**TEORIA DOS CONJUNTOS**

- Definições:
  - Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos.
  - Um conjunto é uma coleção de zero ou mais objetos distintos chamados *Elementos* do conjunto os quais não estão associados a qualquer tipo de ordenação

- Definição de Conjuntos
  - *Denotação por Extensão ou enumeração*: consiste na enumeração dos elementos do conjunto (os elementos são listados, em qualquer ordem entre chaves.
    - conjuntos finitos {a,e,i,o,u}
    - conjuntos infinitos {2,4,6...} indicando um padrão
  - *Denotação por Compreensão*: consiste na definição do conjunto através da propriedade comum a todos os elementos do conjunto
    - Seja A um conjunto dos elementos com a propriedade P
      - Se *x* tem a propriedade P, então *x* é um elemento do conjunto A
      - Se *x* não tem a propriedade P, então *x* não é um elemento do conjunto A
    - Exemplo: Ímpares = { n | n é ímpar }

- Notação
  - Letras maiúsculas para o nome dos conjuntos
  - O símbolo $\in$ para denotar que um elemento pertence ao conjunto. Ex: $a \in C$
  - O símbolo $\notin$ para denotar que um elemento não pertence ao conjunto. Ex: $b \notin C$
  - Usamos chaves { } para indicar conjuntos: Ex: C = {a,z}

- Como um conjunto é uma coleção não-ordenada e cada elemnto do conjunto é listado apenas uma única vez:
  - A = {a,b,c} = {b,a,c} = {a,a,b,c,c,c,b}

- Igualdade de Conjuntos
  - Dois conjuntos são iguais se, e somente se, contêm os mesmos elementos
  - A = B significa $(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \rightarrow x \in B)]$

- Descrição de Conjuntos
  - Enumeração:
    - 
  - Definir um conjunto recursivamente
    - $2 \in S$
    - Se $n \in S$ então $(n+2) \in S$
  - Descrever com palavras a propriedade característica do conjunto
    - S {x | x é inteiro positivo par}
    - Conjuntos cujos elementos têm a propriedade P são definidos como {X | P(x)}
    - S = {X | P(x)} significa que:

        - $(\forall x)[x \in S \rightarrow P(x) \wedge P(x) \rightarrow x \in S]$

- Alguns conjuntos padrão são nomeados para facilitar seu uso e referência:
    - N = conjunto de todos os inteiros não-negativos ($0 \in N$)
    - Z = conjunto de todos os inteiros
    - Q = conjunto de todos os números racionais
    - R = conjunto de todos os números reais
- Conjunto Vazio ou Conjunto Nulo
    - Denotado por {} ou $\emptyset$
    - Ex. Se $S = \{x \mid x \in N \text{ e } x < 0\}$, então S = {}

- Relações entre conjuntos
    - Sejam A = {2,3,5,12} e B = {2,3,4,5,9,12}. Todo elemento de A é também um elemento de B.
        - Dizemos que A é **subconjunto** de B. Notação: $A \subseteq B$
        - A é um subconjunto de B se $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - Se $A \subseteq B$, mas $A \neq B$, então é dito que A é **subconjunto próprio** de B
        - Notação: $A \subset B$
        - A é um subconjunto de B se:
            - $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)$

- **Conjunto das Partes** de um conjunto
    - Dado um conjunto S, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos subconjuntos de S.
    - Esse conjunto é denominado conjunto das partes de S, P(S)
    - P(S) conterá pelo menos $\emptyset$ e o próprio S

- Cardinalidade
    - Cardinalidade é o número de elementos de um conjunto
    - Se a cardinalidade do conjunto S, $|S| = n$ (S tem n elementos), então $|P(S)| = 2^n$, isto é, P(S) tem $2^n$ elementos.

