UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - ÁREA 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

IV LISTA DE EXERCÍCIOS

Professora: Rúbia Esterfânia

2020.1

Questão 1. As funções f e g são diferenciáveis e $f(g(x)) = x$ para todo x. Se $f(3) = 8$ e $f'(3) = 9$, os valores de $g(8)$ e $g'(8)$ são respectivamente:

(a) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{9}$

(b) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$

(c) 3 e -9

(d) 3 e $-\frac{1}{9}$

(e) 3 e $\frac{1}{9}$

(f) Nenhuma das alternativas.

Questão 2. Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, tal que $f(3) = 15$, $f(6) = 3$, $f'(3) = -8$ e $f'(6) = -2$ com g a função inversa da f. O valor de $g'(3)$ é:

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $-\frac{1}{6}$

(d) $-\frac{1}{2}$

(e) $-\frac{1}{8}$

(f) Nenhuma das alternativas.

Questão 3. Sendo

$$f(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} \tag{1}$$

Mostre que:

$$f'(x) = \arcsin(x) \tag{2}$$

Questão 4. Sendo

$$y = \arctan(\csc(x))$$

Mostre que:

$$y' = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x) + 1} \tag{3}$$

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + x^3$.

(a) Mostre que f admite função inversa g.

(b) Expresse $g'(x)$ em termos de $g(x)$.

(c) Calcule $g'(0)$.

Questão 6. Para cada um dos casos abaixo, encontre pelo menos um valor de $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4}$$

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ com $a = 0$ e $b = 1$;

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ com $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$;

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ com $a = 1$ e $b = 3$.

Questão 7. Suponha f uma função contínua e diferenciável em $[-7, 0]$, que $f(-7) = -3$ e que $f'(x) \leq 2$. Qual é o maior valor possível para $f(0)$?

Questão 8. Para quais valores de a, m e b a função:

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ mx + b & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{5}$$

satifaz as hipóteses do Teorema do valor médio no intervalo $[0, 2]$?

Questão 9. Suponha $f(x)$ e $g(x)$ funções crescentes. Considere $h(x)$ uma função definida por:

$$h(x) = f(g(x)) \tag{6}$$

A função $h(x)$ é uma função crescente? Se sim, mostre isso. Se não, você pode determinar pelo menos uma condição sobre as funções $f(x)$ e/ou $g(x)$, de modo que $h(x)$ seja uma função crescente?

Questão 10. Para cada função definida abaixo:

$$f(x) = x^4 - x^3 + 1 \tag{7}$$

$$g(x) = \ln\big(x^2 + 1\big) \tag{8}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x} \tag{9}$$

$$p(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1} \tag{10}$$

$$q(x) = te^{-t} \tag{11}$$

$$r(x) = \frac{\ln(x)}{x} \tag{12}$$

$$P(x) = \frac{t}{1+t^2} \tag{13}$$

$$Q(x) = \frac{3x^2+4x}{1+x^2} \tag{14}$$

$$R(x) = \frac{x^2-x+1}{2(x-1)} \tag{15}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \leq x < 2; \\ 2x-5, & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \tag{16}$$

$$G(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{se } -1 \leq x < 1; \\ 2x^2-x, & \text{se } 1 \leq x \leq 3. \end{cases} \tag{17}$$

(i) Determine o domínio da função;

(ii) Os pontos críticos;

(iii) Os intervalos de crescimento e decrescimento;

(vi) Determine, se houverem, os pontos de máximo e mínimo local;

Questão 11. Mostre que $x = 2$ é um ponto crítico da função $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$, mas g não tem um valor extremo local neste ponto.

Questão 12. Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem nem máximo nem mínimo locais.

Questão 13. Ache os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, com $x \in [-1, 4]$.

Questão 14. Seja $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$. Mostre que não existe um valor $c \in (1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c) \cdot (4 - 1)$. Por que isto não contradiz o teorema do valor médio?

Questão 15. Seja $f(x) = 1 - |2x - 3|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c) \cdot (3 - 0)$. Por que isto não contradiz o teorema do valor médio?

Questão 16. Mostre que a equação $x^3 - 15x + 7 = 0$ tem exatamente uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

Questão 17. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de comprimento 1 que contenha tal raiz.

Questão 18. Prove que a equação $x^4 + 4x - 13 = 0$ tem exatamente duas raízes reais.

Questão 19. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais distintas.

Questão 20. Determine $c \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + c = 0$ admita uma única raiz real.

Questão 21. Mostre que $e^x > x + 1$ para todo $x > 0$.

Questão 22. Demonstre a identidade $2\,\mathrm{arctg}\big(\sqrt{x}\big) = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\pi}{2}$.

Questão 23. Há 12 metros de uma avenida retilínea, a polícia instalou um radar em um local pouco visível. Deslocando-se 16 metros na avenida do ponto mais próximo do radar, encontra-se um poste com transformador elétrico. O policial mira o canhão do radar no poste. Uma motocicleta passa pelo poste e, naquele momento, o radar indica que a distância entre o policial e a motocicleta está aumentando a uma taxa de 60 km/h. Sabendo que a velocidade permitida na avenida é de 80 km/h, o motociclista deverá ser multado?

Questão 24. Um homem caminha ao longo de um caminho reto com velocidade 4 m/s. Uma lâmpada está localizada no chão a 20 m da trajetória reta e é mantida focalizada na direção do homem. Qual a velocidade de rotação da lâmpada quando o homem está a 15m do ponto do caminho mais próximo da lâmpada?

Bons Estudos!