Exercícios de Espaço Vetorial

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Universidade de São Paulo (USP)

21 pag.

2.14 Exercícios

♦ Definição

Exercício 1. *Considere o conjunto* $\mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2, 0), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Nessas condições, $\mathbb{R}^2$ *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial? Justifique.*

Exercício 2. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*.* V *não é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial em relação a cada um dos dois seguintes pares de operações sobre* V*:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1, y_1), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Em cada caso, quais dos oito axiomas não se verificam?

Exercício 3. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Com essas operações, V *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

Exercício 4. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (3\alpha y, -\alpha x), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Com essas operações, V *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

Exercício 5. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) & = & (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Com essas operações, V *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

Exercício 6. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$*. Defina a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, como:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad \forall\ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y, z) & = & (\alpha x, y, z), \quad \forall\ (x, y, z) \in V\ e\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Com essas operações, V *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial?*

Exercício 7. *Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais, com as operações usuais.*

a) *Matrizes diagonais* $n \times n$.

b) *Matrizes escalares* $n \times n$, *ou seja, matrizes diagonais cujos elementos da diagonal principal são iguais.*

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\{(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$

e) $\{(1, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

f) $\{(x, x+3) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

g) $\{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Exercício 8. *Seja* $V = \mathbb{C}^2$. *Mostre que* V *é um* $\mathbb{R}$-*espaço vetorial com a adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, assim definidas:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \quad \forall\ (x, y) \in V\ \ e \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercício 9. *Seja* $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. *Considerando sobre* $\mathbb{R}^\infty$ *as operações de adição e a multiplicação por escalar, respectivamente, dadas por:*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots), \quad \forall\ (x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \quad e \\ \alpha(x_1, x_2, \ldots) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots), \quad \forall\ (x_1, x_2, \ldots) \in V\ \ e \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mostre que $\mathbb{R}^\infty$ *é um* $\mathbb{R}$-*espaço vetorial.*

Exercício 10. *Mostre que o conjunto* $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\ \ e\ x, y > 0\}$ *é um* $\mathbb{R}$-*espaço vetorial com as operações de adição e mutiplicação por escalar definidas por:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2), \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \quad e \\ \alpha \odot (x, y) &= (x^\alpha, y^\alpha), \quad \forall\ (x, y) \in V\ \ e \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercício 11. *Sejam* U *e* V *dois* $\mathbb{K}$-*espaços vetoriais. Considere o produto cartesiano* $U \times V = \{(u, v) \mid u \in U\ \ e\ v \in V\}$ *desses dois conjuntos. Defina as seguintes operações em* $U \times V$:

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) + (u_2, v_2) &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad \forall\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \times V \quad e \\ \alpha(u, v) &= (\alpha u, \alpha v), \quad \forall\ (u, v) \in U \times V\ \ e \ \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Mostre que $U \times V$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar, acima definidas, é um* $\mathbb{K}$-*espaço vetorial. Este espaço vetorial é chamado de* ***Espaço Produto de*** U ***por*** V.

Exercício 12. *Mostre que todo* $\mathbb{C}$-*espaço vetorial também é* $\mathbb{R}$-*espaço vetorial.*

⧫ Propriedades

Exercício 13. *No espaço vetorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, considere os vetores:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcular $2A + B - 3C$.*

b) *Determinar $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{A+X}{2} - \dfrac{X-B}{3} = C$.*

c) *Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $A = \alpha B + \beta C$?*

Exercício 14. *Sejam $p_1(x) = x^3 - 1$, $p_2(x) = x^2 + x - 1$ e $p_3(x) = x + 2$ vetores de $P_3(\mathbb{R}$.*

a) *Calcular $2p_1 + 3p_2 - 4p_3$.*

b) *Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p_1 + \alpha p_2 = p_3$?*

c) *Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $p_1 = \alpha p_2 + \beta p_3$?*

Exercício 15. *Seja $\mathbb{C}^2$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Considere os vetores $u, v, w \in \mathbb{C}$, onde $u = (1+i, i)$, $v = (1-i, 2i)$ e $w = (2, 3+i)$.*

a) *Calcular $(3+i)u - iv - (2-i)w$.*

b) *Existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $v = zu$?*

Exercício 16. *Considere $u = (1,1)$ e $v = w = (3,-2)$, vetores de $\mathbb{R}^2$. Resolva o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = u \\ 2x - y + z = v \\ x + y - 2z = w \end{cases}$$

nas incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

⧫ Subespaço Vetorial

Exercício 17. *Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços. Nos casos em que o subconjunto não é subespaço, quais propriedades não se verificam?*

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0\}$

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \in \mathbb{Z}\}$

c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 3z = 0\}$

e) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\}$

f) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 1\}$

g) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y + z = 0\}$

h) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \leq y \leq z\}$

i) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y \in \mathbb{Q}\}$

Exercício 18. *Mostre que os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^4$ *são subespaços:*

a) $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y = 0 \text{ e } z - w = 0\}$

b) $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x + y - w = 0 \text{ e } z = 0\}$

