UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - ÁREA 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
V LISTA DE EXERCÍCIOS
Professora: Rúbia Esterfânia
2020.2

Questão 1. Os alunos de uma turma de cálculo diferencial e integral I, calcularam os seguintes limites usando a regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = L_1 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x - \sin(4x)}{x^3} = L_2 \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - x} = L_3 \tag{3}$$

O valor de $\sqrt{3 \cdot b}$, onde b é dado por $b = -L_1 \cdot L_3 \cdot L_2$ é:

(a) 4

(b) -4

(c) $-\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

(e) 0

(f) Nenhuma das alternativas.

Questão 2. Calcule os seguintes limites, usando a regra de L'Hôspital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^2 + x - 6}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 16}$

(c) $\displaystyle\lim_{t\to \infty} \frac{\ln(3t)}{t^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{t\to \infty} \left[t \ln\left(1 + \frac{3}{t}\right)\right]$

Questão 3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^7 - 18x^3 + 9$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{t} + 12t - 2t^2$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{8-4x^2}{9x^2+5x}$

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{20x^4-7x^3}{2x+9x^2+5x^4}$

(e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x = e^{1/x}$.

(g) $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \big[1-\cos(\theta)\big]\ln(\theta)$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + ln(x)\right]$.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{\ln(x)}\right]^{x+1}$.

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$.

(m) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sec^3(x)}{1-\operatorname{sen}^3(x)}$.

(n) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$.

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left[e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$.

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

(q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cossec}(x)$.

Questão 4. Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $g(x) = x$. Mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe.

Por que isso nâo contraria a regra de l'Hôspital?

Questão 5. (2EE-2016.1) Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) + x^2}{\operatorname{sen}(x) + x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x}}{\operatorname{arctg}(x)} \cdot$ não existe.

Questão 6. (2EE-2016.2) / (2EE-2017.2) Calcule os seguintes limites, **identificando o tipo da indeterminação**, caso exista:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg}(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln(e^x - 1)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{arctg}(x) - \ln(x^2+1)}{x^2}$

Questão 7. Estude a concavidade da função f. Determine ainda os pontos de inflexão (se houver).

(a) $f(x) = x^5 - 5x$.

(b) $f(x) = e^{2x} - e^x$.

(c) $f(x) = e^{-x^2}$.

(d) $f(x) = e^{-1/x}$.

(e) $f(x) = xe^{-2x}$.

(f) $f(x) = xe^{1/x}$.

(g) $f(x) = x - e^x$.

(h) $f(x) = x \ln(x)$.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$.

(j) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

(k) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

(l) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Questão 8. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$.

(a) Determine os valores de b e c para os quais $x_0 = 1$ é um ponto de inflexão de f.

(b) Existem b e c que tornam $x_0 = 1$ um ponto de inflexão horizontal? Em caso afirmativo, determine-os.

Questão 9. Mostre que a curva $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ tem três pontos de inflexão, os quais ficam sobre uma mesma reta.

Questão 10. Para quais valores de c o polinômio $p(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? e um ponto de inflexão? e nenhum?

Questão 11. Sejam f uma função, e c um valor do domínio de f. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c? (Dica: considere a função $g = f'$)

Questão 12. Considere as seguintes funções:

1. $T(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
2. $t(x) = 3x^4 - 12x^2 + 8$.
3. $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x}$.
4. $g(x) = x^2 e^{-x}$.
5. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$.
6. $F(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
7. $G(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$.
8. $H(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+x}$.
9. $P(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$.
10. $Q(x) = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$
11. $R(t) = t\ln(t)$.

12. $S(t) = \dfrac{t}{\ln(t)}\cdot$

13. $p(t) = \text{arctg}(t^2)$.

14. $q(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \ln(t)$

15. $r(t) = te^{-2t}$

16. $s(t) = e^{-t^2}$

17. $Z(t) = e^{2t} - e{-}t.$

18. $z(t) = t - e^{-t}$

19. $\text{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$

20. $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot$

21. $\text{tgh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\cdot$

22. $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - = e^{-x}}\cdot$

23. $\text{sech}(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}\cdot$

24. $\text{csch}(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}\cdot$

Para cada uma dessas funções, resolva os seguintes itens:

1. Determine o domínio da função.
2. **(Opcional)** Determine as raízes (se houver), e determine se a função é par ou ímpar, o nenhuma destas opções.
3. Obtenha as equações das assíntotas verticais ao gráfico da função, ou justifique a não existência de tais retas.
4. Obtenha as equações das assíntotas horizontais ao gráfico da função, ou justifique a não existência de tais retas.
5. Encontre os intervalos de crescimento e de decrescimento.
6. Determine os pontos de máximo ou mínimo (se houver). Ainda, determine se tais valores são absolutos ou relativos (por convenção, "relativo" significa "relativo, mas não absoluto").
7. Determine os intervalos para os quais o gráfico da função é côncavo para cima ou para baixo. Determine ainda os pontos de inflexão (se houver).
8. Utilizando as informações dos itens anteriores esboce o gráfico da função. Deve indicar as coordenadas dos pontos notáveis obtidos nos itens anteriores.

Questão 13. Para cada $c \in \mathbb{R}$, definimos $f_c(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. Chamamos isto de uma **família de funções a um parâmetro** c. Responda:

(a) Para que valores de c a função f_c possui pontos de máximo **e** de mínimo?

(b) Mostre que todos pontos de máximo e de mínimo de cada curva na família estão sobre a curva $y = x - x^3$. Ilustre isso fazendo o gráfico desta última curva e de vários membros da família (ou seja, esboce o gráfico de f_c para alguns valores de c).

Bons Estudos!