Kailane Eduarda Felix da Silva / @KEFS

②

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a) se C é base do $\mathbb{R}^3$, o conjunto (os vetores do) precisam ser linearmente independentes. Para isso, temos que achar a solução trivial, tal qual:

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,1,0) + \alpha_3(1,2,1) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

* Resolvendo o sistema linear:

$\alpha_1 = -\alpha_3 \rightarrow \quad -\alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$-\alpha_3 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = \alpha_1 = 0$ //

Sendo os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$, podemos dizer que o conjunto de vetores "C" é base geradora de $\mathbb{R}^3$ //

b) Toda base ortonormal é ortogonal, portanto, para verificarmos a ortonormalidade, primeiro verificamos a ortogonalidade:

* produto interno:

$\langle (1,1,1), (-1,1,0) \rangle = 0$

$\langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle = 4$

$\langle (-1,1,0), (1,2,1) \rangle = 1$

Uma base é ortogonal se para todo par de vetores diferentes $(\bar{u}, \bar{v})$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$. Logo, a base analisada não é ortogonal e, por isso, não pode ser ortonormal.

c) Sendo $v_1' = (1,1,1)$ / $v_2' = (-1,1,0) - \frac{(-1+1+0)}{(1+1+1)} \cdot (1,1,1) \Rightarrow v_2' = (-1,1,0)$

$v_3' = (1,2,1) - \frac{(-1+2+0)}{(1+1+0)} \cdot (-1,1,0) - \frac{(1+2+1)}{(1+1+1)} \cdot (1,1,1) \Rightarrow v_3' = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Para ser ortonormal:

$u_1 = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$ // $\quad u_3 = \frac{(1/6, 1/6, -1/3)}{\sqrt{(1/6)^2, (1/6)^2, (-1/3)^2}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ //

$u_2 = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ // $\qquad \beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ //

3) a)

$\langle u+v, u-v\rangle = (a,b,c)+(d,e,f) \cdot (a,b,c)-(d,e,f)$

$= (a+d)(a-d)+(b+e)(b-e)+(c+f)(c-f)$

$= a^2-d^2+b^2-e^2+c^2-f^2$

$=(a^2+b^2+c^2)-(d^2+e^2+f^2)$

Como: $\|u\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, é verdadeiro que

$(a^2+b^2+c^2)-(d^2+e^2+f^2) = \|u\|^2 - \|v\|^2$ //

b) $\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle$

$= \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle$

Como $\|u\|^2 = \|v\|^2$, temos que $\langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle = 0$

logo, são ortogonais //