Exercício 19. *Verifique quais dos seguintes subconjuntos de* $M_2(\mathbb{R})$ *são subespaços:*

a) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$

b) $W = \left\{ A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} = 0 \right\}$

c) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\}$

d) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{R}) |\ a_{21} = 0\}$

Exercício 20. *Verifique quais dos seguintes subconjuntos de* $M_n(\mathbb{R})$ *são subespaços:*

a) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ \operatorname{tr} A = 0\}$

b) Todas as matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tais que o sistema linear* $AX = 0$ *tenha apenas a solução trivial.*

c) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ AB = BA,\ B \in M_n(\mathbb{R}) \textit{ fixada}\}$

Exercício 21. *Verifique quais dos seguintes conjuntos a seguir são subespaços de* $P(\mathbb{R})$*.*

a) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ gr(p) \geq 2\}$

b) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(0) = 2p(1)\}$

c) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$

d) $W = \{p \in P(\mathbb{R}) |\ p(x) + p'(x) = 0\}$

Exercício 22. *Verifique, em cada caso, se o conjunto* W *é subespaços de* $C([0, 1], \mathbb{R})$*.*

a) $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(0) = 0\}$

b) $W = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \right\}$

c) $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(0) = f(1)\}$

d) $W = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) |\ f(x) = 0 \textit{ em todos os pontos de } [0, 1] \textit{ menos num número finito deles}\}$

Exercício 23. *Mostre que:*

a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f \textit{ é diferenciável e } f'(x) + 2f(x) = 0\}$ *é um subespaços de* $F(\mathbb{R})$*;*

b) $W = \left\{ f \in C([a, b], \mathbb{R}) |\ \int_a^b f(x)\, dx = 0 \right\}$ *é um subespaços de* $C([a, b], \mathbb{R})$*.*

Exercício 24. *Determine, em cada caso, se o espaço-solução do sistema linear homogêneo* $AX = 0$ *é um plano pela origem, uma reta pela origem ou apenas a origem. Se for um plano, obtenha uma equação para este plano; se for uma reta, obtenha as equações paramétricas dessa reta.*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ *b)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

Exercício 25. *Uma reta L pela origem em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por equações paramétricas da forma:* $\begin{cases} x &= at \\ y &= bt \\ z &= ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. *Use estas equações para mostrar que L é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.*

♦ Operações com Subespaços

Exercício 26. *Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de $\mathbb{R}^3$ dados por:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = z\Big\} \\ W_2 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\Big\} \\ W_3 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\Big\} \end{aligned}$$

Verifique que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^3$ e $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

Exercício 27. *Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$, $W_s = \{A = [a_{1j}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = A\}$ o subconjunto das matrizes simétricas e $W_a = \{A = [a_{1j}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ A^t = -A\}$ o subconjunto das matrizes antissimétricas.*

a) Mostre que W_s e W_a são subespaços de V.

b) Mostre que $V = W_s \oplus W_a$.

Exercício 28. *Seja $V = F(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sejam ainda $W_p = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f(-x) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$ o subconjunto das funções pares e $W_i = \{f \in F(\mathbb{R}) |\ f(-x) = -f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$ o subconjunto das funções ímpares.*

a) Mostre que W_p e W_i são subespaços de V.

b) Mostre que $W_p + W_i = V$.

c) Mostre que $W_p \cap W_i = \{0\}$.

d) Conclua que $V = W_p \oplus W_i$.

Exercício 29. *Sejam W_1 e W_2 subespaços do $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Mostre que:*

a) $W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 + W_2 = W_2$

b) $W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = W_1$

c) $W_1 + W_2 = W_1 \quad \Rightarrow \quad W_2 \subset W_1$

d) $W_1 \cap W_2 = W_1 \quad \Rightarrow \quad W_1 \subset W_2$

Exercício 30. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dado um subconjunto $S \neq \emptyset$ de V, mostre que a intersecção de todos os subespaços vetoriais de V que contêm S também é um subespaço vetorial de V, sendo este o menor subespaço de V que contém S.*

Exercício 31. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1,W_2 e W_3 subespaços de V. Mostre que*

$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subset W_1 \cap (W_2 + W_3)$$

Dê um exemplo para o qual o primeiro dessa relação é diferente do segundo e um exemplo onde ocorre a igualdade.

Exercício 32. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1,W_2 e W_3 subespaços de V. Verifique com um exemplo que se*

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 \quad e \quad W_1 + W_2 = W_1 + W_3$$

não se tem necessariamente $W_2 = W_3$.

