Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

1 *Estruturas Algébricas* **1**

1.1 Operação Binária. Grupos 2
1.2 Corpo Comutativo 7
1.3 Corpo com Valor Absoluto 10
1.4 Corpo Ordenado 12
1.5 Valor Absoluto num Corpo Ordenado 15
1.6 Números Reais 17
1.7 Números Complexos 20
1.8 Característica do Corpo 25
1.9 Métricas 27

2 *Matrizes e Sistemas Lineares* **29**

2.1 Matrizes 30
2.2 Tipos Especiais de Matrizes 41
2.3 Inversa de uma Matriz 59
2.4 Matrizes em Blocos 63
2.5 Operações Elementares. Equivalência 76
2.6 Forma Escalonada. Forma Escada 81
2.7 Matrizes Elementares 84
2.8 Matrizes Congruentes. Lei da Inércia 101
2.9 Sistemas de Equações Lineares 107

3 *Espaços Vetoriais* **139**

3.1 Espaço Vetorial. Propriedades 140
3.2 Subespaço Vetorial 147
3.3 Combinação Linear. Subespaço Gerado 154
3.4 Soma e Intersecção. Soma Direta 158
3.5 Dependência e Independência Linear 167
3.6 Bases e Dimensão 173
3.7 Coordenadas 204
3.8 Mudança de Base 212

4 *Transformações Lineares* 219

4.1 Transformações do Plano no Plano . . . 220
4.2 Transformação Linear . . . 221
4.3 Núcleo e Imagem . . . 226
4.4 Posto e Nulidade . . . 232
4.5 Espaços Vetoriais Isomorfos . . . 244
4.6 Álgebra das Transformações Lineares . . . 249
4.7 Transformação Inversa . . . 253
4.8 Representação Matricial . . . 268

5 *Produto Interno* 283

5.1 Introdução . . . 284
5.2 Definição de Produto Interno . . . 284
5.3 Desigualdade de Cauchy–Schwarz . . . 297
5.4 Definição de Norma. Norma Euclidiana . . . 299
5.5 Definição de Ângulo. Ortogonalidade . . . 303
5.6 Base Ortogonal. Coeficientes de Fourier . . . 311
5.7 Processo de Gram–Schmidt . . . 316
5.8 Complemento Ortogonal . . . 324
5.9 Decomposição Ortogonal . . . 329
5.10 Identidade de Parseval . . . 337
5.11 Desigualdade de Bessel . . . 339
5.12 Operadores Simétricos . . . 341
5.13 Operadores Hermitianos . . . 345
5.14 Operadores Ortogonais . . . 347
5.15 Projeção Ortogonal . . . 353
5.16 Reflexão sobre um Subespaço . . . 361
5.17 Melhor Aproximação em Subespaços . . . 365

6 *Autovalores e Autovetores* 369

6.1 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear . . . 370
6.2 Autovalor e Autovetor de uma Matriz . . . 379
6.3 Multiplicidade Algébrica e Geométrica . . . 394
6.4 Matrizes Especiais . . . 399
6.5 Aplicação. Classificação de Pontos Críticos . . . 411
6.6 Diagonalização de Operadores Lineares . . . 416
6.7 Diagonalização de Operadores Hermitianos . . . 438

7 *Funcionais Lineares e Espaço Dual* **463**

7.1 Introdução 464
7.2 Funcionais Lineares 465
7.3 Espaço Dual 471
7.4 Teorema de Representação de Riesz 488

8 *Álgebra Linear Computacional* **493**

8.1 Introdução 494
8.2 Decomposição de Schur. Teorema Espectral 495
8.3 Normas Consistentes em Espaços de Matrizes 501
8.4 Análise de Sensibilidade de Sistemas Lineares 514
8.5 Sistema Linear Positivo–Definido 532
8.6 Métodos dos Gradientes Conjugados 537
8.7 Fatoração de Cholesky 555
8.8 Métodos Iterativos para Sistemas Lineares 566
8.9 Sistema Linear Sobredeterminado 591
8.10 Subespaços Fundamentais de uma Matriz 597
8.11 Projeções Ortogonais 615
8.12 Matriz de Projeção Ortogonal 621
8.13 Fatoração QR 629
8.14 Modelos de Regressão Linear 647
8.15 Solução de norma–2 Mínima 684
8.16 Problemas de Ponto Sela 695
8.17 Decomposição em Valores Singulares 711

Bibliografia **735**

2

Matrizes e Sistemas Lineares

Conteúdo

2.1 Matrizes 30
2.2 Tipos Especiais de Matrizes 41
2.3 Inversa de uma Matriz 59
2.4 Matrizes em Blocos 63
2.5 Operações Elementares. Equivalência 76
2.6 Forma Escalonada. Forma Escada 81
2.7 Matrizes Elementares 84
2.8 Matrizes Congruentes. Lei da Inércia 101
2.9 Sistemas de Equações Lineares 107

2.1 Matrizes

Definição 2.1.1 *Denominamos* ***matriz*** *a um conjunto de números reais, ou a um conjunto de números complexos, dispostos em linhas e colunas, numa certa ordem, e colocados entre colchetes. Assim, uma matriz* ***real****, ou uma matriz* ***complexa****, que vamos denotar por A, com m linhas e n colunas é representada da forma:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ou $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Os escalares a_{ij} são denominados ***elementos*** *da matriz, onde o primeiro índice indica a linha e o segundo índice indica a coluna às quais pertence o elemento. Neste caso, dizemos que a matriz A é de ordem $m \times n$. Por simplicidade, vamos utilizar a indicação $A = [a_{ij}]$ para denotar a matriz A e seus elementos.*

Definição 2.1.2 *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ é* ***quadrada*** *se $m = n$, isto é, se possui o mesmo número de linhas e de colunas. Neste caso, dizemos simplesmente que A é uma matriz de ordem n.*

Definição 2.1.3 *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ é a* ***matriz nula*** *se seus elementos a_{ij} são todos nulos. Neste caso, denotamos $A = 0$. Freqüentemente, indicamos $0_{m\times n}$ para denotar uma matriz nula de ordem $m \times n$, onde pode causar alguma dúvida sobre a ordem da matriz.*

Definição 2.1.4 *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de ordem $m \times n$. Dizemos que as matrizes A e B são* ***iguais*** *se, e somente se,*

$$a_{ij} = b_{ij} \quad ; \quad i = 1, \cdots, m \quad e \quad j = 1, \cdots, n\,.$$

Definição 2.1.5 *Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times 1$ é uma* ***matriz coluna****, que representamos por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.6 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $1 \times n$ *é uma* ***matriz linha****, que representamos por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} .$$

Em geral, uma matriz coluna também é denominada **vetor coluna** e uma matriz linha também é denominada **vetor linha**. Em particular, podemos considerar um escalar $a \in \mathbb{R}$, ou $a \in \mathbb{C}$, como uma matriz de ordem 1×1.

Exemplo 2.1.1 *A seguir temos o exemplo de uma matriz real*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

de ordem 2×3*.*

Exemplo 2.1.2 *Determine os valores de* a, b, c *e* d *de modo que* $A = B$*, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ c & 5 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2a - b & a + 2b \\ 3c - d & c - 3d \end{bmatrix} .$$

Exemplo 2.1.3 *A seguir temos o exemplo de uma matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 + i & 2i \\ 2 & 6 - 3i \end{bmatrix}$$

de ordem 2×2*.*

Exemplo 2.1.4 *A seguir temos o exemplo de uma matriz coluna real* X*, de ordem* 3×1*, e de uma matriz linha* Y*, de ordem* 1×4*,*

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} .$$

De modo análogo, podemos considerar uma matriz coluna complexa e uma matriz linha complexa. Nos casos em que fica claro qual é a ordem da matriz podemos omitir essa especificação. Omitimos também se a matriz é real ou complexa nos casos que não causam dúvidas ou que o resultado é válido tanto para matriz real quanto para matriz complexa.

Definição 2.1.7 *Considere os seguintes subconjuntos de* $I\!N$

$$\mathcal{I}_m = \{ 1, 2, \cdots, m \} \qquad e \qquad \mathcal{I}_n = \{ 1, 2, \cdots, n \} .$$

Uma ***matriz sobre o corpo*** $\boldsymbol{I\!F}$ *de ordem* $m \times n$ *é uma* ***função***

$$A : \mathcal{I}_m \times \mathcal{I}_n \longrightarrow I\!F$$

que para cada para ordenado $(i, j) \in \mathcal{I}_m \times \mathcal{I}_n$ *está associado um único escalar*

$$a_{ij} = A(i, j) \in I\!F ,$$

denominado ***elemento*** *da matriz* A.

Rigorosamente falando, a tabela retangular exibida na Definição 2.1.1, não é uma matriz, mas sim a representação de uma matriz.

Exemplo 2.1.5 *Considere o seguinte conjunto* $\mathcal{I}_3 = \{ 1, 2, 3 \}$. *Vamos definir uma* ***matriz real*** $A : \mathcal{I}_3 \times \mathcal{I}_3 \longrightarrow I\!R$ *da seguinte forma:*

$$a_{ij} = A(i, j) = \frac{1}{i + j - 1} ,$$

que é denominada ***matriz de Hilbert*** *de ordem* 3×3.

De acordo com a Definição 2.1.1, representamos a matriz A *da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} .$$

De modo análogo, definimos a matriz de Hilbert de ordem $n \times n$.

Exemplo 2.1.6 *Considere o seguinte conjunto* $\mathcal{I}_4 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. *Vamos definir uma matriz real* $A : \mathcal{I}_4 \times \mathcal{I}_4 \longrightarrow I\!R$ *cuja regra funcional é dada por:*

$$a_{ij} = A(i, j) = | \, i - j \, | .$$

De acordo com a Definição 2.1.1, representamos a matriz A *da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Definição 2.1.8 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *duas matrizes de ordem* $m \times n$. *Definimos a* ***soma*** *das matrizes* A *e* B, *que denotamos por* $A + B$, *como sendo a matriz* $C = [c_{ij}]$, *de ordem* $m \times n$, *onde cada elemento é definido da seguinte forma:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad ; \quad i = 1, \cdots, m \quad e \quad j = 1, \cdots, n\,.$$

Por simplicidade, indicamos $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ para denotar a soma das matrizes A e B. De modo análogo, definimos a **diferença** das matrizes A e B, que denotamos por $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Definição 2.1.9 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e um escalar* λ. *Definimos a multiplicação da matriz* A *pelo escalar* λ, *e denotamos* λA, *como sendo a matriz* $C = [c_{ij}]$, *de ordem* $m \times n$, *onde cada elemento é definido da seguinte forma:*

$$c_{ij} = \lambda\, a_{ij} \quad ; \quad i = 1, \cdots, m \quad e \quad j = 1, \cdots, n\,.$$

Por simplicidade, indicamos $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ *para denotar a multiplicação da matriz* A *pelo escalar* λ.

Exemplo 2.1.7 *Considerando as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *de ordem* 2×3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

a matriz $C = A + 2B = [a_{ij} + 2b_{ij}]$ *é dada por:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.1.1 *Sejam* A, B *e* C *matrizes de mesma ordem. Então,*

(a) $A + B = B + A$.

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(c) Existe uma matriz nula 0, *da mesma ordem da matriz* A, *tal que* $A + 0 = A$.

(d) Existe uma matriz D, *da mesma ordem da matriz* A, *tal que* $A + D = 0$.

Demonstração – A prova é feita utilizando as definições das operações de soma de matrizes e da multiplicação de uma matriz por escalar, juntamente com as propriedades das operações com números reais (complexos). □

Exemplo 2.1.8 *Dadas as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *de ordem* 3×2*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

determine a matriz D *tal que* $A + B - D = 0$*.*

Definição 2.1.10 *Sejam* X *uma matriz linha de ordem* $1 \times m$ *e* Y *uma matriz coluna de ordem* $m \times 1$*,*

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix},$$

o ***produto*** XY*, nesta ordem, é a matriz* Z *de ordem* 1×1 *dada por:*

$$Z = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + \cdots + x_{1j}y_{j1} + \cdots + x_{1m}y_{m1} \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{m} x_{1j}y_{j1} \right].$$

Exemplo 2.1.9 *Dada a matriz linha* X *de ordem* 1×3 *e a matriz coluna* Y *de ordem* 3×1*,*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a matriz $Z = XY$ *de ordem* 1×1 *é dada por:*

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 12 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1.11 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $m \times p$ *e* $B = [b_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $p \times n$*. O* ***produto*** AB*, nesta ordem, é a matriz* $C = [c_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *cujos elementos são definidos por:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, m \quad e \quad j = 1, \cdots, n,$$

isto é, o elemento c_{ij} *é o produto da* i*–ésima linha de* A *pela* j*–ésima coluna de* B*. Assim, podemos definir o produto* AB *somente quando o número de colunas de* A *é igual ao número de linhas de* B*.*

Exemplo 2.1.10 *Dada a matriz* A *de ordem* 3×2 *e a matriz* B *de ordem* 2×4,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz $C = AB$ *de ordem* 3×4 *é dada por:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 10 \\ 8 & 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1.11 *Dada a matriz coluna* X, *de ordem* 3×1,

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

determine a matriz $Z = XX^t$ *de ordem* 3×3.

Exemplo 2.1.12 *Dada uma matriz coluna* X, *de ordem* $m \times 1$,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix},$$

deduza uma regra para a formação da matriz $Z = XX^t$ *de ordem* $m \times m$.

Exemplo 2.1.13 *Dada a matriz coluna* X, *de ordem* 3×1,

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

determine todas as matrizes Y, *de ordem* 3×1, *tais que* $Y^t X = 0$.

Exemplo 2.1.14 *Determine um escalar* λ *tal que* $AX = \lambda X$, *onde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.1.2 *Sejam as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$, $B = [b_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$ *e* $C = [c_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$ *. Então,* $A(B + C) = AB + AC$.

Demonstração – Chamando $D = A(B + C) = [d_{ij}]$, sabemos que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, p$.

Logo, temos que a primeira parcela é o elemento da i–ésima linha e da j–ésima coluna do produto AB e a segunda parcela é o elemento da i–ésima linha e da j–ésima coluna do produto AC. Portanto, provamos que $A(B + C) = AB + AC$. ■

Teorema 2.1.3 *Sejam as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$, $B = [b_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *e* $C = [c_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$ *. Então,* $(A + B)C = AC + BC$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.1.4 *Sejam as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$, $B = [b_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$ *e* $C = [c_{ij}]$ *de ordem* $p \times q$ *. Então,* $A(BC) = (AB)C$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

É importante observar que

(a) $AB \neq BA$, em geral.

(b) $AB = 0$ não implica necessariamente que $A = 0$ ou $B = 0$.

(c) $AB = AC$ não implica necessariamente que $B = C$.

onde a ordem das matrizes, A, B e C, são tais que as operações indicadas acima podem ser efetuadas.

Exemplo 2.1.15 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $AB = BA = 0$, $AC = A$ *e* $CA = C$.

Exemplo 2.1.16 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Verifique que $AB = AC$, *entretanto,* $B \neq C$.

Exemplo 2.1.17 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Verifique que $AB = 0$ *e que*

$$BA = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix} .$$

Portanto, em geral, $AB \neq BA$.

Teorema 2.1.5 *Sejam* A *e* B *matrizes de mesma ordem e* α *e* β *escalares. Então,*

(a) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

(b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(c) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Demonstração – A prova é feita utilizando as definições das operações de soma de matrizes e de multiplicação de uma matriz por escalar, juntamente com as propriedades das operações com números reais (complexos). □

Teorema 2.1.6 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$, B *uma matriz de ordem* $n \times p$ *e* λ *um escalar. Então,* $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$.

Demonstração – A prova é feita utilizando as definições de produto de matrizes e de multiplicação de uma matriz por escalar, juntamente com as propriedades das operações com números reais (complexos). □

Teorema 2.1.7 *Considere* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* λ *um escalar. Se* $\lambda A = 0_{m\times n}$, *então* $\lambda = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

Demonstração – Pela Definição 2.1.9, sabemos que a matriz λA é dada por:

$$\lambda A = [\lambda\, a_{ij}] \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots m \quad \text{e} \quad j = 1, \cdots n \,.$$

Desse modo, pela hipótese, temos que

$$\lambda\, a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots m \quad \text{e} \quad j = 1, \cdots n \,.$$

Sendo assim, pelo Teorema 1.2.5, temos que

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots m \quad \text{e} \quad j = 1, \cdots n \,,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.1.8 *Seja* A *uma matriz de ordem* $m \times n$. *Então,* $AX = 0_{m\times 1}$ *para toda matriz coluna* X *de ordem* $n \times 1$ *se, e somente se,* $A = 0_{m\times n}$.

Demonstração – Considerando que $A = 0_{m\times n}$, o resultado segue trivialmente.

Considerando que $AX = 0_{m\times 1}$ para toda matriz coluna X de ordem $n \times 1$, e tomando a equação $A = AI_n$, obtemos

$$A = AI_n = [AE_{\cdot 1} \cdots AE_{\cdot j} \cdots AE_{\cdot n}] = [0_{m\times 1} \cdots 0_{m\times 1} \cdots 0_{m\times 1}] \,,$$

onde a matriz coluna $E_{\cdot j}$ de ordem $n \times 1$ é a j–ésima coluna da matriz identidade I_n, uma vez que $AE_{\cdot j} = 0_{m\times 1}$ para $j = 1, \cdots, n$.

Portanto, mostramos que $A = 0_{m\times n}$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.1.9 *Sejam* A *e* B *matrizes de ordem* $m \times n$. *Então,* $A = B$ *se, e somente se,* $AX = BX$ *para toda matriz coluna* X *de ordem* $n \times 1$.

Demonstração – A prova segue imediata pelo resultado do Teorema 2.1.8. De fato,

$$AX = BX \iff (A - B)X = 0_{m\times 1} \iff A - B = 0_{m\times n} \,.$$

para toda matriz coluna X de ordem $n \times 1$.

