$\alpha=(1,1,1)^T$ $\beta=(2,2,2)^T$ $(\alpha\beta)^n=\alpha\underbrace{(\beta\alpha)\cdots\cdots}_{n-1}\beta=6^{n-1}\alpha\beta$

$A=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&0&1&\\&&0&1\\0&&&0\end{pmatrix}$

$A=(0,e_1,\cdots e_{n-1})$

$A^2=(A(0),Ae_1,\cdots Ae_{n-1})$

$=(0,0,e_1,\cdots e_{n-2})$

$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}$ Jordan块

$A^k=(\lambda E+J)^k=\sum_{i}^{k}C_k^i(\lambda E)^{k-i}J^i$

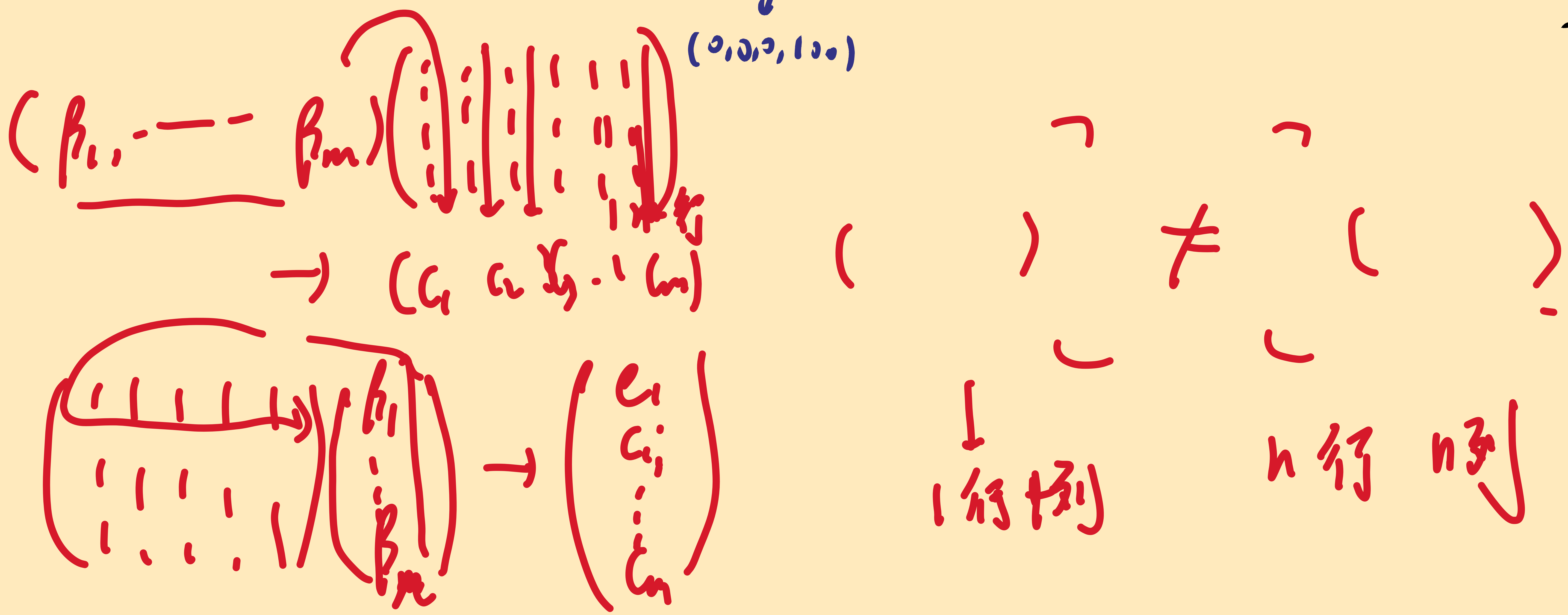
矩阵的乘法 $C=A\times B$ $C_{ij}=A_i$行 $\times B_j$列 C为 n(A)行 m(B)列 的矩阵

$C=(AB_1,\ AB_2,\ \cdots,\ A\cdot B_m)$ 例 $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}A_1\cdot B\\A_2\cdot B\\A_n\cdot B\end{pmatrix}$ 故 $A\cdot e_i$ = A的第i列

