Resolução da lista de Recursão

① a) $f(0) = 3$ (Base)

$f(n+1) = f(n)^2 - 2f(n) - 2$ (Relação de recorrência)

$\therefore f(1) = f(0+1) = f(0)^2 - 2f(0) - 2$

$= 3^2 - 2.3 - 2 = 9 - 6 - 2 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$

$f(2) = f(1+1) = f(1)^2 - 2f(1) - 2$

$= 1^2 - 2.1 - 2 = 1 - 4 \Rightarrow \boxed{f(2) = -3}$

$f(3) = f(2+1) = f(2)^2 - 2f(2) - 2$

$= (-3)^2 - 2.(-3) - 2 = 9 + 6 - 2 \Rightarrow \boxed{f(3) = 13}$

$f(4) = f(3+1) = f(3)^2 - 2f(3) - 2$

$= 13^2 - 2.13 - 2 = 169 - 26 - 2 \Rightarrow \boxed{f(4) = 141}$

b) $f(n+1) = 3^{f(n)/3}$

$\therefore f(1) = f(0+1) = 3^{f(0)/3}$

$= 3^{\cancel{3}/\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{f(1) = 3}$

$f(2) = f(1+1) = 3^{f(1)/3}$

$= 3^{3/3} \Rightarrow \boxed{f(2) = 3}$

Note que $f(n) = 3$ p/ $n \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{f(4) = 3}$

② a) $a(1) = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$

$a(2) = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$ ⤳ 0 p/ n par, 2 p/ n ímpar

$a(3) = 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$

$\vdots$

$a(n-1) = 1 + (-1)^{n-1}$

$a(n) = 1 + (-1)^n = 1 + (-1)^{n-1+1} = 1 + (-1)^{n-1}.(-1) = 1 - (-1)^{n-1} = 1 + 1 - 1 - (-1)^{n-1}$

$= 2 - (1 + (-1)^{n-1}) = 2 - a(n-1)$

Definição Recursiva:

$$\begin{cases} a(1) = 0 \\ a(n) = 2 - a(n-1), \ n > 1 \end{cases}$$

b) $a(1) = 1^2 = 1$

$a(2) = 2^2 = 4 = (\sqrt{a(1)} + 1)^2$

$a(3) = 3^2 = 9 = (\sqrt{a(2)} + 1)^2$

$a(4) = 4^2 = 16 = (\sqrt{a(3)} + 1)^2$

$\vdots$

$a(n-1) = (n-1)^2$

$a(n) = n^2 = (n - 1 + 1)^2 = (\sqrt{(n-1)^2} + 1)^2 = (\sqrt{a(n-1)} + 1)^2$

Definição Recursiva:

$$\begin{cases} a(1) = 1 \\ a(n) = (\sqrt{a(n-1)} + 1)^2, \ n > 1 \end{cases}$$

c) $a(1) = 1(1-1) = 1.0 = 0$

$a(2) = 2(2-1) = 2.1 = 2$

$a(3) = 3(3-1) = 3.2 = 6$

$a(4) = 4.(4-1) = 4.3 = 12$

$\vdots$

$a(n-1) = (n-1)(n-2) = n^2 - n - 2n + 2$

$a(n) = n(n-1) = n^2 - n = \underbrace{n^2 - n - 2n + 2}_{a(n-1)} + 2n - 2 = \boxed{a(n-1) + 2n - 2}$

def. recursiva:

$$\begin{cases} a(1) = 0 \\ a(n) = a(n-1) + 2n - 2, \quad n > 1 \end{cases}$$

d) $a(1) = 10^1 = 10$

$a(2) = 10^2 = a(1).10 = 100$

$a(3) = 10^3 = a(2).10 = 1000$

$\vdots$

$a(n-1) = 10^{n-1}$

$a(n) = 10^n = 10^{n-1}.10 = a(n-1).10$

def. recursiva:

$$\begin{cases} a(1) = 10 \\ a(n) = a(n-1).a(1), \quad n > 1 \end{cases}$$

3 a) 1. 0 (zero) e 2 são pares não negativos;