Exercício 33. *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Mostre que:*

a) $W_1 \cup W_2$ *é subespaço se, e somente se,* $W_1 \subseteq W_2$ *ou* $W_2 \subseteq W_1$*;*

b) $W_1 + W_2 = W_1 \cup W_2$ *se, e somente se,* $W_1 = W_2$*.*

Exercício 34. *Sejam W_1, W_1', W_2 e W_2' subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V tais que $V = W_1 \oplus W_2 = W_1' \oplus W_2'$. Se $W_1 \subset W_1'$ e $W_2 \subset W_2'$, mostre que $W_1 = W_1'$ e $W_2 \subset W_2'$.*

♦ Combinação Linear

Exercício 35. *Expresse os vetores de $\mathbb{R}^3$ a seguir como combinação linear dos vetores $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 3)$ e $v_3 = (3, 2, 5)$.*

a) $(6, 11, 6)$ *b)* $(0, 0, 0)$ *c)* $(7, 8, 9)$

Exercício 36. *Sejam $v_1 = (2, -3, 2), v_2 = (-1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$.*

a) Escrever o vetor $v = (7, -11, 2)$ como combinação linear de v_1 e v_2;

b) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(-8, 14, \alpha)$ é combinação linear de v_1 e v_2;

c) Determinar uma condição entre x, y e z para que o vetor (x, y, z) seja uma combinação linear de v_1 e v_2.

Exercício 37. *Considere no espaço $P_2(\mathbb{R})$ os vetores $p_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $p_2(x) = x + 2$ e $p_3(x) = 2x^2 - x$.*

a) Escrever o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3;

b) Escrever o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2;

c) Determinar uma condição entre a, b e c de modo que o vetor $ax^2 + bx + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3;

d) É possível escrever p_1 combinação linear de p_2 e p_3?

Exercício 38. *Quais dos seguintes vetores de $M_2(\mathbb{R})$ são combinações lineares de*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

♦ Subespaço Gerado

Exercício 39. *Considere o subespaço do* $\mathbb{R}^4$

$$W = [(1,1,-2,4),(1,1,-1,2),(1,4,-4,8)]$$

a) O vetor $\left(\frac{2}{3},1,-1,2\right)$ *pertence a* W*?*

b) O vetor $(0,0,1,1)$ *pertence a* W*?*

Exercício 40. *Em cada caso, determine se os seguintes vetores geram o* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $v_1 = (2,2,2)$*,* $v_2 = (0,0,3)$ *e* $v_3 = (0,1,1)$

b) $v_1 = (2,-1,3)$*,* $v_2 = (4,1,2)$ *e* $v_3 = (8,-1,8)$

c) $v_1 = (3,1,4)$*,* $v_2 = (2,-3,5)$*,* $v_3 = (5,-2,9)$ *e* $v_4 = (1,4,-1)$

d) $v_1 = (1,2,6)$*,* $v_2 = (3,4,1)$*,* $v_3 = (4,3,1)$ *e* $v_4 = (3,3,1)$

Exercício 41. *Verifique se as matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

geram o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$*.*

Exercício 42. *Seja* W *o subespaço do* $M_2(\mathbb{R})$ *definido por* $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$*?* *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$*?*

Exercício 43. *Mostre que os polinômios* $1-x^3$*,* $(1-x)^2$*,* $1-x$ *e* 1 *geram o espaço* $P_3(\mathbb{R})$*.*

Exercício 44. *Determinar um conjunto gerador para cada um dos seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$

d) $W_1 \cap W_2$

e) $W_2 + W_3$

Exercício 45. *Determine uma equação para o plano gerado pelos vetores* $u = (-1,1,1)$ *e* $v = (3,4,4)$*.*

Exercício 46. *Determine as equações paramétricas para a reta gerada pelo vetor* $v = (3,-2,5)$*.*

Exercício 47. *Mostre que os dois conjuntos geram o mesmo subespaço de* $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ *e* $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$

b) $\{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$ *e* $\{(1,-2,-5),(0,8,9)\}$

Exercício 48. *Sejam* u *e* v *dois vetores não nulos do* $\mathbb{R}^2$. *Se não existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $u = \alpha v$, *mostre que* $\mathbb{R}^2 = [u] \oplus [v]$.

Exercício 49. *Mostre que se* V *um* $\mathbb{K}$-*espaço vetorial e* S_1 *e* S_2 *subconjuntos de* V *tais que* $S_1 \subset S_2$, *então* $[S_1] \subset [S_2]$.

Exercício 50. *Mostre que se* V *um* $\mathbb{K}$-*espaço vetorial e* S_1 *e* S_2 *subconjuntos de* V, *então* $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Exercício 51. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$-*espaço vetorial e* $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *e* $S_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ *subconjuntos de* V. *Sejam* $W_1 = [S_1]$ *e* $W_2 = [S_2]$, *mostre que* $W_1 = W_2$ *se, e somente se, cada vetor em* S_1 *é uma combinação linear dos vetores de* S_2 *e cada vetor em* S_2 *é uma combinação linear dos vetores de* S_1.

Exercício 52. *Mostre que os conjuntos* $\{\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{sen} x \cdot \cos x\}$ *e* $\{1, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x\}$ *geram o mesmo subespaço do* $C(\mathbb{R})$.

Exercício 53. *Determine, em cada caso, um sistema de equações lineares homogêneas para o qual a solução seja exatamente o subespaço gerado pelos vetores* $u, v \in V$.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $u = (-1,0,1)$ *e* $v = (3,4,-2)$;

b) $V = \mathbb{R}^4$, $u = (1,0,1,2)$ *e* $v = (0,0,1,0)$.

