[牛顿](https://baike.baidu.com/item/%E7%89%9B%E9%A1%BF/5463)[迭代法](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%AD%E4%BB%A3%E6%B3%95)（Newton's method）又称为牛顿-拉夫逊（拉弗森）方法（Newton-Raphson method），它是[牛顿](https://baike.baidu.com/item/%E7%89%9B%E9%A1%BF/5463)在17世纪提出的一种在[实数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AE%9E%E6%95%B0)域和[复数](https://baike.baidu.com/item/%E5%A4%8D%E6%95%B0/254365)域上近似求解方程的方法。

产生背景

[编辑](javascript:;)

多数方程不存在求根公式，因此求精确根非常困难，甚至不可能，从而寻找方程的近似根就显得特别重要。方法使用函数

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D30/sign=81903c99d1c451daf2f60aebb7fd7269/3c6d55fbb2fb4316f767debd2ca4462308f7d3f9.jpg

的[泰勒级数](https://baike.baidu.com/item/%E6%B3%B0%E5%8B%92%E7%BA%A7%E6%95%B0)的前面几项来寻找方程

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D57/sign=a0dece50d533c895a27e987cd31340a5/f31fbe096b63f624c49a80c48b44ebf81b4ca336.jpg

的根。牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D57/sign=a0dece50d533c895a27e987cd31340a5/f31fbe096b63f624c49a80c48b44ebf81b4ca336.jpg

的单根附近具有平方收敛，而且该法还可以用来求方程的重根、复根，此时线性收敛，但是可通过一些方法变成超线性收敛。另外该方法广泛用于计算机编程中。

牛顿迭代公式

[编辑](javascript:;)

设

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=311e1fafdd09b3deefbfe859cc5bb3/b64543a98226cffc79470775b5014a90f703ea8c.jpg

是

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=5082ab3058afa40f38c6ced4aa6459d9/eaf81a4c510fd9f9f458496b272dd42a2834a460.jpg

的根，选取

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D15/sign=802826810d2442a7aa0ef9a0d04342de/6a63f6246b600c33993dc2ca184c510fd9f9a16f.jpg

作为

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=311e1fafdd09b3deefbfe859cc5bb3/b64543a98226cffc79470775b5014a90f703ea8c.jpg

的初始近似值，过点

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D71/sign=f2cbaa33a38b87d65442a91e0608b5bb/ac345982b2b7d0a24d231c9fc9ef76094a369acd.jpg

做曲线

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=a638fa186259252da7171d0d359bf9a9/810a19d8bc3eb1354c3bafb9a41ea8d3fd1f4437.jpg

的切线

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D12/sign=e0c4f12e811001e94a3c100db90e2fac/80cb39dbb6fd5266931e84d3a718972bd407363b.jpg

，

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D201/sign=c5655c3fab86c9170c035539f83f70c6/0eb30f2442a7d933983a5cb4a14bd11372f00162.jpg

，则

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D12/sign=e0c4f12e811001e94a3c100db90e2fac/80cb39dbb6fd5266931e84d3a718972bd407363b.jpg

与

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=b9023d299082d158bf825580805976/8326cffc1e178a82d10ac467fa03738da877e8c7.jpg

轴交点的横坐标

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D113/sign=4759ab76e9f81a4c2232e8c8e42b6029/adaf2edda3cc7cd9c67a2ddb3b01213fb80e9158.jpg

，称

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D14/sign=f858e8cf00d79123e4e09070af34c082/b812c8fcc3cec3fdcedb1fb2da88d43f8694270b.jpg

为

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=311e1fafdd09b3deefbfe859cc5bb3/b64543a98226cffc79470775b5014a90f703ea8c.jpg

的一次近似值。过点

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D71/sign=43308263f1deb48fff69a3dff11f38a8/c995d143ad4bd113cd3aaf3058afa40f4bfb0538.jpg

做曲线

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=a638fa186259252da7171d0d359bf9a9/810a19d8bc3eb1354c3bafb9a41ea8d3fd1f4437.jpg

的切线，并求该切线与x轴交点的横坐标

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D113/sign=265ea26696eef01f49141cc4d3ff99e0/71cf3bc79f3df8dc43d19493cf11728b461028c7.jpg

