Q8. Seja $h(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & , \text{ se } x \leq 0\,; \\ x^3 - 3x^2 + 2x & , \text{ se } 0 < x \leq 2\,; \\ 8 - 3x & , \text{ se } x > 2\,. \end{cases}$

Calcule, se existirem, os limites:

a) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ b) $\lim_{x\to 0} h(x)$ c) $\lim_{x\to 1^-} h(x)$

d) $\lim_{x\to 2^-} h(x)$ e) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$ f) $\lim_{x\to 2} h(x)$

0

* a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b) falta pela esquerda: $\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2 - x = 0$

$\Rightarrow$ Como os laterais são iguais: $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0.$

Q3. Utilizando a **definição de função contínua**, demonstre que a função:

a) $f(x) = x + 2$ é contínua em $x_0 = 0$;

b) $g(x) = x^2 + 1$ é contínua em $x_0 = 0$;

c) $h(x) = x^2 + x$ é contínua em $x_0 = 1$;

d) $k(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $x_0 = 1$.

f é contínua num ponto x_0 se:

i) $\exists\ f(x_0)$

ii) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

e

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

a) i) $f(0) = 2$ ✓

ii) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + 2 = 2$ ✓

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ✓

$\Rightarrow$ f é contínua em $x_0 = 0$.

3. Seja

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x < 2; \\ ax^2 - bx + 3, & \text{se } 2 \le x < 3; \\ 2x - a + b, & \text{se } x \ge 3. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b tais que h é contínua. **(Justifique seu raciocínio)**

$\hookrightarrow$ para todo $x \in D = \mathbb{R}$

Teoremas: Análise de continuidade em conjuntos abertos

I) Toda função polinomial é contínua para todo x

II) Toda função racional, ou seja, função da forma P(x)/Q(x) é continua desde que Q(x) seja diferente de 0 !

III) Toda função raiz , ou seja, função da forma $\sqrt{P(x)}$ É contínua desde que $P(x) \geq 0$

IV) Funções senx e cosx são contínuas

V) Composição de funções contínuas (soma, subtração,...) geram funções contínuas

Dica 1: Analise primeiro em intervalos abertos, usando os teoremas acima
Dica 2: Analise pontualmente nos pontos de "colagem"

(I)

se $x<2$, $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ é quociente polinomial com denominador não-nulo, logo é contínua para todo $\underline{x<2}$!

se $2<x<3$, $h(x) = ax^2-bx+3$ é polinomial logo é contínua para todo $2<x<3$.

se $x>3$, $h(x) = 2x-a+b$ é polinomial, logo é contínua para todo $x>3$.

Falta apenas garantir a continuidade em x=2 e x=3, que são os pontos que não aparecem nos conjuntos abertos acima! Aqui faremos a analise pontual :

$x=2$:

I) $h(2) = a.4 - b.2 + 3$

$\Rightarrow \boxed{h(2) = 4a-2b+3}$ ✓

II) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

$\nearrow \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4 = l_1$

$\searrow \lim\limits_{x\to 2^+} ax^2-bx+3 = 4a-2b+3 = l_2$

Condição: $l_1 = l_2 \Rightarrow 4a-2b+3 = 4 \Rightarrow \boxed{4a-2b=1}$

III) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = h(2)$?

$\boxed{4a-2b=1}$

Só verificamos a continuidade de h em x=2, se
4a-2b=1

$x = 3$:

I) $h(3) = 6 - a + b.$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x < 2; \\ ax^2 - bx + 3, & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 2x - a + b, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

II) $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3 = l_1$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b = l_2$

Condição: $l_1 = l_2 \Rightarrow 9a - 3b + 3 = 6 - a + b$

$\Rightarrow \boxed{10a - 4b = 3}$

III) $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = h(3)$ $\boxed{10a - 4b = 3}$

Lembre-se que precisamos que a função seja continua em x=2 e em x=3 ao mesmo tempo!

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \quad (\times 2) \\ 10a - 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - \cancel{4b} = 2 \\ 10a - \cancel{4b} = 3 \end{cases} -$$

$-2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = 1/2}$

$\Rightarrow 2 - 2b = 1$

$\Rightarrow \boxed{b = 1/2}$

Para os valores a=1/2 e b=1/2 nossa função h(x) será continua para todo x do seu dominio!

Derivada de $f(x)$ em $x = x_0$:

(pontual)

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Notação alternativa:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(geral)

Ex.: Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$ (pela definição)

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x+2 = \boxed{4}$$

Ex.: Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x > 0$ (pela def)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

(geral)

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

* pela regra:

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2} x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Q1. Utilizando a **definição da derivada**, para cada uma das seguintes funções calcule a sua derivada em um ponto x_0:

Genérico

a) $f(x) = 9 - 3x$ b) $g(x) = 5x^2 + 3x$

c) $h(x) = \sqrt{2x+3}$ d) $k(x) = \dfrac{x}{3+x}$

e) $p(x) = \dfrac{2-x}{3x+5}$ f) $q(x) = \dfrac{2}{2+\sqrt{x}}$

g) $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ h) $v(x) = \dfrac{2}{2-\sqrt{x+1}}$

(Alto nível)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\left(\frac{2}{2-\sqrt{x+1}}\right) - \left(\frac{2}{2-\sqrt{x_0+1}}\right)\right)}{x - x_0}$$

"$\dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD - CB}{BD}$"

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{2(2-\sqrt{x_0+1}) - 2(2-\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})}\right)}{(x - x_0)}$$

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{\cancel{4} - 2\sqrt{x_0+1} - \cancel{4} + 2\sqrt{x+1}}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{1}\right)}$$

"$\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{D}{C}$"

"$A - B = -B + A$"

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{-2\sqrt{x_0+1} + 2\sqrt{x+1}}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})} \cdot \frac{1}{(x - x_0)}$$

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(\frac{2}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})}\right)}_{\text{TÁ DE BOA!}} \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x_0+1})}{x - x_0}}_{\text{O GOLPE TÁ AÍ!}\ \frac{0}{0}} \cdot \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1}}$$

$$\Rightarrow v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{2}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})}\right) \cdot \frac{x+1 - (x_0+1)}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x_0+1})}$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{2}{(2-\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x_0+1})} \right) \cdot \frac{\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1})}$$

Aplicando o limite.

$$\Rightarrow g'(x_0) = \frac{2}{\underbrace{(2-\sqrt{x_0+1})(2-\sqrt{x_0+1})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0+1}+\sqrt{x_0+1}} = \frac{\cancel{2}}{(2-\sqrt{x_0+1})^2 \cdot \cancel{2}\sqrt{x_0+1}}$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = \frac{1}{(2-\sqrt{x_0+1})^2 \cdot \sqrt{x_0+1}} .$$