UFPE - Cin Matemática Discreta - Ciência da Computação – Prova 4 03/11/2020

1. **(60pts)** Dê um exemplo de uma partição **P** no conjunto dos números inteiros e uma respectiva relação de equivalência conforme pedido em cada item a seguir.

a) **P** contem uma quantidade infinita de classes de equivalência.
b) **P** possui 8 classes de equivalência.
c) **P** possui apenas uma classe de equivalência.

2. **(30pts)** Suponha que definimos o seguinte poset (A,R), onde A é o conjunto dos dígitos de 0 a 9 e a ordem R é definida como:
   - x e y não são comparáveis se um deles for um número par e o outro ímpar. Por exemplo, o par $(0,3) \notin R$
   - $(x,y) \in R$ se $x \leq y$ e x e y são números pares ou $y \leq x$ e x e y são números ímpares. Por exemplo, $(2,4) \in R$, mas $(4,2) \notin R$. O par $(3,1) \in R$, mas o par $(1,3) \notin R$.

   Use a ordem lexicográfica obtida a partir de R para ordenar as seguintes cadeias de dígitos decimais, caso não seja possível, justifique.

   a) 24, 241, 0153, 095, 24358, 099876, 03
   b) 1, 991, 643, 8

3. **(80pts)** Prove ou refute se cada uma das relações dadas a seguir é uma ordem parcial no conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. Em caso afirmativo responda os seguintes itens: **i)** desenhe o diagrama de Hasse apenas para os elementos do conjunto A={ (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (1,2),(3,3), (3,4)}; **ii)** determine os elementos maximais e minimais de (A,R); **iii)** o conjunto de limitantes inferiores e superiores de B = {(2,2), (3,3)}, sendo $B \subseteq A$; e caso seja possível, **iv)** desenhe o diagrama de Hasse de um subconjunto de (A,R) que seja um reticulado e possua no mínimo 5 elementos.

   a) $R = \{ ((a,b), (c,d)) \mid a \leq c \}$
   b) $R = \{ ((a,b), (c,d)) \mid a \leq c \text{ e } b \geq d\}$

4. **(40pts)** Sejam R e S relações no conjunto dos inteiros positivos.
   a) Prove ou refute: Se R é simétrica então R^2 é simétrica.
   b) Prove ou refute: Se $S^2 \subseteq S$ então S é transitiva.
   c) Descreva $R \circ S$ e $S \circ R$ sabendo que as descrições para R e S são: *R é o conjunto de todos os pares (x, x^2) e S é conjunto de todos os pares (3y, y)*.

5. **(40pts)** Sejam R_1, R_2 e R relações em um conjunto A.
   a) Considere que $R_1 \subseteq R_2$. Sejam S_1 e S_2 os fechos reflexivos de R_1 e R_2, respectivamente, prove que $S_1 \subseteq S_2$.
   b) Considere que $R = R_1 \cup R_2$. Sejam S, S_1 e S_2 os fechos simétricos de R, R_1 e R_2, respectivamente, prove que $S = S_1 \cup S_2$
   c) Seja o conjunto A={1,2,3,4} e R={(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)}. Calcule o fecho transitivo de R.