Kailane eduarda Felix da silva / 125.76.0.454-57

(1)

a) Sendo $A=\{4,6,8,9\}$, o conjunto potência de A são todos subconjuntos que podemos formar de A, incluindo o $\emptyset$ e o próprio A//
Dessa forma, fazendo $|A| = 2^n \rightarrow |A| = 16$ e sendo $|A \times B| = |A| \times |B|$
$|P(A) \times B| = 16 \cdot 5 = 80$ //

b) I) o menor valor de $|A \cup B|$ será quando A for subconjunto próprio de B, de modo que $A \cup B = \{4,6,8,9,x\}$, com $x \in B$. Dessa maneira $|A \cup B| = 5$ //

II) o maior valor de $|A \cup B|$ será quando $A \cap B = \emptyset$. Dessa forma, os elementos do novo conjunto serão os 4 de A e os 5 de B//
Então $|A \cup B| = 9$

(3) * Base

Para $n=2$, temos que:

$$\sum_{j=2}^{2} \binom{2}{2} = \binom{2+1}{3} = \binom{3}{3} = 1 \rightarrow \text{provado!}$$

* Passo indutivo:

HI = É V p/ $n=k \rightarrow \binom{k}{2}$

T = queremos provar para $n=k+1$

Falemos:
$$\sum \binom{j}{2} = \underbrace{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots \binom{k}{2}}_{H.I^*} + \binom{k+1}{2}$$

*Se é v p/ k, então $HI = \binom{k+1}{3}$

Então:
$$\sum_{j=2}^{k+1} \binom{j}{2} = \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} \rightarrow$$

Porém, pela ID de Pascal:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

logo:
$$\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} = \binom{k+2}{3} \rightarrow \sum_{j=2}^{n} \binom{j}{2} = \binom{k+2}{3} = \binom{n+1}{3}$$ //

④ a) 7^{2021} (mod 5) $\rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \text{ mod } p$

sendo mdc(7,5) = 1, pelo pequeno teorema de Fermat:

$7^4 \equiv 1 \text{ mod } 5$//

Sabendo que $2021 = 505 \cdot 4 + 1$

$(7^4)^{505} \equiv 1^{505} \text{ mod } 5 \rightarrow 7^{2020} \equiv 1 \text{ mod } 5$

$\rightarrow 7^{2020} \cdot 7 = 7^{2021}$

$7^{2020} \cdot 7 \equiv 7 \text{ mod } 5 \equiv 2 \text{ mod } 5$

RESTO//

b) Temos $x \equiv -3 \text{ mod } 17$. Então podemos manipular de modo que

$\boxed{x+3 \equiv 0 \text{ mod } 17}$, logo buscamos x tal que $x+3 < 73$ → p/ manter a desigualdade

Como queremos números dentro do mod 17, podemos adicionar 17 p/ encontrá-los até que $x < 70$.

Então: p/ $x = 14$, teremos que: $17 \equiv 0 \text{ mod } 17$

p/ $x = 31$ — $34 \equiv 0 \text{ mod } 17$

p/ $x = 48$ — $51 \equiv 0 \text{ mod } 17$

p/ $x = 65$ — $68 \equiv 0 \text{ mod } 17$

Logo, os valores de x são: 14, 31, 48, 65//

c) Pelo PTF, temos que $a^{p-1} \equiv 1 \text{ mod } p$, logo:

$5^{100} \equiv 1 \text{ mod } 101$, então $5^{99} \cdot 5 \equiv 1 \text{ mod } 101$

E como $\bar{a} \cdot a \equiv 1 \text{ mod } m$, sendo $\bar{a}$ o inverso de a no mod m.

Temos que 5^{99} é o inverso de 5 mod 101.

⑤ a) $R_1 = \{(x,y) \mid |x| - |y| \text{ é par}\}$

I) É reflexiva pois $|a| - |a| = 0$, $a \in \mathbb{N}$. ✓

II) É simétrica pois trocar a ordem dos elementos $(a,b) \rightarrow (b,a)$ não afeta a paridade do resultado. ✓

III) Se $|a| - |b|$ = par, então ou a e b são pares ou a e b são ímpares, e se $|b| - |c|$ = par, ou b e c são pares ou b e c são ímpares. De modo que todos precisam ser pares ou ímpares p/ pertencer a R.

Portanto, se (a,b) e (b,c) pertencem a R, a, b e c têm a mesma paridade, então (a,c) também pertencerá a R.

$(a,b) \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$ // É TRANSITIVA!

Logo, R_1 é uma relação de equivalência.

