Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn) - Graduação em Engenharia da Computação
Matemática Discreta - 2º Semestre de 2020 - 2ª Prova - 14 de Julho de 2021

1. (1,5) A sequência de Lucas é semelhante à sequência de Fibonacci. Edouard Lucas, foi o matemático francês que inventou o jogo da *torre de Hanoi*. Nessa sequência, $L_1 = 2$, $L_2 = 1$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para n maior que 2. Use indução matemática para provar que sendo n um inteiro não negativo, $3 \mid L_{4n+3}$.

2. (1,0) A *função 91 de McCarthy* (definida por John McCarthy, um dos fundadores da inteligência artificial) é definida usando-se a seguinte regra, onde n é um inteiro positivo. dada a seguir:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10, & n > 100 \\ M(M(n+11)), & n \leq 100 \end{cases}$$

a) Encontre $M(102)$ e $M(97)$. Mostre os passos.
b) Defina um algoritmo recursivo para calcular o valor de $M(n)$.

3. (1,5) Considere $A = \{1, 2, \ldots n\}$, onde n é um inteiro positivo e $B = \{0, 1, 2\}$. Justifique cada item a seguir.
a) Quantas funções existem da A em B?
b) Quantas funções de A em B são injetoras?
c) Quantas funções existem da A em B que atribuam 2 aos valores de 1 e de n ?

4. (1,5) Apresente uma prova da seguinte identidade conforme pedido nos itens a seguir.

$$\binom{n+3}{k} = \binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$$

a) Usando a identidade de Pascal;
b) A partir de um argumento combinatório.

5. (1,0) Use o teorema binomial para provar que: $\sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k} = 4^n$, onde n é um número natural.

6. (1,5) Responda os itens a seguir justificando conforme pedido.

1. Uma caixa contém 11 chocolates brancos e 11 chocolates pretos. Uma criança pega os chocolates sem olhar para dentro da caixa. Pergunta-se: **(a)** Quantos chocolates devem ser pegos para se garantir que pelo menos 4 são da mesma cor? **(b)** Quantos chocolates deverão ser pegos para se ter certeza de que 3 são brancos? Justifique usando o princípio da casa dos pombos.

2. Quantos inteiros positivos menores que 1.000.000 **(a)** são divisíveis por 2, 3 ou 5? **(b)** são divisíveis por 3, mas não por 7? Justifique usando o princípio da inclusão-exclusão.

7. (2,0) Responda os itens a seguir justificando adequadamente.
a) Mostre que se a, b, c e d forem inteiros de forma que $a \mid c$ e $b \mid d$ então $ab \mid cd$.
b) Encontre -13 **mod** 2 e -102 **mod** 11.
c) Use o algoritmo de Euclides para escrever o *mdc* de 52 e 87 como uma combinação linear de 52 e 87.
d) Prove que se a for ímpar então o *mdc* de a e $a + 2$ é igual a 1.

BÔNUS (1,0) Use indução matemática para provar que $3^n < n!$, para n maior que 6.