Exercício 54. *Mostre que o* $\mathbb{R}$-*espaço vetorial* $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots)|\ x_i \in \mathbb{R}\}$ *não é finitamente gerado.*

♦ (In)dependência Linear

Exercício 55. *Verifique se os subconjuntos do* $\mathbb{R}^3$ *são linearmente independentes.*

a) $\{(4,-1,2),(-4,10,2)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,3,5)\}$

c) $\{(3,2,-1),(1,5,-3),(5,-1,1)\}$

b) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

Exercício 56. *Verifique se os subconjuntos do* $\mathbb{R}^4$ *são linearmente independentes.*

a) $\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$

b) $\{(3,0,-3,6),(0,2,3,1),(0,-2,-2,0),(-2,1,2,1)\}$

Exercício 57. *Verifique se os subconjuntos do* $P_2(\mathbb{R})$ *são linearmente dependentes.*

a) $\{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2\}$

b) $\{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$

c) $\{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$

Exercício 58. *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Determine, em cada caso, se os vetores então num plano.*

a) $v_1 = (2,-2,0)$, $v_2 = (6,1,4)$ *e* $v_3 = (2,0,-4)\}$

b) $v_1 = (-6,7,2)$, $v_2 = (3,2,4)$ *e* $v_3 = (4,-1,2)\}$

Exercício 59. *Determine, em cada caso, se os vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ então numa mesma reta.*

a) $v_1 = (-1,2,3)$, $v_2 = (2,-4,-6)$ *e* $v_3 = (-3,6,0)\}$

b) $v_1 = (2,-1,4)$, $v_2 = (4,2,3)$ *e* $v_3 = (2,7,-6)\}$

c) $v_1 = (4,6,8)$, $v_2 = (2,3,4)$ *e* $v_3 = (-2,-3,-4)\}$

Exercício 60. *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, conforme as figuras a seguir.*

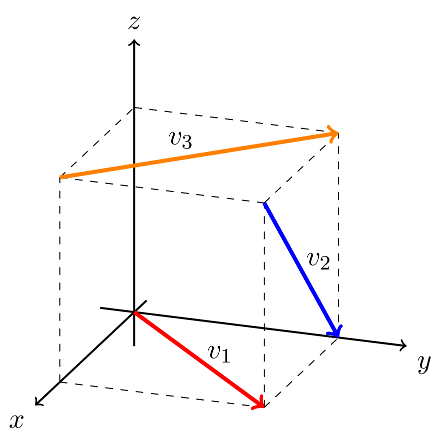

Figura 2.15

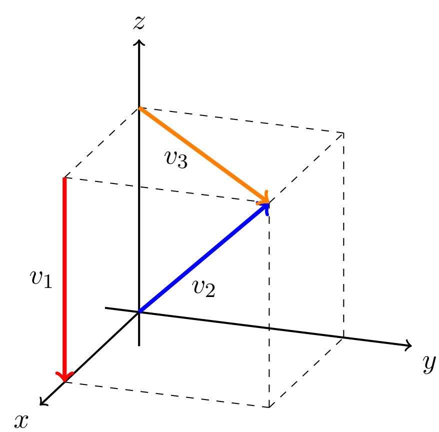

Figura 2.16

Na Figura 2.15, os vetores são linearmente independentes? E na Figura 2.16? Justifique.

Exercício 61. *Verifique se os subconjuntos do $\mathbb{C}^3$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.*

a) $\{(i,1,0), (1+i,2,0), (3,1,0)\}$

b) $\{(i,1,0), (0,1,i), (0,i,i)\}$

Exercício 62. *Determine o valor de k para que os vetores*

$$v_1 = \left(k, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, k, -\frac{1}{2}\right) \quad e \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k\right)$$

forme um conjunto linearmente dependentes em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 63. *Mostre que o conjunto $\{1, e^x, xe^x\}$ de vetores do $C([0,1],\mathbb{R})$ é linearmente independentes.*

Exercício 64. *Sejam $u = (a,b), v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que:*

a) *Se* $ad - bc = 0$, *então* u *e* v *são linearmente dependentes.*

b) *Se* $ad - bc \neq 0$, *então* u *e* v *são linearmente independentes.*

Exercício 65. *Mostre que o conjunto*

$$\left\{1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^{n-1}\right\}$$

de vetores do $P_{n-1}(\mathbb{R})$ *é linearmente independentes, onde* α *é um número real arbitrário.*

Exercício 66. *Seja* $\{u, v, w\}$ *um conjunto linearmente independente de um espaço vetorial* V. *Mostre que o conjunto*

$$\{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$$

é linearmente dependente.

