UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - ÁREA 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

II LISTA DE EXERCÍCIOS

Professora: Rúbia Esterfânia

2020.2

Questão 1. Utilizando **definição de função contínua**, mostre que a função:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $p = 1$;

(b) $g(x) = x + 2$ é contínua em $p = 0$;

(c) $g(x) = x^2 + x$ é contínua em $p = 1$;

Questão 2. Quais das funções definidas abaixo, são contínuas em $p = 3$? Justifique.

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \tag{1}$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \neq 3 \\ 7 & = 3 \end{cases} \tag{2}$$

(c)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \neq 3 \\ 6 & = 3 \end{cases} \tag{3}$$

Questão 3. A função:

$$h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2x + 1}} \tag{4}$$

é contínua em $p = 2$?

Dica: Use as propriedades de funções contínuas

Questão 4. Dada a função g(x), definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + c & \leq 1 \\ x^2 + 3x & > 1 \end{cases} \tag{5}$$

determine o valor de c que torna a função contínua.

Questão 5. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2} x^2$

(b) $\lim_{x \to -9} 50$

(c) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

(d) $\lim_{x \to -1} (-x^2 - 2x + 3)$

(e) $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \right)$

(f) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} \right)$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x+3)^3 - 27}{x}$

(h) $\lim_{x \to 4} \dfrac{(x-4)^3}{|4 - x|}$

(i) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \right)$

(j) $\lim_{x \to 0} \dfrac{3}{x} \left(\dfrac{1}{5 + x} - \dfrac{1}{5 - x} \right)$

Questão 6. Seja $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & \text{se } x \leq 0; \\ x^3 - 3x^2 + 2x, & \text{se } 0 < x \leq 2; \\ 8 - 3x, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Calcule, se existirem, os limites:

(a) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(b) $\lim_{x \to 0} h(x)$

(c) $\lim_{x \to 1^-} h(x)$

(d) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$

(e) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$

(e) $\lim_{x \to 2} h(x)$

Questão 7. Calcule, caso existam, os seguintes limites laterais:

(a) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x - 1}{|2x^3 - 2x^2|}$

(b) $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

(c) $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

(d) $\lim_{x \to 1^-} \frac{1|x|}{x^4 - 1}$

(e) $\lim_{x \to -1^+} \frac{1 - |x|}{x^4 - 1}$

(f) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - x}$

(g) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, onde $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 2x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(h) $\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$, onde $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 1; \\ 4 - 3x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

(i) $\lim_{x \to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$, onde $h(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & \text{se } x \geq 2; \\ x^2, & \text{se } x < 2. \end{cases}$

(j) $\lim_{x \to -1} \frac{k(x) - k(-1)}{x + 1}$, onde $k(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq -1; \\ 2x^4, & \text{se } x < -1. \end{cases}$

Questão 8. Utilizando a **definição**, calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 9 - 3x$

(b) $g(x) = 5x^2 + 3x - 7$

(c) $p(x) = \sqrt{2x + 4}$

(d) $q(x) = \frac{3}{5 + x}$

(e) $r(x) = \frac{x + 1}{3x + 4}$

Questão 9. A função:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se} \quad x < 1 \\ 4 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{6}$$

é diferenciável em $p = 1$?

Questão 10. Determine a equação da reta tangente ao gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 + 5$ em $p = 1$;

(b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ em $p = 0$.

Questão 11. Considere a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = |x| - |x - 1| \tag{7}$$

(a) A função é continua em $p = 0$? E em $p = 1$?

(b) A função é diferenciável em $p = 0$?

Questão 12. Considere a função $g(x)$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x < -2 \\ x+1 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x+2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases} \tag{8}$$

(a) A função é diferenciável em $p = -2$? E em $p = 0$?

(b) O que podemos afirmar sobre a continuidade da função nesses pontos ?

Obs: Justifique sua resposta ;)

Questão 13. Utilizando as **regras de derivação**, calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \left(x^2 - \sqrt{x}\right) \cdot (2x^5 + 3x^2 - 1)$

(b) $g(x) = x^3 e^x$

(c) $h(x) = \dfrac{5x}{4 + 9e^x}$

(d) $p(x) = \left(x^4 - 3x^2 - 2x + 1\right)^2$

(e) $q(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 4}$

(f) $r(x) = \left(3x^5 + x^4 - x^3 - 2x + 3\right)^{13}$

Questão 14. Determine o valor das constantes a e b para que a função $f(x)$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ ax+b & \text{se } x > 2 \end{cases} \tag{9}$$

seja diferenciável.

Questão 15. Considere $g(x) = f(x)e^x$, com $f(x)$ uma função diferenciável. Podemos afirmar que:

(a) A função $g(x)$ é diferenciável com $g'(x) = f'(x)e^x$;

(b) A função $g(x)$ é diferenciável com $g'(x) = f'(x)e^x + g(x)$;

(c) A função $g(x)$ é diferenciável com $g'(x) = f'(x)e^x + e^x$;

(d) A função $g(x)$ pode não ser diferenciável.

Questão 16. A função $f(x) = e^{|x|}$:

(a) É contínua em todos os pontos, mas, não é diferenciável em $x = 0$;

(b) É contínua e diferenciável em todos os pontos;

(c) Não é contínua em $x = 0$;

(d) Nenhuma das alternativas.

Bons Estudos!