Como $A - B = 0_{m\times n}$, tem–se $A = B$, o que completa a demonstração. ■

Exercícios

Exercício 2.1 *Considere o subconjunto* $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ *de* $I\!N$. *Determine a matriz* $A : \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n \longrightarrow I\!R$ *definida pela seguinte regra funcional*

$$a_{ij} = A(i,j) = \begin{cases} 1 & se \quad |\, i - j \,| > 1 \\ -1 & se \quad |\, i - j \,| \leq 1 \end{cases}$$

Exercício 2.2 *Considere o subconjunto* $\mathcal{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ *de* $I\!N$. *Determine a matriz* $A : \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n \longrightarrow I\!R$ *definida pela seguinte regra funcional*

$$a_{ij} = A(i,j) = \begin{cases} 1 & se \quad |\, i - j \,| < 2 \\ 0 & se \quad |\, i - j \,| \geq 2 \end{cases}$$

Exercício 2.3 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* X *uma matriz coluna de ordem* $n \times 1$ *que são indicadas da seguinte forma:*

$$A = [Y_1 \cdots Y_j \cdots Y_n] \qquad e \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

onde a matriz coluna Y_j *de ordem* $m \times 1$ *é a* j*–ésima coluna da matriz* A. *Mostre que podemos escrever o produto* AX *da seguinte forma:*

$$AX = x_1 Y_1 + \cdots + x_j Y_j + \cdots + x_n Y_n .$$

Exercício 2.4 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* B *uma matriz de ordem* $n \times p$ *que vamos indicar da seguinte forma:*

$$B = [Y_1 \cdots Y_j \cdots Y_p] ,$$

onde a matriz coluna Y_j *de ordem* $n \times 1$ *é a* j*–ésima coluna da matriz* B. *Mostre que podemos escrever a matriz* $C = AB$ *da seguinte forma:*

$$C = AB = A[Y_1 \cdots Y_j \cdots Y_p] = [AY_1 \cdots AY_j \cdots AY_p] .$$

onde a matriz coluna $Z_j = AY_j$ *de ordem* $m \times 1$ *é a* j*–ésima coluna da matriz* C.

Exercício 2.5 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Determine os parâmetros a, b, c *e* d *de modo que* $A = B$.

Exercício 2.6 *Dadas as matrizes*

$$X = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & b & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad Z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os parâmetros a *e* b *tais que* $YX = 0$ *e* $YZ = 1$.

Exercício 2.7 *Determine todas as matrizes* X *tais que* $YX = 0$, *onde*

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.8 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores do parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$ *de modo que* $AX = Y$.

Exercício 2.9 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB = AC$.

Exercício 2.10 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes B *de modo que* $AB - BA = 0_{2\times2}$, *se possível.*

2.2 Tipos Especiais de Matrizes

Definição 2.2.1 *Seja* $U = [u_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $n \times n$. *Dizemos que* U *é uma matriz* ***triangular superior*** *se os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, isto é,* $u_{ij} = 0$ *para* $j < i$.

Exemplo 2.2.1 *A matriz* U *dada por:*

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular superior.

Definição 2.2.2 *Seja* $L = [l_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $n \times n$. *Dizemos que* L *é uma matriz* ***triangular inferior*** *se os elementos acima da diagonal principal são todos nulos, isto é,* $l_{ij} = 0$ *para* $j > i$.

Exemplo 2.2.2 *A matriz* L *dada por:*

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior.

Exemplo 2.2.3 *Mostre que o produto de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior.*

Exemplo 2.2.4 *Mostre que o produto de duas matrizes triangulares inferiores é uma matriz triangular inferior.*

Definição 2.2.3 *Seja* $D = [d_{ij}]$ *uma matriz de ordem* $n \times n$. *Dizemos que* D *é uma matriz* ***diagonal*** *se os elementos fora da diagonal principal são todos nulos, isto é,* $d_{ij} = 0$ *para* $j \neq i$. *Freqüentemente, indicamos*

$$D = diag(d_1, \cdots, d_n),$$

para dizer que D *é uma matriz diagonal de ordem* $n \times n$.

Exemplo 2.2.5 *A matriz D dada por:*

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Definição 2.2.4 *O* ***traço*** *de uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem n, que denotamos por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Exemplo 2.2.6 *Dada a matriz real*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} ,$$

temos que $tr(A) = 1 + 4 + 3 = 8$.

Exemplo 2.2.7 *Dada a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 4i & 2-i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 0 & 1+3i & 3-i \end{bmatrix} ,$$

temos que $tr(A) = 4i + (4+i) + (3-i) = 7 + 4i$.

Teorema 2.2.1 *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem n. Então,*

(a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(b) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ *para qualquer escalar* λ.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.2.2 *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem n. Então, $tr(AB) = tr(BA)$.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Definição 2.2.5 *Uma matriz diagonal* $D = diag(d_{11}, \cdots, d_{nn})$ *cujos elementos da diagonal principal são todos iguais, isto é,* $d_{ii} = \alpha$ *para* $i = 1, \cdots, n$*, é denominada* ***matriz escalar****.*

Exemplo 2.2.8 *A matriz* D *dada por:*

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalar de ordem 3.

Definição 2.2.6 *Uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a* 1 *é denominada* ***identidade****. Freqüentemente, indicamos* I_n *para denotar uma matriz identidade de ordem* n.

Exemplo 2.2.9 *A matriz* I *dada por:*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz identidade de ordem 3.

Exemplo 2.2.10 *Seja* A *uma matriz de ordem* $m \times n$*. Podemos verificar facilmente que* $I_m A = A$ *e* $A I_n = A$.

Definição 2.2.7 *Se* A *é uma matriz de ordem* $m \times n$*, denominamos* ***transposta*** *de* A *à matriz de ordem* $n \times m$ *obtida trocando–se as linhas pelas colunas. Denotamos a transposta da matriz* A *por* A^t.

Exemplo 2.2.11 *Temos o seguinte exemplo de uma matriz real* A *de ordem* 4×3 *e de sua respectiva transposta* A^t *de ordem* 3×4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2.12 *Seja* A *uma matriz real de ordem* n*. Podemos verificar facilmente que* $tr(A^t) = tr(A)$.

Exemplo 2.2.13 *Temos o seguinte exemplo de uma matriz complexa* A *de ordem* 2×3 *e de sua respectiva transposta* A^t *de ordem* 3×2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & i \\ 3+i & 2i & 1 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 1+i & 2i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 2.2.8 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz quadrada. Dizemos que* A *é **simétrica** se* $A^t = A$, *isto é,* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todos* i, j.

Exemplo 2.2.14 *As matrizes* A *e* B *dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1+2i & 2+i \\ 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

são matrizes simétricas, isto é, $A^t = A$ *e* $B^t = B$.

Definição 2.2.9 *Seja* A *uma matriz quadrada. Dizemos que* A *é **anti–simétrica** se* $A^t = -A$, *isto é,* $a_{ij} = -a_{ji}$ *para todos* i, j.

Exemplo 2.2.15 *As matrizes* A *e* B *dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes anti–simétricas, isto é, $A^t = -A$ *e* $B^t = -B$.

Definição 2.2.10 *Considere* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz complexa de ordem* $m \times n$. *A matriz obtida de* A *substituindo cada elemento por seu conjugado é denominada **matriz conjugada** da matriz* A, *que denotamos por* $\overline{A}$. *Assim,* $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$.

Exemplo 2.2.16 *Dada a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

*A **matriz conjugada** de* A, *que denotamos por* $\overline{A}$, *é obtida da seguinte forma:*

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}.$$

Definição 2.2.11 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz complexa de ordem* $m \times n$. *Definimos a matriz* ***transposta Hermitiana*** *da matriz* A, *que indicamos por* A^*, *como sendo a matriz* $A^* = [\overline{a}_{ji}]$ *de ordem* $n \times m$, *isto é,* $A^* = (\overline{A})^t$.

Exemplo 2.2.17 *Dada a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

A ***transposta Hermitiana*** *de* A *é dada por:*

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2.3 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes complexas, com ordens compatíveis com as operações. Então,*

(a) $\overline{(A + B)} = \overline{A} + \overline{B}$.

(b) $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$.

(c) $\overline{(\lambda A)} = \overline{\lambda}\,\overline{A}$ *para qualquer escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(d) $(\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 2.2.18 *Seja* A *uma matriz complexa de ordem* n. *Observamos facilmente que* $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$.

Definição 2.2.12 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *complexa de ordem* n *é uma matriz* ***Hermitiana*** *se* $(\overline{A})^t = A$, *isto é,* $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ *para todos* i, j. *Geralmente indicamos* $A^* = A$ *para denotar uma matriz Hermitiana.*

Exemplo 2.2.19 *A matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz Hermitiana, isto é, $(\overline{A})^t = A$.

Definição 2.2.13 *Dizemos que uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *complexa de ordem* n *é uma matriz* ***anti–Hermitiana*** *se* $(\overline{A})^t = -A$, *isto é,* $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ *para todos* i, j. *Geralmente indicamos* $A^* = -A$ *para denotar uma matriz anti–Hermitiana.*

Exemplo 2.2.20 *A matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz anti–Hermitiana, isto é, $(\overline{A})^t = -A$.

Teorema 2.2.4 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes de mesma ordem e* α *um escalar. Então,*

(a) $(A^t)^t = A$.

(b) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(c) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.2.5 *Sejam as matrizes* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *e* $B = [b_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$. *Então,* $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.2.6 *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes complexas de mesma ordem e* α *um escalar. Então,*

(a) $(A^*)^* = A$.

(b) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(c) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 2.2.7 *Sejam as matrizes complexas* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $m \times n$ *e* $B = [b_{ij}]$ *de ordem* $n \times p$. *Então,* $(AB)^* = B^* A^*$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 2.2.21 *Seja* A *uma matriz real de ordem* $m \times n$. *Podemos verificar facilmente que as matrizes* AA^t *e* A^tA *são simétricas.*

Exemplo 2.2.22 *Seja* A *uma matriz complexa de ordem* $m \times n$. *Podemos verificar facilmente que as matrizes* AA^* *e* A^*A *são Hermitianas.*

Definição 2.2.14 *Seja* A *uma matriz quadrada. Define–se* ***potenciação*** *para expoentes naturais da seguinte forma:*

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA \qquad e \qquad A^{k+1} = AA^k\,.$$

Exemplo 2.2.23 *O calculo da expressão* $A^2 - 2A + 3I_2$, *onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

é obtido da seguinte forma:

$$A^2 - 2A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a matriz $p(A) = A^2 - 2A + 3I_2$, *de mesma ordem da matriz* A, *que é o* ***polinômio matricial*** *em* A *associado ao polinômio* $p(x) = 3 - 2x + x^2$.

Definição 2.2.15 *Dizemos que a matriz quadrada* A *é* ***idempotente*** *se* $A^2 = A$.

Exemplo 2.2.24 *A matriz* A, *dada abaixo, é idempotente, isto é,* $A^2 = A$.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2.25 *A matriz* A, *dada abaixo, é idempotente, isto é,* $A^2 = A$.

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 2.2.16 *Seja* A *uma matriz quadrada. Dizemos que* A *é* ***periódica***, *com período* k, *se* $A^{k+1} = A$, *onde* k *é o menor inteiro positivo com tal propriedade.*

Definição 2.2.17 *Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Dizemos que A é* ***nilpotente*** *se existe um $k \in I\!N^*$ tal que $A^k = 0_n$. Se k é o menor inteiro positivo tal que $A^k = 0_n$, dizemos que A é nilpotente de* ***índice*** *k.*

Exemplo 2.2.26 *A matriz dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz nilpotente de índice $k = 3$, isto é, $A^3 = 0_3$.

Definição 2.2.18 *Dizemos que a matriz quadrada A é* ***auto–reflexiva*** *se $A^2 = I$.*

Exemplo 2.2.27 *A matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz auto–reflexiva, isto é, $A^2 = I$.

Definição 2.2.19 *Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$, dizemos que as matrizes A e B são* ***comutativas****.*

Exemplo 2.2.28 *Podemos verificar facilmente que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

são comutativas, isto é, $AB = BA$.

Definição 2.2.20 *Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = -BA$, dizemos que as matrizes A e B são* ***anti–comutativas****.*

Exemplo 2.2.29 *Podemos verificar facilmente que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

são anti–comutativas duas a duas.

Teorema 2.2.8 *Sejam A uma matriz de ordem n e $D = diag(d, \cdots, d)$ uma matriz escalar de mesma ordem da matriz A. Então, $DA = AD$.*

Demonstração – Podemos verificar facilmente que uma matriz escalar pode ser escrita como $D = dI$, Exercício 2.11. Assim, utilizando o Teorema 2.1.6, temos que

$$DA = (dI)A = d(IA) = dA \qquad \text{e} \qquad AD = A(dI) = d(AI) = dA\,,$$

o que completa a demonstração. ∎

Definição 2.2.21 *Seja A uma matriz real de ordem n. Dizemos que A é uma matriz* ***normal*** *se $A^tA = AA^t$, isto é, as matrizes A e A^t são comutativas.*

Exemplo 2.2.30 *As matrizes reais*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

são matrizes normais, isto é, $A^tA = AA^t$ e $B^tB = BB^t$.

Exemplo 2.2.31 *Podemos verificar facilmente que se A é uma matriz simétrica real, então A é uma matriz normal real.*

Exemplo 2.2.32 *Podemos verificar facilmente que se A é uma matriz anti–simétrica real, então A é uma matriz normal real.*

Exemplo 2.2.33 *Podemos verificar facilmente que se A é a soma de uma matriz escalar real e uma matriz anti–simétrica real, então A é uma matriz normal real.*

De fato, vamos escrever $A = D + B$, onde D é uma matriz escalar e B é uma matriz anti–simétrica, isto é, $B^t = -B$. Assim, pelo Teorema 2.2.8, temos que

$$(D + B)^t(D + B) = (D - B)(D + B) = D^2 + DB - BD - B^2 = D^2 - B^2$$

$$(D + B)(D + B)^t = (D + B)(D - B) = D^2 - DB + BD - B^2 = D^2 - B^2$$

Portanto, mostramos que $A^tA = AA^t$, isto é, A é uma matriz normal real.

Exemplo 2.2.34 *A matriz real*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz normal, isto é, $A^tA = AA^t$. *De fato, podemos observar facilmente que a matriz* A *é a soma de uma matriz escalar e uma matriz anti–simétrica.*

Definição 2.2.22 *Seja* A *uma matriz complexa de ordem* n. *Dizemos que* A *é uma matriz* ***normal*** *se* $A^*A = AA^*$, *isto é, as matrizes* A *e* A^* *são comutativas..*

Exemplo 2.2.35 *A matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

é uma matriz normal, isto é, $A^*A = AA^*$.

Exemplo 2.2.36 *Podemos verificar facilmente que se* A *é uma matriz Hermitiana, então* A *é uma matriz normal.*

Exemplo 2.2.37 *Podemos verificar facilmente que se* A *é uma matriz anti–Hermitiana, então* A *é uma matriz normal.*

Exemplo 2.2.38 *Podemos verificar facilmente que se* A *é a soma de uma matriz escalar complexa e uma matriz anti–Hermitiana, então* A *é uma matriz normal.*

De fato, vamos escrever $A = D + B$, onde D é uma matriz escalar e B é uma matriz anti–Hermitiana, isto é, $B^* = -B$. Assim, pelo Teorema 2.2.8, temos que

$$\begin{aligned} (D+B)^*(D+B) &= (D^* - B)(D+B) = D^*D + D^*B - BD - B^2 \\ &= D^*D + D^*B - DB - B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D+B)(D+B)^* &= (D+B)(D^* - B) = DD^* - DB + BD^* - B^2 \\ &= D^*D + D^*B - DB - B^2 \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $A^*A = AA^*$, isto é, A é uma matriz normal complexa.

Exemplo 2.2.39 *A matriz complexa* $C = A + D$, *onde*

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 & 3+i \\ -1-i & 3i & i & 2i \\ -2 & i & 0 & -3 \\ -3+i & 2i & 3 & 2i \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1+i & & & \\ & 1+i & & \\ & & 1+i & \\ & & & 1+i \end{bmatrix},$$

é uma matriz normal, isto é, $C^*C = CC^*$. *De fato, podemos observar facilmente que* A *é uma matriz anti–Hermitiana e* D *é uma matriz escalar complexa.*

Exemplo 2.2.40 *Podemos observar facilmente que uma matriz simétrica complexa não necessariamente é uma matriz normal. Tome como exemplo as seguintes matrizes simétricas*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & i \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} i & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato, temos que

$$A^*A = AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, A *é uma matriz normal. Entretanto,*

$$BB^* = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B^*B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, B *não é uma matriz normal.*

Exemplo 2.2.41 *Podemos verificar facilmente que a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz normal, pois A *é Hermitiana, isto é,* $A^* = A$. *Assim, temos que*

$$A^*A = AA^* = \begin{bmatrix} 6 & 2-4i \\ 2+4i & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2.42 *Seja* A *uma matriz real de ordem* $m \times n$. *Podemos verificar facilmente que a matriz* $C = A^tA$, *de ordem* n, *é uma matriz normal.*

Exemplo 2.2.43 *Seja* A *uma matriz real de ordem* $m \times n$. *Podemos verificar facilmente que a matriz* $C = AA^t$, *de ordem* m, *é uma matriz normal.*

Teorema 2.2.9 *Seja A uma matriz normal real de ordem 2×2. Então, A ou é uma matriz simétrica ou é a soma de uma matriz escalar e uma matriz anti–simétrica.*

Demonstração – Vamos escrever a matriz A da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que

$$AA^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

Como, por hipótese, temos que $AA^t = A^tA$, obtemos três equações

(1) $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$.

(2) $c^2 + d^2 = b^2 + d^2$.

(3) $ac + bd = ab + cd$.

Desse modo, da primeira equação, ou da segunda equação, obtemos $b^2 = c^2$. Logo, temos duas possibilidades $b = c$ ou $b = -c$.