Exercício 67. *Sejam* u, v *e* w *vetores de um espaço vetorial* V, *mostre que o conjunto* $\{u - v, v - w, w - u\}$ *é linearmente dependente.*

Exercício 68. *Utilize identidades apropriadas, onde necessário, para determinar quais dos seguintes conjuntos de vetores em* $F(\mathbb{R})$ *são linearmente dependentes.*

a) $\{6, 3\operatorname{sen}^2 x, 2\cos^2 x\}$

b) $\{x, \cos x\}$

c) $\{1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x\}$

d) $\{\cos 2x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$

e) $\{(3-x)^2, x^2 - 6x, 5\}$

f) $\{0, \cos^3 \pi x, \operatorname{sen}^5 3\pi x\}$

Exercício 69. *Mostre que* $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ *é linearmente independente no espaço* $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 70. *Sejam* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *números reais* 2 *a* 2 *distintos. Mostre que o conjunto de funções* $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$ *é linearmente independente.*

Exercício 71. *Mostre que o conjunto de funções* $\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\operatorname{sen} bx\}$ *é linearmente independente, onde* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$.

Exercício 72. *Mostre que os seguintes conjuntos de vetores em* $F(\mathbb{R})$ *são linearmente independentes.*

a) $\{1, x, e^x\}$

b) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, x\operatorname{sen} x\}$

c) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

d) $\{1, x, x^2\}$

Exercício 73. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Mostre que se* $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ *é linearmente independente, então* $[u_1, \ldots, u_r] \cap [v_1, \ldots, v_s] = \{0\}$.

Exercício 74. *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Mostre que se* $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n\} \subset V$ *é linearmente independente, então* $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_n\}$ *também é linearmente independente, para todo escalar* α.

♦ Base

Exercício 75. *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $\mathbb{R}^2$.

a) $\{(2,1), (3,0)\}$

b) $\{(4,1), (-7,-8)\}$

c) $\{(0,0), (1,3)\}$

d) $\{(3,9), (-4,-12)\}$

Exercício 76. *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$

b) $\{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$

c) $\{(2,-3,1),(4,1,4),(0,-7,1)\}$

d) $\{(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)\}$

Exercício 77. *Mostre que os matrizes formam uma base de* $M_2(\mathbb{R})$.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Exercício 78. *Verifique quais dos conjuntos a seguir são bases de* $P_2(\mathbb{R})$.

a) $\{(1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$

b) $\{-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2\}$

c) $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$

d) $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$

Exercício 79. *Mostre que os polinômios* 1, $1+x$, $1-x^2$ *e* $1-x-x^2-x^3$ *formam uma base de* $P_3(\mathbb{R})$.

Exercício 80. *Justifique por que os seguintes conjuntos não são bases dos espaços vetoriais indicados.*

a) $\{(1,2),(0,3),(2,7)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$;

b) $\{(-1,3,2),(6,1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$;

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \right\}$ *de* $M_2(\mathbb{R})$;

d) $\{1+x+x^2, x-1\}$ *de* $P_2(\mathbb{R})$.

Exercício 81. *Para que valores de* $k \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $B = \{(k,1,0),(1,k,1),(0,1,k)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$?

Exercício 82. *Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais reais.*

a) $V = \{(a,2a,3a) |\; a \in \mathbb{R}\}$

b) $V = \{(a,a,\ldots,a) \in \mathbb{R}^n |\; a \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} \;|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$

d) $V = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\; a_{ij} = 0, \; se \; i \neq j\}$

e) $V = \left\{ A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) |\ a_{ij} = \begin{cases} k, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases} \right\}$

Exercício 83. *Determine uma base dos seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$.

a) *O plano* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3x - 2y + 5z = 0\}$;

b) *O plano* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y = 0\}$.

Exercício 84. *Determine uma base dos seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$.

a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x + 2y + 2z = 0 \text{ e } 2z - w = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y = y \text{ e } x - 3y + w = 0\}$

Exercício 85. *Determine uma base para o subespaço* W *de* $P_2(\mathbb{R})$ *gerado pelos vetores:*

a) $-1 + x - 2x^2$, $3 + 3x + 6x^2$ *e* $2x$;

b) $1 + x$, x^2 *e* $-2 + 2x$;

c) $1 + x - 3x^2$, $2 + 2x - 6x^2$ *e* $3 + 3x - 9x^2$.

Exercício 86. *Considere o subespaço* $W = [(1, 0, i), (1, 1 + i, 1 - i), (1, -1 - i, -1 + 3i)]$ *de* $\mathbb{C}^3$. *Determine uma base de* W.

Exercício 87. *Seja* $V = [\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x]$. *Mostre que* $\{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x\}$ *não é uma base e encontre uma base de* V.

Exercício 88. *Considere o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* $U \times V = \{(u, v) |\ u \in U \text{ e } v \in V\}$, *onde as dimensões de* U *e* V *são* m *e* n, *respectivamente. Admitindo que* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *são bases de* U *e* V, *respectivamente, mostre que*

$$\{(u_i, 0); 1 \leq i \leq m\} \cup \{(0, v_j); 1 \leq j \leq n\}$$

é uma base de $U \times V$.

Exercício 89. *Suponha que* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de um espaço vetorial. Mostre que* $\{u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_n\}$ *é também uma base desse espaço.*

Exercício 90. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* B *uma base de* V. *Mostre que:*

a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *é linearmente independente em* V *se, e somente se,* $\{[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_r]_B\}$ *é linearmente independente em* $\mathbb{R}^n$.

b) $[v_1, v_2, \ldots, v_r] = V$ *se, e somente se,* $[[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_r]_B] = \mathbb{R}^n$.

