EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

↳ consequência / aplicação do teorema de Bezóut.

* são equações da forma: $\boxed{ax + by = c}$

tal que $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

exemplo: $1819x + 3587y = 170$

coeficientes e variáveis são números inteiros

1. Como resolver?

i) usamos o algoritmo de euclides para achar o mdc(1819, 3587):

$$\left[\begin{array}{l} 1819 \cdot m + 3587 \cdot n = \\ mdc(1819, 3587) \end{array}\right]^{*}$$

* IDENTIDADE DE BEZÓUT.

teorema:

∃ solução para $ax + by = c$, se somente se o $mdc(a,b) \mid c$.

então podemos fazer:

$mdc(1819, 3587) = 17 \rightarrow$

$1819 \cdot (71) + 3587 \cdot (-36) = 17$

e multiplicando a equação por 10:

$1819 \cdot (710) + 3587 \cdot (-360) = 170$ //

logo: $x = 710$ e $y = -360$

* exemplos:

1. $2x + 16y = 256$

$mdc(2,16) = 2$ e $2 \mid 256$.

2. $3x + 5y = 5583$

$mdc(3,5) = 1$ (primos entre si)

e $1 \mid N$, $N \in \mathbb{Z}$. Para qualquer N, $3x + 5y$ tem solução inteira.

MÉTODO DE CALCULAR

i) seja a equação diofantina $ax + by = c$. sabemos que ela tem solução se $mdc(a,b) \mid c$.

ii) portanto, podemos fazer:

$$\alpha = \frac{a}{mdc(a,b)}, \quad \beta = \frac{b}{mdc(a,b)}$$

e $d = \dfrac{c}{mdc(a,b)}$.

Nesse caso, é possível mostrar que α e β são primos entre si.

iii) temos agora a equação:

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = d$

onde $mdc(\alpha, \beta) = 1$ //

iv) encontramos m e n, tal que:

$\alpha \cdot m + \beta \cdot n = 1$

v) e ao multiplicar a equação por d obtemos a solução $x_0 = m \cdot d$ e $y_0 = n \cdot d$. Podemos chamar de solução canônica. $\rightarrow (m \cdot d, n \cdot d)$

* além disso, podemos achar as demais soluções a partir da canônica, fazendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ x = x_0 + \beta \cdot k \\ \bullet\ y = y_0 + \alpha \cdot k \end{array}}$$

onde k é um inteiro qualquer.

Ex: $4x + 6y = 10 \rightarrow 2x + 3y = \overset{d}{5} \rightarrow$

$2m + 3n = 1 \rightarrow x_0 = 5$ e $y_0 = -5$

* exemplo:

$$56x + 72y = 40$$

i) calcular mdc(56, 72)

$\frac{72}{56} \rightarrow$ resto 16 $\rightarrow (56, 16)$

$\frac{56}{16} \rightarrow$ resto 8 $\rightarrow (8, 16)$

$\frac{16}{8}$, resto = 0 $\rightarrow (0, 8)$ mdc

$\text{mdc}(56, 72) = 8$, e

$8 \mid 40 \rightarrow$ tem solução!

ii) simplificar a equação:

$$\frac{56x}{8} + \frac{72y}{8} = \frac{40}{8}$$

$$7x + 9y = 5 \rightarrow \alpha = 7, \beta = 9$$

iii) Aplicar o Te. Bezout:

Como $\text{mdc}(7, 9) = 1$, podemos fazer $7m + 9n = 1$, e então $x_0 = m \cdot d$ e $y_0 = n \cdot d$

* Pelo algoritmo de Euclides, encontramos $m = 4$ e $n = -3$

logo: $x_0 = 20$ e $y_0 = -15$