$e_i\cdot A$ = A的第i行

$=\left(\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$



$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(1,-1)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\\(-1,1)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Pf：若对于∀矩阵B，有 $A\cdot B=B\cdot A$，则A只能为kE.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，令 $C=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 其中 λ_i 各不相同

每一列乘对应入

则当 $i\neq j$ 时 $A\cdot C$ 的第 i 行 j 列个元素为 $\lambda_j a_{ij}$ ∵ $A\cdot C=C\cdot A$

$C\cdot A$ 的第 i 行 j 列个元素为 $\lambda_i a_{ij}$ 　 $\lambda_i\neq\lambda_j$

每一行乘对应的λ

这就说明了 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 下证 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$ 即可

考虑矩阵 $E_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$ 为第i行和第j列交换的矩阵

$E_{ij}\cdot A$ 对A的i行j行互换 $\longrightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{ii} & \cdots & a_{jj} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{ii} & \cdots & a_{jj} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A\cdot E_{ij}$ 对A的i列j列互换 $\rightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{ii} & \cdots & a_{ii} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{jj} & \cdots & a_{jj} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 故 $a_{ii}=a_{jj}$

故 $A=kE$

区分

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2)\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix} = (\alpha_1\varepsilon_{11}+\alpha_2\varepsilon_{21},\ \alpha_1\varepsilon_{12}+\alpha_2\varepsilon_{22})$$

$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{bmatrix}(\alpha_1 \quad \alpha_2)$ 由于前一个的列数与后一个的行数不同，无法进行

$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{bmatrix}$ 由于 无法进行

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\varepsilon_{11}+\alpha_2\varepsilon_{12}\\ \alpha_1\varepsilon_{21}+\alpha_2\varepsilon_{22}\end{pmatrix}$$

可逆矩阵的性质

① A 可逆 $\Leftrightarrow$ $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$ 时 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ A 的列向量是线性无关的

$\Updownarrow$ 行向量是线性无关的(单独)

证：① 已知 A 可逆

则设 $M(\sigma)=A$，σ 为双射

$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$

② 已知 A 的列向量 X

则 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 F^n 的基

$e_i=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{1i}\\ \vdots\\ b_{ni}\end{pmatrix}$

设 A 的列向量为 α_i

$0=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0$

则

$E=(e_1\cdots e_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}}_{B}$

则

B 为 A^{-1}

② AB可逆 $\Leftrightarrow$ A和B都可逆. $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

时. 已知(AB)可逆.

对于 $BX=0$

左乘A $ABX=0$

AB可逆. 则 $X=0$

故B可逆

对于 $AX=0$

$A=AE=AB \cdot B^{-1}$

即 $\underbrace{(AB)}_{\text{可逆}} \cdot \underbrace{(B^{-1})}_{\text{可逆}} X=0$

$\frac{\text{可逆} \cdot \text{可逆}}{\text{可逆}}$

故 $A=0$

运用这个

已知AB可逆

$AB(X)=0$

$\Downarrow$

$A(BX)=0$

A可逆

故 $BX=0$

B可逆

故 $X=0$

故AB可逆

考虑理解 $A\cdot B$ 的公式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$\alpha = a$ 的列向量

$\beta = a$ 的行向量

$$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \cdots + \alpha_n\beta_n$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} (b_{11} \cdots b_{1n}) + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} (b_{n1} \cdots b_{nn})$$

n 行　n 列

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \vdots & a_{n1}b_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

合并

线性映射 $\sigma\in L(V,V)$. W为V的一个子空间, 则可构造该线性映射 s.t. $\ker\sigma = W$.

解: 设W的一组基为$\{\alpha_1,\cdots\alpha_n\}$, 扩充为$V$的基 则

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_m \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n+1} & \cdots & \beta_m \end{array}$$

考虑设线 σ s.t. 上述映射.

即 $\alpha\in V$, $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$. $\sigma(\alpha)=\sigma(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m)=\lambda_{n+1}\beta_{n+1}+\cdots+\lambda_m\beta_m$.

