Maria Tereza - Monitoria Cálculo 1

Taxas Relacionadas

Num problema de taxas relacionadas a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos de taxas de variação de outras. Precisamos encontrar uma equação que relacione as grandezas e aí usar a Regra da Cadeia para derivá-la em ambos os lados.

Aqui vai uma lista de dicas para esses problemas:

1- Ler o problema com cuidado de modo a interpretá-lo corretamente;

2- Desenhar um diagrama, se possível;

3- Desenvolver uma boa intuição matemática/geométrica (isso se consegue praticando);

4- Expresse a(s) informação(ões) dadas e a taxa pedida em termos de derivadas. Aqui, a notação $\frac{d}{dt}$ é muito útil;

5- Escreva uma equação que relacione as várias grandezas;

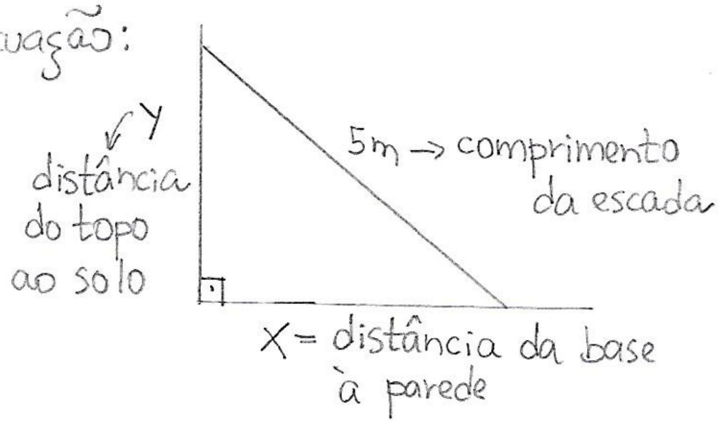
6- Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação em relação a uma dada variável (muitas vezes é o tempo, t);

7- Por fim, substitua a(s) informação(ões) dadas e resolva o problema.

Vamos ver alguns exemplos:

1- Uma escada com 5m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se a base desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo quando a base da escada está a 3m da parede?

Vamos fazer um desenho da situação:



Note que x e y estão relacionados da seguinte forma:

Temos um triângulo retângulo onde x e y são os catetos
A hipotenusa tem comprimento fixo de 5m
Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

Esta é a equação que relaciona as grandezas do problema.

Nos foi dado que quando $x = 3m$, $\frac{dx}{dt} = 1 m/s$

Nos foi pedido $\frac{dy}{dt}$ neste instante.

Derivamos a equação 1 em ambos os lados em relação a t. Certifique-se se os conceitos de Regra da Cadeia e Derivação Implícita estão claros para você:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(25)$$

Note que aqui x e y são funções de t

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Logo, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

Sabemos que $x = 3$ e $\frac{dx}{dt} = 1$

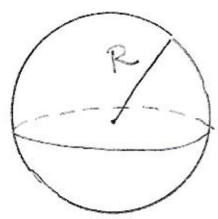
Usamos a relação $x^2 + y^2 = 25$ para determinar y

$y^2 = 25 - 9 = 16$, Logo, $y = 4m$

Assim, por fim: $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{3}{4}\ m/s$

2- O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm.

Façamos um desenho ilustrativo:



Sabemos que o raio R de uma esfera está relacionado ao seu volume através da equação:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Nos foi dado:

$\frac{dR}{dt} = 4mm/s$ quando $R = 40\ mm$

↳ Note que

Raio = $\frac{\text{Diâmetro}}{2}$

Assim, derivamos ambos os lados em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2 \cdot \frac{dR}{dt}$$ R é função do tempo

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \cdot \frac{dR}{dt}$$ Substituindo os valores:

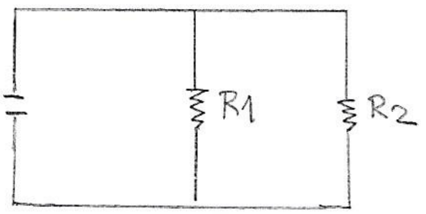
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot (40)^2 \cdot 4 = 25600\,\pi \ mm^3/s$$

3 - Dois resistores com resistências R_1 e R_2 são conectados em paralelo e a resistência equivalente, medida em ohms (Ω), é dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

↳ Resistência equivalente

Se R_1 e R_2 estão aumentando a taxas de $0{,}3\,\Omega/s$ e $0{,}2\,\Omega/s$, respectivamente, quão rápido está variando R quando $R_1 = 80\,\Omega$ e $R_2 = 100\,\Omega$?



Note que nos foi dada a relação entre R, R_1 e R_2. Mas poderíamos ter usado conhecimentos de física para determiná-la.