Exercício 91. *Mostre que os polinômios*

$$1\ ,\ x\ ,\ x(x-1)\ ,\ x(x-1)(x-2)\ ,\ \ldots\ ,\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

formam uma base de $P_{n+1}(\mathbb{R})$.

♦ Dimensão de Um Espaço Vetorial

Exercício 92. *Determine a dimensão de* $W = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = x+y \text{ e } z = x-y\right\}$*, subespaço de* $\mathbb{R}^4$.

Exercício 93. *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$ *e o subespaço* $W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$*, onde*

$$v_1 = (1,-1,0,0), v_2 = (0,0,1,1), v_3 = (-2,2,1,1), v_4 = (1,0,0,0)$$

a) $v = (2,-3,2,2) \in W$*?*

b) Exiba uma base para W*? Qual a sua dimensão?*

c) $W = \mathbb{R}^4$*? Justifique.*

Exercício 94. *Considere* $W = [(1,1,0),(0,-1,1),(1,1,1)]$*, subespaço de* $\mathbb{R}^3$. $W = \mathbb{R}^3$*? Justifique.*

Exercício 95. *Determine a dimensão do subespaço* $W_{ts} = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0, \text{ se } i > j\}$ *das matrizes triangulares superiores do* $M_3(\mathbb{R})$.

Exercício 96. *Determine uma base e a dimensão do subespaço* $W_a = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$ *das matrizes antissimétricas do* $M_3(\mathbb{R})$.

Exercício 97. *Sejam* $V = M_2(\mathbb{R})$ *e* W *o subespaço gerado por*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a dimensão de W.

Exercício 98. *Seja* W *o subespaço de* $M_2(\mathbb{R})$ *dado por* $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a = d \text{ e } c = a+b\right\}$.

a) Qual a dimensão de W*?*

b) O conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right\}$ *é uma base de* W*? Justifique.*

Exercício 99. *Determine a dimensão do subespaço*

$$W = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R}) \mid a_0 = 0\right\}$$

de $P_3(\mathbb{R})$.

Exercício 100. *Determine a dimensão do espaço vetorial*

$$W = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in P_4(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\right\}$$

Exercício 101. *Determine as dimensões dos seguintes subespaços de* $M_n(\mathbb{R})$:

a) $W_s = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$;

b) $W_a = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$;

c) $W = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = 2A^t\}$;

d) $W = \left\{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\right\}$.

Exercício 102. *Determinar uma base e a dimensão do espaço-solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:*

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x - \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 0 \\ 2x - y + z - w = 0 \\ 4x + 3y - z + 5w = 0 \end{cases}$

♦ Coordenadas

Exercício 103. *Determine as coordenadas do vetor* $v \in \mathbb{R}^2$ *em relação à base* B *do* $\mathbb{R}^2$.

a) $v = (3, -7)$ *e* B *a base canônica;*

b) $v = (1, 1)$ *e* $B = \{(2, -4), (3, 8)\}$*;*

c) $v = (x, y)$ *e* $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$.

Exercício 104. *Determine o vetor-coordenada do vetor* $v = (4, -5, 3)$ *em relação às seguintes bases:*

a) Canônica;

b) $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$*;*

c) $C = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 105. *Determine as coordenadas de* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *em relação à base*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

do $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 106. *Determine a matriz-coluna do vetor* $p \in P_2(\mathbb{R})$ *em relação à base* B *do* $P_2(\mathbb{R})$.

a) $p(x) = 4 - 3x + x^2$ *e* B *a base canônica;*

b) $p(x) = 2 - x + x^2$ *e* $B = \{1, 1 + x, x + x^2\}$.

Exercício 107. *Determine as coordenadas do vetor* $x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ *em relação à base* $B = \{1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3\}$.

Exercício 108. *Considere o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $\mathbb{C}$ *e a base* $B = \{1 - i, 1 + i\}$. *Determine as coordenadas do vetor* $v = 1 - 2i \in \mathbb{C}$ *em relação à base* B.

Exercício 109. *Seja* $\mathbb{C}^3$ *um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial. Determine as coordenadas do vetor* $v = (1, 1, i) \in \mathbb{C}^3$ *em relação à base* $B = \{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, i, 1 + i)\}$.

Exercício 110. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja B uma base de V. Mostre que:*

a) $[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$, $\forall\ u, v \in V$;

b) $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\ v \in V$.

Exercício 111. *Seja* $B = \{(1,1,0), (0,1,-1), (2,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) B é linearmente independente ou dependente? Justifique.

b) Obtenha $B' \subset B$ tal que B' é linearmente independente e que $[B'] = [B]$.

c) Qual a dimensão de $[B']$? Justifique.

Exercício 112.

a) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $v_1 = (-1,2,-3)$ e $v_2 = (3,1,-1)$;

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo os vetores $v_1 = (1,-3,1,5)$ e $v_2 = (4,-12,-3,2)$.