当$\sigma(\alpha)=0$, 要使$\alpha\in W$. 则α的基表示时, 不能包含$\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_m$ 即

$\lambda_{n+1}\beta_{n+1}+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$ 时

只能$\lambda_i=0$, $i\in\{n+1,\cdots m\}$

即$\beta_{n+1}\cdots\beta_m$是X.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&3&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$$ 求 B. s.t $AB=BA$

$AB=BA \Leftrightarrow (A-3E)B=B(A-3E)$ 更加简单

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-a&-b&-c\\-d&-e&-f\end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&-c&0\\-e&-f&0\\-h&-i&0\end{pmatrix}$$

$b=c=f=0$

$a=e=i$

$d=h$

故

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\k&d&a\end{pmatrix}$$

凑因子和提逆

① $A^n=O$ 求 $A-E$ 逆 $\Rightarrow E^n-A^n=E=(E-A)\underbrace{(\cdots\cdots)}_{B}$ 故 $(A-E)^{-1}=-B$

② $A, B, A+B$ 可逆，求 $\underbrace{A^{-1}+B^{-1}}_{\text{的逆}}$，$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}}_{\text{提}A^{-1}}+B^{-1}=A^{-1}\underbrace{(E+AB^{-1})}_{\text{再提}B^{-1}}=A^{-1}(B+A)B^{-1}$ 逆为 $B(A+B)^{-1}A$

A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists f(x)$, s.t. $f(A)=O$ 且 $f(0)\neq 0$.

附: $\Leftarrow$ 设为 $f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$. $a_k\neq 0$

$f(A)=O=a_0A^k+\cdots+a_kE$

即 $-a_kE=a_0A^k+\cdots+a_{k-1}A$

即 $E=\dfrac{A(a_0A^{k-1}+\cdots+a_{k-1}E)}{-a_k}$，故 A 可逆.

⇒若A可逆，设A为n阶

则 $E, A^1, \cdots, A^{n^2}$ $\underline{n^2+1}$个向量在 $P^{n\times n}$ 线性相关

故 $a_{n^2}A^{n^2}+\cdots+a_0E=0$. 若 $a_0\neq 0$，则f已找到

若 $a_0=0$，则设 a_i 为 $a_{i-1}=\cdots=a_0=0$

故 $A^i(a_{n^2}A^{n^2}+\cdots+a_iE)=0$.

又A可逆，左乘 $(A^i)^{-1}$ 则 $a_{n^2}A^{n^2}+\cdots+a_iE=0$

$a_i\neq 0$，$f(x)$找到

$AB=A+B$ 则 $AB=BA$ $(r(A)=r(B))$

$\Downarrow$

$AB-A-B=0$ $\quad$ $AB-A-B+E=E$

$(A-E)(B-E)=E$ $\quad$ 由 $A^{-1}A=AA^{-1}$

得 $(B-E)(A-E)=E$

故 $AB-A-B+E=BA-A-B+E$

$AB=BA$

性质 $Ax=b$ 若 A 可逆 则 x 有唯一解

证. 存在性 $\quad Ax=b$ $\quad$ 左乘 A^{-1} $\quad x=A^{-1}b$.

唯一性 $\quad Ax_1=Ax_2$ $\quad$ 左乘 A^{-1} $\quad x_1=x_2$.

若 $AB=AC$. 且 A 可逆. 则 $B=C$

转置

$A=A_1+A_2$ 其中 $A_1^T=A_1$ $A_2^T=-A_2$ 表示法唯一

(类比一个函数写为(奇+偶))

解: 令 $A=\underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{A_1}+\underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{A_2}$ (存在性)

$A_1^T=\frac{A^T+A}{2}=A_1$ $\quad A_2^T=\frac{A^T-A}{2}=-A_2$.

若 $z\in Z_2$ 则 $z=0$. 此时无意义,该结论在 Z_2 不成立.

$\because Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ 此时 $1=-1=\bar{1}$

故对称和反对称是一样的.无意义.

