Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática (Mestrado Integrado em Ciências Farmacêuticas)

Tabelas

Primitivas imediatas

Função	Primitiva
a	$ax + C$
$f^m \; f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C \; (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$a^f \; f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C \; (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Funções trigonométricas

Função	Primitiva
$f' \; \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
$f' \; \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
$f' \; \operatorname{tg} f$	$-\ln\lvert\cos f\rvert + C$
$f' \; \operatorname{cotg} f$	$\ln\lvert\operatorname{sen} f\rvert + C$
$f' \; \sec f$	$\ln\lvert\sec f + \operatorname{tg} f\rvert + C$
$f' \; \operatorname{cosec} f$	$\ln\lvert\operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f\rvert + C$
$f' \; \sec^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
$f' \; \operatorname{cosec}^2 f$	$-\operatorname{cotg} f + C$
$f' \; \sec f \; \operatorname{tg} f$	$\sec f + C$
$f' \; \operatorname{cosec} f \; \operatorname{cotg} f$	$-\operatorname{cosec} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cos} f + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cotg} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arc\,sec} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cosec} f + C$

Funções hiperbólicas

Função	Primitiva
$f' \; \operatorname{sh} f$	$\operatorname{ch} f + C$
$f' \; \operatorname{ch} f$	$\operatorname{sh} f + C$
$f' \; \operatorname{th} f$	$\ln(\operatorname{ch} f) + C$
$f' \; \operatorname{coth} f$	$\ln\lvert\operatorname{sh} f\rvert + C$
$f' \; \operatorname{sech}^2 f$	$\operatorname{th} f + C$
$f' \; \operatorname{cosech}^2 f$	$-\operatorname{coth} f + C$
$f' \; \operatorname{sech} f \; \operatorname{th} f$	$-\operatorname{sech} f + C$
$f' \; \operatorname{cosech} f \; \operatorname{coth} f$	$-\operatorname{cosech} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\arg \operatorname{sh} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\arg \operatorname{ch} f + C$
$\dfrac{f'}{1-f^2}$	$\arg \operatorname{th}$ f+C, $\lvert f\rvert < 1$, $\arg \operatorname{coth}$ f+C, $\lvert f\rvert > 1$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1-f^2}}$	$-\arg \operatorname{sech} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1+f^2}}$	$\arg \operatorname{cosech} f + C$

Primitivação por partes

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$

sendo F uma primitiva de f.

Regras práticas

Potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas

Potências ímpares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ **ou** $\operatorname{ch} x$. Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o factor resultante passa-se para a co-função através das fórmulas fundamentais:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Potências pares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ **ou** $\operatorname{ch} x$. Passa-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1).$$

Potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{th} x$) **ou** $\operatorname{cotg} x$ ($\operatorname{coth} x$). Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ($\operatorname{th}^2 x$) ou $\operatorname{cotg}^2 x$ ($\operatorname{coth}^2 x$) e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \qquad (\operatorname{th}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x),$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1, \qquad (\operatorname{coth}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x).$$

Potências pares de $\sec x$ ($\operatorname{sech} x$) **ou** $\operatorname{cosec} x$ ($\operatorname{cosech} x$). Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad (\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x, \qquad (\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1).$$

Potências ímpares de $\sec x$ ($\operatorname{sech} x$) **ou** $\operatorname{cosec} x$ ($\operatorname{cosech} x$). Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e primitiva-se por partes começando por esse factor.

Produtos de potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas

Potência ímpar de $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) **por qualquer potência de** $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$). Destaca-se $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad (\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1).$$

Potência ímpar de $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$) **por qualquer potência de** $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$). Destaca-se $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x, \qquad (\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x).$$

Potência par de $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) por potência par de $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$). Aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, && (\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x),\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, && (\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x),\\
\operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x), && \left(\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)\right),\\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x), && \left(\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)\right).
\end{aligned}$$

Produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{sen} mx$ ou $\cos nx$ ($\operatorname{sh} mx$ ou $\operatorname{ch} nx$)

Aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), && \left(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))\right),\\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), && \left(\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))\right),\\
\operatorname{sen} x \cos y &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)), && \left(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))\right).
\end{aligned}$$

Primitivação de fracções racionais

Consideremos a fracção $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinómios. Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efectua-se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$. Obtém-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

sendo $\dfrac{R(x)}{g(x)}$ uma fracção própria. Para primitivar a fracção própia procede-se de acordo com os seguintes passos.

