Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Graduação em Engenharia da Computação - Matemática Discreta - 3ª Prova - 18 de Agosto de 2021

(Teoria dos Números)

1. (0,5) Caso seja possível encontre uma solução onde o x é maior que 500 para a seguinte equação diofantina linear usando os resultados que estudamos: $17x + 8y = 31$

2. (0,5) Aplique o teorema chinês do resto para encontrar o inteiro não negativo x menor que 195 representado pela tupla (4,7,2), definida por (x mod 5, x mod 13, x mod 3)

3. (1,0) Use o pequeno teorema de Fermat para calcular o resto da divisão de: **a)** $3^{72} - 1$ por 133 sabendo que $133 = 7.19$ e **b)** 3^{86} por 89

(Relações e Ordens Parciais)

4. (1,5) Seja $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Encontre a menor relação de equivalência R em A que contem os pares $\{(b, b),\ (b, c),\ (d, e),\ (e, a)\}$. Liste as classes de equivalência de R. Encontre a menor relação de equivalência S em A e mostre a partição gerada por S em A.

5. (1,5) Sejam R e S relações distintas em um conjunto A, prove ou refute:

1. É possível que R e S não sejam reflexivas, porém $R \circ S$ seja reflexiva.
2. Se R é reflexiva então $R \subseteq R^2$.
3. Se R é simétrica e transitiva então R é reflexiva.
4. Se R é anti-simétrica então todo subconjunto de R também é uma relação anti-simétrica.
5. O fecho transitivo do fecho simétrico de R é sempre o mesmo que o fecho simétrico do fecho transitivo de R.

6. (1,0) Seja $A = \{-1,\ 0,\ 1,\ 3\}$. Considere a ordem lexicogáfica que se baseia na relação usual $\leq$. Encontre todos os pares em $A \times A$ que são: **a)** menores que $(0, 1)$ e **b)** maiores que $(1, -1)$. Adicionalmente, desenhe o diagrama de Hasse do poset $(A \times A,\ \leq)$.

7. (1,0) Seja o poset $(\{2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 27,\ 36\}, |)$. Encontre: **a)** os elementos maximais e minimais; **b)** Os limitantes superiores de $\{2,\ 9\}$ e o supremo, caso exista; **c)** os limitantes inferiores de $\{12,\ 6\}$ e o ínfimo, caso exista.

(Grafos e Árvores)

8. (1,0) Considere os seguintes grafos simples $G = (V_G,\ E_G)$ e $H = (V_H,\ E_H)$. Onde $V_G = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\}$, $E_G = \{\{a,\ b\},\ \{a,\ d\},\ \{b,\ c\},\ \{b,\ d\},\ \{b,\ e\},\ \{b,\ f\},\ \{c,\ g\},\ \{d,\ e\},\ \{e,\ f\},\ \{f,\ g\}\}$, $V_H = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ e
$E_H = \{\{1,\ 4\},\ \{1,\ 5\},\ \{1,\ 7\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\},\ \{3,\ 7\},\ \{4,\ 5\},\ \{5,\ 6\},\ \{5,\ 7\}\}$.

a) Determine, justificando apropriadamente, se a seguinte função $f:\ V_G \to V_H$ é um isomorfismo entre G e H.

x	a	b	c	d	e	f	g
$f(x)$	4	5	1	6	2	3	7

b) Defina uma nova função g (diferente de f) que seja um isomorfismo entre G e H. Prove que g é um isomorfismo. (*Dica: use a matriz de adjacência na prova*)

9. (1,0) Desenhe a árvore enraizada ordenada que represente a seguinte expressão e encontre as formas pré-fixa e e pó-fixa. $(((18 - 3) \div 6) \ + ((x * 4) + (3 + y) \uparrow 2) \ )$.

10. (1,5) Determine se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique apropriadamente, usando os teoremas estudados.

1. Uma árvore 5-ária cheia com 121 folhas possui 150 arestas.
2. A quantidade de vértices de um grafo simples conexo com 27 arestas, 6 vértices de grau 2, 3 vértices de grau 4 e o restante de grau 3 é 19.
3. O número máximo de arestas em um grafo bipartido completo com 14 vértices é 49.
4. Uma árvore 5-ária cheia pode ter 100 folhas.
5. Todo grafo que possui um circuito euleriano também possui um caminho euleriano que não é circuito.

Boa prova!
O bônus dessa vez ficou diluído na prova que soma 10,5 pontos