♦ Dimensão da Soma de Dois Subespaços

Exercício 113. *Sejam W_1 e W_2 os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ y+z+w=0\right\} \quad e \\ W_2 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ x+y=0\ \ e\ \ z=2w\right\} \end{aligned}$$

Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

Exercício 114. *Consideremos os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x=0\right\} \quad , \\ W_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y-2z=0\right\} \quad e \\ W_3 &= [(1,1,0), (0,0,2)] \end{aligned}$$

Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: W_1, W_2, W_3, $W_1 \cap W_2$, $W_2 + W_3$ e $W_1 + W_2 + W_3$.

Exercício 115. *Sejam*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ x+y=0\ \ e\ \ z-w=0\right\} \quad e \\ W_2 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ x-y-z+w=0\right\} \end{aligned}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

Exercício 116. *Sejam*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a = d \ e \ b = c \right\} \quad e \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a = c \ e \ b = d \right\} \end{aligned}$$

subespaços de $M_2(\mathbb{R})$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$ *e exiba uma base.*

b) Determine $W_1 + W_2$. *É soma direta?* $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$*?*

Exercício 117. *Sejam* W_1 *e* W_2 *subespaços de um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* V *de dimensão finita tais que* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. *Mostre que*

$$dim_{\mathbb{K}}\ (W_1 + W_2) = dim_{\mathbb{K}}\ W_1 + dim_{\mathbb{K}}\ W_2$$

Exercício 118. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* W_1 *e* W_2 *subespaços de* V. *Supondo que* $\dim_{\mathbb{K}} W_1 > \frac{n}{2}$ *e que* $\dim_{\mathbb{K}} W_2 > \frac{n}{2}$, *mostre que* $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

Soluções dos Exercícios

Soluções do Capítulo 2

1 Não.

2 No primeiro não se verifica o axioma $3a$. No segundo não se verificam os axiomas $1a$, $1c$, $1d$ e $3a$.

3 Não.

4 Não.

5 Sim.

6 Não.

7 a) Sim

b) Sim

c) Sim

d) Sim

e) Não

f) Não

g) Sim

13 a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

c) Não.

14 a) $2x^3 + 3x^2 - x - 13$

b) Não.

c) Não.

15 a) $(-3 + 5i, -6 + 4i)$

b) Não.

16 $x = \left(\frac{16}{9}, -1\right)$, $y = \left(-\frac{1}{9}, 1\right)$ e $z = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

17 a) Sim.

b) Não, 2.

c) Não, 2.

d) Sim.

e) Sim.

f) Não, 1 e 2.

g) Não, 1 e 2.

h) Não, 2.

i) Não, 2.

19 a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

20 a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

21 a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

22 a) Sim.

b) Sim.

c) Sim.

d) Sim.

24 a) Reta pela origem.

$$L : \begin{cases} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Origem.

c) Plano pela origem.

$$\alpha : \; x - 3y + z = 0$$

26 $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ e $\mathbb{R}^3 = W_2 \oplus W_3$.

27 Sugestão: Tome $A \in M_n(\mathbb{R})$ como $A = B + C$, onde $B = \dfrac{A + A^t}{2}$ e $C = \dfrac{A - A^t}{2}$.

28 Sugestão: Tome $f \in F(\mathbb{R})$ como $f(x) = g(x) + h(x)$, onde $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

31 $W_1 = \{(x, x)|\ x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ e $W_3 = \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$.

32 $W_1 = \{(x, x)|\ x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0, y)|\ y \in \mathbb{R}\}$ e $W_3 = \{(x, 0)|\ x \in \mathbb{R}\}$.

35 a) $(6, 11, 6) = 4v_1 - 5v_2 + v_3$.

b) $(0, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$.

c) $(7, 8, 9) = 0v_1 - 2v_2 + 3v_3$.

36 a) $v = 3v_1 - v_2$.

b) $\alpha = 12$.

c) $16x + 10y - z = 0$.

37 a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$.

b) Impossível.

c) $a + 2b - c = 0$.

d) Não.

38 a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

39 a) Sim.

b) Não.

40 a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

41 Sim.

42 a) Sim.

b) Não.

44 a) $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

b) $\{(2, 1, -2)\}$.

c) $\{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$.

d) $\{(2, 1, -2)\}$.

e) $\{(2, 1, -2), (3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$.

45 $-7y - 7z = 0$.

46 $L : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

53 a) $\begin{cases} -4x + y - 4z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & & - & w & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \end{cases}$

54 Sugestão: Ver exemplo apresentado na Seção 2.9.

55 a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

56 a) Sim.

b) Sim.

57 a) Não.

b) Não.

c) Sim.

58 a) Não.

b) Sim.

59 a) Não.

b) Não.

c) Sim.

60 Sim, pois não são coplanares quando dispostos com seus pontos iniciais na origem. Não, pois são coplanares quando dispostos com seus pontos iniciais na origem.

61 a) Não.

b) Sim.

62 $k = -\dfrac{1}{2}$ ou $k = 1$.

65 Sugestão: Considere o desenvolvimento em série de Taylor de um polinômio em uma vizinhança do ponto $x = \alpha$.

68 a) LD.

b) LI.

c) LI.

d) LD.

e) LD.

f) LD.