Primeiramente, considerando o caso $b = c$, o que inclui o caso $b = -c = 0$, obtemos que a matriz A é simétrica, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Finalmente, considerando a situação $b = -c \neq 0$, da terceira equação obtemos

$$c(a - d) = ac + bd = ab + cd = c(d - a).$$

Assim, temos que

$$c(a - d) = c(d - a) \quad \iff \quad 2c(a - d) = 0$$

como $c \neq 0$, obtemos $a = d$. Portanto, a matriz A tem a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

que é a soma de uma matriz escalar e uma matriz anti–simétrica, o que completa a demonstração. ■

Exercícios

Exercício 2.11 *Mostre que se* $A = [a_{ij}]$ *é uma matriz escalar de ordem* n*, então* $A = cI_n$ *para qualquer escalar* c*.*

Exercício 2.12 *Sejam* $A\,,B$ *e* C *matrizes quadradas de mesma ordem. Mostre que*

$$(ABC)^t = C^t\,B^t\,A^t\,.$$

Exercício 2.13 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz anti–simétrica. Mostre que os elementos da diagonal principal são todos nulos, isto é,* $a_{ii} = 0$ *para* $i = 1, \cdots, n$*.*

Exercício 2.14 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz Hermitiana. Mostre que os elementos da diagonal principal são números reais, isto é,* $a_{ii} \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, \cdots, n$*..*

Exercício 2.15 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz anti–Hermitiana. Mostre que os elementos da diagonal principal são ou nulo ou imaginário puro.*

Exercício 2.16 *Seja* A *uma matriz de ordem* n*. Então, a matriz* $B = A + A^t$ *é simétrica e a matriz* $C = A - A^t$ *é anti–simétrica.*

Exercício 2.17 *Seja* A *uma matriz complexa de ordem* n*. Então,* $B = A + A^*$ *é uma matriz Hermitiana e* $C = A - A^*$ *é uma matriz anti–Hermitiana.*

Exercício 2.18 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$$

comutam para quaisquer valores de a, b, c *e* d*.*

Exercício 2.19 *Sejam* A *e* B *matrizes simétricas de mesma ordem. Então,* AB *é uma matriz simétrica se, e somente se,* A *e* B *comutam, isto é,* $AB = BA$*.*

Exercício 2.20 *Seja* A *uma matriz idempotente, de ordem* $n \times n$*. Então,*

$$B = I - A$$

é uma matriz idempotente. Além disso, temos que $AB = BA = 0_n$*.*

Exercício 2.21 *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem tais que*

$$AB = A \qquad e \qquad BA = B\,.$$

Então, A *e* B *são matrizes idempotentes.*

Exercício 2.22 *Seja* A *uma matriz nilpotente com* $k = 2$*. Então,* $A(I + A)^3 = A$*.*

Exercício 2.23 *Qual a relação entre uma matriz* A *ser periódica e* A *ser nilpotente?*

Exercício 2.24 *Seja* A *uma matriz de ordem* n*. Mostre que* A *pode ser decomposta, de maneira única, como* $A = B + C$*, onde* B *é uma matriz simétrica e* C *é uma matriz anti–simétrica.*

Exercício 2.25 *Seja* A *uma matriz complexa de ordem* n*. Mostre que* A *pode ser decomposta, de maneira única, como* $A = B + C$*, onde* B *é uma matriz Hermitiana e* C *é uma matriz anti–Hermitiana.*

Exercício 2.26 *Considere* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Seja* A *uma matriz simétrica. Então,* B^tAB *é uma matriz simétrica.*

Exercício 2.27 *Considere* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Seja* A *uma matriz Hermitiana. Então,* B^*AB *é uma matriz Hermitiana.*

Exercício 2.28 *Seja* A *uma matriz Hermitiana de ordem* n*. Mostre que* A *pode ser escrita como* $A = B + iC$*, onde* B *é uma matriz simétrica real e* C *é uma matriz anti–simétrica real.*

Exercício 2.29 *Seja* A *uma matriz anti–Hermitiana de ordem* n*. Mostre que* A *pode ser escrita como* $A = B + iC$*, onde* B *é uma matriz anti–simétrica real e* C *é uma matriz simétrica real.*

Exercício 2.30 *Considere* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Seja* A *uma matriz anti–simétrica. Então,* B^tAB *é uma matriz anti–simétrica.*

Exercício 2.31 *Considere* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Sejam* A *e* B *matrizes anti–simétricas. Então,* AB *é simétrica se, e somente se, as matrizes* A *e* B *comutam, isto é,* $AB = BA$*.*

Exercício 2.32 *Seja* A *uma matriz real de ordem* $m \times n$. *Mostre que* $C = A^t A$ *é uma matriz simétrica.*

Exercício 2.33 *Sejam* A *uma matriz quadrada e* $B = \lambda A + \alpha I$, *onde* $\lambda, \alpha \in I\!R$. *Então, as matrizes* A *e* B *comutam.*

Exercício 2.34 *Mostre que não existem matrizes* A *e* B, *de ordem* n, *tais que*

$$AB - BA = I \,,$$

utilizando as propriedades de traço.

Exercício 2.35 *Se* A *é uma matriz simétrica (anti–simétrica) de ordem* m *e* P *é uma matriz de ordem* $m \times n$, *então* $B = P^t A P$ *é uma matriz simétrica (anti–simétrica).*

Exercício 2.36 *Seja* A *uma matriz de ordem* n *tal que* $AB = BA$ *para toda matriz* B *de ordem* n. *Mostre que* $A = cI_n$, *onde* c *é um escalar qualquer.*

Exercício 2.37 *Seja* A *uma matriz de ordem* n. *Mostre que*

$$I - A^{k+1} = (I - A)(I + A + \dots + A^k) = (I + A + \dots + A^k)(I - A) \,.$$

Exercício 2.38 *Mostre que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

é idempotente, isto é, $A^2 = A$.

Exercício 2.39 *Mostre que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

é nilpotente de ordem 3, *isto é,* $A^3 = 0$.

Exercício 2.40 *Mostre que se* A *é nilpotente de ordem* 2, *isto é,* $A^2 = 0$, *então*

$$A(I + A)^n = A \,,$$

para qualquer inteiro positivo n.

Exercício 2.41 *Mostre que uma matriz* A *é auto–reflexiva se, e somente se,*

$$(I - A)(I + A) = 0 .$$

Exercício 2.42 *Mostre que se* A *e* B *são matrizes quadradas, então* A *e* B *comutam se, e somente se,* $A - \lambda I$ *e* $B - \lambda I$ *comutam para qualquer escalar* λ*.*

Exercício 2.43 *Mostre que se* A *é uma matriz idempotente, de ordem* $n \times n$*, então* $B = I - A$ *é uma matriz idempotente e* $AB = BA = 0_n$*.*

Exercício 2.44 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Mostre que $A^2 - 4A - 5I = 0_3$ *, onde* $0_3 \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *é a matriz nula..*

Exercício 2.45 *Dada a matriz complexa*

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} .$$

Mostre que uma fórmula para as potências inteiras positivas da matriz A *é dada por:*

$$A^n = I, \, A, \, -I, \, -A$$

para $n = 4m, \, 4m + 1, \, 4m + 2, \, 4m + 3 \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$*, respectivamente.*

Exercício 2.46 *Mostre que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

é periódica com período 2*, isto é,* $A^3 = A$*.*

Exercício 2.47 *Mostre que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

é nilpotente, isto é, existe um $k \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $A^k = 0_3$*.*

Exercício 2.48 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

comutam, isto é, $AB = BA$.

Exercício 2.49 *Mostre que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

é auto–reflexiva, isto é, $A^2 = I$.

Exercício 2.50 *Determine todas as matrizes reais de ordem* 2 *da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

tal que $A^2 = I_2$, *isto é,* A *é auto–reflexiva.*

Exercício 2.51 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* $D = diag(d_1, \cdots, d_m)$ *uma matriz diagonal. Deduza uma regra para o produto* DA.

Exercício 2.52 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ *uma matriz diagonal. Deduza uma regra para o produto* AD.

Exercício 2.53 *Mostre que se* A *é auto–reflexiva, então as matrizes*

$$\frac{1}{2}(I + A) \qquad e \qquad \frac{1}{2}(I - A)$$

são idempotentes.

Exercício 2.54 *Mostre que se* A *é uma matriz auto–reflexiva, de ordem* $n \times n$, *então*

$$(I + A)(I - A) = 0_n .$$

Exercício 2.55 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

são anti–comutativas. Assim, temos que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

Exercício 2.56 *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Qual a condição que devemos ter para que* $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ *?*

Exercício 2.57 *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem. Qual a condição que devemos ter para que* $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *?*

Exercício 2.58 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduzir uma fórmula para as potências inteiras positivas da matriz A.

Exercício 2.59 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

determine as matriz B, *de ordem* 2, *tais que* $AB = BA$.

Exercício 2.60 *Sejam* $X = [x_{i1}]$ *e* $Y = [y_{i1}]$ *matrizes coluna de ordem* $n \times 1$. *Mostre que* $tr(XY^t) = X^tY$.

Exercício 2.61 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz real de ordem* $n \times n$. *Mostre que*

(a) $tr(A^tA) \geq 0$.

(b) $tr(A^tA) = 0$ *se, e somente se,* $A = 0_n$.

Exercício 2.62 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad para \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine A^2 *e* A^3.

(b) Faça a dedução de uma expressão para A^k, $k \in \mathbb{N}$, *se possível.*

2.3 Inversa de uma Matriz

Definição 2.3.1 *Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem tais que*

$$AB = BA = I\,,$$

*dizemos que B é a **inversa** de A e escrevemos $B = A^{-1}$. De modo análogo, temos que a matriz A é a inversa da matriz B e podemos escrever $A = B^{-1}$. Uma matriz que possui inversa dizemos que é **invertível**. Caso contrário, dizemos que a matriz é **não–invertível**.*

Exemplo 2.3.1 *As matrizes A e B dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfazem $AB = BA = I$. Logo, uma é a inversa da outra.

Teorema 2.3.1 *Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem com inversas A^{-1} e B^{-1}, respectivamente. Então, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração – Por definição, temos que

$$(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I\,.$$

Desse modo, podemos escrever

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\,.$$

Por outro lado, temos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I\,.$$

Portanto, provamos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Teorema 2.3.2 *Seja A uma matriz quadrada com inversa A^{-1}. Então,*

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}\,.$$

Demonstração – Sabemos que $AA^{-1} = I$ e $A^{-1}A = I$. Assim, calculando suas transpostas, obtemos

$$(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t = I \qquad \text{e} \qquad (A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t = I\,.$$

Desse modo, temos que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.3.3 *Sejam* A, B *e* C *matrizes quadradas tais que*

$$AB = I \qquad e \qquad CA = I .$$

Então, $B = C = A^{-1}$ *é a* ***única*** *inversa da matriz* A.

Demonstração – Como $CA = I$ e $AB = I$, temos que

$$(CA)B = C(AB) \qquad \Longrightarrow \qquad B = C .$$

Portanto, pela Definição 2.3.1, temos que $B = C = A^{-1}$. Assim, mostramos que a inversa da matriz A é **única**. ■

Exemplo 2.3.2 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Determine a matriz A^{-1}, *se possível.*

Sabendo que a inversa da matriz A é única, caso exista, vamos representar a matriz A^{-1} da seguinte forma:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

para em seguida utilizar o fato que $AA^{-1} = I_2$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Assim, temos que obter a solução de dois sistemas lineares

$$\begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2b + 3d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

que são equivalentes aos seguintes sistemas lineares, respectivamente,

$$\begin{cases} 6a + 9c = 3 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 6b + 9d = 0 \\ d = -2 \end{cases}$$

que possuem solução única. Portanto, obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} ,$$

mostrando também a sua unicidade.

Exercícios

Exercício 2.63 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz A^{-1} .

Exercício 2.64 *Considere a matriz real* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad com \qquad ad - bc \neq 0 .$$

Mostre que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.65 *Sejam* $A\,,B$ *e* C *matrizes quadradas de mesma ordem com inversas* $A^{-1}\,, B^{-1}$ *e* C^{-1} *, respectivamente. Mostre que* $(ABC)^{-1} = C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}$.

Exercício 2.66 *Seja* A *uma matriz quadrada com inversa* A^{-1} *. Mostre que*

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

para qualquer escalar λ *não–nulo.*

Exercício 2.67 *Seja* $D = diag(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ *uma matriz diagonal, de ordem* n*, com os elementos* $a_{ii} \neq 0$ *para* $i = 1, \cdots, n$*. Mostre que*

$$D^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_{11}}, \cdots, \frac{1}{a_{nn}} \right)$$

Exercício 2.68 *Determine a inversa da matriz* A *definida por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.69 *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem e* B *com inversa* B^{-1}*. Mostre que* $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$*.*

Exercício 2.70 *Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem tais que AB é uma matriz invertível. Mostre que as matrizes A e B são invertíveis.*

Exercício 2.71 *Sejam A e B matrizes quadradas não–nulas, de ordem n, tais que $AB = 0_n$. Mostre que as matrizes A e B são não–invertíveis.*

Exercício 2.72 *Seja A uma matriz quadrada complexa com inversa A^{-1}. Mostre que*

$$(\,\overline{A}\,)^{-1} = \overline{(A^{-1})}\,.$$

Exercício 2.73 *Seja A uma matriz de ordem n tal que $A^4 = 0_4$. Mostre que*

$$(I_4 - A)^{-1} = I_4 + A + A^2 + A^3\,.$$

onde $I_4 \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ é a matriz identidade e $0_4 \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ é a matriz nula.

Exercício 2.74 *Seja A uma matriz nilpotente de ordem n. Mostre que a matriz $(I_n - A)$ é invertível, exibindo sua matriz inversa.*

Exercício 2.75 *Sejam A e B matrizes de ordem n. Mostre que*

(a) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

(b) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$.

Exercício 2.76 *Determine a matriz A^{-1}, se possível, da matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad \textit{para} \qquad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 2.77 *Seja X uma matriz coluna de ordem $n \times 1$ tal que $X^t X = 1$. A matriz H, de ordem n, definida por:*

$$H = I_n - 2XX^t$$

é denominada ***matriz de Householder****. Mostre que*

(a) H é uma matriz simétrica.

(b) $H^t H = I_n$.

(c) $H^{-1} = H^t$.

Dê um exemplo de uma matriz de Householder de ordem 3.

2.4 Matrizes em Blocos

Definição 2.4.1 *Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma **matriz em blocos** quando podemos particionar linhas e colunas da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qr} \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $A_{\alpha\beta}$ é de ordem $m_\alpha \times n_\beta$, com

$$m_1 + \cdots + m_q = m \qquad e \qquad n_1 + \cdots + n_r = n\,.$$

Exemplo 2.4.1 *Considere a matriz em blocos $A \in \mathbb{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta}$ são dadas por:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$$

com $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 1$. Assim, temos que

$$m_1 + m_2 = 3 \qquad e \qquad n_1 + n_2 + n_3 = 5\,.$$

Portanto, a matriz $A \in \mathbb{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, é importante observar que podemos particionar a matriz A em blocos de diversas maneiras.

Exemplo 2.4.2 *Considere a matriz em blocos* $A \in I\!M_4(I\!R)$ *definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta}$ *são dadas por:*

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

com $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $n_1 = 3$ *e* $n_2 = 1$. *Assim, temos que*

$$m_1 + m_2 = 4 \qquad e \qquad n_1 + n_2 = 4 \, .$$

Portanto, a matriz $A \in I\!M_4(I\!R)$ *é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.3 *Considere a matriz em blocos* $A \in I\!M_4(I\!R)$ *definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta}$ *são dadas por:*

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

com $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $n_1 = 2$ *e* $n_2 = 2$. *Assim, temos que*

$$m_1 + m_2 = 4 \qquad e \qquad n_1 + n_2 = 4 \, .$$

Portanto, a matriz $A \in I\!M_4(I\!R)$ *é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4.2 *Dizemos que uma matriz A é uma* ***matriz quadrada em blocos*** *se*

(a) A é uma matriz quadrada.

(b) Os blocos formam uma matriz quadrada.

(c) O blocos diagonais são matrizes quadradas.

Definição 2.4.3 *Dizemos que uma matriz quadrada em blocos $D \in I\!M_n(I\!R)$ é uma* ***matriz diagonal em blocos*** *se os blocos não diagonais são matrizes nulas. Denotamos a matriz diagonal em blocos da seguinte forma:*

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ & D_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{rr} \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $D_{\alpha\alpha}$ é de ordem $n_\alpha \times n_\alpha$, com $n_1 + \cdots + n_r = n$.

Em geral, representamos a matriz diagonal em bloco D da forma:

$$D = D_{11} \oplus D_{22} \oplus \cdots \oplus D_{rr} = \oplus \sum_{i=1}^{r} D_{ii} \,,$$

que também é denominada **soma direta** das matrizes $D_{11}, \cdots, D_{rr}$.

Exemplo 2.4.4 *A matriz do Exemplo 2.4.3 é uma matriz diagonal em blocos.*

Definição 2.4.4 *Dizemos que uma matriz quadrada em blocos $L \in I\!M_n(I\!R)$ é uma* ***matriz triangular inferior em blocos*** *se os blocos acima da diagonal principal são matrizes nulas.*

Exemplo 2.4.5 *A matriz quadrada em blocos $L \in I\!M_4(I\!R)$ definida na forma:*

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0_2 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

onde $0_2 \in I\!M_2(I\!R)$ é a matriz nula, e as matrizes $L_{\alpha\beta}$ são dadas por:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \;,\; L_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad L_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

é uma matriz triangular inferior em blocos.

Portanto, a matriz $L \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *é dada por:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4.5 *Dizemos que uma matriz quadrada em blocos* $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é uma* ***matriz triangular superior em blocos*** *se os blocos abaixo da diagonal principal são matrizes nulas.*

Exemplo 2.4.6 *A matriz quadrada em blocos* $U \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *definida na forma:*

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0_4 & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $U_{\alpha\beta}$ *são dadas por:*

$$U_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad U_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad U_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

é uma matriz triangular superior em blocos.