2. Se x é par não negativo, então 2.x é par não negativo.

b) 1. 5 é múltiplo não negativo de 5;

2. Se x é múltiplo não negativo de 5, então $x.n$ é também ($n \geq 0 \in \mathbb{N}$).

c) 1. 3 é potência de 3 e é positivo;

2. Se x é potência de 3 e é positivo, então x^n é potência positiva de 3 ($n \geq 0 \in \mathbb{N}$)

4 $\max(a1, a2, a3, \ldots, an)$:

$\max(a1) = a1$

Se $a1 \geq a2$:

$\max(a1, a2) = a1 = \frac{2a1}{2} = \frac{a1 + a1}{2} = \frac{a_1 + a_1 + \overbrace{a_2 - a_2}^{0}}{2} = \frac{(a_1 + a_2) + (\overbrace{a_1 - a_2}^{>0})}{2}$

Senão:

$\max(a2, a1) = a2 = \frac{2a_2}{2} = \frac{a_2 + a_2}{2} = \frac{a_2 + a_2 + a_1 - a_1}{2} = \frac{(a_2 + a_1) + (\overbrace{a_2 - a_1}^{>0})}{2}$

$\therefore \max(a_1, a_2) = \frac{(a_1 + a_2) + |a_1 - a_2|}{2}$

$\vdots$

$\max(a1, a2, \ldots, an) = \max(\max(a1, a2, \ldots, an-1), a_n)$

Def. Recursiva:

$$\begin{cases} \max(a1) = a_1 & (n = 1) \\ \max(a1, a2) = \frac{(a1 + a2) + |a1 - a2|}{2} & (n = 2) \\ \max(a1, a2, \ldots, an) = \max(\max(a1, a2, \ldots, an-1), a_n) & (n > 2 \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Base (n = 1, n = 2)

Relação de recorrência (n > 2)

$\min(a1, a2, a3, \dots, an)$:

$\min(a1) = a1$

Se $a1 \geq a2$:

$$\min(a1, a2) = a2 = \frac{2a_2}{2} = \frac{a_2 + a_2}{2} = \frac{a_2 + a_2 + \overbrace{a_1 - a_1}^{0}}{2} = \frac{(a_2 + a_1) + (\overbrace{a_2 - a_1}^{<0})}{2}$$

Senão:

$$\min(a2, a1) = a_1 = \frac{2a_1}{2} = \frac{a_1 + a_1}{2} = \frac{a_1 + a_1 + a_2 - a_2}{2} = \frac{(a_1 + a_2) + (\overbrace{a_1 - a_2}^{<0})}{2}$$

$$\therefore \min(a_1, a_2) = \frac{(a_1 + a_2) - |a_1 - a_2|}{2}$$

$\vdots$

$$\min(a1, a2, \dots, an) = \min(\min(a1, a2, \dots, an-1), an)$$

Def. Recursiva:

$$\begin{cases} \min(a1) = a1 & (n = 1) \\ \min(a1, a2) = \dfrac{(a1 + a2) - |a1 - a2|}{2} & (n = 2) \\ \min(a1, a2, \dots, an) = \min(\min(a1, a2, \dots, an-1), an) & (n > 2 \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Base (n = 1, n = 2); Relação de recorrência (n > 2).

5) a) Base: $(n = 1)$

$\hookrightarrow \max(-a1) = -a1$

$-\min(a1) = -a1$

OK!

$(n = 2)$

$$\hookrightarrow \max(-a1; a2) = \frac{-a1 - a2 + |-a1 - (-a2)|}{2}$$

$$= -\frac{(a_1 + a2) + |-a_1 + a2|}{2}$$

$$= -\frac{(a_1 + a_2 - |a_2 - a_1|)}{2}$$

$$-\min(a_1, a_2) = -\frac{(a_1 + a_2 - |a_1 - a_2|)}{2}$$

$\Rightarrow \max(-a1, -a2) = -\min(a_1, a_2)$ OK!

HI: é (V) para n.

$\therefore \max(-a1, -a2, -a3, \dots, -an) = -\min(a1, a2, a3, \dots, a_n)$

Tese: é (V) para n+1.