Decomposição do denominador da fracção própria em factores. Os factores obtidos são da forma $(x-a)^\alpha$, correspondendo a raízes reais a de multiplicidade α, ou da forma $\left[(x-p)^2+q^2\right]^\beta$, correspondendo às raízes imaginárias $p \pm qi$ de multiplicidade β.

Decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples. Cada factor do tipo:

1. $(x-a)^\alpha$ dá origem a
$$\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a},$$
com A_i, $i = 1, \ldots, \alpha$, constantes a determinar;
2. $\left[(x-p)^2+q^2\right]^\beta$ dá origem a
$$\frac{P_1 x + Q_1}{[(x-p)^2+q^2]^\beta} + \frac{P_2 x + Q_2}{[(x-p)^2+q^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x-p)^2+q^2},$$
com P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, \beta$, constantes a determinar.

Determinação das constantes. As constantes A_i, $i = 1, \ldots, \alpha$, e P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, \beta$, podem ser determinadas conjuntamente pelo *método do coeficientes indeterminados*. Há, no entanto, uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos de seguida.

1. Cálculo dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, \alpha$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)(x-a)^\alpha$. Se:
   (a) $\alpha = 1$, temos que
   $$A_1 = \left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a};$$
   (b) $\alpha > 1$, efectua-se a divisão
   $$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h}$$
   dispondo os polinómios por ordem crescente dos seus monómios, obtendo-se
   $$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h} = A_1 + A_2 h + \cdots + A_\alpha h^{\alpha-1} + \frac{R_\alpha(a+h)}{\psi(a+h)}.$$

2. Cálculo dos coeficientes P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, \beta$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)\left[(x-p)^2+q^2\right]^\beta$. Se:
   (a) $\beta = 1$, temos que
   $$\left[P_1 x + Q_1 = \frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=p+qi};$$
   (b) $\alpha > 1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (as constantes P_1 e Q_1 podem ser obtidas como em (a)).

Nota: Caso apareçam elementos simples da forma $\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n}$, estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n}\right) dx = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{2n-2} \times \frac{x-p}{[(x-p)^2+c]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^{n-1}}\right) dx\right].$$

Primitivação por substituição

Sejam a, b, c e d constantes reais. A notação $R(...)$ indica que se trata de uma função racional (envolvendo apenas somas, diferenças, produtos e quocientes) do que se encontra entre parêntesis.

Tipo de Função	Substituição
$\frac{1}{(x^2+a^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$	$x = a \operatorname{tg} t$
$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $b^2 - 4ac < 0$, onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a $2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
$\frac{P(x)}{((x-p)^2+q^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a $2k$	$x = p + qt$
$\frac{x^{k-1}}{x^{2k} \pm a^2}$, $k \in \mathbb{Q}$, $k > 1$	$x^k = at$

Tipo de Função	Substituição
$R(a^{rx}, a^{sx}, ...)$	$a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c.(r, s, ...)$
$R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, ...\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, ...)$
$R\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, ...\right)$	$ax + b = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, ...)$
$R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...\right)$	$x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, ...)$
$R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{th} t$
$R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{sh} t$
$R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$ $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \sec t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{ch} t$ $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos^2 t$
$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$
$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a}\right)$	$x = \frac{a}{b} \sec^2 t$
$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$	se $a > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$ se $c > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$ se $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_2)t$
$x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = x^n t^q$

Tipo de Função	Substituição
$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: (a) se $R(u,v)$ é ímpar na variável u, isto é, $R(-u,v)=-R(u,v)$ (b) se $R(u,v)$ é ímpar na variável v, isto é, $R(u,-v)=-R(u,v)$ (c) se $R(u,v)$ é par em nas variáveis u e v, isto é, $R(-u,-v)=R(u,v)$ (d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	 $\cos x = t$ $\operatorname{sen} x = t$ $\operatorname{tg} x = t$, obtendo então (supondo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$) $\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, obtendo então $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
$R(\operatorname{sen} mx, \cos mx)$	$mx = t$
$R(e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$x = \ln t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$: (a) R é ímpar em $\operatorname{sh} x$ (b) R é ímpar em $\operatorname{ch} x$ (c) R é par em $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ (d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	 $\operatorname{ch} x = t$ $\operatorname{sh} x = t$ $\operatorname{th} x = t$, obtendo então $\operatorname{sh} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $\operatorname{th} \dfrac{x}{2} = t$, obtendo então $\operatorname{sh} t = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
$R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$	$mx = t$

Observação: Quando se efectua uma substituição, aparece frequentemente uma expressão do tipo $\sqrt{f^2(t)}$. No caso geral terá de se escrever

$$\sqrt{f^2(t)} = |f(t)|.$$