Portanto, a matriz $U \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *é dada por:*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4.6 *Sejam* $A\,,\, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *matrizes em blocos dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qr} \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta}\,,\, B_{\alpha\beta}$ *são de ordem* $m_\alpha \times n_\beta$*, com*

$$m_1 + \cdots + m_q = m \qquad e \qquad n_1 + \cdots + n_r = n\,.$$

*Definimos a **soma*** $C = A + B$ *da seguinte forma:*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} + B_{q1} & \cdots & A_{qr} + B_{qr} \end{bmatrix},$$

que é uma matriz em blocos, onde cada matriz $C_{\alpha\beta}$ *é de ordem* $m_\alpha \times n_\beta$*.*

Lema 2.4.1 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ *e* $B \in \mathbb{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ *matrizes em blocos dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_q \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix},$$

onde cada matriz A_α *é de ordem* $m_\alpha \times p$*, com*

$$m_1 + \cdots + m_q = m,$$

e cada matriz B_β *é de ordem* $p \times n_\beta$*, com*

$$n_1 + \cdots + n_r = n.$$

*Então, o **produto*** $C = AB$*, que é uma matriz em blocos, é definido na forma:*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $C_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta$ *é de ordem* $m_\alpha \times n_\beta$*.*

Demonstração – Veja Lema 1.3.1, página 25, da referência [11]. □

Lema 2.4.2 *Sejam* $A \in I\!\!M_{m \times p}(I\!\!R)$ *e* $B \in I\!\!M_{p \times n}(I\!\!R)$ *matrizes em blocos dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_q \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix},$$

onde as matrizes A_γ *são de ordem* $m \times n_\gamma$ *e as matrizes* B_γ *são de ordem* $n_\gamma \times n$*, com* $n_1 + \cdots + n_q = p$*.*

Então, o ***produto*** $C = AB$*, que é uma matriz em blocos, é definido na forma:*

$$C = \sum_{\gamma=1}^{q} A_\gamma B_\gamma \,,$$

onde cada matriz $A_\gamma B_\gamma \in I\!\!M_{m \times n}(I\!\!R)$ *para* $\gamma = 1, \cdots, q$*.*

Demonstração – Veja Lema 1.3.2, página 26, da referência [11]. □

Lema 2.4.3 *Sejam* $A \in \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ *e* $B \in \mathbb{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ *matrizes em blocos dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qs} \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $A_{\alpha\gamma}$ *é de ordem* $m_\alpha \times l_\gamma$*, com*

$$m_1 + \cdots + m_q = m \qquad e \qquad l_1 + \cdots + l_s = p\,,$$

e cada matriz $B_{\gamma\beta}$ *é de ordem* $l_\gamma \times n_\beta$*, com*

$$n_1 + \cdots + n_r = n\,.$$

Então, o ***produto*** $C = AB$*, que é uma matriz em blocos, é definido na forma:*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix},$$

que é uma matriz em blocos, onde cada matriz $C_{\alpha\beta}$ *é dada por:*

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s} A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}\,,$$

que é de ordem $m_\alpha \times n_\beta$*, para*

$$\alpha = 1, \cdots, q \qquad e \qquad \beta = 1, \cdots, r\,.$$

Demonstração – Veja Teorema 1.3.3, página 26, da referência [11]. □

Exemplo 2.4.7 *Sejam a matriz em blocos A e o vetor coluna em blocos X dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad e \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e cada vetor coluna $X_\beta \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Assim, o produto $Y = AX$ é escrito da seguinte forma:

$$Y = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{bmatrix},$$

de acordo com o Lema 2.4.3.

Para exemplificar, considere a matriz em blocos $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ definida na forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são dadas por:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

e o vetor coluna $X \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ definido na forma:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad com \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o produto $Y = AX$ é escrito da seguinte forma:

$$Y = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}X_1 \\ A_{22}X_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o vetor coluna $Y \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ é dado por:

$$Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.8 *Considere a matriz diagonal em blocos* A *definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0_n \\ 0_n & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde $0_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é a matriz nula, e as matrizes* $A_{\alpha\alpha} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *são invertíveis.*

Desse modo, a matriz em blocos B *definida na forma:*

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

tal que

$$AB = BA = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix},$$

onde $I_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é a matriz identidade, é a inversa da matriz* A.

De acordo com o Lema 2.4.3, temos que o produto AB *é dado por:*

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}\,B_{11} & A_{11}\,B_{12} \\ A_{22}\,B_{21} & A_{22}\,B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
A_{11}\,B_{11} &= I_n & &\iff & B_{11} &= A_{11}^{-1} \\
A_{11}\,B_{12} &= 0_n & &\iff & B_{12} &= A_{11}^{-1}\,0_n = 0_n \\
A_{22}\,B_{21} &= 0_n & &\iff & B_{21} &= A_{22}^{-1}\,0_n = 0_n \\
A_{22}\,B_{22} &= I_n & &\iff & B_{22} &= A_{22}^{-1}
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a matriz diagonal em blocos

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0_n \\ 0_n & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

que é a inversa da matriz A.

Exemplo 2.4.9 *Considere a matriz diagonal em blocos* $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0_2 \\ 0_2 & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde $0_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é a matriz nula, e as matrizes* $A_{\alpha\alpha} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *são dadas por:*

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz diagonal em blocos $A^{-1} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *definida na forma:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

é a inversa da matriz A*, onde as matrizes* $A_{\alpha\alpha}^{-1} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *são dadas por:*

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & I_2 \end{bmatrix},$$

onde $I_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é a matriz identidade.*

Portanto, as matrizes $A\,,\, A^{-1} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ *são dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lema 2.4.4 *Considere a matriz em blocos* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *dada na seguinte forma:*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qr} \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $A_{\alpha\beta}$ *é de ordem* $m_\alpha \times n_\beta$*, com*

$$m_1 \,+\, \cdots \,+\, m_q \,=\, m \qquad e \qquad n_1 \,+\, \cdots \,+\, n_r \,=\, n\,.$$

Então, a matriz em blocos $A^t \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *é definida na forma:*

$$A^t \;=\; \begin{bmatrix} A_{11}^t & \cdots & A_{q1}^t \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^t & \cdots & A_{qr}^t \end{bmatrix}.$$

Demonstração – A prova pode ficar a carga do leitor. □

Exemplo 2.4.10 *Considere a matriz em blocos* $A \in \mathbb{M}_{3\times5}(\mathbb{R})$ *definida na forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $A_{\alpha\beta}$ *são dadas por:*

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$$

Desse modo, a matriz $A^t \in \mathbb{M}_{5\times3}(\mathbb{R})$ *é dada por:*

$$A^t = \begin{bmatrix} A^t_{11} & A^t_{21} \\ A^t_{12} & A^t_{22} \\ A^t_{13} & A^t_{23} \end{bmatrix}$$

onde as matrizes $A^t_{\alpha\beta}$ *são dadas por:*

$$A^t_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^t_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t_{23} = \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.11 *Sejam A uma matriz normal real de ordem $n \times n$ e B uma matriz normal real de ordem $m \times m$. Vamos mostrar que a matriz em blocos dada por:*

$$C = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B \end{bmatrix}$$

é uma matriz normal de ordem $(n+m)$, onde $0_{n\times m}$ é a matriz nula de ordem $n \times m$.

Assim, temos que

$$CC^t = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^t & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^t & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & BB^t \end{bmatrix}$$

$$C^tC = \begin{bmatrix} A^t & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^tA & 0_{n\times m} \\ 0^t_{n\times m} & B^tB \end{bmatrix}$$

Como, por hipótese, $A^tA = AA^t$ e $B^tB = BB^t$, obtemos $CC^t = C^tC$. Logo, mostramos que a matriz em blocos C é uma matriz normal.

Exemplo 2.4.12 *Podemos verificar facilmente que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

são matrizes normais.

Portanto, a matriz em blocos dada por:

$$C = \begin{bmatrix} A & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

é também uma matriz normal.

2.5 Operações Elementares. Equivalência

Definição 2.5.1 *As* ***operações elementares*** *com matrizes, são operações que mantém tanto a ordem da matriz quanto a sua característica. Vamos definir dois tipos de operações elementares. As operações elementares de linhas, que vamos indicar por h, e as operações elementares de colunas, que vamos indicar por k.*

São ***operações elementares de linhas****:*

(a) Permutação da i–ésima linha com a j–ésima linha, que indicaremos por:

$$h : l_i \longleftrightarrow l_j \,.$$

(b) Multiplicação da i–ésima linha por um escalar r não–nulo, que indicaremos por:

$$h : l_i \longleftarrow rl_i \,.$$

(c) Substituição da i–ésima linha pela i–ésima linha mais a j–ésima linha multiplicada por um escalar r não–nulo, que indicaremos por:

$$h : l_i \longleftarrow l_i + rl_j \,.$$

De modo análogo, definimos os mesmos tipos de operações elementares com as colunas da matriz, que são denominadas ***operações elementares de colunas****.*

São ***operações elementares de colunas****:*

(a) Permutação da i–ésima coluna com a j–ésima coluna, que indicaremos por:

$$k : c_i \longleftrightarrow c_j \,.$$

(b) Multiplicação da i–ésima coluna por um escalar r não–nulo, que indicaremos por:

$$k : c_i \longleftarrow rc_i \,.$$

(c) Substituição da i–ésima coluna pela i–ésima coluna mais a j–ésima coluna multiplicada por um escalar r não–nulo, que indicaremos por:

$$k : c_i \longleftarrow c_i + rc_j \,.$$

Vamos nos dedicar mais às operações elementares de linhas, pois temos como objetivo central suas aplicações na análise de soluções de sistemas de equações lineares.

Exemplo 2.5.1 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

a operação elementar de linhas

$$h : l_2 \longleftarrow l_2 - 3l_1$$

e a operação elementar de colunas

$$k : c_2 \longleftarrow c_2 + c_3 \,.$$

Portanto, aplicando a seqüência $k(h(A))$ *obtemos a seguinte matriz resultante*

$$C = k(h(A)) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar facilmente que $C = h(k(A))$.

Exemplo 2.5.2 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

vamos aplicar a seguinte seqüência de operações elementares de linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$l_3 \longleftarrow 5l_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & -25 \end{bmatrix} \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}.$$

Assim, encontramos uma matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix},$$

obtida da matriz A *através de operações elementares de linhas.*

Definição 2.5.2 *A* ***operação elementar inversa*** *é uma operação que desfaz o efeito da operação elementar, isto é, depois de haver realizado uma operação elementar sobre uma matriz, aplicando sobre a matriz resultante a operação elementar inversa retornamos à matriz original.*

Exemplo 2.5.3 *Considere as seguintes operações elementares de linhas*

(a) $h : l_i \longleftarrow l_i + c l_j$ ***(b)*** $h : l_i \longleftarrow r l_i$ ***(c)*** $h : l_i \longleftrightarrow l_j$

onde os escalares c *e* r *são não–nulos.*

As respectivas operações elementares inversas são dadas por:

(a) $h_1 : l_i \longleftarrow l_i - c l_j$ ***(b)*** $h_1 : l_i \longleftarrow \dfrac{1}{r} l_i$ ***(c)*** $h_1 : l_i \longleftrightarrow l_j$

o que pode ser facilmente verificada.

Exemplo 2.5.4 *Considere a seguinte seqüência de operações elementares de linhas*

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \quad e \quad l_2 \longleftarrow \frac{1}{5} l_2 \, .$$

Desse modo, a seqüência de operações elementares inversas é dada por:

$$l_2 \longleftarrow 5l_2 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_1 \quad e \quad l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_1 \, .$$

Exemplo 2.5.5 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \quad , \quad l_2 \longleftarrow \frac{1}{5} l_2 \quad e \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_2 \, ,$$

na matriz A*, obtemos a seguinte matriz resultante*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} .$$

Finalmente, aplicando a seqüência de operações elementares inversas

$$l_3 \longleftarrow l_3 + 4l_2 \quad , \quad l_2 \longleftarrow 5l_2 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_1 \quad e \quad l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_1 \, .$$

na matriz B*, obtemos novamente a matriz* A*.*

Assim, podemos verificar facilmente que a operação inversa de uma operação elementar de linhas é uma operação elementar de linhas do mesmo tipo. Desse modo, temos que

$$h_1(h(A)) = h(h_1(A)) = A\,.$$

De modo análogo, a operação inversa de uma operação elementar de colunas é uma operação elementar de colunas do mesmo tipo.

Definição 2.5.3 *Sejam A e B matrizes de mesma ordem. Dizemos que a matriz B é* ***linha equivalente*** *a matriz A, se a matriz B pode ser obtida da matriz A através de uma seqüência finita de operações elementares sobre as linhas de A.*

Exemplo 2.5.6 *Considere a matriz A, de ordem 3×4, dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_1 \qquad e \qquad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_2$$

na matriz A, obtemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é linha equivalente a matriz A.

Definição 2.5.4 *Sejam A e B matrizes de mesma ordem. Dizemos que a matriz B é* ***equivalente por coluna*** *a matriz A, se a matriz B pode ser obtida da matriz A através de uma seqüência finita de operações elementares sobre as colunas de A.*

Definição 2.5.5 *Sejam A e B matrizes de mesma ordem. Dizemos que a matriz B é* ***equivalente*** *a matriz A, se a matriz B pode ser obtida da matriz A através de uma seqüência finita de operações elementares sobre as linhas e sobre as colunas de A. Indicamos $B \sim A$ para denotar que a matriz B é equivalente a matriz A.*

Exercícios

Exercício 2.78 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são equivalentes, indicando a seqüência de operações elementares de linhas utilizada para reduzir a matriz A *a matriz triangular superior* U.

Exercício 2.79 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes, indicando a seqüência de operações elementares de linhas utilizada para reduzir a matriz A *a matriz* B.

Exercício 2.80 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes, indicando a seqüência de operações elementares utilizada.

Exercício 2.81 *Mostre que as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes, indicando a seqüência de operações elementares utilizada.

2.6 Forma Escalonada. Forma Escada

Definição 2.6.1 *Uma matriz R, de ordem $m \times n$, está na **forma escalonada**, linha reduzida, se prevalecem as seguintes condições:*

(a) Todas as linhas nulas, se houver, aparecem nas últimas linhas da matriz.

*(b) O primeiro elemento não–nulo de uma linha, que é denominado **pivô**, está à direita do primeiro elemento não–nulo da linha anterior.*

Exemplo 2.6.1 *Nos Exemplos 2.5.5 e 2.5.6 efetuamos uma seqüência de operações elementares de linhas na matriz A com o objetivo de obter uma matriz B na forma escalonada, linha equivalente a matriz A.*

Definição 2.6.2 *Uma matriz R, de ordem $m \times n$, na **forma escalonada** está na **forma escada**, linha reduzida, se prevalecem mais as seguintes condições:*

(c) O primeiro elemento não–nulo de uma linha não–nula de R é igual a 1.

(d) Cada coluna de R que contém o primeiro elemento não–nulo tem todos os seus outros elementos nulos.

Exemplo 2.6.2 *Um exemplo de uma matriz de ordem n na forma escada é a matriz identidade I_n. De fato, podemos verificar facilmente que a matriz identidade satisfaz as propriedades exigidas. Para ilustrar, tome como exemplo a matriz*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

A matriz nula $0_{m \times n}$ é um outro exemplo de uma matriz na forma escada.

Exemplo 2.6.3 *Considerando as matrizes A e B do Exemplo 2.5.5. Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas*

$$l_3 \longleftarrow -\frac{1}{5} l_3 \quad , \quad l_1 \longleftarrow l_1 + l_2 \qquad e \qquad l_1 \longleftarrow l_1 - 2l_3$$

na matriz B na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, obtemos a matriz $R = I_3$ na forma escada, que é linha equivalente a matriz A.

Exemplo 2.6.4 *Considerando novamente as matrizes A e B do Exemplo 2.5.6. Podemos realizar uma seqüência de operações elementares de linhas na matriz B, que está na forma escalonada, para obter uma matriz R na forma escada, linha equivalente a matriz A. De fato,*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow -\frac{1}{7} l_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l_1 \longleftarrow l_1 - 4 l_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a matriz na forma escada

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é linha equivalente a matriz A.

Exemplo 2.6.5 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz R na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, indicando a seqüência de operações elementares de linhas utilizada.

Exemplo 2.6.6 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz R na forma escada, linha equivalente a matriz A, indicando a seqüência de operações elementares de linhas utilizada.

Definição 2.6.3 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$ *e* R *a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz* A*. Definimos o* ***posto linha*** *da matriz* A*, ou* ***posto de*** $\mathbf{A}$*, como sendo o número de linhas não–nulas da matriz* R*, e denotamos esse número inteiro por* $posto(A)$*.*

Exemplo 2.6.7 *Determine o posto linha da matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

e também o posto linha da matriz A^t*.*

Exemplo 2.6.8 *Determine o posto linha da matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e também o posto linha da matriz A^t*.*

Exemplo 2.6.9 *Determine o posto linha da matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e também o posto linha da matriz A^t*.*

Na seção 8.10 apresentamos um estudo mais detalhado sobre os resultados envolvendo o **posto de** $\mathbf{A}$, onde demonstraremos o fato observado nos exemplos anteriores.

2.7 Matrizes Elementares

Definição 2.7.1 *A matriz resultante da aplicação de uma única operação elementar de linhas à matriz identidade, é denominada* ***matriz elementar de linha****.*

Definição 2.7.2 *A matriz resultante da aplicação de uma única operação elementar de colunas à matriz identidade, é denominada* ***matriz elementar de coluna****.*

Exemplo 2.7.1 *Vamos considerar o seguinte exemplo de uma matriz elementar de linha obtida da matriz identidade* I_3*, que denotamos por* H*,*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_1 \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 2.7.3 *A matriz resultante da aplicação de uma única operação elementar de permutação de linhas sobre a matriz identidade, é denominada* ***matriz de permutação de linhas****.*

Definição 2.7.4 *A matriz resultante da aplicação de uma única operação elementar de permutação de colunas sobre a matriz identidade, é denominada* ***matriz de permutação de colunas****.*

Exemplo 2.7.2 *Vamos considerar o seguinte exemplo de uma matriz de permutação de linhas obtida da matriz identidade* I_3*, que denotamos por* P*,*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_1 \longleftrightarrow l_3 \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos facilmente que uma matriz de permutação também é uma matriz elementar, pois foi obtida da matriz identidade através de uma única operação elementar.

Seja h uma operação elementar de linhas, denotamos por $H = h(I_n)$ a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar h. De modo análogo, se k é uma operação elementar de colunas, vamos denotar por $K = k(I_n)$ a matriz elementar de coluna correspondente à operação elementar k.

Lema 2.7.1 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$, B *uma matriz de ordem* $p \times m$ *e* h *uma operação elementar de linhas. Então,* $h(B)A = h(BA)$.

Demonstração – Seja $E_{i\cdot}$ a matriz linha de ordem $1 \times p$ dada por:

$$E_{i\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} ,$$

onde o valor 1 aparece na i–ésima coluna, que é a i–ésima linha da matriz identidade de ordem $p \times p$. Podemos verificar facilmente que

$$E_{i\cdot}B = \begin{bmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{im} \end{bmatrix} = B_{i\cdot} ,$$

onde $B_{i\cdot}$ é a matriz linha de ordem $1 \times m$ que denota a i–ésima linha da matriz B.