唯一性 若 $A=A_1+A_2=B_1+B_2$ 其中 A_1,B_1 为对称矩阵, A_2,B_2 为反对称矩阵,

则令 $A_1-B_1=B_2-A_2=C$

$$C^T=(A_1-B_1)^T=A_1^T-B_1^T=A_1-B_1=C$$

$$C^T=(A_2-B_2)^T=A_2^T-B_2^T=B_2-A_2=-C$$

故 $C=0$. $A_1=B_1$, $A_2=B_2$.

令 $\sigma: F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ $\quad A \mapsto A + A^T$ $\quad \ker\sigma = \{A \mid 反对称\}$

$\mathrm{Im}\,\sigma = \{A \mid 对称\}$

由对称矩阵和反对称矩阵构成的空间为子空间.

$\dim\ker\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad \dim\mathrm{Im}\,\sigma = \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{n^2-n}{2} \to$ 对角线没有

$+\; n 个\, e_{ii} \to$ 对角线有

Theorem 用初等矩阵. PA为对A作相应行变换
AP - - - - - 列 - - -

$E_{ij}A$ swap i行 j行

$E_i(c)A$ i行 $\times c$.

$E_{ij}(c)A$ i行 $\times c + j$行

AE_{ij} swap i & j列

$AE_i(c)$ i列乘 c.

$AE_{ij}(k)$ j列 $\times k + i$列上

推论) 任何 $A(\text{arg})_{m\times n}$ 可初等矩阵 $P_1 \cdots P_n$

s.t $P_1 \cdots P_n A$ 为等价阶梯矩阵

这就说明若 ~~A可逆~~

则变换成等价阶梯矩阵的U为单位矩阵

再有 $Q_1 \cdots Q_t$ s.t.

$P_1 \cdots P_n A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ r行

$A \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ 的形式

保证了有非零解.

矩阵

$AX = B$ $\quad XA = B$

$EX = A^{-1}B$ $\quad X = BA^{-1}$

$\Downarrow$

$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

$|A|$

$$(A, B) \xrightarrow{\text{行}} (E, A^{-1}B)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}}\,\underline{(E_r\ 0)Q} = P'Q'$$

解方程时只能一只用初等行[redacted]

引理. P, Q 可逆 $PA = (\beta_1 \cdots \beta_n)$ $AQ = (\eta_1 \cdots \eta_n)$ 则 $L(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = L(\eta_1 \cdots \eta_n) \cong L(\beta_1 \cdots \beta_n)$

(右乘可逆矩阵,矩阵不变　左乘可逆矩阵,同构)

pf: $AE_i(c) = (\alpha_1 \cdots c\alpha_i \cdots \alpha_n) \,/\!/\, (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

$AE_{ij} = (\alpha_1 \cdots \alpha_j \cdots \alpha_i \cdots \alpha_n) \,/\!/\, (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

$AE_{ij}(c) = (\alpha_1 \cdots \alpha_i + c\alpha_j \cdots \alpha_n) \,/\!/\, (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

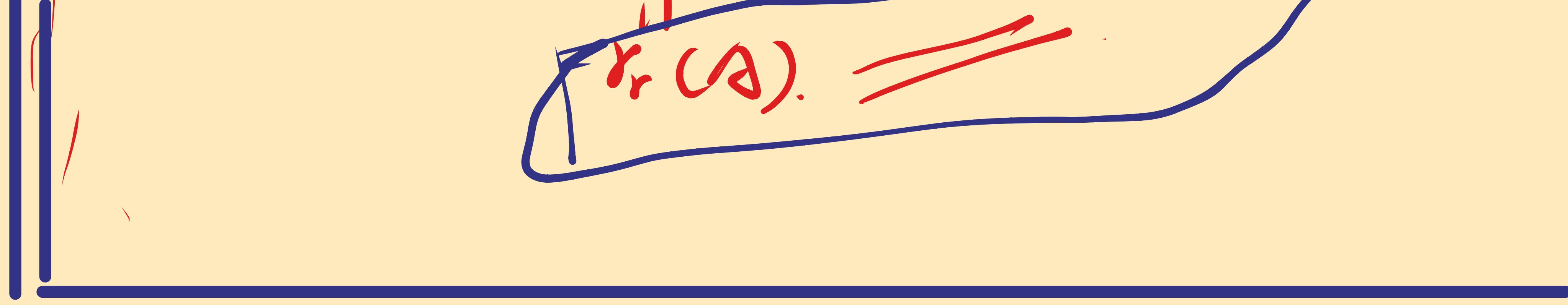
推论 $r_c(PA) = r_c(AQ) = r_c(PAQ) = r(A)$