$\therefore \max(-a1, -a2, -a3, \dots, -a_n, -a_{n+1}) = -\min(a1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1})$

$$\Rightarrow \underbrace{\max(\underbrace{\max(-a1, -a2, -a3, \dots, -a_n)}_{HI}, -a_{n+1})}_{I} = \underbrace{-\min(\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), a_{n+1})}_{II}$$

I: $\max(-\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n), -a_{n+1})$

$$= \frac{-\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + (-a_{n+1}) + |-\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) - (-a_{n+1})|}{2}$$

$$= \frac{-\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) - a_{n+1} + |-\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + a_{n+1}|}{2}$$

(II): $-\min(\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n),a_{n+1})$

$$= -\left(\frac{\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)+a_{n+1} - |\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)-(a_{n+1})|}{2}\right)$$

$$= \frac{-\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)-a_{n+1} + |\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)-(a_{n+1})|}{2}$$

Note que (I) equivale a (II), logo a eq. é (V) p/ $n+1$.

b)

Base:

$(n=1)$: $\max(a_1+b_1) \leq \max(a_1)+\max(b_1)$?

$$a_1+b_1 \leq a_1+b_1$$ ok!

$(n=2)$: $\max(a_1+b_1, a_2+b_2) \leq \max(a_1,a_2)+\max(b_1,b_2)$

(I) $\max(a_1+b_1,a_2+b_2) = \frac{(a_1+b_1+a_2+b_2)+|a_1+b_1-a_2-b_2|}{2}$

(II) $\max(a_1,a_2)+\max(b_1,b_2) = \frac{(a_1+a_2)+|a_1-a_2|}{2} + \frac{(b_1+b_2)+|b_1-b_2|}{2}$

$$= \frac{(a_1+a_2+b_1+b_2)+|a_1-a_2|+|b_1-b_2|}{2}$$

De (I) e (II): $\frac{(a_1+\cancel{b_1+a_2+b_2})+|a_1+b_1-a_2-b_2|}{\cancel{2}} \leq \frac{(a_1+\cancel{a_2+b_1+b_2})+|a_1-a_2|+|b_1-b_2|}{\cancel{2}}$

Logo,

$\therefore a_1+b_1-a_2-b_2 \leq |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

$(a_1-a_2)+(b_1-b_2) \leq |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

Como $(a_1-a_2)=|a_1-a_2|$

ou

$(a_1-a_2) = -|a_1-a_2|$

$\hookrightarrow -|a_1-a_2| < |a_1-a_2|$

$\Rightarrow (a_1-a_2) \leq |a_1-a_2|$

Temos, então,

$b_1-b_1 \leq |b_1-b_2|$ é (V)

ok!

ou

$-(a_1+b_1-a_2-b_2) \leq |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

$-(a_1-a_2)-(b_1-b_2) \leq |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

Como $-(a_1-a_2) \leq |a_1-a_2|$

Temos, então,

$-(b_1-b_2) \leq |b_1-b_2|$ é (V)

ok!

ok p/ a base.

HI: é (v) para n.

$\therefore \max(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3,\dots,a_n+b_n) \leq \max(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)+\max(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$

Tese: é (v) para $n+1$.

$$\therefore \underbrace{\max(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3,\dots,a_n+b_n,a_{n+1}+b_{n+1})}_{\text{I}} \leq \underbrace{\max(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,a_{n+1})+\max(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n,b_{n+1})}_{\text{II}}$$

(I): $= \max(\max(a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n), a_{n+1}+b_{n+1})$

HI HI

$$= \frac{\max(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)+a_{n+1}+b_{n+1}+|\max(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)-(a_{n+1}+b_{n+1})|}{2}$$

$$= \frac{\max(a_1,\dots,a_n)+\max(b_1,\dots,b_n)+a_{n+1}+b_{n+1}+|\max(a_1,\dots,a_n)+\max(b_1,\dots,b_n)-(a_{n+1}+b_{n+1})|}{2}$$