Por simplicidade, vamos denotar as matrizes A e B, e a matriz identidade I_p, da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1\cdot} \\ \vdots \\ A_{i\cdot} \\ \vdots \\ A_{m\cdot} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} B_{1\cdot} \\ \vdots \\ B_{i\cdot} \\ \vdots \\ B_{p\cdot} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_p = \begin{bmatrix} E_{1\cdot} \\ \vdots \\ E_{i\cdot} \\ \vdots \\ E_{p\cdot} \end{bmatrix} ,$$

onde $A_{i\cdot}$ é a matriz linha de ordem $1 \times n$ que denota a i–ésima linha da matriz A.

De modo análogo, podemos verificar facilmente que

$$BA = \begin{bmatrix} B_{1\cdot}A \\ \vdots \\ B_{i\cdot}A \\ \vdots \\ B_{p\cdot}A \end{bmatrix} ,$$

utilizando a definição de multiplicação de matrizes. Note que $B_{i\cdot}A$ indica a multiplicação da i–ésima linha da matriz B pela matriz A, obtendo a i–ésima linha da matriz BA.

A seguir passamos para a demonstração, considerando cada uma das operações elementar de linhas, onde as observações acima serão de muita utilidade.

(1) Considere h como sendo a operação elementar de linhas que multiplica a i–ésima linha por um escalar r não–nulo, isto é, $h : l_i \longleftarrow rl_i$, cuja matriz elementar correspondente é dada por:

$$h(I_p) = H = \begin{bmatrix} E_{1\cdot} \\ \vdots \\ rE_{i\cdot} \\ \vdots \\ E_{p\cdot} \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que

$$h(B) = \begin{bmatrix} B_{1\cdot} \\ \vdots \\ rB_{i\cdot} \\ \vdots \\ B_{p\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1\cdot}B \\ \vdots \\ (rE_{i\cdot})B \\ \vdots \\ E_{p\cdot}B \end{bmatrix} = h(I_p)B = HB .$$

Portanto, temos que $h(B)A = (HB)A = H(BA) = h(BA)$, fazendo uso do fato que multiplicação de matrizes e associativa.

(2) Considere h como sendo a operação elementar de linhas que substitui a i–ésima linha pela i–ésima mais a k–ésima linha multiplicada por um escalar r não–nulo, isto é, $h : l_i \longleftarrow l_i + rl_k$, cuja matriz elementar correspondente é dada por:

$$h(I_p) = H = \begin{bmatrix} E_{1\cdot} \\ \vdots \\ E_{i\cdot} + rE_{k\cdot} \\ \vdots \\ E_{p\cdot} \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que

$$h(B) = \begin{bmatrix} B_{1\cdot} \\ \vdots \\ B_{i\cdot} + rB_{k\cdot} \\ \vdots \\ B_{p\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1\cdot}B \\ \vdots \\ (E_{i\cdot} + rE_{k\cdot})B \\ \vdots \\ E_{p\cdot}B \end{bmatrix} = h(I_p)B = HB .$$

Portanto, temos que $h(B)A = (HB)A = H(BA) = h(BA)$, fazendo uso do fato que multiplicação de matrizes e associativa.

(3) Considere h como sendo a operação elementar de linhas que permuta a i–ésima linha com a k–ésima linha, isto é, $h : l_i \longleftrightarrow l_k$, para $i < k$, cuja matriz elementar correspondente é dada por:

$$h(I_p) \;=\; H \;=\; \begin{bmatrix} E_{1\cdot} \\ \vdots \\ E_{k\cdot} \\ \vdots \\ E_{i\cdot} \\ \vdots \\ E_{p\cdot} \end{bmatrix} .$$

Desse modo, temos que

$$h(B) \;=\; \begin{bmatrix} B_{1\cdot} \\ \vdots \\ B_{k\cdot} \\ \vdots \\ B_{i\cdot} \\ \vdots \\ B_{p\cdot} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} E_{1\cdot}B \\ \vdots \\ E_{k\cdot}B \\ \vdots \\ E_{i\cdot}B \\ \vdots \\ E_{p\cdot}B \end{bmatrix} \;=\; h(I_p)B \;=\; HB .$$

Portanto, temos que $h(B)A \;=\; (HB)A \;=\; H(BA) \;=\; h(BA)$, fazendo uso do fato que multiplicação de matrizes e associativa. ■

Teorema 2.7.1 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz C resultante da aplicação de uma única operação elementar com as linhas da matriz A, é a mesma matriz C resultante da multiplicação pela esquerda da matriz A pela matriz elementar H de ordem $m \times m$, correspondente à operação elementar efetuada com as linhas de A, isto é, $C = HA$.*

Demonstração – A prova segue do Lema 2.7.1, considerando a matriz $B = I_m$. De fato, Seja H a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h. Desse modo, temos que

$$C \;=\; h(A) \;=\; h(I_m)A \;=\; HA ,$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 2.7.2 *Sejam* A *uma matriz de ordem* $m \times n$, k *uma operação elementar de colunas e* h *a operação elementar de linhas correspondente à operação* k. *Então,*

$$k(A) \;=\; (\, h(A^t)\,)^t \,.$$

Demonstração – A demonstração segue diretamente do fato que as colunas da matriz A são as linhas da matriz A^t, e vice–versa. ■

Corolário 2.7.1 *Sejam* k *uma operação elementar de colunas, sendo* K *a matriz elementar de coluna correspondente, e* h *a operação elementar de linhas análoga à operação* k, *com* H *a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas* h. *Então,* $K = H^t$.

Exemplo 2.7.3 *Vamos considerar a seguinte operação elementar de colunas*

$$k : c_2 \longleftarrow c_2 + 2c_1$$

e a operação elementar de linhas h *correspondente à operação* k, *isto é,*

$$h : l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_1 \,.$$

Desse modo, temos as matrizes elementares correspondentes às operações k *e* h

$$K \;=\; k(I_3) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad H \;=\; h(I_3) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Assim, podemos verificar que $K = H^t$.

Teorema 2.7.2 *Seja* A *uma matriz de ordem* $m \times n$. *A matriz* C *resultante da aplicação de uma única operação elementar com as colunas da matriz* A, *é a mesma matriz* C *resultante da multiplicação pela direita da matriz* A *pela matriz elementar* K, *de ordem* $n \times n$, *correspondente à operação elementar efetuada com as colunas de* A, *isto é,* $C = AK$.

Demonstração – A prova segue do Lema 2.7.2 e do Teorema 2.7.1. De fato, Sejam K a matriz elementar de coluna correspondente à operação elementar de colunas k e H a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h análoga à operação k. Desse modo, obtemos

$$k(A) \;=\; (\, h(A^t)\,)^t \;=\; (\, HA^t\,)^t \;=\; AH^t \;=\; AK \,,$$

o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.7.4 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a operação elementar de linhas $l_2 \longleftarrow l_2 - 4l_1$ *na matriz* A*, obtemos a matriz resultante* C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 - 4l_1 \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, considerando a matriz elementar de linha E *correspondente à operação elementar de linhas, definida acima,*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 - 4l_1 \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos a matriz C *da seguinte forma:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é, $C = EA$.

Exemplo 2.7.5 *Considerando o Exemplo 2.5.1, vamos denotar por* H *a matriz elementar de linha correspondente a operação elementar de linhas* h *e por* K *a matriz elementar de coluna correspondente a operação elementar de colunas* k*. Desse modo, temos que a matriz* C *pode ser obtida da seguinte forma:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que $C = (HA)K = H(AK)$*, pois o produto de matrizes possui a propriedade associativa. Logo, provamos que* $k(h(A)) = h(k(A))$.

Exemplo 2.7.6 *Considere a matriz* A *de ordem* 3×2 *e a matriz* B *de ordem* 2×3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

e a operação elementar de linhas $h : l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1$. *Podemos verificar facilmente que*

$$h(B)A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = h(BA)$$

onde as matrizes BA *e* $h(BA)$ *são dadas por:*

$$BA = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 42 & 62 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad h(BA) = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Assim, vemos que $h(B)A = h(BA)$, *que é uma ilustração do Lema 2.7.1.*

Exemplo 2.7.7 *Considere a matriz* A *de ordem* 3×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

e a seguinte seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_1 \qquad e \qquad l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2$$

com as correspondentes matrizes elementares E_1, E_2 *e* E_3, *todas de ordem* 3,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, obtemos a matriz $B = E_3 E_2 E_1 A$, *que está na forma escalonada, que corresponde a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, definida acima, na matriz* A. *De fato,*

$$B = E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que as matrizes A *e* B *são equivalentes,* $A \sim B$.

Teorema 2.7.3 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. Então, a matriz B é linha equivalente a matriz A se, e somente se, $B = PA$, com $P = H_r \cdots H_2 H_1$, onde cada matriz H_i é uma matriz elementar de linha de ordem $m \times m$.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Considerando que B é linha equivalente a matriz A. Sejam $h_1, \cdots h_r$ uma seqüência de operações elementares com as linhas de A resultando na matriz B. Desse modo, tomando H_i a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h_i, temos que $B = (H_r \cdots H_2 H_1)A = PA$.

($\Longleftarrow$) Considerando que $B = PA$, com $P = H_r \cdots H_2 H_1$, onde cada matriz H_i é uma matriz elementar de linha de ordem $m \times m$. Temos que a matriz $H_1 A$ é linha equivalente a matriz A e $H_2 H_1 A$ é linha equivalente a matriz $H_1 A$. Assim, a matriz $H_2 H_1 A$ é linha equivalente a matriz A. Continuando o processo, vemos que a matriz $(H_r \cdots H_2 H_1)A = PA$ é linha equivalente a matriz A. ■

Teorema 2.7.4 *Uma matriz elementar de linha H é invertível e sua inversa é uma matriz elementar de linha H_1 que corresponde à operação elementar inversa da operação elementar de linhas efetuada por H.*

Demonstração – Seja H a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h. Se h_1 é a operação inversa de h e $H_1 = h_1(I)$, então

$$\begin{aligned} H H_1 &= h(H_1) = h(h_1(I)) = I \\ H_1 H &= h_1(H) = h_1(h(I)) = I \end{aligned}$$

Desse modo, temos que H é uma matriz invertível e $H_1 = H^{-1}$. Logo, da definição de inversa de uma matriz, temos que $H = H_1^{-1}$. ■

Teorema 2.7.5 *Uma matriz elementar de coluna K é invertível e sua inversa é uma matriz elementar de coluna K_1 que corresponde à operação elementar inversa da operação elementar de colunas efetuada por K.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 2.7.8 *Vamos considerar o seguinte exemplo de uma matriz elementar de linha obtida da matriz identidade* I_3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 + 2l_1 \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que a operação elementar inversa é $l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1$ *e a inversa da matriz elementar* E_1 *é dada por:*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que $E_1E_2 = E_2E_1 = I_3$. *Logo,* $E_2 = E_1^{-1}$ *e* $E_1 = E_2^{-1}$*, decorrente da definição de inversa de uma matriz.*

Exemplo 2.7.9 *Vamos considerar o seguinte exemplo de uma matriz de permutação de linhas obtida da matriz identidade* I_3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_2 \longleftrightarrow l_3 \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que a matriz de permutação P *é uma matriz elementar e podemos observar que* $P^{-1} = P$*, isto é,* $PP = P^2 = I_3$. *Logo, a matriz de permutação* P *é idempotente.*

Exemplo 2.7.10 *No Exemplo 2.7.7 temos que* $B = E_3E_2E_1A$. *Logo, como as matrizes elementares são invertíveis, obtemos que* $A = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1}\,B$.

Assim, denotando $E = E_3E_2E_1$*, temos que* $E^{-1} = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1}$. *Portanto, obtemos*

$$A = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1}\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7.11 *Considerando o Exemplo 2.7.10, calcule explicitamente as matrizes*

$$E = E_3E_2E_1 \qquad e \qquad E^{-1} = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1}.$$

Teorema 2.7.6 *Sejam* $H_1,\, H_2,\, \cdots,\, H_r$ *matrizes elementares de linha e*

$$H \;=\; H_r \cdots H_2\, H_1\,.$$

Então, $H^{-1} \;=\; H_1^{-1}\, H_2^{-1} \cdots H_r^{-1}$.

Demonstração – Pelo Teorema 2.7.4, temos que cada matriz elementar de linha H_i é invertíveis. Assim, a prova segue da aplicação do Teorema 2.3.1. □

Teorema 2.7.7 *Sejam* $K_1,\, K_2,\, \cdots,\, K_r$ *matrizes elementares de coluna e*

$$K \;=\; K_r \cdots K_2\, K_1\,.$$

Então, $K^{-1} \;=\; K_1^{-1}\, K_2^{-1} \cdots K_r^{-1}$.

Demonstração – Pelo Teorema 2.7.5, temos que cada matriz elementar de coluna H_i é invertíveis. Assim, a prova segue da aplicação do Teorema 2.3.1. □

Exemplo 2.7.12 *Dada a matriz*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz R *na forma escalonada, linha equivalente a matriz* A*, indicando a seqüência de matrizes elementares de linha utilizada.*

Exemplo 2.7.13 *Dada a matriz*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine uma seqüência de matrizes elementares $H_1,\, \cdots,\, H_r$*, onde cada matriz* H_i *é uma matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas* h_i*, de modo que* $H_r H_{r-1} \cdots H_2 H_1 A \;=\; I_3$*. Mostre que* $H_r H_{r-1} \cdots H_2 H_1 \;=\; A^{-1}$*.*

Exemplo 2.7.14 *Mostre que necessariamente uma matriz elementar de linha de ordem* 2×2 *é uma das seguintes matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

para o escalar $c \neq 0$.

Teorema 2.7.8 *Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) A é invertível.

(b) A é linha equivalente a matriz identidade.

(c) A é um produto de matrizes elementares de linha.

Demonstração

Vamos mostrar que *(a)* $\Longrightarrow$ *(b)*. Considerando que A é invertível e linha equivalente a uma matriz B na forma escada. Sejam $H_1, H_2, \cdots, H_r$ matrizes elementares de linha, onde cada matriz H_i corresponde a uma operação elementar de linhas h_i, tais que

$$B = H_r \cdots H_2 H_1 A .$$

Como A é invertível e cada matriz elementar de linha H_i também é invertível, temos que B é invertível. Entretanto, se $B \neq I_n$, então B possui uma linha nula, o que é uma contradição, pois B é invertível. Logo, $B = I_n$.

Vamos mostrar que *(b)* $\Longrightarrow$ *(c)*. Considerando que A é linha equivalente a matriz I_n. Sejam $h_1, \cdots h_r$ uma seqüência de operações elementares com as linhas de A resultando na matriz I_n. Desse modo, tomando cada matriz H_i como sendo a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h_i, temos que

$$I_n = H_r \cdots H_2 H_1 A .$$

Pelo Teorema 2.7.6, temos que o produto de matrizes elementares de linha é invertível. Assim, temos que

$$A = H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_r^{-1} .$$

Sabemos que H_i^{-1} também é uma matriz elementar de linha. Portanto, mostramos que A é um produto de matrizes elementares de linha.

Finalmente, mostraremos que *(c)* $\Longrightarrow$ *(a)*. Sejam $H_1, H_2, \cdots, H_r$ matrizes elementares de linha, onde cada matriz H_i corresponde a uma operação elementar de linhas h_i, tais que $A = H_r \cdots H_2 H_1$. Pelo Teorema 2.7.6, temos que o produto de matrizes elementares de linha é invertível. Desse modo, obtemos

$$A^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_r^{-1} ,$$

provando que A é invertível, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.7.15 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar a matriz A^{-1}*, se possível, através da aplicação de uma seqüência de operações elementares de linhas* $h_1, h_2, \cdots, h_r$ *na matriz* A *de modo que* $A \sim I_3$*. Pelo Teorema 2.7.8, sabemos que aplicando essa mesma seqüência de operações elementares de linhas na matriz identidade* I_3 *obtemos a matriz* A^{-1}*.*

Inicialmente, aplicamos as operações elementares de linhas

$$h_1 : l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \quad , \quad h_2 : l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \qquad \text{e} \qquad h_3 : l_2 \longleftrightarrow l_3$$

simultaneamente na matriz A, obtendo uma matriz R na forma escalonada, e na matriz identidade I_3, obtendo

$$R = H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_3 H_2 H_1 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, aplicamos as operações elementares de linhas

$$h_4 : l_2 \longleftarrow l_2 - l_3 \quad , \quad h_5 : l_1 \longleftarrow l_1 - 2l_3 \qquad \text{e} \qquad h_6 : l_1 \longleftrightarrow l_1 + l_2$$

simultaneamente na matriz R e na matriz $H_3 H_2 H_1 I_3$, obtendo

$$H_6 H_5 H_4 R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H_6 H_5 H_4 H_3 H_2 H_1 I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, aplicamos as operações elementares de linhas

$$h_7 : l_2 \longleftarrow -l_2 \qquad \text{e} \qquad h_8 : l_3 \longleftarrow -l_3$$

nas matrizes acima, obtendo $I_3 = H_8 H_7 H_6 H_5 H_4 H_3 H_2 H_1 A$ e

$$A^{-1} = H_8 H_7 H_6 H_5 H_4 H_3 H_2 H_1 I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução do exemplo.

Exemplo 2.7.16 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar a matriz A^{-1}*, se possível, através da aplicação de uma seqüência de operações elementares de linhas* $h_1, h_2, \cdots, h_r$ *na matriz* A *de modo que* $A \sim I_3$*. Pelo Teorema 2.7.8, sabemos que aplicando essa mesma seqüência de operações elementares de linhas na matriz identidade* I_3 *obtemos a matriz* A^{-1}*.*

Para facilitar a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, vamos cria uma **matriz ampliada** M da seguinte forma:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Inicialmente, na primeira parte da matriz M temos a matriz A e na segunda parte da matriz M temos a matriz identidade I_3.

Agora, aplicando as operações elementares de linhas

$$h_1 : l_2 \longleftarrow l_2 - 3l_1 \quad , \quad h_2 : l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \quad \text{e} \quad h_3 : l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2$$

na matriz ampliada M, obtemos

$$H_3\,H_2\,H_1\,M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Temos que a matriz $R = H_3\,H_2\,H_1\,A$ na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, possui uma linha nula. Assim, pelo Teorema 2.7.8, podemos concluir que a matriz A não possui inversa, pois não poderá ser reduzida linha equivalente à matriz identidade I_3.

Teorema 2.7.9 *Sejam* A *e* B *matrizes de ordem* $m \times n$. *Mostre que a matriz* B *é equivalente por coluna a matriz* A *se, e somente se,* $B = AQ$, *com* $Q = K_1 K_2 \cdots K_r$, *onde cada matriz* K_i *é uma matriz elementar de coluna de ordem* $n \times n$.