初等变换不改变矩阵的秩
(行与列)

设 $\exists P, Q$ s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Thus

$\therefore (PAQ)^T = Q^T A^T P^T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r_c(Q^T A^T P^T) = r_c(A^T) = r(A) = r_c(A)$



若 $A\underbrace{P_1\cdots P_k}_{k个初等矩阵}=(\eta_1\cdots\eta_n)//(\alpha_1\cdots\alpha_n)$

则只有 $k+1$个…… 成立.

又 任意可逆矩阵可写为若干初等矩阵的积, 故 $AQ=(\eta_1\cdots\eta_n)$　$L(\eta_1\cdots\eta_n)=L(\alpha_1\cdots\alpha_n)$

② 可找到一个双射 σ. s.t. $\sigma(\alpha_i)=P\alpha_i=\beta_i$ 故同构.

证明　$r(A+B)\le r(A)+r(B)$ ①

$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min(r(A),r(B))$ ②

A, B为n阶方阵

① 设 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$

$B=(\beta_1\cdots\beta_n)$

$A+B=(\alpha_1+\beta_1\cdots\alpha_n+\beta_n)$.

$\underbrace{L(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)}_{子空间I}\le \underbrace{L(\alpha_1\cdots\alpha_n)}_{子空间V}+\underbrace{L(\beta_1\cdots\beta_n)}_{子空间W}$

故 $r(V+W)\le r(V)+r(W)=r(A)+r(B)$.

故 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

② 设 $r(A)=r$. $r(B)=s$.

$A=P_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\overset{n阶}{Q_1}$　$B=\overset{n阶}{P_2}\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2$

$AB=P_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1P_2\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2$

$r(AB)=r\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}}_{大于r行变为0.}Q_1P_2\underbrace{\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}}_{大于s列变为0}\Big)=r\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{r1}&\cdots&a_{rs}\end{pmatrix}$ r行s列 最大秩为 $\min(r,s)$.

②左.

$$s = r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

$s - r($ $(n-r)$ 个行向量 $) = r(AB)$

故 $r(AB) \geq s - (n-r) = s + r - n$

$$r(AB) = r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 可逆 ① $\Leftrightarrow$ A, C 可逆. ② (A, C 为方阵)

证 ① $\Rightarrow$ ②, 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_3 & AX_2 + BX_4 \\ CX_3 & CX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$CX_4 = E, \Rightarrow C$ 可逆

$CX_3 = 0$, 左乘 $C^{-1} \Rightarrow X_3 = 0$

$X_3 = 0 \Rightarrow AX_1 = E \Rightarrow A$ 可逆.

$AX_2 + BX_4 = 0$

$AX_2 + BC^{-1} = 0$

$X_2 = \boxed{-A^{-1}BC^{-1}}$

② $\Rightarrow$ ①

取 $Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, 得 $QA = AQ = E$.

由该结论可以得到 对于 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\forall i$, $a_{ii} \neq 0$. 且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$

附 若 A 可逆.

1. 当 $n=1$ $A=(a_{11})$ 可逆 $\Rightarrow a_{11}\neq 0$ ∴ $A^{-1}=a_{11}^{-1}$

2. 当 $n=k$ 时 A_k 满足条件 $A_{k+1}=\left(\begin{array}{c|c} A_k & \begin{matrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{matrix} \\ \hline 0 & a_{kk} \end{array}\right)$ 若可逆.

则 A_k, (a_{kk}) 可逆, 故得证

由假设　由1.

若 $\forall a_{ii}\neq 0$.

