

1. (1,0) Seja $A = \{4, 6, 8, 9\}$ e $P(A)$ o conjunto das partes de A . Suponha que B é um conjunto de forma que $|B| = 5$. Responda e justifique cada item a seguir. **a)** Encontre $|P(A) \times B|$; **b)** Qual é o menor e maior valor para $|A \cup B|$?

2. (1,0) Seja $A = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$. Considere a função $f : P(A) \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(B) = |B|$. Prove ou refute: **a)** f é injetora? **b)** f é sobrejetora? **c)** Encontre a pré-imagem de zero. Seja a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x) = \lceil (x+1)/3 \rceil$, **d)** encontre $g \circ f(A)$. Mostre como resolveu cada item.

3. (1,5) Use indução matemática para provar que para $n > 1$, $\sum_{j=2}^n \binom{j}{2} = \binom{n+1}{3}$.

4. (1,5) Responda e justifique apropriadamente:

- a) Use o pequeno teorema de Fermat para calcular o resto da divisão de 7^{2021} por 5.
- b) Encontre os valores de $x \in \mathbb{N}$ de forma que $x \equiv -3 \pmod{17}$ e $x < 70$.
- c) Use o pequeno teorema de Fermat para provar que 5^{99} é um inverso de 5 $\pmod{101}$. (Dica: 101 é um número primo)

5. (2,5) Considere as seguintes relações definidas no conjunto Σ^* , onde $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \mid |x| - |y| \text{ é par} \} \\ R_2 &= \{(x, y) \mid |x| - |y| \text{ é ímpar} \} \\ R_3 &= \{(x, y) \mid y \text{ é prefixo de } x\} \end{aligned}$$

- a) Identifique quais das relações são *relações de equivalência* apresentando provas ou refutações das propriedades requeridas.
- b) Para as que forem relações de equivalência defina as *classes de equivalência*.
- c) Identifique quais das relações são *relações de ordem parcial* apresentando provas ou refutações das propriedades requeridas.
- d) Para as que forem relações de ordem parcial determine os elementos maximais, minimais, e os limitantes superiores a $\{010, 011\}$.

6. (1,0) Desenhe a árvore enraizada ordenada cujo caminhamento em pré-ordem é: O,R,S,D,E,B,L,U,M,V,A,T,I; onde O, R e S tem 2 filhos; B e V possuem 3 filhos cada; e todos os outros vértices são folhas. Qual o caminhamento em pós-ordem?

7. (1,5) Responda e justifique usando as definições e os teoremas estudados.

- a) Qual a quantidade de arestas dos seguintes grafos? **a.1)** W_n **a.2)** $\overline{K_{m,n}}$
- b) Qual o número cromático dos grafos do item anterior?
- c) Suponha que uma árvore tem 2 vértices de grau 5, 3 vértices de grau 3, 8 vértices de grau 2 e r vértices de grau 1. Determine o valor de r. (Atenção: a justificativa deve ser usando os teoremas e não o desenho da árvore)