Demonstração – A prova é feita de modo análogo ao Teorema 2.7.3. □

Corolário 2.7.2 *Sejam* A *e* B *matrizes de ordem* $m \times n$. *Então, a matriz* B *é equivalente a matriz* A, *que indicamos por* $B \sim A$, *se, e somente se, existe uma matriz invertível* P *de ordem* $m \times m$ *e uma matriz invertível* Q *de ordem* $n \times n$, *tais que* $B = PAQ$.

Demonstração – A prova segue imediata da Definição 2.5.5, do Teorema 2.7.3 e do Teorema 2.7.9. □

Exemplo 2.7.17 *Vamos mostrar que a equivalência de matrizes, que indicamos por* $\sim$*, é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem* $m \times n$*, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) ***Propriedade Reflexiva:*** $A \sim A$.

(b) ***Propriedade Simétrica:*** *Se* $A \sim B$*, então* $B \sim A$.

(c) ***Propriedade Transitiva:*** *Se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$*, então* $A \sim C$.

para A*,* B *e* C *matrizes de ordem* $m \times n$.

Podemos verificar facilmente que $A \sim A$. De fato, pois $A = I_m A I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$, e I_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$. Assim, mostramos que a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade reflexiva.

Considerando que a matriz A é equivalente a matriz B, $A \sim B$, isto é, existe uma matriz invertível P de ordem $m \times m$ e uma matriz invertível Q de ordem $n \times n$, tais que $A = PBQ$.

Assim, temos que $B = P^{-1} A Q^{-1}$. Logo, tomando as matrizes $P_1 = P^{-1}$ e $Q_1 = Q^{-1}$, obtemos $B = P_1 A Q_1$. Desse modo, mostramos que a matriz B é equivalente a matriz A, $B \sim A$. Portanto, mostramos que a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade simétrica.

Considerando que a matriz A é equivalente a matriz B, $A \sim B$, isto é, existe uma matriz invertível P_1 de ordem $m \times m$ e uma matriz invertível Q_1 de ordem $n \times n$, tais que $A = P_1 B Q_1$, e que a matriz B é equivalente a matriz C, $B \sim C$, isto é, existe uma matriz invertível P_2 de ordem $m \times m$ e uma matriz invertível Q_2 de ordem $n \times n$, tais que $B = P_2 C Q_2$. Desse modo, temos que

$$A = P_1 B Q_1 = P_1 (P_2 C Q_2) Q_1 = (P_1 P_2) C (Q_2 Q_1)$$

Sabemos que a matriz $P_1 P_2$ é invertível, pois as matrizes P_1 e P_2 são invertíveis, e que a matriz $Q_2 Q_1$ é invertível, pois as matrizes Q_1 e Q_2 são invertíveis. Desse modo, mostramos que a matriz A é equivalente a matriz C, $A \sim C$. Assim, mostramos que a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade transitiva.

Portanto, mostramos que a equivalência de matrizes é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$.

Exercícios

Exercício 2.82 *Determine as matrizes elementares de linha* H_1, H_2, H_3 *e* H_4, *de ordem* 3×3, *que correspondem às operações elementares de linhas*

$$h_1 : l_1 \longleftrightarrow l_3 \ \ , \ \ h_2 : l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \ \ , \ \ h_3 : l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_1 \quad e \quad h_4 : l_3 \longleftarrow l_3 - l_2$$

e encontre a inversa da matriz $H = H_4 H_3 H_2 H_1$.

Exercício 2.83 *Escreva a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares de linha, se possível.

Exercício 2.84 *Escreva a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares de linha e determine sua inversa, se possível.

Exercício 2.85 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz A^{-1}, *se possível, através da aplicação de uma seqüência de operações elementares de linhas* $h_1, h_2, \cdots, h_r$ *na matriz* A *de modo que* $A \sim I_3$.

Exercício 2.86 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz A^{-1}, *se possível, através da aplicação de uma seqüência de operações elementares de linhas* $h_1, h_2, \cdots, h_r$ *na matriz* A *de modo que* $A \sim I_3$.

Exercício 2.87 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz R na forma escalonada que seja linha equivalente a matriz A, e uma matriz P invertível de ordem 3×3 tal que $R = PA$.

Exercício 2.88 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz R na forma escalonada que seja linha equivalente a matriz A e uma matriz P invertível de ordem 3×3 tal que $R = PA$.

Exercício 2.89 *Considere a seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz L triangular inferior que seja equivalente por coluna a matriz A, indicando a seqüência de operações elementares de colunas utilizada e a respectiva seqüência de matrizes elementares de coluna, isto é, $L = AK_1 K_2 \cdots K_r$.

Exercício 2.90 *Considere a matriz L triangular inferior obtida no Exercício 2.89. Determine a matriz D linha equivalente a matriz L através da seqüência de operações elementares de linhas correspondente à seqüência de operações elementares de colunas utilizada para obter a matriz L, isto é, $D = H_r \cdots H_2 H_1 L$ onde $H_i = (K_i)^t$.*

Exercício 2.91 *Determine o posto linha da matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e também o posto linha da matriz A^t.

2.8 Matrizes Congruentes. Lei da Inércia

Definição 2.8.1 *Sejam A e B matrizes reais de ordem $n \times n$. Dizemos que a matriz B é* ***congruente*** *com a matriz A se existe uma matriz real invertível P de ordem $n \times n$ tal que $B = PAP^t$.*

Podemos verificar facilmente que se a matriz B é congruente a uma matriz simétrica A, então B é simétrica. De fato,

$$B^t = (\, PAP^t \,)^t = PA^tP^t = PAP^t = B \,,$$

e assim mostramos que B é uma matriz simétrica.

Como a congruência é uma relação de equivalência, Exemplo 2.8.3, temos que somente as matrizes simétricas podem ser mutuamente congruentes e, em particular, somente as matrizes simétricas são congruentes a matrizes diagonais.

Teorema 2.8.1 (Lei da Inércia) *Seja A uma matriz simétrica real. Então, existe uma matriz real invertível P tal que $D = PAP^t$ é uma matriz diagonal. Além disso, o número de elementos na diagonal de D que são positivos, negativos e nulos é sempre o mesmo, independente da matriz P que realiza a relação de congruência.*

Na seção 6.7 vamos apresentar a demonstração da *Lei de Inércia de Sylvester*, que é uma generalização do Teorema 2.8.1, utilizando os resultados de diagonalização de matrizes Hermitianas, tornando a prova mais simples e elegante.

A seguir, apresentamos um procedimento para determinar da matriz P que realiza a diagonalização da matriz simétrica A através da relação de congruência.

Sejam $h_1, \cdots, h_r$ a seqüência de operações elementares de linhas, sendo H_i a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h_i, tais que

$$R = H_r \cdots H_2 \, H_1 \, A = H A$$

é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz A, que é uma matriz triangular superior, onde estamos indicando a matriz $H = H_r \cdots H_2 \, H_1$.

Sejam $k_1, \cdots, k_r$ a seqüência de operações elementares de colunas correspondente à seqüência de operações elementares de linhas $h_1, \cdots, h_r$. Indicamos por K_i a matriz elementar de coluna correspondente à operação elementar de colunas k_i. Sabemos que

$$K_i = (H_i)^t ,$$

pelo Corolário 2.7.1.

Aplicando a seqüência de operações elementares de colunas $K_1, \cdots, K_r$ na matriz $R = HA$, obtemos a matriz diagonal

$$D = H_r \cdots H_2 H_1 A K_1 \cdots K_r = HAH^t$$

Desse modo, a matriz P, que é triangular inferior, é dada por:

$$P = H_r \cdots H_2 H_1 = H$$

realiza a diagonalização da matriz simétrica A através da relação de congruência, isto é,

$$D = PAP^t$$

é uma matriz diagonal.

Portanto, a matriz P é invertível, pois é o produto de matrizes elementares de linhas. Assim, a matriz $L = P^{-1}$, que é triangular inferior, é dada por:

$$L = (H_1)^{-1} (H_2)^{-1} \cdots (H_r)^{-1} .$$

Desse modo, temos a decomposição da matriz simétrica A na forma:

$$A = LDL^t ,$$

que é bastante utilizada em várias aplicações. Essa forma de decomposição de matrizes simétricas será estudada na seção 8.5, onde apresentamos a Decomposição de Cholesky.

Exemplo 2.8.1 *Dada a matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar uma matriz invertível P *de modo que*

$$D = PAP^t$$

seja uma matriz diagonal.

Para facilitar a aplicação da seqüência de operações elementares, vamos cria uma **matriz ampliada** M da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, na primeira parte da matriz M temos a matriz A e na segunda parte da matriz M temos a matriz identidade I_3.

Agora, aplicando as operações elementares de linhas

$$h_1 : l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad h_2 : l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \qquad \text{e} \qquad h_3 : l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2$$

na matriz ampliada M, obtemos

$$H_3 \, H_2 \, H_1 \, M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que as matrizes $P = H_3 \, H_2 \, H_1$ e PA são dadas por:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, aplicando as correspondentes operações elementares de colunas na matriz PA, isto é, $PA \, K_1 \, K_2 \, K_3$, onde $K_i = (H_i)^t$, obtemos a matriz diagonal

$$D = PAP^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

que é a diagonalização da matriz A através da transformação de congruência. Sabemos que a matriz P é invertível, pois é um produto de matrizes elementares de linhas.

Podemos observar facilmente que

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, chamando a matriz triangular inferior $L = P^{-1}$, temos que

$$L = P^{-1} = (H_1)^{-1} (H_2)^{-1} (H_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$(H_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (H_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (H_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que a matriz simétrica A pode ser decomposta da seguinte forma:

$$A = P^{-1} D P^{-t} = L D L^t,$$

que também é uma forma bastante usual de decomposição de uma matriz simétrica, que possui várias aplicações interessantes.

Exemplo 2.8.2 *Considere a matriz simétrica A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & 28 & 6 & 1 \\ 12 & 6 & 72 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz invertível P de modo que $D = PAP^t$ seja uma matriz diagonal, e a matriz $L = P^{-1}$ tal que $A = LDL^t$.

Exemplo 2.8.3 *Vamos mostrar que a relação de congruência, que indicaremos por* $\approx$, *é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem* $n \times n$, *isto é, satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) ***Reflexiva:*** $A \approx A$.

(b) ***Simétrica:*** *Se* $B \approx A$, *então* $A \approx B$.

(c) ***Transitiva:*** *Se* $A \approx B$ *e* $B \approx C$, *então* $A \approx C$.

para A, B *e* C *matrizes de ordem* $n \times n$.

Podemos verificar facilmente que $A \approx A$. De fato, pois $A = IAI^t$, onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$. Assim, mostramos que a relação de congruência satisfaz a propriedade reflexiva.

Considerando que a matriz B é congruente com a matriz A, $B \approx A$, isto é, existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^t$. Sendo assim, temos que $A = P^{-1}BP^{-t}$. Portanto, tomando a matriz $Q = P^{-1}$, obtemos $A = QBQ^t$. Desse modo, mostramos que a matriz A é congruente com a matriz B, $A \approx B$. Assim, mostramos que a relação de congruência satisfaz a propriedade simétrica.

Considerando que a matriz A é congruente com a matriz B, $A \approx B$, isto é, existe uma matriz invertível P tal que $A = PBP^t$, e que a matriz B é congruente com a matriz C, $B \approx C$, isto é, existe uma matriz invertível Q tal que $B = QCQ^t$. Desse modo, temos que

$$A = PBP^t = P(QCQ^t)P^t = (PQ)C(PQ)^t .$$

Sabemos que a matriz PQ é invertível, pois P e Q são invertíveis. Desse modo, mostramos que a matriz A é congruente com a matriz C, $A \approx C$. Assim, mostramos que a relação de congruência satisfaz a propriedade transitiva.

Portanto, mostramos que a relação de congruência é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$.

Exercícios

Exercício 2.92 *Considere a matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz invertível P *de modo que* $D = PAP^t$ *seja uma matriz diagonal, e a matriz* $L = P^{-1}$ *tal que* $A = LDL^t$.

Exercício 2.93 *Considere a matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 29 & 22 \\ 6 & 22 & 20 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz invertível P *de modo que* $D = PAP^t$ *seja uma matriz diagonal, e a matriz* $L = P^{-1}$ *tal que* $A = LDL^t$.

2.9 Sistemas de Equações Lineares

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ definida sobre o corpo $\mathbb{F}$, isto é, seus elementos $a_{i,j} \in \mathbb{F}$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Consideremos o problema de encontrar escalares $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{F}$ satisfazendo simultaneamente o seguinte sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & y_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

conhecendo os escalares $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{F}$. Esse problema é denominado **sistema linear**, com m equações lineares e n incógnitas.

Por simplicidade, vamos representar o sistema linear acima na sua **forma matricial**

$$AX = Y$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A matriz A de ordem $m \times n$ é denominada **matriz dos coeficientes** do sistema linear, o vetor coluna X de ordem $n \times 1$ é denominado **vetor de incógnitas** e o vetor coluna Y de ordem $m \times 1$ é denominado **vetor do lado direito** do sistema linear.

Toda n–upla $(x_1, \cdots, x_n)$ de elementos do corpo $\mathbb{F}$ que satisfaz cada uma das equações do sistema linear é denominada uma **solução** do sistema linear. O vetor coluna X, associado a essa n–upla, é denominado **vetor solução** do sistema linear. O conjunto de todas as soluções do sistema linear é chamado **conjunto solução**.

Quanto $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$ dizemos que o sistema linear é **homogêneo**, isto é, temos que cada equação do sistema linear é uma **equação homogênea**.

Teorema 2.9.1 *Considere a equação linear*

$$ax = b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Se $a \neq 0$, *então* $x = \dfrac{b}{a}$ *é a única solução da equação linear.*

(b) Se $a = 0$ *e* $b \neq 0$, *então a equação linear não possui solução.*

(c) Se $a = 0$ *e* $b = 0$, *então a equação linear possui infinitas solução.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. $\square$

Definição 2.9.1 *Dizemos que a equação linear*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$, *é* ***degenerada*** *se* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Teorema 2.9.2 *Considere a equação linear degenerada*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

(a) Se $b \neq 0$, *então a equação linear degenerada não possui solução.*

(b) Se $b = 0$, *então a equação linear degenerada possui infinitas solução.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. $\square$

Definição 2.9.2 *Dizemos que a equação linear*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

é ***não–degenerada*** *se os coeficientes* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *não são todos nulos. Além disso, a primeira incógnita com coeficiente não–nulo é denominada* ***variável básica***. *De modo análogo,* x_k *é a variável básica, se* $a_j = 0$ *para todo* $j < k$, *mas* $a_k \neq 0$.

Teorema 2.9.3 *Considere a equação linear não–degenerada*

$$a_1 x_1 \; + \; \cdots \; + \; a_n x_n \; = \; b \,,$$

com x_k *a variável básica.*

(a) Qualquer conjunto de valores x_j*, para* $j \neq k$*, fornece uma única solução para a equação linear. As incógnitas* x_j*, para* $j \neq k$*, são denominadas* ***variáveis livres****.*

(b) Toda solução da equação linear não–degenerada é obtida em (a).

Demonstração – Inicialmente atribuímos valores arbitrários às variáveis livres x_j, para $j \neq k$. Como $a_j = 0$, para $j < k$, obtemos

$$a_k x_k \; = \; b \; - \; (\; a_{k+1} x_{k+1} \; + \; \cdots \; + \; a_n x_n \;) \,,$$

com $a_k \neq 0$. Pelo Teorema 2.9.1, a incógnita x_k é determinada de modo único na forma:

$$x_k \; = \; \frac{b \; - \; (\; a_{k+1} x_{k+1} \; + \; \cdots \; + \; a_n x_n \;)}{a_k} \,,$$

o que prova o item *(a)*.

Finalmente, vamos supor que a n–upla $(x_1, \cdots, x_n)$ seja uma solução da equação linear. Desse modo, temos que

$$x_k \; = \; \frac{b \; - \; (\; a_{k+1} x_{k+1} \; + \; \cdots \; + \; a_n x_n \;)}{a_k} \,,$$

que é exatamente a solução obtida no item *(a)*, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.9.1 *O conjunto solução da equação linear*

$$2x \; + \; 6y \; - \; 4z \; = \; 10 \,,$$

nas incógnitas x, y, *e* z*, é dado por:*

$$S \; = \; \{ \; (x, y, z) \in I\!R^3 \; / \; x \; = \; 5 \; - \; 3y \; + \; 2z \quad , \quad y, z \in I\!R \; \} \,,$$

onde x *é a variável básica, com* y *e* z *as variáveis livres.*

Exemplo 2.9.2 *Considere o sistema de equações lineares não–degeneradas dado por:*

$$\begin{cases} a_1 x & + & b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & = & c_2 \end{cases}$$

nas incógnitas x *e* y.

Podemos observar facilmente que cada uma das equações do sistema linear representa a equação na forma canônica de uma reta contida no plano numérico $\mathbb{R}^2$. *Assim, podemos dar uma interpretação geométrica ao conjunto solução do sistema linear.*

Podemos descrever três situações geométricas para o conjunto solução, a saber:

(1) O gráfico das equações lineares são retas que se interceptam em um único ponto, isto é, são retas concorrentes. Assim, O sistema linear possui somente uma única solução.

(2) O gráfico das equações lineares são retas paralelas distintas. Assim, O sistema linear não possui solução.

(3) O gráfico das equações lineares são retas paralelas coincidentes. Assim, O sistema linear possui infinitas soluções.

A seguir vamos analisar separadamente cada um dos casos acima. As situações (2) e (3) ocorrerem quando as retas possuem coeficientes angulares iguais, isto é,

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 .$$

Note que a condição acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

onde A é a matriz do sistema linear. Desse modo, os casos (2) e (3) ocorrerem somente quando a matriz do sistema linear não possui inversa.

Assim, o caso (1) ocorre quando as retas possuem coeficientes angulares diferentes, isto é,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 .$$

Portanto, o caso (1) ocorre quando a matriz do sistema linear for invertível.

O caso (2) ocorre quando as retas são paralelas e cortam o eixo vertical OY em pontos distintos, isto é,

$$-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \iff \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \, .$$

O caso (3) ocorre quando as retas são paralelas e cortam o eixo vertical OY no mesmo pontos, isto é,

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \iff \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \, .$$

Assim, analisamos o conjunto solução do sistema linear tanto do ponto de vista geométrico quanto do ponto de vista algébrico.

