PROVA MATEMATEMÁTICA DISCRETA
KAILANE EDUARDA FELIX DA SILVA (125.769.454-57)

① a) 1. Suponha que n é par

2. De 1, temos que $n = 2k$, onde $k \in \mathbb{Z}$

3. De P1, temos que n^2+3n é par

4. então $(2k)^2 + 3 \cdot 2k$, $4k^2+6k \Rightarrow 2(\underbrace{2k^2+3k}_{m})$

5. $2m$ é um número par, quando $k \in \mathbb{Z}$.

6. logo, quando n é par, n^2+3n é par.

b) 1. Suponho que n é ímpar, $n = 2k+1$ onde $k \in \mathbb{Z}$

2. De P1, temos que n^2+3n é par

3. $n^2+3n \rightarrow (2k+1)^2 + 3\cdot(2k+1) \rightarrow ((2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2) + 6k+3$

$4k^2+4k+1+6k+3 \rightarrow 4k^2+10k+4 \rightarrow 2(\underbrace{2k^2+5k+2}_{m})$

4. $2m$ é par, com $k \in \mathbb{Z}$.

5. logo, provamos que para todo n (ímpares e pares), n^2+3n é par.

1② Contradição (assumimos o oposto do que queremos provar)

1. Suponho que $a+b$ é um número racional
2. $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$
3. temos que $\sqrt{2}+1$ é um número irracional
4. o passo 3 contradiz o passo 1, chegamos a um absurdo.
5. logo, provamos que $a+b$, sendo a um número racional e b um número irracional, é um número irracional.

② $(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$

1. $(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B)$ (pela relação => $A - B = (A \cap \bar{B})$)
2. $[((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}))] \cup (A \cap B)$ distributiva
3. $[((A \cup B) \cap \underbrace{(\bar{B} \cup B)}_{\text{UNIVERSO}}) \cap (\underbrace{(A \cup \bar{A})}_{\text{UNIVERSO}} \cap (\bar{B} \cup \bar{A}))] \cup (A \cap$
4. $[((A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})) \cup (A \cap B)$ distributiva
5. $((A \cup B) \cup (A \cap B)) \cap ((\bar{B} \cup \bar{A}) \cup (A \cap B))$
6. $(A \cup B) \cap \underbrace{((\overline{A \cap B}) \cup (A \cap B))}_{\text{UNIVERSO}}$
7. $(A \cup B)$

logo, $(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$.

③

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ o conjunto A_i vai até i, sendo $i = 1$, a união se dá por A_n

b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ o conjunto A_i vai até i, sendo $i = 1$ a intersecção se dá por A_1.

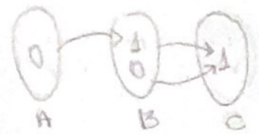
④ ⓐ

1. Suponha que $x \in (A \cup B)$
2. De 1, temos que $x \in A \vee x \in B$
3. De P1, temos que $x \in A \wedge x \in B$
4. De 3 e 2, temos que $x \in A \cup B \wedge x \in A \cap B$.
5. Pela definição de união, $\forall x (x \in A \to x \in B)$, e para dois conjuntos serem iguais, todos os elementos deles devem ser iguais também.
6. Se $A \cup B$ é subconjunto de $A \cap B$, $A = B$.
7. Logo, $(A \cup B) \subseteq (A \cup B) \to A = B$.

ⓑ

⑤ Supondo os conjuntos:

ⓐ $A\{0\}$, $B\{0,1\}$, $C\{1\}$



$F: A \to B$ $\quad g: B \to C$

$F(x) = x+1$

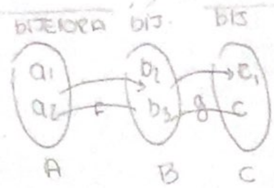
$g(x) = 1$

$g \circ F: A \to C$

$g(F(x)) = g(x+1) = 1$

Nesse caso, usamos um exemplo onde F é injetora mas não sobrejetora e g é sobrejetora mas não injetora. E sua composição $(g \circ F)$ é bijetora.

ⓑ



Ex: $g \circ F$

R = VERDADEIRO.

Uma função bijetora possui as seguintes propriedades:

$I = B$ (imagem = contradomínio) e

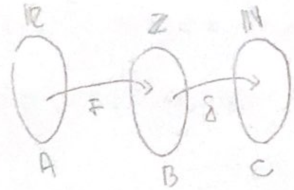
para x e y, onde $x \neq y$, $F(x) \neq F(y)$

Como a composição de duas funções bijetoras também é bijetora, e uma composição de uma sobrejetora com uma injetora também é bijetora (exemplo acima). Podemos concluir que F e g podem ser bijetoras ou sobrejetora e injetora respectivamente.

✓ g $\quad$ ✓ F

ⓒ $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $C = \mathbb{N}$. $F(x) = \lceil x \rceil$

e $g(x) = x^2$



$g \circ F(4,3) \to$

$g(F(4,3))$

$F = \lceil 4,3 \rceil = 5$

$g(5) = 5^2 = 25$

⑥ a) $\{a,b\} \subseteq \{a\} \times \{b\}$

FALSO, pois o conjunto $\{a,b\} \neq (a,b)$. ← par ordenado

"(a,b)" é um elemento de $\{a\} \times \{b\}$ e não a e b.

b) $\{a\} \in P(\{a\})$

VERDADEIRO, pois o conjunto $P(\{a\}) = \{\{\,\},\{a$

c) $\{\emptyset, \{a,b\}\} \subseteq P(\{a,b\})$ VERDADEIRO, pois $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto e todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

Ⓥ D) É possível, pois existem 5 vogais e essa união resulta no próprio conjunto (que tem 5 elementos também).

E) FALSO, pois $\{a\} - \{a\} = \emptyset$, e $\emptyset = \emptyset$.

Bôws:

Se A é contável, é possível fazer uma bijeção entre A e os naturais

Se B é contável, é possível fazer uma bijeção entre B e os naturais

logo, $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_i\}$, com $i \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots b_j\}$, com $j \in \mathbb{N}$

Assim, sendo $A \times B = \{(a_i, b_j)\}$, com i e $j \in \mathbb{N}$.

logo, para ser contável precisamos de uma bijeção de N para NXN. Essa bijeção existe e é provada pelo argumento da diagonalização de Cantor.