，称

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D15/sign=4e7e68110bf79052eb1f433b0df3edbc/5d6034a85edf8db1a5c967660b23dd54574e74c8.jpg

为r的二次近似值。重复以上过程，得

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=311e1fafdd09b3deefbfe859cc5bb3/b64543a98226cffc79470775b5014a90f703ea8c.jpg

的近似值序列，其中，

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D129/sign=763132a7087b020808c93be35bd9f25f/6a63f6246b600c339f73c4ca184c510fd9f9a1ad.jpg

称为

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D9/sign=311e1fafdd09b3deefbfe859cc5bb3/b64543a98226cffc79470775b5014a90f703ea8c.jpg

的

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D33/sign=670fbe609a22720e7fcee4f97acbeb58/5d6034a85edf8db1a5eb67660b23dd54574e74ee.jpg

次近似值，上式称为**牛顿**[**迭代**](https://baike.baidu.com/item/%E8%BF%AD%E4%BB%A3)**公式**。

用牛顿迭代法解非线性方程，是把非线性方程

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=5082ab3058afa40f38c6ced4aa6459d9/eaf81a4c510fd9f9f458496b272dd42a2834a460.jpg

线性化的一种近似方法。把

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D32/sign=a646f8186259252da7171b06359bf9a2/bd3eb13533fa828bd9a187e1ff1f4134970a5a35.jpg

在点

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D15/sign=802826810d2442a7aa0ef9a0d04342de/6a63f6246b600c33993dc2ca184c510fd9f9a16f.jpg

的某邻域内展开成泰勒级数

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D559/sign=b957953d49fbfbedd859367a41f1f78e/8601a18b87d6277f7dd7363a2a381f30e824fcef.jpg

，取其线性部分（即泰勒展开的前两项），并令其等于0，即

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D181/sign=a24d511560d0f703e2b291d439fb5148/37d3d539b6003af312d9db62372ac65c1038b654.jpg

，以此作为非线性方程

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=5082ab3058afa40f38c6ced4aa6459d9/eaf81a4c510fd9f9f458496b272dd42a2834a460.jpg

的近似方程，若

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D71/sign=8134fa0f72cf3bc7ec00cfedd1006a1d/060828381f30e9245ea49a334e086e061d95f7b4.jpg

，则其解为

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D113/sign=4759ab76e9f81a4c2232e8c8e42b6029/adaf2edda3cc7cd9c67a2ddb3b01213fb80e9158.jpg

， 这样，得到牛顿迭代法的一个迭代关系式：

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D129/sign=763132a7087b020808c93be35bd9f25f/6a63f6246b600c339f73c4ca184c510fd9f9a1ad.jpg

。

已经证明，如果是连续的，并且待求的零点是孤立的，那么在零点周围存在一个区域，只要初始值位于这个邻近区域内，那么牛顿法必定收敛。 并且，如果不为0, 那么牛顿法将具有平方收敛的性能. 粗略的说，这意味着每迭代一次，牛顿法结果的有效数字将增加一倍。[1]

迭代法也称辗转法，是一种不断用变量的旧值递推新值的过程，跟迭代法相对应的是直接法（或者称为一次解法），即一次性解决问题。迭代算法是用计算机解决问题的一种基本方法。它利用计算机运算速度快、适合做重复性操作的特点，让计算机对一组指令（或一定步骤）重复执行，在每次执行这组指令（或这些步骤）时，都从变量的原值推出它的一个新值。

利用迭代算法解决问题，需要做好以下三个方面的工作：

一、确定迭代变量

在可以用迭代算法解决的问题中，至少存在一个可直接或间接地不断由旧值递推出新值的变量，这个变量就是迭代变量。

二、建立迭代关系式

所谓迭代关系式，指如何从变量的前一个值推出其下一个值的公式（或关系）。迭代关系式的建立是解决迭代问题的关键，通常可以使用递推或倒推的方法来完成。

三、对迭代过程进行控制

在什么时候结束迭代过程？这是编写迭代程序必须考虑的问题。不能让迭代过程无休止地执行下去。迭代过程的控制通常可分为两种情况：一种是所需的迭代次数是个确定的值，可以计算出来；另一种是所需的迭代次数无法确定。对于前一种情况，可以构建一个固定次数的循环来实现对迭代过程的控制；对于后一种情况，需要进一步分析得出可用来结束迭代过程的条件。