LISTA AULC - III
Kailane Eduarda Felix da Silva
CPF: 125.769.454-57

QUESTÃO I)

Pela definição dos vetores L.D no $\mathbb{R}^2$, temos que:

$(a,b) = x\,(c,d)\ ,\ x \neq 0.$

Além disso, pelas propriedades das determinantes, temos:

$$ad - bc = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Quando os dois vetores são linearmente dependentes, a determinante será nula, então teremos $ad - bc = 0$.

Então, se considerarmos o sistema linear

$ax + by = 0$
$cx + dy = 0$

sabemos que ele admite a solução trivial $y = x = 0$, mas para que seja possível e determinado, (i.e, apenas admitir a solução trivial) o determinante deve ser diferente de 0.

logo: se $ad - bc \neq 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.i //
se $ad - bc = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD //

QUESTÃO II)

$W_1 = \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ e } z-T=0\}$

$W_2 = \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+T=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$ //

a) Os elementos do subespaço dado por $W_1 \cap W_2$ precisam satisfazer as condições de ambos os conjuntos $(W_1 \text{ e } W_2)$, logo devem satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z-T=0 \\ x-y-z+T=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=T \\ x-y-z+T=0 \end{cases}$$

Então:

$y - y - T + T = 0$ → logo, concluímos que

$-2y = 0$ $\qquad W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0 \text{ e } z = T\}$ //

$y = 0$

b) Como $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,T) \in \mathbb{R}^4 \mid x=y=0 \text{ e } z=T\}$, podemos fazer:

$(x,y,z,T) = (0,0,T,T)$, logo $\{(0,0,1,1)\}$ é uma base de $W_1 \cap W_2$.

c) $W_1 = [(1,-1,0,0), (0,0,1,1)]$

$W_2 = [(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,-1)]$

$W_1 + W_2 = [(1,-1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0)]$

D) NÃO, POIS A INTERSECÇÃO DE W_1 COM W_2 NÃO É NULA.

$* \; W_1 \cap W_2 \neq 0$

e) Temos que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

logo,

$\dim(W_1 + W_2) = 2+3-1 = 4$, então $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ //

QUESTÃO 3) $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1)\}$

$\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

i) $(-1,1) = a(1,0) + b(0,1)$

$(1,1) = c(1,0) + d(0,1)$

$a = -1 \quad c = 1$

$b = 1 \quad d = 1$

$\Rightarrow$ $(-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1)$

$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$

Logo,

$$[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii)

$(1,0) = a(-1,1) + b(1,1)$

$(0,1) = c(-1,1) + d(1,1)$

$a = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $(1,0) = -\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(1,1)$

$(0,1) = \frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{2}(1,1)$

logo,

$$[I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

iii)

$(1,0) = a(\sqrt{3},1) + b(\sqrt{3},-1)$

$(0,1) = c(\sqrt{3},1) + d(\sqrt{3},-1)$

$a = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad c = 1/2$

$b = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad D = -1/2$

$\Rightarrow$ $(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3},1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3},-1)$

$(0,1) = \frac{1}{2}(\sqrt{3},1) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

Logo,

$$[I]_{\beta_2}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -1/2 \end{bmatrix}$$

iv) $(1,0) = a(2,0) + b(0,2)$

$(0,1) = c(2,0) + d(0,2)$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad c = 0$ $\quad \Rightarrow \quad (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(0,2)$

$b = 0$ $\quad d = 1/2$ $\quad (0,1) = 0(2,0) + \frac{1}{2}(0,2)$

logo,

$$[I]^{B}_{B_3} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 4) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que

a)
$$\begin{cases} T(1,0,0) = (2,0) \\ T(0,1,0) = (1,1) \\ T(0,0,1) = (0,-1) \end{cases}$$

Todos os vetores do domínio de T podem ser formados a partir da combinação linear das bases, portanto:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

aplicando a transformação linear dos dois lados, temos:

$$T(x,y,z) = T(x(1,0,0)) + T(y(0,1,0)) + T(z(0,0,1))$$

usando as propriedades de transformação linear:

$$T(x,y,z) = x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1)$$

substituindo os dados $\to$

$$T(x,y,z) = x(2,0) + y(1,1) + z(0,-1)$$

logo, $T(x,y,z) = (2x+y, y-z)$ //

b) $T(v) = (3,2)$

$$\begin{cases} 2x+y = 3 \\ y-z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = y-2 \\ z-2 = 1-2x \\ y = 3-2x \end{matrix} \Rightarrow \boxed{v = (x, 3-2x, 1-2x)}$$