- **Conjunto Universo** ou **Universo do Discurso**
    - O Conjunto Universo define o contexto dos objetos em questão. Se S = Z, então todos os seus subconjuntos conterão apenas inteiros

- Operações em Conjuntos
    - Dado um conjunto S podemos definir algumas operações binárias e unárias no conjunto S
    - Operações binárias
        - União de conjuntos:
            - Sejam os conjuntos A e B $\in$ P(S). A União de A e B, denotada por $A \cup B$, é definida pelo conjunto $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
        - Intersecção de conjuntos:
            - Sejam os conjuntos A e B $\in$ P(S). A Interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é definida pelo conjunto $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

- Diferença de conjuntos:
  - Sejam os conjuntos A e B $\in$ P(S). A Diferença entre A e B, denotada por A – B , é definida pelo conjunto $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Operação unária
  - Complemento de um conjunto
    - Seja o conjunto A $\in$ P(S). O Complemento de A , denotado por $A'$ , é definido pelo conjunto $\{x \mid x \in S \wedge x \in A\}$

- Conjuntos Disjuntos
  - Sejam os conjuntos A e B $\in$ P(S). A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. Por exemplo, os conjuntos A – B e B – A são disjuntos.

- Identidades de Conjuntos:
  - São igualdades envolvendo operações de União, Interseção, Diferença e Complemento, que são verdadeiras para todos os subconjuntos de um dado conjunto S.
  - Propriedades Comutativas
    - $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$
  - Propriedades Associativas
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - Propriedades Distributivas
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Propriedades de Identidade
    - $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap S = A$
  - Propriedades Complementativas
    - $A \cup A' = S$ $\qquad$ $A \cap A' = \emptyset$

- Provando Identidades de Conjuntos
  - Uma vez que Identidades de conjuntos expressam igualdade entre os conjuntos, provar identidade de conjuntos é provar que os conjuntos são iguais. Os Diagramas de Venn não são suficientes para essa demosntração, pois todos os casos de de disjunção deveriam ser considerados, inviabilizando o diagrama para o caso da identidade envolver muitos conjuntos.
  - Dois conjuntos A e B são iguais se A é subconjunto de B e B é subconj. de A.
  - Formalmente $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$
  - Exemplo: Provar a primeira propriedade Distributiva
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    - Provar que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
      - Seja x um elemento arbitrário de $A \cup (B \cap C)$
      - $x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow [\, x \in A \vee x \in (B \cap C)\, ]$ $\qquad$ Def. $\cup$
        $\rightarrow [\, x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\, ]$ $\qquad$ Def. $\cap$
        $\rightarrow [\, (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\, ]$ $\qquad$ Prop. Distributiva Log.
        $\rightarrow [\, (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)]$ $\qquad$ Def. $\cup$
        $\rightarrow [\, x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$ $\qquad$ Def. $\cap$
      - Mostramos que se um x arbitrário pertence ao conjunto $A \cup (B \cap C)$, também pertence ao conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- Logo $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Provar que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$
  - Seja x um elemento arbitrário de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow [\, x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\,]$ Def. $\cap$

    $\rightarrow [\, (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\,]$ Def. $\cup$

    $\rightarrow [\, (x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)\,]$ Prop. Distributiva Log.

    $\rightarrow [\, x \in A \wedge (x \in B \cup C)\,]$ Def. $\cup$

    $\rightarrow [\, x \in (A \cap (B \cup C)\,]$
  - Mostramos que se um x arbitrário $\in$ ao conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, também pertence ao conjunto $A \cup (B \cap C)$
  - Logo $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$
- $[\, (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)] \wedge [A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)]$
- Logo A = B

- Podemos provar identidades entre conjuntos através das Identidades Básicas
  - Provar a identidade $[\, A \cup (B \cap C)\,] \cap (\, [\, A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)'\,) = \emptyset$

    $= (\, [\, A \cup (B \cap C)\,] \cap (\, [\, A' \cup (B \cap C)]\,) \cap (B \cap C)'$ Prop. Assoc.

    $= (B \cap C) \cup (\, A \cap A') \cap (B \cap C)'$ Prop. Distrib.

    $= (B \cap C) \cup \emptyset \cap (B \cap C)'$ Prop. Compl.

    $= (B \cap C) \cap (B \cap C)'$ Prop. Ident.

    $= \emptyset$ Prop. Compl.

- O DUAL de uma identidade de conjuntos é obtido substituindo-se $\cap$ por $\cap$, e vice-versa, e trocando S por $\emptyset$
- Se demonstrarmos uma identidade de conjuntos, usando as Identidades Básicas, teremos demosntrado também o DUAL dessa identidade.