1. $n=1$. $A^{-1}=\frac{1}{a_{11}}$

2. $n=k$ 时 $A_k^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{kk}} \end{pmatrix}$

$n=k+1$ 时 $A_{k+1}=\left(\begin{array}{c|c} A_k & \begin{matrix} a_{k} \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline 0 & a_{kk} \end{array}\right)$

$$A_{k+1}^{-1}=\begin{pmatrix} A_k^{-1} & A_k^{-1}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\frac{1}{a_{kk}} \\ 0 & \frac{1}{a_{kk}} \end{pmatrix}$$

行列式.

$$|AE_{ij}| = -|A| = |A||E_{ij}|.$$

$$|AE_i(c)| = c|A| = |A||E_i(c)|$$

$$|AE_{ij}| = -|A| = |A||E_{ij}|$$

$\Rightarrow$ 推论 $|AP|=|A||P|$

其中 P 为初等矩阵

若A可逆，则 $|A|\neq 0$

①若A不可逆，则 $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$，

$\exists$不全为0 λ s.t. $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=0$.

$$|A|=|\alpha_1 \cdots \alpha_n| = \frac{1}{\lambda_1}\cdots\frac{1}{\lambda_n}|\lambda_1\alpha_1 \cdots \lambda_n\alpha_n|$$

$$= K|\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n, \lambda_2\alpha_2 \cdots \lambda_n\alpha_n|$$

$$= 0$$

② A可逆. $A=P_1 \cdots P_n$.

$|A|=|P_1|\cdots|P_n|$ P为初等矩阵 $|P_i|\neq 0$ 所以 $|A|\neq 0$

$|A|=|A^T|$

① A可逆, $A=P_1\cdots P_n$ $\quad A^T=(P_1\cdots P_n)^T=P_n^T\cdots P_1^T$

$|A|=|P_1|\cdots|P_n|$ $\quad |A^T|=|P_n^T|\cdots|P_1^T|$

$|E_i(c)|=|E_i(c)^T|=c$. $\quad |E_{ij}|=-1=|E_{ij}^T|$

$|E_{ij}(k)|=1=|E_{ji}(k)|$ $\quad$ 故 $|A|=|A^T|$

② A不可逆 $|A|=0$

$r(A^T)=r(A)<n \Rightarrow$

A^T也不可逆 $|A^T|=0$

这说明若把行列式看成对行向量的函数

其性质仍是满足的

Cauchy定理.

A.B 均为n阶方阵. 则 $|AB|=|A|\cdot|B|$.

证: ① B可逆. $B=P_1\cdots\cdots P_n$ 初等矩阵

$|AB|=|AP_1\cdots\cdots P_n|=|A|\,|P_1|\cdots\cdots|P_n|$

② 若B不可逆. 则 AB不可逆. $|AB|=0=|B|=|A|\,|B|$

证上三角行列式 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdots a_{nn}$.

① 若A可逆. 则 $a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$. A可通过初等列变换 $\Rightarrow |a_{11}\cdots a_{nn}E|$

用第一列消去

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & & * & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以此类推

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} |E| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|.$$ (A, B, C) 为方阵.

① 若 A 不可逆, C 不可逆. $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 不可逆.

② 可 不可

③ 不可 可

$$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = 0 = |A||C|$$

④ 若 A, C 可逆.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -BA^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

~~初~~等变换 $E_{ij}(c)$ 不改变行列式值.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \cdots P_r & 0 \\ 0 & Q_1 \cdots Q_s \end{vmatrix}$$

(P, Q 为初等矩阵)

$$\begin{vmatrix} E_i(c) & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} = c$$

$$\begin{vmatrix} E_{ij}(c) & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} = -1 = |E_{ij}(c)|$$

$$\begin{vmatrix} E_{ij}(k) & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} = |E_{ij}(k)| = 1$$

$$= \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} P_r & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & Q_s \end{vmatrix} \cdots$$

$$= |P_1| \cdots |P_r| \cdots |Q_1| \cdots |Q_s|$$

$$= |A|\,|C|$$

1. $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$, $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{kr}|A||B|$;

证明

证明从略，感兴趣的读者可以参考教材 179 页例 2，实际上我们很多时候只需要基于这些结论证明进一步的性质. $\square$

2. 当 A 可逆时，有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$，当 D 可逆时，有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$，当 B 可逆时，有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|B||C - DB^{-1}A|$，当 C 可逆时，有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|C||B - AC^{-1}D|$;