(5) a) $R_2 = \{(x, y) \mid |x| - |y| \text{ é ímpar}\}$ -> NÃO É REL. EQUIVALÊNCIA //

i) NÃO É REFLEXIVA, POIS $|a| - |a| = 0$ (PAR) com $a \in R$.

ii) É SIMÉTRICA POIS TROCAR A ORDEM DOS ELEMENTOS $(a,b) \to (b,a)$ NÃO AFETA A PARIDADE DO RESULTADO.

iii) NÃO É TRANSITIVA, POIS para que $(a,b) \wedge (b,c) \in R$, a paridade de a tem de ser diferente da de b, que tem de ser diferente da de c. Assim, é impossível que a paridade de c $\neq$ paridade de a. logo:

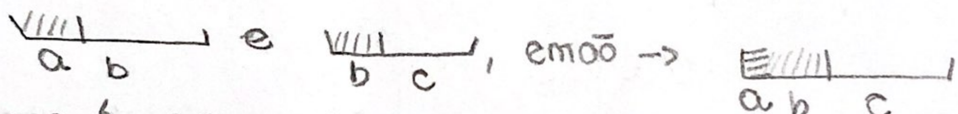
$$(a,b) \wedge (b,c) \in R \to (a,c) \notin R.$$

$R_3 = \{(b,a) \mid a \text{ é prefixo de } b\}$ -> NÃO É R. EQUIVALÊNCIA //

i) É reflexiva pois a é prefixo de a, $\forall a$.

ii) Não é simétrica, pois se a é prefixo de b e $b \neq a$, então $b < a$ e b não pode ser prefixo de a.

iii) É transitiva, pois se a é prefixo de b ($a \subset B$) e b é prefixo de c ($B \subset C$), então a é prefixo de c.



se a é prefixo de b, então $b = ax = a_1a_2a_3..a_n x_1x_2x_3..x_n$ e se b é prefixo de c, também vale que $c = by = b_1b_2b_3..b_n y_1y_2y_3...y_n$

logo: $c = a_1a_2a_3...a_n x_1x_2x_3..x_n y_1y_2y_3...y_n$ // -> É transitiva //

(5) b) sendo R_1 uma relação de equivalência, ela particiona o conjunto em elementos pares e ímpares. Pois $(a,b) \in R_1$ se somente se a e b são ambos pares ou ambos são ímpares. logo:

as classes de equivalência serão:

$\{2, 4, 6, 8, 10...\}$ e $\{1, 3, 5, 7...\}$ //

(5)

c) $R_1 = \{(x,y) \mid |x|-|y| \text{ é par}\}$ -> NÃO É ORDEM PARCIAL //

I) é reflexiva (POR 5.a)

II) é SIMÉTRICA (" ")

III) é TRANSITIVA " "

$R_2 = \{(x,y) \mid |x|-|y| \text{ é ímpar}\}$ -> NÃO É ORDEM PARCIAL

I) NÃO É REFLEXIVA (POR 5.a)

II) É SIMÉTRICA (" ")

III) NÃO É TRANSITIVA (" ")

$R_3 = \{(x,y) \mid y \text{ é prefixo de } x\}$ -> É ORDEM PARCIAL

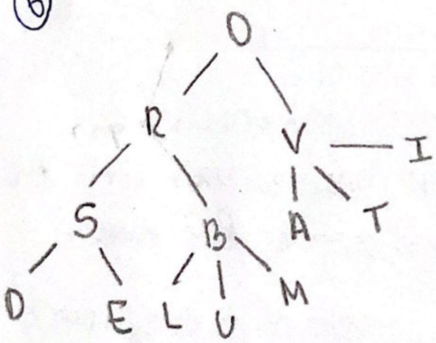
I) É REFLEXIVA (POR 5.a)

II) É anti-simétrica pois $(a,b) \wedge (b,a) \in R$ se somente se $a=b$.

III) É transitiva (POR 5.a)

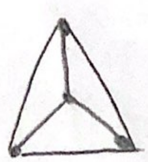
D) :C

(6)



1. EDR
2. DESLUMBRATIVO

(7) a.1
O grafo Roda (W_n) terá $2n$ arestas.



a.2 Sendo $\overline{K_{m,n}}$ o complemento de $K_{m,n}$, temos que ligar os vértices restantes, mas como não é um grafo direcionado, eliminamos as duplas contagens, de modo que:

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \text{ARESTAS TOTAIS}$$

(7) b) Para W_n: se n for par, é um grafo 3-cromático.

Mas se n for ímpar, é um grafo 4-cromático.

c) :c

(2) $A = \{1, 2 \ldots 9, 10\}$

$F: P(A) \to \mathbb{N}$

$F(B) = |B|$

a) Por contra exemplo; NÃO É INJETORA //

$F(\{1\}) = 1$

$F(\{2\}) = 1$

várias imagens repetem-se mesmo para $x \neq y$ com x e $y \in P(A)$.

b) NÃO É SOBREJETORA, POIS F(B) NÃO VAI ASSUMIR VALORES MAIORES QUE 10, ENQUANTO O CONTRADOMÍNIO SÃO OS NÚMEROS NATURAIS. OU SEJA, NESSE CASO, $I \subset \mathbb{N}$ //

c) $F(B) = 0$, ENTÃO $B = \emptyset$.

D) SENDO $F(A) = |A| = 10$, TEMOS QUE

$g \circ F(A) = g(F(A)) = g(10) = \left\lceil \frac{(10+1)}{3} \right\rceil = 4$ //