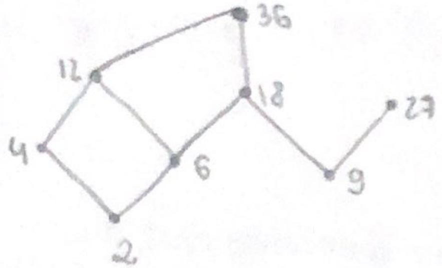
PROVA III - MATEMÁTICA DISCRETA

KAILANE EDUARDA FELIX DA SILVA

CPF: 125.769.454-57

⑦ $(\{2,4,6,9,12,18,27,36\}, |)$

Diagrama:



a) maximais: 36, 27

minimais: 2, 9

b) Limitantes superiores de $\{2,9\} = 18, 36$

supremo = 18

c) Limitantes inferiores de $\{12,6\} = 6, 2$

ínfimo = 6

④ $A = \{a, b, c, d, e\}$

i) Menor equivalência que contém $\{(b,b), (b,c), (d,e), (e,a)\}$ ->

i.a) p/ ser reflexiva precisa conter: $\{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$

i.b) p/ ser simétrica deve conter: $\{(c,b), (e,d), (a,e)\}$, de acordo com os pares originais de R.

Assim, temos: $\{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,e), (e,a), (c,b), (e,d), (a,e), (b,c)\}$

Mas, para ser transitiva precisamos adicionar $\{(d,a)\}$, e feito isso, ainda adicionar $\{(a,d)\}$ para manter a simetria!

Ficamos com:

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,e), (e,a), (c,b), (e,d)$
$(a,e), (b,c), (d,a), (a,d)\}$ //

E a partição que R provoca em A é $= \{\{b,c\}, \{a,d,e\}\}$ e as classes de equivalência são $\{b,c\}$ e $\{a,d,e\}$ //

ii) a menor relação de equivalência em A é $R' = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$

e como um elemento só se relaciona com ele mesmo, a partição será:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$.

⑤ 1) Para que R e S não sejam reflexivas e mesmo assim $R \circ S$ seja, faremos uma relação na qual (como analogia) $F(x) = x$ na composta:

$R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $S = \{(2,1),(3,2),(1,3)\} \rightarrow R \circ S = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. É possível!

2) Quando relacionamos as relações binárias com funções, fica fácil de ver que se compormos uma função F com ela mesma e $F(x) = x$ $(= (a,a))$, o resultado permanecerá o mesmo. Então: $(a,a) \in R \rightarrow (a,a) \in R^2$ será sempre verdade. Exemplo:

$$R = \{(1,1),(2,2)\} \rightarrow R^2\{(1,1),(2,2)\}$$

3) Nem sempre teremos tal implicação. Prova por contraexemplo (sendo R em $A = \{1,2,3\}$)

i) Seja $R = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$
ii) R é simétrica e transitiva, mas não é reflexiva! → Não temo $(3,3)$

4) Se R é anti-simétrica, então (a,b) e $(b,a) \in R \rightarrow a = b$, e sabemos que subconjuntos de tamanho 1 do tipo $R' = \{(a,b)\}$ serão anti-simétricos assim como $R'' = \emptyset$. Então, todo subconjunto de uma relação simétrica também será anti-simétrico, pois é impossível correr em algum deles o par (a,b) e (b,a) com $b \neq a$.//

5) Provando por contra exemplo:

i) Seja $R = \{(1,2)\}$ → transitiva
ii) O fecho simétrico será $R' = \{(1,2),(2,1)\}$
iii) O fecho transitivo de $R' = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$ *
iv) O fecho transitivo de $R = \{(1,2)\}$ (Ela mesma)
v) O fecho simétrico do F. transitivo será $R' = \{(1,2),(2,1)\}$ *

Como iii $\neq$ v, nem sempre a implicação é verdadeira!

② $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 5 \\ x \equiv 7 \mod 13 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$ $a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a = 2$ $M_1 = 39$

$m_1 = 5,\ m_2 = 13,\ m_3 = 3$ $M_2 = 15$

$M = 5.13.3 = 195$ // $M_3 = 65$

(a resposta será no mod 195)

$y_1 . 39 \equiv 1 \mod 5 \rightarrow y_1 \equiv 4 \mod 5$ $39 = 4 \mod 5 \rightarrow y_1 \cdot 4 \equiv 1 \mod 5$

$y_2 \cdot 15 \equiv 1 \mod 13 \rightarrow y_2 \equiv 7 \mod 13$ $15 \equiv 2 \mod 13 \rightarrow y_2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 13$

$y_3 \cdot 65 \equiv 1 \mod 3 \rightarrow y_3 \equiv 2 \mod 3$ $65 \equiv 2 \mod 13 \rightarrow y_3 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3$

$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 y_3 M_3 \pmod{195}$

$x \equiv 624 + 735 + 260 \pmod{195}$

$x \equiv 59 \pmod{195}$ //

③ a)

$133 = 7.19$ $(3^{18})^4 - 1 \mod 19 + (3^6)^{12} - 1 \mod 7$

$72 = 4.18$ $1^4 - 1 \mod 19 + 1^{12} - 1 \mod 7$

$3^6 \equiv 1 \mod 7$ $0 \mod 19 + 0 \mod 7$

$3^{18} \equiv 1 \mod 19$ RESTO 0 //

b) $MDC(3, 89) = 1$

$3^{88} \equiv 1 \mod 89$

$\underbrace{3^{88} = 3^{86+2}}$ $\equiv 1 \mod 89$

$9 \cdot 3^{86} \equiv 1 \mod 89$

$9x \equiv 1 \mod 89$

3^{86} é inverso de 9 mod 89

$9 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{89} \rightarrow 3^{86} \equiv 10 \mod 86$

logo 10 é um inverso de 9 mod 89 //

① $17x + 8y = 31$ $\alpha = 17$ $x_0 = 1.31 = 31$ $\begin{cases} x = 31 + 8 \cdot k \\ y = -62 - 17 \cdot k \end{cases}$