$|E_m \pm AB| = |E_n \pm BA|$

$A_{m\times n}$

$B_{n\times m}$

Pf. $\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} \overset{行}{=} \begin{vmatrix} E_m - AB & O \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m - AB|$

$\overset{列}{=} \begin{vmatrix} E_m & O \\ B & E_n - BA \end{vmatrix} = |E_n - BA|$

3. $(AB)^* = B^*A^*$，$(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$，$(kA)^* = k^{n-1}A^*$，要求掌握 A 和 B 可逆时的证明，若不可逆则需要使用第二节习题 C 组中对角占优的推论证明.

4. A 可逆时，$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$，$|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$（本题结论可以推广到更多重的伴随矩阵）.

5. 对正整数 k，$(A^k)^* = (A^*)^k$.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 逆 $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ad-cb & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{|A|}A^*$

时：r，　$A^* = |A|A^{-1}$　$r(A^*) = r(A^{-1}) = n$

-1　$A\cdot A^* = |A|E = 0.$

，的所有列向量均为 $Ax=0$ 的解

$r(A^*) \le r(N(A))$，即 $r(A^*) \le n-(n-1) = 1$

6. $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$.

又 $r(A)=n-1$ $|A|$ 存在 $n-1$ 阶子式不为零 一

定有 A_{ij} 不为0. $r(A^*) \geq 1$ 故 $r(A^*)=1$

$A^* \neq 0$

③ $r(A) < n-1$ 任一 $n-1$ 阶代数余子式均为0

$A^*=0$.

1. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$;

2. $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$.

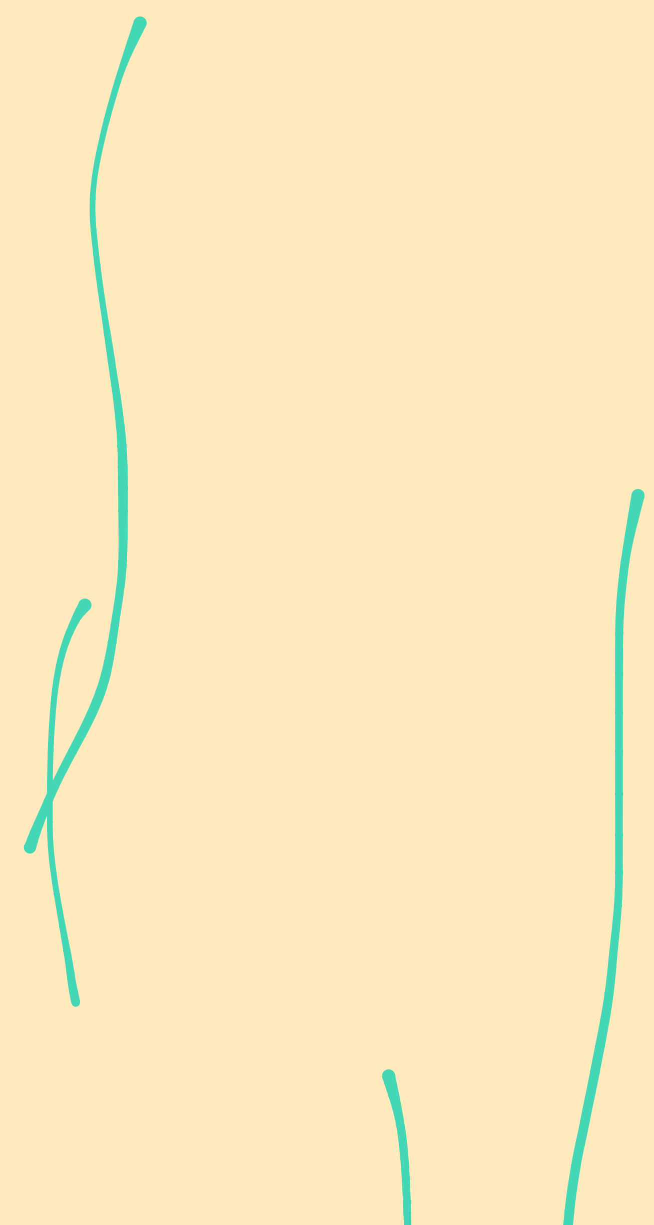
即特征值按重数求和为矩阵的迹（即矩阵对角线元素之和），特征值按重数求积为矩阵行列式. 这一结论在解决某些问题时有一定作用.