Derivando a equação em relação a t: Note que $\frac{1}{R} = R^{-1}$

$$-R^{-2}\frac{dR}{dt} = -R_1^{-2}\frac{dR_1}{dt} - R_2^{-2}\frac{dR_2}{dt}$$

A questão nos deu: $\frac{dR_1}{dt} = 0{,}3$ e $\frac{dR_2}{dt} = 0{,}2$ quando $R_1 = 80\,\Omega$ e $R_2 = 100\,\Omega$

Vamos calcular R neste momento:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{80} + \frac{1}{100} = \frac{10+8}{800} = \frac{18}{800} = \frac{9}{400}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{9}{400}, \quad R = \frac{400}{9}$$

Substituindo tudo:

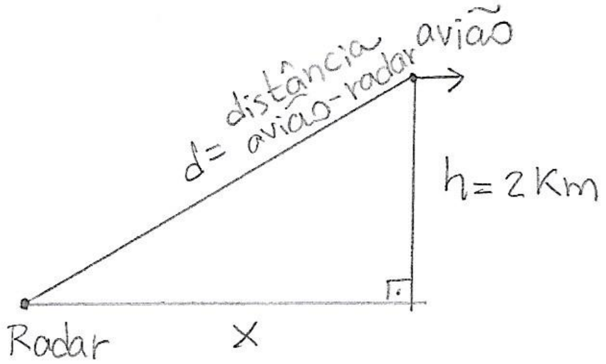
$$-\left(\frac{400}{9}\right)^{-2}\frac{dR}{dt} = -(80)^{-2}\cdot 0{,}3-(100)^{-2}\cdot 0{,}2$$

$$-\frac{81}{160.000}\frac{dR}{dt} = -\frac{0{,}3}{6400}-\frac{0{,}2}{10000} = \frac{-7{,}5-3{,}2}{160.000} = -\frac{10{,}7}{160.000}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{160.000}{81}\;\frac{10{,}7}{160.000} = \frac{10{,}7}{81} = \frac{107}{810} \approx 0{,}13\ \Omega/s$$

4- Um avião voa horizontalmente a uma altura de 2Km a 800 Km/h e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3Km além da estação.

Façamos um desenho:



Como o avião voa horizontalmente, a altura em relação ao chão é constante

Podemos relacionar d, h e x usando o Teorema de Pitágoras:

$d^2 = h^2 + x^2$, Derivamos em relação a t:

$$2d\cdot\frac{d(d)}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \text{(h não varia com o tempo)}$$

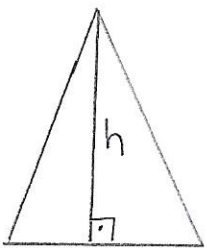
$$\frac{d(d)}{dt} = \frac{x}{d}\frac{dx}{dt}$$

A questão nos dá que $\frac{dx}{dt} = 800\,Km/h$ e que $d = 3\,Km$

Encontramos x usando a equação: $x^2 = d^2 - h^2 = 9 - 4 = 5$

Logo, $x = \sqrt{5}\,Km$. Então: $\frac{d(d)}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 800 = \frac{800\sqrt{5}}{3}\,Km/h$

5- A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 1cm/min enquanto a área dele está aumentando a uma taxa de $2\,cm^2/min$. A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10cm e a área $100\,cm^2$



Sabemos que a equação que relaciona base, altura e área num triângulo é:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Derivamos em relação a t:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{b.h}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(b\frac{dh}{dt} + h\frac{db}{dt}\right)$$

A questão fornece $\frac{dh}{dt} = 1cm/min$, $\frac{dA}{dt} = 2cm^2/min$ e $h = 10cm$, $A = 100\,cm^2$

A questão pede $\frac{db}{dt} = ?$

Calculamos b usando a equação $A = \frac{bh}{2}$, $b = \frac{2A}{h}$

Logo, $b = \frac{200}{10} = 20cm$

Substituindo tudo, temos:

$$2 = \frac{1}{2}\left(20.1 + 10.\frac{db}{dt}\right)$$

$$20 + 10\frac{db}{dt} = 4, \quad 10\frac{db}{dt} = -16$$

Portanto, $\frac{db}{dt} = -1{,}6\ cm/min$. Note o sinal negativo, a base está diminuindo

6- Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4,2)$, a coordenada y está decrescendo a uma taxa de 3cm/s. Quão rápido a coordenada x do ponto está variando nesse momento?

Note que aqui já temos nossa equação relacionando x e y: $xy = 8$

A questão nos fornece:

$\frac{dy}{dt} = -3 cm/s$, $x = 4$ e $y = 2$

Derivando em relação a t:

$$\frac{d}{dt}(xy) = \frac{d(8)}{dt} \quad \text{(Usamos a regra do produto)}$$

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{2} \cdot -3 = 6 \ cm/s$$