69 Sugestão: Dada uma combinação linear nula, derive-a, depois divida por e^x. Repita o processo.

70 Sugestão: Empregue a indução matemática.

75 a) Sim.

b) Sim.

c) Não.

d) Não.

76 a) Sim.

b) Não.

c) Não.

d) Sim.

78 a) Não.

b) Sim.

c) Sim.

d) Não.

80 a) É LD.

b) Não gera.

c) É LD.

d) Não gera.

81 $k \neq -\sqrt{2}$, $k \neq 0$ e $k \neq \sqrt{2}$.

82 a) $\{1, 2, 3\}$.

b) $\{1, 1, \ldots, 1\}$.

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\}.$

e) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right\}.$

83 a) $\{(5,0,-3),(0,5,2)\}$.

b) $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$.

84 a) $\{(-2,1,0,0),(-2,0,1,2)\}$.

b) $\{(2,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.

85 a) $\{-1+x-2x^2, 1+x+2x^2\}$.

b) $\{1,x,x^2\}$.

c) $\{1+x-3x^2\}$.

86 $\{(1,0,i),(1,1+i,1-i)\}$.

87 Quaisquer dois dos vetores.

91 Sugestão: Empregue a indução matemática.

92 $\dim W = 2$.

93 a) Sim.

b) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ e $\dim W = 3$.

c) Não, pois $\dim W < \dim \mathbb{R}^4$.

94 Sim, pois $\dim W = \dim \mathbb{R}^3$.

95 $\dim\ W_{ts} = 6$.

96 $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim W_a = 3$.

97 $\dim W = 2$.

98 a) $\dim W = 2$.

b) Não, pois $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W$.

99 $\dim W = 3$.

100 $\dim W = 4$.

101 a) $\dim W_s = \dfrac{n^2+n}{2}$.

b) $\dim W_a = \dfrac{n^2-n}{2}$.

c) $\dim W = 0$.

d) $\dim W = n-1$.

102 a) $\emptyset$, $\dim W = 0$.

b) $\{(1,0,-1),(0,1,3)\}$, $\dim W = 2$.

c) $\{(4,-5,1)\}$, $\dim W = 1$.

d) $\{(-1,3,5,0),(-1,-7,0,5)\}$, $\dim W = 2$.

103 a) 3 e -7.

b) $\dfrac{5}{28}$ e $\dfrac{3}{14}$.

c) x e $\dfrac{-x+y}{2}$.

104 a) $[v]_{Can} = (4,-5,3)$.

b) $[v]_B = (3,-5,2)$.

c) $[v]_C = (\dfrac{21}{11}, -\dfrac{40}{11}, \dfrac{23}{11})$.

105 -1, 1, -1 e 3.

106 a) $[p]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $[p]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

107 -3, 1, 0 e 1.

108 $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

109 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

111 a) LD, pois $(2,0,2) = 2 \cdot (1,1,0) - 2 \cdot (0,1,-1)$.

b) $B' = \{(1,1,0),(0,1-1)\}$.

c) $\dim[B'] = 2$, pois B' é uma base.

112 a) $\{(-1,2,-3),(3,1,-1),(0,0,1)\}$.

b) $\{(1,-3,1,5),(4,-12,-3,2),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.

113 $B_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ e $\dim W_1 = 3$,
$B_2 = \{(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\}$ e $\dim W_2 = 2$,
$C = \{(3,-3,2,1)\}$ e $\dim W_1 \cap W_2 = 1$,
Base canônica do $\mathbb{R}^4$ e $\dim W_1 + W_2 = 4$.

114 $B_1 = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$ e dim $W_1 = 2$,
$B_2 = \{(1,0,0),(0,2,1)\}$ e dim $W_2 = 2$,
$B_3 = \{(1,1,0),(0,0,2)\}$ e dim $W_3 = 2$,
$C = \{(0,2,1)\}$ e dim $W_1 \cap W_2 = 1$,
Base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\dim W_2 + W_3 = 3$,
Base canônica do $\mathbb{R}^3$ e $\dim W_1 + W_2 + W_3 = 3$.

115 a) $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 |\ z = w\}$.

b) $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

c) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

d) Não, pois $\dim W_1 \cap W_2 \neq 0$.

116 a) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) |\ a + b - c - d = 0 \right\}$.
Não, pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.
Não, pois $\dim W_1 + W_2 < \dim M_2(\mathbb{R})$.

Soluções do Capítulo 3

1 a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e) Não.

f) Sim.

3 a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e)

f)

4 a) $T(x,y,z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$.

b) $u = (1, 6 - z, z)$.

c) $u = (0, -z, z)$.

5 $T(a + bx + cx^2) = b + (a + c)x + (-b + 2c)x^2$.

6 a) Núcleo:
$Nuc(T) = \{(0,0)\}$, $B = \emptyset$, $dim\ Nuc(T) = 0$, injetora.

Imagem:
$Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x - 2y - z = 0\}$, $B = \{(1,0,2),(0,1,-2)\}$. $dim\ Im(T) = 2$, não é sobrejetora.