$MDC(17, 8) = 1$ $\beta = 8$ $y = -2.31 = -62$

$\gamma = 31$

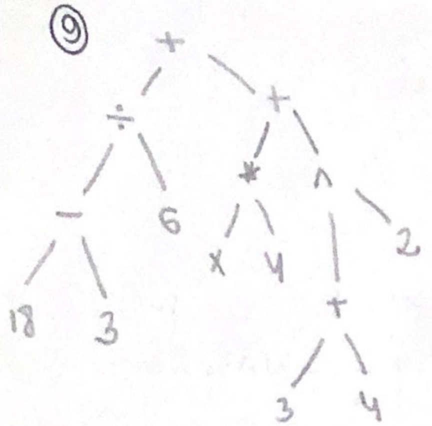
$17m + 8n = 1$ sendo $k = 60$ $8k > 500 - 31$

$m = 1$ $k > \frac{500 - 31}{8}$

$n = -2$ $x = 31 + 8\ 60 = x = 511$ $k > 58,6$ //

$y = -62 - 17 \cdot 60 = y = -1082$

⑨



PRÉ FIXA => + ÷ − 18 3 6 + * x 4 ↑ + 3 y 2

PÓS FIXA => 18 3 − 6 ÷ x 4 * 3 y + 2 ↑ + +

⑧ F: VG -> VH (F(a)=4), (F(b)=5, (F(c)=1), (F(d)=6) (F(e)=2) (F(g)=7) (F(F)=3)

a) $E_G = \{\{a,b\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{b,F\}, \{c,g\}, \{d,e\}, \{e,F\}, \{F,g\}$

$E_H = \{\{c,a\}, \{c,b\}, \{c,g\}, \{e,F\}, \{e,d\}, \{F,b\}, \{F,g\}, \{a,b\}, \{b,d\}, \{b,g\}$.

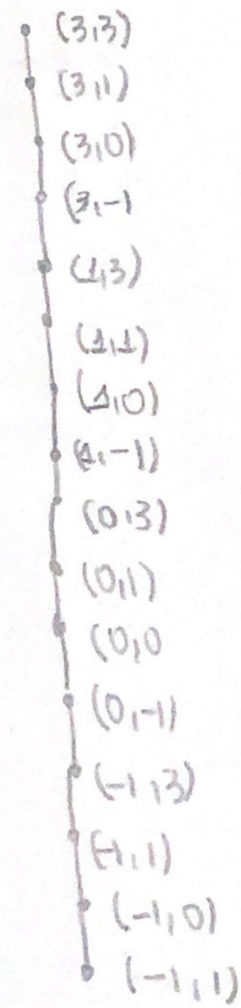
NÃO É ISOMORFISMO, POIS $\{c,a\}$ e $\{b,g\} \not\in G$.

⑥

a) (−1,−1), (−1,0), (−1,1), (−1,3), (0,−1), (0,0)}

b) (1,0), (1,1), (1,3), (3,−1), (3,0), (3,1), (3,3)}

Diagrama:



(10) a) $F = 121$

$m = 5$

$n = \frac{604}{4} = 151$

SE UMA ÁRVORE POSSUI N NÓS, ELA POSSUI

n-1 ARESTAS = 150

VERDADEIRO

b) VERDADEIRO, POIS:

$e = 27$

6 de grau 2 | 10 grau 3

3 grau 4

$2e = \sum g(v) \rightarrow 54 = 12 + 12 + 30$

$54 = 54$ ✓

$9 \cdot 5 = 45$ $\quad 11 \cdot 3 = 33$

$8 \cdot 6 = 48$ $\quad 7 \cdot 7 = 49$

c) verdadeiro. temos 14 vértices → sendo a maior bipartição: $V_1 = 7$ e $V_2 = 7$.

E sendo o nº de arestas $V_1 \times V_2$, o produto será 49

d) $n = m \cdot i + 1$

$n = 5(100 - n) + 1$

$n = 500 - 5n + 1$

$6n = 501$

$n \cong 83{,}5$

$n = m i + 1$

$100 + i = 5i + 1$

$99 = 4i$

$i = 99/4$

FALSO, POIS O Nº DE NÓS E ARESTAS NÃO SERIA INTEIRO!

e) Falso! Exemplo:  GRAFO cíclico!

Possui circuito eureliano, mas o caminho não é possível.

Para ser eureliano é preciso que todas as arestas voltem ao início.

8 b) FAZENDO $F: E_G \rightarrow E_H$, VEMOS QUE AS ARESTAS FICAM IGUAIS, ENTÃO HÁ ISOMORFISMO.

$(a,b) \rightarrow (a,d)$	$(b,d) \rightarrow (b,f)$	$(c,g) \rightarrow (f,g)$
$(a,d) \rightarrow (d,e)$	$(b,e) \rightarrow (b,f)$	$(d,e) \rightarrow (e,f)$
$(b,c) \rightarrow (d,g)$	$(b,f) \rightarrow (c,e)$	$(e,f) \rightarrow (f,g)$
		$(f,g) \rightarrow (e,g)$