Exemplo 2.9.3 *Analisar o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

apresentando uma interpretação geométrica.

Exemplo 2.9.4 *Analisar o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

apresentando uma interpretação geométrica.

Exemplo 2.9.5 *Analisar o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 10x + 5y = 15 \\ 2x + 1y = 3 \end{cases}$$

apresentando uma interpretação geométrica.

Exemplo 2.9.6 *Analisar o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 10x + 5y = 15 \\ 2x + 1y = -3 \end{cases}$$

apresentando uma interpretação geométrica.

Exemplo 2.9.7 *Uma equação linear nas incógnitas* $x,\, y,\, z$ *é representada na forma:*

$$ax \,+\, by \,+\, cz \,=\, d$$

conhecendo os escalares $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$. *Por exemplo,*

$$x \,-\, 4y \,+\, 3z \,=\, 6$$

é uma equação linear nas incógnitas $x,\, y,\, z$.

Exemplo 2.9.8 *Uma equação linear nas incógnitas* $x,\, y,\, z$ *representada na forma:*

$$ax \,+\, by \,+\, cz \,=\, 0\,,$$

conhecendo os escalares $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, *é denominada* ***equação linear homogênea****.*

Por exemplo,

$$x \,-\, 4y \,+\, 3z \,=\, 0$$

é uma equação linear homogênea nas incógnitas $x,\, y,\, z$.

Podemos verificar facilmente que toda solução da equação linear homogênea, dada acima, pode ser escrita como:

$$(x, y, z) \,=\, y(4, 1, 0) \,+\, z(-3, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad y,\, z \in \mathbb{R}\,.$$

denominada **solução geral**.

Desse modo, pode representar o conjunto solução da seguinte forma:

$$S \,=\, \{\, (x, y, z) \;/\; (x, y, z) \,=\, y(4, 1, 0) \,+\, z(-3, 0, 1) \quad \text{para} \quad y,\, z \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Note que as ternas $(4, 1, 0)$ e $(-3, 0, 1)$ são soluções da equação homogênea, utilizadas na representação da solução geral. Essas soluções são chamadas **soluções básicas**.

Uma técnica bastante simples e muito importante na obtenção de soluções de um sistema de equações lineares é o **método de eliminação** que utiliza as operações elementares de linhas. Vamos exemplificar esse método através de um sistema linear homogêneo.

Exemplo 2.9.9 *Considere o seguinte sistema linear homogêneo*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

Aplicando a operação elementar de linhas $l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1$ obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \quad - y - z = 0 \end{cases}$$

Assim, da segunda equação temos que $y = -z$ para $z \in I\!R$. Substituindo na primeira equação obtemos $x = -3z$.

Portanto, temos que toda solução do sistema linear homogêneo é escrita da seguinte forma:

$$(x, y, z) = z(-3, -1, 1) \qquad \text{para} \qquad z \in I\!R\,.$$

Note que $(-3, -1, 1)$ é uma solução do sistema linear homogêneo, que é utilizada na representação da solução geral. Assim, essa solução é chamada solução básica. Neste caso, dizemos que o sistema linear homogêneo possui um **grau de liberdade**, que é a **variável livre** z. As varáveis x, y são denominadas **variáveis básicas**.

Podemos verificar que o sistema linear homogêneo obtido através da operação elementar de linhas, possui o mesmo conjunto solução do sistema linear homogêneo original. Desse modo, dizemos que os dois sistemas lineares são **equivalentes**. Vamos apresentar uma análise detalhada do processo de eliminação mais a frente. Claramente, o processo de eliminação é válido para sistema linear não homogêneo, como exemplificamos a seguir.

Exemplo 2.9.10 *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

Aplicando a operação elementar de linhas $l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1$ obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ \quad y - z + 4t = 1 \end{cases}$$

Assim, da segunda equação temos que $y = z - 4t + 1$ para $z, t \in I\!R$. Substituindo na primeira equação obtemos $x = z - 7t + 3$.

Portanto, temos que a solução geral do sistema linear é escrita da seguinte forma:

$$(x, y, z, t) = z(1, 1, 1, 0) + t(-7, -4, 0, 1) + (3, 1, 0, 0) \quad \text{para} \quad z, t \in \mathbb{R}.$$

Neste exemplo, temos duas variáveis livres, que são z e t, e dizemos que o grau de liberdade do sistema linear é igual a dois.

Podemos verificar facilmente que as ternas $(1, 1, 1, 0)$ e $(-7, -4, 0, 1)$ são duas soluções do sistema linear homogêneo associado, isto é,

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ \quad\;\; y - z + 4t = 0 \end{cases}$$

utilizadas na representação da solução geral do sistema linear. Assim, essas soluções são as soluções básicas do sistema linear homogêneo associado. Note que a terna $(3, 1, 0, 0)$ é uma solução do sistema linear original, denominada **solução particular**.

Exemplo 2.9.11 *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + 2t = 3 \\ 3x - 9y + 6z - 15t = 5 \end{cases}$$

Aplicando as seguintes operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad \text{e} \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1$$

obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ \quad\;\; y - z + 4t = 1 \\ \quad - 3y + 3z - 12t = 2 \end{cases}$$

Aplicando a operação elementar de linhas $l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_2$ obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ \quad\;\; y - z + 4t = 1 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 5 \end{cases}$$

Desse modo, temos que a terceira equação é **degenerada**, isto é, pode ser escrita como:

$$0x + 0y + 0z + 0t = 5 .$$

Logo, o sistema linear é **inconsistente**, isto é, não possui solução.

Exemplo 2.9.12 *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = -3 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

Aplicando as seguintes operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \qquad \text{e} \qquad l_3 \longleftarrow l_3 - l_1$$

obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 6y + z = 8 \end{cases}$$

Aplicando a operação elementar de linhas $l_3 \longleftarrow l_3 - 6l_2$ obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 7z = 14 \end{cases}$$

Assim, temos que o sistema linear possui uma única solução

$$z = 2 \,, \quad y = 1 \qquad \text{e} \qquad x = -1 \,,$$

isto é, a terna $(-1, 1, 2)$ é a única solução do sistema linear.

Definição 2.9.3 *Dizemos que um sistema de equações lineares é* ***consistente*** *se possui solução. Quanto não possui solução, dizemos que é* ***inconsistente****.*

$$\underline{\textbf{Sistema de Equações Lineares}} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Inconsistente} \longrightarrow \text{não possui solução} \\ \\ \textit{Consistente} \left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow \text{possui uma única solução} \\ \longrightarrow \text{possui infinitas soluções} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Teorema 2.9.4 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ que são equivalentes por linha. Então, os sistemas lineares homogêneos $AX = 0$ e $BX = 0$ possuem as mesmas soluções.*

Demonstração – Considerando que a matriz B é linha equivalente a matriz A, pelo Teorema 2.7.3, existe uma seqüência de operações elementares com as linhas da matriz A resultando na matriz B, que vamos denotar por $h_1, \cdots h_r$. Desse modo, tomando H_i a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h_i, temos que $B = (H_r \cdots H_2 H_1)A = PA$. Pelo Teorema 2.7.6, sabemos que a matriz P é invertível. Assim, temos que $A = P^{-1}B$. Logo, a matriz A é linha equivalente a matriz B.

Desse modo, se o vetor coluna X^*, de ordem $n \times 1$, é uma solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$, isto é, $AX^* = 0$, temos que

$$BX^* = (PA)X^* = P(AX^*) = 0 .$$

Logo, X^* é também uma solução do sistema linear homogêneo $BX = 0$.

De modo análogo, se o vetor coluna X^*, de ordem $n \times 1$, é uma solução do sistema linear homogêneo $BX = 0$, isto é, $BX^* = 0$, temos que

$$AX^* = (P^{-1}B)X^* = P^{-1}(BX^*) = 0 .$$

Logo, X^* é também uma solução do sistema linear homogêneo $AX = 0$.

Portanto, provamos que os sistemas lineares homogêneos

$$AX = 0 \qquad \text{e} \qquad BX = 0$$

são equivalentes, isto é, possuem o mesmo conjunto solução. ■

Definição 2.9.4 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Dizemos que A é uma matriz* ***não–singular*** *se $AX = 0$ somente para $X = 0$. Caso contrário, dizemos que A é uma matriz* ***singular****.*

No resultado que apresentamos a seguir, provamos que se A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, então necessariamente A é uma matriz singular, isto é, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui solução não trivial. Para uma matriz A de ordem n, vamos mostrar que A é uma matriz invertível se, e somente se, A é uma matriz não–singular. Esses são resultados importantes em Álgebra Linear, que iremos utilizar em todo o texto.

Teorema 2.9.5 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$. Então, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ admite pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração – Seja $R = [r_{ij}]$ uma matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz A. Então, pelo Teorema 2.9.4, os sistemas lineares homogêneos $AX = 0$ e $RX = 0$ são equivalentes, isto é, possui o mesmo conjunto solução.

Considerando que p é o número de linhas não–nulas na matriz R, certamente temos que $p < m < n$. Desse modo, o sistema linear homogêneo tem grau de liberdade igual a $(n - p)$. Vamos considerar que o primeiro elemento não–nulo da i–ésima linha ocorra na coluna k_i, com $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots < k_p$.

Assim, o sistema linear $RX = 0$ possui p equações não–triviais, que podem ser escritas da seguinte forma:

$$r_{ik_i} x_{k_i} + \sum_{j = k_{i+1}}^{n} r_{ij} x_j = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \cdots p .$$

Como $r_{ik_i} \neq 0$, temos que as incógnitas x_{k_i} são obtidas da seguinte forma:

$$x_{k_i} = -\frac{\displaystyle\sum_{j = k_{i+1}}^{n} r_{ij} x_j}{r_{ik_i}} \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \cdots p .$$

Finalmente, atribuindo valores, não todos nulos, para as $(n - p)$ **variáveis livres**, que são diferentes das **variáveis básicas** $x_{k_1}, \cdots, x_{k_p}$, obtemos o conjunto solução do sistema linear homogêneo $RX = 0$. ∎

Exemplo 2.9.13 *No sistema linear homogêneo associado do Exemplo 2.9.10*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ y - z + 4t = 0 \end{cases}$$

temos as seguintes matrizes de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

que são equivalentes por linha. Neste exemplo, temos $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$, onde x, y são as variáveis básicas e z, t são as variáveis livres. Desse modo, obtemos

$$y = z - 4t \qquad e \qquad x = z - 7t$$

para $z, t \in I\!R$ livres.

Teorema 2.9.6 *Seja A uma matriz de ordem n. Então, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial se, e somente se, a matriz A é linha equivalente a matriz identidade I_n.*

Demonstração – Seja R uma matriz na forma escada linha equivalente a matriz A e p o número de linhas não–nulas de R. Como $AX = 0$ possui somente a solução trivial, pelo Teorema 2.9.4, sabemos que o sistema homogêneo $RX = 0$ também possui somente a solução trivial. Assim, temos que $p \geq n$. Entretanto, a matriz R possui somente n linhas. Logo, como $p \leq n$, temos que $p = n$.

Desse modo, temos que na matriz R o primeiro elemento não–nulo da i–ésima linha ocorre na i–ésima coluna, isto é, sempre na diagonal principal. Portanto, a matriz R é necessariamente a matriz identidade I_n.

Podemos verificar facilmente que se a matriz A é linha equivalente a matriz identidade, então o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial. ■

Teorema 2.9.7 *Seja A uma matriz de ordem n. Então, a matriz A é invertível se, e somente se, o sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial.*

Demonstração – A prova segue imediatamente do Teorema 2.7.8 e do Teorema 2.9.6, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.9.14 *Considere o seguinte sistema linear homogêneo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que possui somente a solução trivial $x = y = z = 0$.

Desse modo, temos que a matriz do sistema linear homogêneo $AX = 0$ que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

é uma matriz não–singular, isto é, $AX = 0$ somente para $X = 0$. Portanto, temos que A é uma matriz invertível, de acordo com o Teorema 2.9.7.

Corolário 2.9.1 *Seja A uma matriz de ordem n. Então, a matriz A é invertível se, e somente se, o sistema linear $AX = Y$ possui somente uma única solução.*

Demonstração – Inicialmente, tomando por hipótese que A é invertível, temos que $X^* = A^{-1}Y$ é uma solução do sistema linear $AX = Y$.

Vamos mostrar que X^* é a única solução. Para isso, supomos que X_1^* e X_2^* sejam duas soluções do sistema linear $AX = Y$, isto é, $AX_1^* = Y$ e $AX_2^* = Y$.

Desse modo, temos que

$$AX_1^* - AX_2^* = A(X_1^* - X_2^*) = 0 .$$

Pelo Teorema 2.9.7, temos que $(X_1^* - X_2^*) = 0$. Logo, obtemos que $X_1^* = X_2^*$.

Finalmente, tomando por hipótese que o sistema linear $AX = Y$ possui somente uma única solução e considerando $Y = 0$, pelo Teorema 2.9.7, temos que a matriz A é invertível, o que completa a demonstração. ■

Vamos fazer algumas considerações. Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e Y um vetor coluna de ordem $m \times 1$. Queremos determinar o conjunto solução do sistema linear

$$AX = Y .$$

Seja R uma matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz A, isto é, existe uma matriz P de ordem $m \times m$ invertível tal que $R = PA$. Sabemos que a matriz P é o produto de matrizes elementares de linha, isto é, $P = H_r \cdots H_2 H_1$, onde cada matriz H_i é uma matriz elementar de linha associada a uma operação elementar de linhas h_i, que foram utilizadas na redução da matriz A na forma escalonada. Desse modo, sabemos que o sistema linear $AX = Y$ possui o mesmo conjunto solução do sistema linear $RX = Z$, onde $Z = PY$.

Portanto, um procedimento eficiente para a resolução do sistema linear $AX = Y$ é a aplicação de uma seqüência de operações elementares de linhas na matriz ampliada $[A \,|\, Y]$ para obtermos a matriz $[R \,|\, Z]$

$$[R \,|\, Z] = H_r \cdots H_2 H_1 [A \,|\, Y] ,$$

sem a necessidade do cálculo da matriz P. Esse procedimento, inclusive o cálculo da matriz P, foi bastante discutido na seção 2.7. Em particular, se A é uma matriz quadrada, esse procedimento também vai determinar se A é uma matriz invertível.

Exemplo 2.9.15 *Considere o sistema linear não–homogêneo*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + 2t = 4 \\ 3x - 9y + 6z - 15t = -3 \end{cases}$$

Vamos fazer uma análise do seu conjunto solução.

Para facilitar a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, vamos cria uma matriz ampliada $[A\,|\,Y]$ da seguinte forma:

$$[A\,|\,Y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & -9 & 6 & -15 & | & -3 \end{bmatrix}$$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema linear e Y é o vetor do lado direito.

Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \qquad \text{e} \qquad l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_2$$

na matriz ampliada $[A\,|\,Y]$, obtemos a matriz $[R\,|\,Z]$

$$[R\,|\,Z] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o sistema linear equivalente $RX = Z$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ \qquad y - z + 4t = 2 \end{cases}$$

Portanto, a solução geral do sistema linear não–homogêneo $AX = Y$ é escrita como:

$$(x, y, z, t) = z(1, 1, 1, 0) + t(-7, -4, 0, 1) + (5, 2, 0, 0) \qquad \text{para} \qquad z,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, o sistema linear $AX = Y$ é consistente e possui infinitas soluções.

Podemos verificar facilmente que as ternas $(1, 1, 1, 0)$ e $(-7, -4, 0, 1)$ são as soluções básicas do sistema linear homogêneo associado $AX = 0$, que é equivalente ao sistema linear homogêneo $RX = 0$. Portanto, a solução geral do sistema linear homogêneo associado $AX = 0$ é escrita como:

$$(x, y, z, t) = z(1, 1, 1, 0) + t(-7, -4, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad z,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

A terna $(5, 2, 0, 0)$ é uma solução particular do sistema linear $AX = Y$.

Exemplo 2.9.16 *Considere o sistema linear não–homogêneo*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + 2t = 4 \\ 3x - 9y + 6z - 15t = 5 \end{cases}$$

Vamos fazer uma análise do seu conjunto solução.

Para facilitar a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, vamos cria uma matriz ampliada $[A\,|\,Y]$ da seguinte forma:

$$[A\,|\,Y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & -9 & 6 & -15 & | & 5 \end{bmatrix}$$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema linear e Y é o vetor do lado direito.

Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \qquad \text{e} \qquad l_3 \longleftarrow l_3 + 3l_2$$

na matriz ampliada $[A\,|\,Y]$, obtemos a matriz $[R\,|\,Z]$

$$[R\,|\,Z] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o sistema linear equivalente $RX = Z$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ \qquad y - z + 4t = 2 \\ \qquad\qquad 0 = 8 \end{cases}$$

Assim, temos que a terceira equação é degenerada, isto é, pode ser escrita como:

$$0x + 0y + 0z + 0t = 8 \,.$$

Logo, o sistema linear $AX = Y$ é inconsistente, isto é, não possui solução.

Exemplo 2.9.17 *Considere o sistema linear não–homogêneo*

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - 3y + z = -3 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

Vamos fazer uma análise do seu conjunto solução.

Para facilitar a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, vamos cria uma matriz ampliada $[A \,|\, Y]$ da seguinte forma:

$$[A \,|\, Y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 2 & -3 & 1 & | & -3 \\ 1 & 4 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema linear e Y é o vetor do lado direito.

Aplicando a seqüência de operações elementares de linhas

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \qquad \text{e} \qquad l_3 \longleftarrow l_3 - -l_2$$

na matriz ampliada $[A \,|\, Y]$, obtemos a matriz $[R \,|\, Z]$

$$[R \,|\, Z] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 7 & | & 14 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o sistema linear equivalente $RX = Z$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad\;\; y - z = 1 \\ \qquad\;\; 7z = 14 \end{cases}$$

Assim, o sistema linear não–homogêneo $AX = Y$ possui uma única solução

$$z = 2 \quad , \quad y = 1 \qquad \text{e} \qquad x = -1.$$

Portanto, o sistema linear $AX = Y$ é consistente e a terna $(-1, 1, 2)$ é a única solução.