//

QUESTÃO 5)

a) $\alpha = \{(1,-1),(0,2)$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$

$\downarrow$ base $\mathbb{R}^2$ $\quad\quad$ $\downarrow$ Base $\mathbb{R}^3$

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$[v]_\alpha = (x,y)_\alpha \rightarrow (x,y)_\alpha = a(1,-1) + b(0,2) \rightarrow (x,y) = (a, -a+2b)$

com $a = x$, temos $-a+2b = y$ e $b = \frac{x+y}{2}$.

logo $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$

E $[v]_\beta \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix} \rightarrow [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3x+y}{2} \\ \frac{-x-y}{2} \end{bmatrix}$$

fazendo a transformação linear:

$$T(v) = x(1,0,-1) + \frac{3x+y}{2} \cdot (0,1,2) + \frac{-x-y}{2}(1,2,0)$$

$$T(v) = \left[\left(\frac{x-y}{2}\right), \left(\frac{x-y}{2}\right), (2x+y)\right] //$$

b) $S(1,-1) = [2(-1), 1-(-1), 1] \rightarrow S(1,-1) = (-2,2,1)$

E $S(0,2) = [2(2), 0-(2), 0] \rightarrow S(0,2) = (4,-2,0)$

Temos os vetores $(-2,2,1)$ e $(4,-2,0)$

aplicando o vetor $(-2,2,1)$ na base β:

$(-2,2,1) = a(1,0,-1) + b(0,1,2) + c(1,2,0)$

$(-2,2,1) = (a+c, b+2c, -a+2b) \rightarrow a+c = -2$, $b+2c = 2$ e $-a+2b = 1$

Então:

$a = 2b-1 \rightarrow 2b-1+c = -2$, mas $b+2c = 2$, logo $2(2-2c)-1+c = -2$

Portanto, substituindo os valores nas equações encontramos:

$a = -11/3$, $b = -4/3$ e $c = 5/3$

Continuação letra b)

Para o vetor $(4,-2,0)$, temos:

$(4,-2,0) = d(1,0,-1) + e(0,1,2) + F(1,2,0) \to$

$(4,-2,0) = (d+F,\ e+2F,\ -d+2e)$

Logo, encontramos:

$$\begin{cases} d+F = 4 \\ e+2F = -2 \\ -d+2e = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad d = 20/3 \quad e = 10/3 \quad F = -8/3$$

resolvendo o sistema

a matriz $[S]^{\alpha}_{\beta} \Rightarrow$

$$[S]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/3 & 20/3 \\ -4/3 & 10/3 \\ 5/3 & -8/3 \end{bmatrix}$$

que equivale a forma:

$$[S]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -11 & 20 \\ -4 & 10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} //$$

c) achar uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a partir dos resultados do item a)

Temos:

$(x,y) = (a, -a+2b) \to -a+2b = y$ e $b = \frac{x+y}{2}$

Então o vetor v na base $\alpha \to$

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}.$$

* encontrando $[v]_{\gamma} \Rightarrow$

$$[v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix} \to [v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$$

aplicando a transformação:

$$T(v) = x(1,0,0) + 0(1,1,0) + \left(\frac{x+y}{2}\right)(0,0,1)$$

$$T(v) = \left[x,\ 0,\ \frac{x+y}{2}\right]$$

aplicando na base α = $T(1,-1) = (1,0,0)$ e $T(0,2) = (0,0,1)$

Nesse caso, podemos fazer

$$(1,0,0) = a_1(1,0,0) + b_1(0,1,0) + c_1(0,0,1)$$
$$(0,0,1) = a_2(1,0,0) + b_2(0,1,0) + c_2(0,0,1)$$

e encontramos $a_1 = 1$ e $c_2 = 1$, com $b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = 0$ //

Então, podemos considerar

$$\gamma = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) //$$