LISTA DE MATEMÁTICA DISCRETA
Lógica Proposicional e Métodos de Prova
Prof. Nivan Ferreira

1 Lógica Proposicional

Questões Propostas

1. Construa uma tabela-verdade para as proposições abaixo.

a) $\neg P \vee Q$
b) $P \wedge (Q \vee P)$
c) $\neg P \wedge (Q \vee P)$
d) $P \leftrightarrow (Q \vee R)$
e) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

2. Mostre, por equivalências lógicas, que as seguintes proposições são tautologias.

a) $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
b) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
c) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

3. Os monitores de Matemática Discreta estavam em uma das suas jogatinas de Among Us e no meio de uma discussão para decidir em quem eles iriam votar, Ambrósio foi o único acusado de ser o impostor. Agora, ele deve se defender para que não seja ejetado. Para isso, ele tem pequenas lembranças de todas as rodadas que eles jogaram até agora. Ajude Ambrósio a descobrir quem é o verdadeiro impostor a partir das proposições abaixo:

- Uma pessoa é tripulante se, e somente se, ela não é impostor.
- Se uma pessoa usou a ventilação, então essa pessoa é impostor.
- Se Lorena fez a task do lixo, então Williams estava na elétrica.
- Apenas um entre Lorena e Renatto fez a task do lixo.
- Se Williams estava na elétrica, então ele usou a ventilação na elétrica.
- Ou Tiago ou Edson não são tripulantes.
- Victória e Vitória estavam na elétrica fazendo tasks.
- Se uma pessoa usa a ventilação na elétrica enquanto outra pessoa estava na elétrica, então a primeira pessoa é acusada de ser impostor.
- Se Renatto fez alguma task, então Tiago é tripulante.

Questões de Prova

(2018.2 - MP1) Mostre que a proposição abaixo é uma tautologia usando:

$$(\neg P \land (P \lor Q)) \to Q$$

a) Tabela Verdade.
b) Equivalências Lógicas. Justifique cada passo de sua prova.

(2018.1 - EE1) Mostre que a proposição abaixo é uma tautologia usando:

$$(P \land (P \to Q)) \to Q$$

a) Tabela Verdade.
b) Equivalências Lógicas. Justifique cada passo de sua prova.

(2018.1 - MP1) Mostre que as proposições abaixo são equivalentes usando:

$$P \leftrightarrow Q \qquad \text{e} \qquad (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

a) Tabela Verdade.
b) Equivalências Lógicas. Justifique cada passo de sua prova.

(2020.3 - EE1) Você se encontra em uma ilha onde existem dois tipos de habitantes: cavaleiros e valetes. Os cavaleiros sempre falam a verdade, e os valetes sempre mentem. Nas suas andanças pela ilha você encontra duas pessoas A e B. Para cada um dos casos abaixo, use o que foi falado por A e B para determinar a que classe de habitantes (cavaleiro ou valete) A e B pertencem:

a) A diz "Ao menos um de nós é um valete" e B não diz nada.

b) A diz "Nós dois (A e B) somos cavaleiros" e B diz "A é um valete".

(2020.3 - EE1) O renomado investigador Nivan Holmes foi convocado para resolver o assassinato de Ana na festa da monitoria. Ao chegar no local, ele examinou as pistas e declarou as seguintes proposições:

- Ana, a monitora assassinada, foi morta a facadas por uma única pessoa.
- Ou Vitória ou Lorena estavam no banheiro no momento do assassinato.
- Se Ambrósio estava comendo no momento do assassinato, então Enrique a matou com veneno.

- Se Vitória estava no banheiro no momento do assassinato, então Williams a matou.

- Se Ambrósio não estava comendo no momento do assassinato, então Lorena não estava no banheiro quando o assassinato ocorreu.

- Se Lorena estava no banheiro no momento do assassinato, então Perazzo a matou.

É possível que o investigador deduza quem matou Ana? Caso sim, quem é o culpado? Justifique.

2 Métodos de Prova

Questões Propostas

1. Prove ou disprove as seguintes afirmações:

a) Sejam n e m inteiros, então $min(n, m) + max(n, m) = n + m$.

b) Se k é um inteiro maior que 1, $k^2 + 2k + 1$ é um número composto.

c) Se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par.

d) Se n e m são números inteiros e $n * m$ é par, então n é par ou m é par.

e) Se x é um número irracional, então x^3 também é irracional.

f) Se x^3 é um número irracional, então x também é irracional.

g) Para todos inteiros n, $4(n^2 + n + 1) - 3n^2$ é um quadrado perfeito.

h) Se n e m são irracionais, então n/m é irracional.

i) Se n e m são racionais, então n/m é racional.

j) Se a soma de dois números reais é menor que 50, então pelo menos um dos números é menor que 25.

k) Existem inteiros a e b tal que $a^2 = 4b + 2$.

l) Se n é múltiplo de 3, então ele pode ser escrito como soma de 3 inteiros consecutivos.

m) Não existem inteiros a e b tal que a seja um primo, $b > 0$ e $a = 6b + 3$.

n) $x = y$ se e somente se $xy = \frac{(x+y)^2}{4}$.

Questões de Prova

(2018.2 - EE1) Prove:

a) Se x é irracional e $x \geq 0$, então $\sqrt{x}$ é irracional.

b) Dados números reais x e y positivos, $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$ (a média é sempre pelo menos a média geométrica).

c) Mostre que se n é um inteiro ímpar, então existe um único inteiro k tal que n é a soma de $k-2$ e $k+3$.

(2018.1 - EE1) Prove:

a) Se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

b) Dados números reais x e y, se $x+y \geq 2$, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

(2018.1 - MP1) Prove que a soma entre um número irracional e outro racional é irracional.

3 Desafios

Cuidado! Prossiga sob seu próprio risco.

As questões abaixo foram selecionadas acima do nível da prova e estão apresentadas apenas para aqueles que tiverem interesse em explorar provas mais complexas. Caso você seja uma pessoa nervosa antes da prova, talvez seja melhor deixar passar.

Mas, caso tente, pode descobrir algumas soluções maneiras :)

1. Prove ou disprove as seguintes afirmativas:

   a) Existe um inteiro k tal que $k \geq 4$ e $2k^2 - 5k + 2$ é primo.

   b) Se um número $\sqrt{n}$ é irracional quando n não é um quadrado perfeito. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

   c) Se a, b e c forem primos, $a^2 + b^2 \neq c^2$.