(II): $= \max(\max(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n),a_{n+1}) + \max(\max(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n),b_{n+1})$

$$= \frac{\max(a_1,\dots,a_n)+a_{n+1}+|\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}|}{2} + \frac{\max(b_1,\dots b_n)+b_{n+1}+|\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|}{2}$$

De (I) e (II):

$$\frac{\max(\cancel{a_1},\dots,a_n) + \max(\cancel{b_1},\dots,b_n) + \cancel{a_{n+1}} + \cancel{b_{n+1}} + |\max(a_1,\dots,a_n)+\max(b_1,\dots,b_n)-(a_{n+1}+b_{n+1})|}{\cancel{2}}$$

$$\le \frac{\max(\cancel{a_1,\dots},a_n)+\cancel{a_{n+1}}+|\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}|}{\cancel{2}} + \frac{\max(\cancel{b_1,\dots} b_n)+\cancel{b_{n+1}}+|\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|}{\cancel{2}}$$

$\therefore |\max(a_1,\dots,a_n)+\max(b_1,\dots,b_n)-a_{n+1}-b_{n+1}| \le |\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}| + |\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

$|\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}+\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

$\therefore \max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}+\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}$
$\le |\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}| + |\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

Como $\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1} = |\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}|$

Temos, então,

$\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1} \le |\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

que é (V). OK!

ou

$-(\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1})-(\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1})$
$\le |\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}| + |\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

Como $-(\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}) \le |\max(a_1,\dots,a_n)-a_{n+1}|$

Temos, então,

$-(\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}) \le |\max(b_1,\dots,b_n)-b_{n+1}|$

que é (V) OK

Provado para a Tese ■

c) Base: $(n=1)$: $\min(a_1+b_1) \ge \min(a_1)+\min(b_1)$?

$a_1+b_1 \ge a_1+b_1$ OK!

$(n=2)$: $\min(a_1+b_1,a_2+b_2) \ge \min(a_1,a_2)+\min(b_1,b_2)$

(I) $\min(a_1+b_1,a_2+b_2) = \frac{(a_1+b_1+a_2+b_2)-|a_1+b_1-a_2-b_2|}{2}$

(II) $\min(a_1,a_2)+\min(b_1,b_2) = \frac{(a_1+a_2)-|a_1-a_2|}{2} + \frac{(b_1+b_2)-|b_1-b_2|}{2}$

$= \frac{(a_1+a_2+b_1+b_2)-|a_1-a_2|-|b_1-b_2|}{2}$

De (I) e (II): $\frac{(a_1+\cancel{b_1+a_2}+b_2)-|a_1+b_1-a_2-b_2|}{\cancel{2}} \ge \frac{(a_1+\cancel{a_2+b_1}+b_2)-|a_1-a_2|-|b_1-b_2|}{\cancel{2}}$

Logo,

$\times(-1)$ $\therefore -(a_1+b_1-a_2-b_2) \ge -|a_1-a_2|-|b_1-b_2|$

$(a_1-a_2+b_1-b_2) \le |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

Como $(a_1-a_2) = |a_1-a_2|$

ou

$(a_1-a_2) = -|a_1-a_2|$
$\hookrightarrow -|a_1-a_2| < |a_1-a_2|$

$\Rightarrow (a_1-a_2) \le |a_1-a_2|$

Temos, então,

$b_1-b_1 \le |b_1-b_2|$ é (V) ok!

ou

$-(-(a_1+b_1-a_2-b_2)) \ge -|a_1-a_2|-|b_1-b_2|$

$\therefore -(a_1-a_2)-(b_1-b_2) \le |a_1-a_2|+|b_1-b_2|$

Como $-(a_1-a_2) \le |a_1-a_2|$

Temos, então,

$-(b_1-b_2) \le |b_1-b_2|$ é (V)

OK!

Provado p/a base

HI: é (V) para n.