Observando os exemplos apresentados nessa seção, podemos fazer a seguinte afirmação:

$$\boxed{\text{Solução Geral do Sistema Linear} \quad \mathrm{AX} = \mathrm{Y}}$$

$$=$$

$$\boxed{\text{Solução Geral do Sistema Linear Homogêneo Associado} \quad \mathrm{AX} = 0}$$

$$+$$

$$\boxed{\text{Solução Particular do Sistema Linear} \quad \mathrm{AX} = \mathrm{Y}}$$

De fato, consideramos que X_h é uma solução do sistema linear homogêneo associado, isto é, $AX_h = 0$, e que X_p é uma solução particular do sistema linear original, isto é, $AX_p = Y$. Desse modo, temos que

$$A(X_h + X_p) = AX_h + AX_p = 0 + Y = Y .$$

Assim, mostramos que $X_h + X_p$ é uma solução do sistema linear $AX = Y$.

Por outro lado, considerando que X^* é uma solução do sistema linear $AX = Y$, que pode ser distinta da solução particular X_p, temos que

$$A(X^* - X_p) = AX^* - AX_p = Y - Y = 0 .$$

Desse modo, temos que $X^* - X_p$ é uma solução do sistema homogêneo $AX = 0$.

Entretanto, podemos escrever X^* da seguinte forma:

$$X^* = X_p + (X^* - X_p) .$$

Portanto, qualquer solução do sistema linear $AX = Y$ pode ser escrita como a soma de uma solução particular do sistema linear original com uma solução do sistema linear homogêneo associado.

Portanto, a solução geral do sistema linear $AX = Y$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$X_g = X_h + X_p ,$$

o que prova a nossa afirmação.

Teorema 2.9.8 *Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$, e $X_1, \cdots, X_n$ soluções do sistema linear homogêneo $AX = 0$. Então, toda **combinação linear***

$$X_c = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_1 X_n,$$

onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ são escalares, é também solução do sistema linear $AX = 0$.

Demonstração – Sabemos que

$$AX_1 = 0, \ \cdots, \ AX_n = 0.$$

Logo,

$$AX_c = \alpha_1 AX_1 + \cdots + \alpha_1 AX_n = 0,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.9.9 *Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e Y um vetor coluna de ordem $m \times 1$. Então, o sistema linear $AX = Y$ não possui solução, possui uma única solução, ou possui infinitas soluções.*

Demonstração – Basta mostrar que se o sistema linear $AX = Y$ possui mais de uma solução, então possui infinitas soluções.

Sejam X_1 e X_2 duas soluções distintas de $AX = Y$, isto é, $AX_1 = Y$ e $AX_2 = Y$. Desse modo, para todo escalar α temos que

$$X^* = X_1 + \alpha(X_1 - X_2)$$

é também uma solução do sistema linear $AX = Y$. De fato,

$$AX^* = AX_1 + \alpha(AX_1 - AX_2) = Y + \alpha(Y - Y) = Y.$$

Finalmente, devemos observar que para cada escalar α os vetores colunas

$$X^* = X_1 + \alpha(X_1 - X_2)$$

são distintos, o que completa a demonstração. ■

Teorema 2.9.10 *Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e Y um vetor coluna de ordem $m \times 1$. Então,*

(a) O sistema linear $AX = Y$ é consistente se, e somente se,

$$posto(\,[A\,|\,Y]\,) \;=\; posto(A)\,.$$

(b) O sistema linear $AX = Y$ possui uma única solução se, e somente se,

$$posto(\,[A\,|\,Y]\,) \;=\; posto(A) \;=\; n\,.$$

(c) O sistema linear $AX = Y$ possui infinitas solução se, e somente se,

$$posto(\,[A\,|\,Y]\,) \;=\; posto(A) \;<\; n\,.$$

(d) O sistema linear $AX = Y$ é inconsistente se, e somente se,

$$posto(A) \;<\; posto(\,[A\,|\,Y]\,)\,.$$

Demonstração – Seja $[R\,|\,Z]$ uma matriz na forma escalonada, linha equivalente a matriz ampliada $[A\,|\,Y]$, isto é, existe uma matriz P invertível de ordem $m \times m$ tal que $R = PA$ e $Z = PY$. Logo, os sistemas lineares $AX = Y$ e $RX = Z$ possuem o mesmo conjunto solução.

(a) O $posto(\,[A\,|\,Y]\,) \;=\; posto(A)$, isto é,

$$posto(\,[R\,|\,Z]\,) \;=\; posto(R)$$

se, e somente se, o sistema linear reduzido $RX = Z$ não possui equações degeneradas. Desse modo, não existem condições sobre as componentes de Z para que o sistema linear reduzido $RX = Z$ tenha solução. Portanto, $AX = Y$ é um sistema linear consistente, isto é, possui solução.

(b) O $posto(\,[A\,|\,Y]\,) \;=\; posto(A) \;=\; n$, isto é,

$$posto(\,[R\,|\,Z]\,) \;=\; posto(R) \;=\; n$$

se, e somente se, o sistema linear reduzido $RX = Z$ não possui variáveis livres. Desse modo, cada uma das variáveis assume um valor fixo, que são obtidos resolvendo o sistema linear reduzido $RX = Z$ pelo processo de substituição atrasada. Portanto, o sistema linear $AX = Y$ possui uma única solução.

Exemplificando a situação descrita acima, podemos representar a matriz reduzida R, linha equivalente a matriz A, e o vetor coluna Z por:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde os elementos da diagonal principal da matriz R são todos não–nulos.

(c) O $posto([A\,|\,Y]) = posto(A) < n$, isto é,

$$posto([R\,|\,Z]) = posto(R) < n$$

se, e somente se, o sistema linear $RX = Z$ possui pelo menos uma variável livre. Desse modo, para cada conjunto de valores atribuídos às variáveis livres, obtemos uma solução. Como cada variável livre pode assumir qualquer valor, o sistema linear reduzido $RX = Z$ possui infinitas soluções. Portanto, o sistema linear $AX = Y$ possui infinitas soluções.

(d) O $posto(A) < posto([A\,|\,Y])$, isto é,

$$posto(R) < posto([R\,|\,Z])$$

se, e somente se, o sistema linear reduzido $RX = Z$ possui pelo menos uma equação degenerada, com a correspondente componente de Z não–nula. Desse modo, o sistema linear reduzido $RX = Z$ não possui solução. Portanto, $AX = Y$ é um sistema linear inconsistente. ■

Sistemas Lineares em Forma Triangular

Definição 2.9.5 *Sejam L uma matriz triangular inferior de ordem $n \times n$ e Y um vetor coluna de ordem $n \times 1$. Dizemos que*

$$LX = Y$$

*é um sistema linear **triangular inferior**.*

Exemplo 2.9.18 *O sistema linear dado por:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

é um sistema triangular inferior.

Teorema 2.9.11 *Sejam L uma matriz triangular inferior de ordem $n \times n$, com todos os elementos da diagonal principal não–nulos, e Y um vetor coluna de ordem $n \times 1$. Então, o sistema linear **triangular inferior***

$$LX = Y$$

*possui uma única solução, que é obtida pelo processo de **substituição avançada**.*

Demonstração – Resolvendo a primeira equação, obtemos o valor da primeira incógnita

$$l_{11}\, x_1 = y_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = \frac{y_1}{l_{11}} \,.$$

Substituindo o valor de x_1 na segunda equação, obtemos o valor da segunda incógnita

$$x_2 = \frac{y_2 - l_{21}\, x_1}{l_{22}} \,.$$

Desse modo, sucessivamente determinamos o valor de x_k, levando os valores das incógnitas previamente obtidos na k–ésima equação, da forma:

$$l_{kk}\, x_k = y_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, x_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_k = \frac{y_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, x_j}{l_{kk}}$$

para $k = 2, 3, \cdots, n$.

Note que a unicidade de x_k, para $k = 1, \cdots, n$, é dada pelo Teorema 2.9.1, o que completa a demonstração. ■

Definição 2.9.6 *Sejam* U *uma matriz triangular superior de ordem* $n \times n$ *e* Y *um vetor coluna de ordem* $n \times 1$*. Dizemos que*

$$UX = Y$$

é um sistema linear ***triangular superior****.*

Exemplo 2.9.19 *O sistema linear dado por:*

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

é um sistema triangular superior.

Teorema 2.9.12 *Sejam* U *uma matriz triangular superior de ordem* $n \times n$*, com todos os elementos da diagonal principal não–nulos, e* Y *um vetor coluna de ordem* $n \times 1$*. Então, o sistema linear* ***triangular superior***

$$UX = Y$$

possui uma única solução, que é obtida pelo processo de ***substituição atrasada****.*

Demonstração – Resolvendo a última equação, obtemos o valor da última incógnita

$$u_{nn}\, x_n = y_n \iff x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \,.$$

Substituindo o valor de x_n na penúltima equação, obtemos o valor da penúltima incógnita

$$x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n}{u_{n-1,n-1}} \,.$$

Desse modo, sucessivamente determinamos o valor de x_k, levando os valores das incógnitas previamente obtidos na k–ésima equação, da forma:

$$u_{kk}\, x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}\, x_j \iff x_k = \frac{y_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}\, x_j}{u_{kk}}$$

para $k = (n-1), \cdots, 1$.

Note que a unicidade de x_k, para $k = n, \cdots, 1$, é dada pelo Teorema 2.9.1, o que completa a demonstração. ■

A seguir apresentamos o algoritmo para o obter a solução de um sistema linear triangular inferior $LX = Y$, pelo processo de substituição avançada.

Algoritmo 2.9.1 (Processo de Substituição Avançada)

```
for i = 1, ... ,n
    soma = 0.0
    for j = 1, ... ,(i-1)
        soma = soma  +  L(i,j)*X(j)
    end
    X(i) = ( Y(i) - soma ) / L(i,i)
end
```

A seguir apresentamos o algoritmo para o obter a solução de um sistema linear triangular superior $UX = Y$, pelo processo de substituição atrasada.

Algoritmo 2.9.2 (Processo de Substituição Atrasada)

```
for i = n, ... ,1
    soma = 0.0
    for j = (i+1), ... ,n
        soma = soma + U(i,j)*X(j)
    end
    X(i) = ( Y(i) - soma ) / U(i,i)
end
```

Exemplo 2.9.20 *Determine a solução do sistema linear triangular inferior*

$$\begin{cases} 4x & & & & & & & = & 4 \\ x & + & 5y & & & & & = & 11 \\ 2x & + & y & + & 4z & & & = & 8 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 6t & = & 26 \end{cases}$$

pelo processo de substituição avançada.

Exemplo 2.9.21 *Determine a solução do sistema linear triangular superior*

$$\begin{cases} 6x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 16 \\ & & 4y & + & z & + & 2t & = & 15 \\ & & & & 5z & + & t & = & 8 \\ & & & & & & 4t & = & 12 \end{cases}$$

pelo processo de substituição atrasada.

Fatoração LU

Sejam A uma matriz de ordem $n \times n$ invertível e Y um vetor coluna de ordem $n \times 1$. Vamos supor que a matriz A possa ser decomposta na forma:

$$A = LU ,$$

onde L é uma matriz triangular inferior, com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, e U uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal principal diferentes de zero. Assim, dizemos que a matriz A possui uma **fatoração LU**, ou uma **decomposição LU**.

A fatoração LU da matriz A pode ser utilizada para obter, de uma maneira eficiente, a solução do sistema linear

$$AX = Y ,$$

repetidamente para diferentes vetores Y.

Substituindo a fatoração $A = LU$, obtemos

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad (LU)X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad L(UX) = Y .$$

Chamando $UX = Z$, e substituindo no sistema linear acima, obtemos o seguinte sistema linear triangular inferior

$$LZ = Y ,$$

cuja solução Z^* pode ser obtida facilmente pelo processo de substituição avançada.

Finalmente, obtemos a solução do sistema linear triangular superior

$$UX = Z^*$$

pelo processo de substituição atrasada. Assim, determinamos a solução X^* do sistema linear $AX = Y$.

Portanto, caso a matriz A possua uma decomposição LU, podemos obter a solução do sistema linear $AX = Y$ através da resolução de dois sistemas triangulares, isto é,

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} LZ = Y \\ UX = Z^* \end{cases}$$

Exemplo 2.9.22 *Determine a solução do seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ 12x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

através da fatoração LU da matriz de coeficientes do sistema.

A matriz de coeficientes do sistema linear é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \\ 12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

e possui uma fatoração $A = LU$, onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, resolvemos o sistema linear triangular inferior

$$\begin{cases} z_1 = 2 \\ 2z_1 + z_2 = 6 \\ 3z_1 + 2z_2 + z_3 = 6 \end{cases}$$

pelo processo de substituição avançada. Assim, obtemos a solução

$$Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, uma vez determinado Z, resolvemos o sistema linear triangular superior

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_3 = -4 \end{cases}$$

pelo processo de substituição atrasada. Assim, obtemos a solução

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução do sistema linear $AX = Y$.

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ invertível que pode ser reduzida à forma escalonada, através de operações elementares de linhas, sem qualquer permutação de linhas, isto é, a cada passo do processo de redução à forma escalonada o pivô é sempre não–nulo.

Vamos descrever o processo de redução da matriz A à forma escalonada, que também é conhecido como processo de **Eliminação Gaussiana**, através do seguinte algoritmo.

Algoritmo 2.9.3 (Fatoração LU)

$$
\begin{array}{lcl}
para \quad j & = & 1, \cdots, (n-1) \\[2ex]
para \quad i & = & (j+1), \cdots, n \\[2ex]
\qquad m_{ij} & = & \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} \\[2ex]
\qquad A_{i\cdot} & \longleftarrow & A_{i\cdot} \,-\, m_{ij}\, A_{j\cdot} \\[2ex]
\qquad a_{ij} & = & m_{ij} \\[2ex]
fim & & \\
fim & &
\end{array}
$$

Os escalares m_{ij} são denominados **multiplicadores**. Por simplicidade, indicamos por $A_{i\cdot}$ para denotar a i–ésima linha da matriz A.

No final do procedimento, teremos a matriz U armazenada na parte triangular superior da matriz A, e a matriz L armazenada abaixo da diagonal principal da matriz A, sabendo que os elementos da diagonal principal da matriz L são todos iguais à 1. Desse modo, a matriz triangular inferior L é dada por:

$$
L = \begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
m_{21} & 1 & & & & \\
m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix} .
$$

Teorema 2.9.13 *Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ invertível que pode ser reduzida à forma escalonada, através de operações elementares de linhas, sem qualquer permutação de linhas. Então, existe uma matriz triangular inferior L, com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, e uma matriz triangular superior U, com todos os elementos da diagonal principal não–nulos, tais que $A = LU$.*

Demonstração – Sejam $h_1, \cdots, h_r$ a seqüência de operações elementares de linhas, sendo H_i a matriz elementar de linha correspondente à operação elementar de linhas h_i, tais que

$$U = H_r \cdots H_2 H_1 A$$

é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz A, que é uma matriz triangular superior. Sendo assim, temos que

$$A = (H_r \cdots H_2 H_1)^{-1} U = (H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_r^{-1}) U = LU ,$$

onde a matriz triangular inferior L é dada por:

$$L = H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_r^{-1} ,$$

com os elementos da diagonal principal todos iguais a 1.

Finalmente, os elementos da diagonal principal da matriz U são todos não–nulos. De fato, caso contrário existiria um vetor coluna X não–nulo, de ordem $n \times 1$, tal que

$$UX = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AX = LUX = 0 ,$$

o que é uma contradição, pois A é invertível, o que completa a demonstração. ■

De uma maneira geral, podemos resumir os resultados apresentados da seguinte forma.

Seja A uma matriz de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A é uma matriz não–singular.

(b) A é uma matriz invertível.

(c) A matriz triangular superior U na forma escalonada, linha equivalente a matriz A, possui todos os elementos da diagonal principal não–nulos.

(d) $posto(A) = n$.

(e) O sistema linear homogêneo $AX = 0$ possui somente a solução trivial.

(f) Para todo vetor coluna Y, de ordem $n \times 1$, o sistema linear $AX = Y$ possui uma única solução, que é dada por $X^* = A^{-1}Y$.

Exemplo 2.9.23 *Considere a matriz A de ordem 4×4 dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a fatoração $A = LU$, e a matriz inversa A^{-1}.

Exemplo 2.9.24 *Considere a matriz A de ordem 3×3 dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \\ 12 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar a fatoração $A = LU$ sem permutações de linhas, se possível.

Considere a seguinte seqüência de operações elementares de linhas

$$h_1 : l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \quad , \quad h_2 : l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1 \quad \text{e} \quad h_3 : l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2$$

com as correspondentes matrizes elementares H_1, H_2 e H_3, todas de ordem 3,

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, obtemos a matriz $U = H_3 H_2 H_1 A$, que está na forma escalonada, que corresponde a aplicação da seqüência de operações elementares de linhas, definida acima, na matriz A. De fato,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \\ 12 & 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz triangular inferior $L = H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1}$ é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a fatoração $A = LU$, sem qualquer permutação de linhas.

Exercícios

Exercício 2.94 *Determine a fatoração* $A = LU$*, onde a matriz* A *é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix},$$

e determine a solução do sistema linear $AX = Y$*, onde*

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.95 *Determine a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & + & 0x_3 & = & -4 \end{cases}$$

através da fatoração LU *da matriz de coeficientes do sistema.*

Exercício 2.96 *Descreva o conjunto solução da equação linear*

$$2x + 3y - 6z = 8.$$

Exercício 2.97 *Descreva o conjunto solução do sistema liner*

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 6z & = & 8 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

Qual é o lugar geométrico em $\mathbb{R}^3$ *definido pelo conjunto solução?*

Exercício 2.98 *Considere a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os vetores colunas

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

tais que $AX = 0$.

Exercício 2.99 *Considere a matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os vetores colunas

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

tais que $AX = -5X$.

Exercício 2.100 *Seja A uma matriz simétrica decomposta na forma $A = LDL^t$, onde*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução do sistema linear $AX = Y$, onde

$$Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 29 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.101 *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Faça uma análise do conjunto solução.

Exercício 2.102 *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5 \\ 6x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3 \\ 8x_1 + 12x_2 + 0x_3 = -4 \end{cases}$$

Faça uma análise do conjunto solução.

Exercício 2.103 *Considere a matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine a inversa da matriz A utilizando a fatoração $A = LU$, de maneira eficiente.

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] Luenberger, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.

[20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.