. (20 pontos)** Ao aplicar o teorema binomial na expansão de  $(a - b)^n$  notamos que a soma do nono e décimo termo é zero. Calcule o valor de  $\frac{a}{b}$  em função de  $n$ .

**Questão 7. (20 pontos)** Aplique o princípio da inclusão-exclusão para determinar quantos inteiros positivos menores que 1.000 são divisíveis por 2, 3 ou 5.