$\therefore \min(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots, a_n+b_n) \geq \min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) + \min(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$

Tese: é (V) para $n+1$.

$$\therefore \underbrace{\min(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots, a_n+b_n, a_{n+1}+b_{n+1})}_{\mathrm{I}} \geq \underbrace{\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,a_{n+1}) + \min(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n,b_{n+1})}_{\mathrm{II}}$$

(I): $= \min(\min(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n), a_{n+1}+b_{n+1})$

$$= \frac{\min(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) + a_{n+1}+b_{n+1} - |\min(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) - (a_{n+1}+b_{n+1})|}{2}$$

HI HI

$$= \frac{\min(a_1,\dots,a_n) + \min(b_1,\dots,b_n) + a_{n+1} + b_{n+1} - |\min(a_1,\dots,a_n) + \min(b_1,\dots,b_n) - (a_{n+1}+b_{n+1})|}{2}$$

(II): $= \min(\min(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n), a_{n+1}) + \min(\min(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n), b_{n+1})$

$$= \frac{\min(a_1,\dots,a_n) + a_{n+1} - |\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}|}{2} + \frac{\min(b_1,\dots,b_n) + b_{n+1} - |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|}{2}$$

De (I) e (II):

$$\frac{\cancel{\min(a_1,\dots,a_n)} + \cancel{\min(b_1,\dots,b_n)} + \cancel{a_{n+1}} + \cancel{b_{n+1}} - |\min(a_1,\dots,a_n) + \min(b_1,\dots,b_n) - (a_{n+1}+b_{n+1})|}{\cancel{2}}$$

$$\geq \frac{\cancel{\min(a_1,\dots,a_n)} + \cancel{a_{n+1}} - |\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}|}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{\min(b_1,\dots,b_n)} + \cancel{b_{n+1}} - |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|}{\cancel{2}}$$

$\therefore -|\min(a_1,\dots,a_n) + \min(b_1,\dots,b_n) - a_{n+1} - b_{n+1}| \geq -|\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}| - |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|$

$-|\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1} + \min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|$

$\times(-1)$ $\therefore -(\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1} + \min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1})$ ou $-(-(\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}) + (\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}))$

$\geq -(|\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}| + |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|)$ | $\geq -(|\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}| + |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|)$

Como $\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1} \leq |\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}|$

Temos, então,

$\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1} \leq |\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|$

que é (V). Ok!

Como $\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1} \geq -|\min(a_1,\dots,a_n) - a_{n+1}|$

Temos, então,

$\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1} \geq -|\min(b_1,\dots,b_n) - b_{n+1}|$

que é (V) Ok

Provado para a Tese ∎

6 a) $A(m,n) = A(0,1)$: $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow A(0,1) = 2n = 2.1 \Rightarrow \boxed{A(0,1)=2}$

b) $A(m,n) = A(1,0)$: $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1,0) = 0}$

c) $A(m,n) = A(2,2)$: $\begin{cases} m=2 \Rightarrow m \geq 1 \\ n=2 \Rightarrow n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow A(2,2) = A(m-1, A(m,n-1))$

$= A(1, A(2,1))$

$= A(1, 2) = A(1-1, A(1,2-1))$

$= A(0, A(1,1)) = A(0,2) = 2.2 = 4$

$\Rightarrow \boxed{A(2,2) = 4}$

d) $A(m,n) = A(1,1)$: $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1,1) = 2}$ //

(7) Base $(m=1)$: $A(1,2) = 4$ (?)

$= A(1-1, A(1, 2-1)) = A(0, A(1,1)) = A(0,2) = 2.2 = 4$ ok!

HI: é (V) p/ m.

$\therefore A(m,2) = 4$

Tese: é (V) p/ m + 1.

$\therefore A(m+1, 2) = 4$ (?)

$\therefore A(m+1-1, A(m+1, 2-1))$

$= A(m, \underbrace{A(m+1, 1)})$

$= \underbrace{A(m, 2)}_{HI} = 4$ ok!

■

(8) Base $(n=1)$: $A(1,1) = 2 = 2^1$ ok!

HI: é (V) p/ n.

$\therefore A(1,n) = 2^n$

Tese: é (V) p/ n+1.

$\therefore A(1, n+1) = 2^{n+1}$ (?)

$= A(1-1, \underbrace{A(1, n+\cancel{1}-\cancel{1})}_{HI})$

$= A(0, 2^n) = 2.2^n = 2^{n+1}$ (Tese) ok!

■