即 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_k\lambda^{n-k} + a_n$

其中 $a_k = (-1)^k \sum A_k$, 即 $(-1)^k \cdot$ (k 阶主子式之和)

有 $a_1 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\quad a_n = (-1)^n |A|$, 同时由韦达定理 $a_1 = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$



$AX=\lambda X$，则 $A^2X=\lambda^2X=X$，因此 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=\pm 1$，因此 ± 1 都是 A 的特征值.

但这里我们需要强调的是，不同于前两问，前两问中我们都是说某些值是 A 的特征值，但无法保证 A 的特征值只能是某些值，但在本题这样给出矩阵方程的情况下，我们可以得到 A 的特征值恰好就是 ± 1，没有其他值. 我们用反证法，假设存在 $\lambda_0 \neq \pm 1$ 是 A 的特征值，即 $AX=\lambda_0 X$，则 $A^2X=\lambda_0^2X \neq X$（因为 X 不是零向量），导出矛盾.

注：本题解决过程中告诉我们一个解题技巧，如果看到 A 的多项式 $f(A)=O$ 这种形式的表达式，事实上 A 的特征值就是 $f(\lambda)=0$ 的根，如上题中 $f(A)=A^2-E$，则 $f(\lambda)=\lambda^2-1$，因此 A 的特征值就是 ± 1.

同理，我们可以知道幂等矩阵的特征值只能是 0 和 1，幂零矩阵的特征值只能是 0（这是一个重要的幂零矩阵等价条件，未来我们会再次遇到），正交矩阵的特征值只能是 1 和-1.

4. 设 $BX=\lambda_i X_i (X_i \neq 0,\ i=1,\dots,n)$，则 $AX_i=\lambda_0 X_i+BX_i=\lambda_0 X_i+\lambda_i X_i=(\lambda_0+\lambda_i)X_i$，因此 $\lambda_0+\lambda_i\ (i=1,\dots,n)$ 都是 A 的特征值.

5.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_1 - A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda E_2 - A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \prod^{m} |\lambda E_i - A_i| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda E_m - A_m \end{vmatrix}$$

因此，A_i，$i = 1, \ldots, m$ 的特征值都是 A 的特征值.

定义 $\sigma \in L(V, L)$ $\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A$，$|\lambda E - A|$ 称为 A 的特征多项式. 显然 $f(\lambda)$ 不依赖于基的选取. $\because$ σ 不同基下对应的 $A \sim B$

$\therefore$ $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

定理 属于不同特征值的特征向量线性无关.

若 $\underbrace{\eta_{i1} \cdots \eta_{ir_i}}_{\lambda_i}$ 为 λ_i 的 r_i 个 X 的向量（基向量）

则 $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$ X. 即 $k_{11}\eta_{11} \cdots + \cdots + k_{n1}\eta_{n1} \cdots k_{nn}\eta_{nn} = 0$

令 $\beta_i = k_1\eta_{r1} + \cdots + k_r\eta_{r r_i}$. 则 $A\beta_i = \lambda_i\beta_i$

存在 为 $\begin{cases} \beta_1 + \cdots + \beta_n = 0 \\ \lambda_1\beta_1 \cdots + \lambda_n\beta_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1}\beta_1 \cdots + \lambda_n^{n-1}\beta_n = 0 \end{cases}$ 不断左乘 A.

即 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0$ 故 $(\beta_1 \cdots \beta_n)^T = 0$

Vandomond 行列式

故 $\beta_i = 0$

故 $k_{ij} = 0$

故 η_{ij} 无关.

A 满足 $A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 E = 0$. $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 则 A 可对角化

维空间

证: ① $(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) = 0$ 则 $r(\lambda_1 E - A) + r(\lambda_2 E - A) \leq n$

$n = r(A - \lambda_1 E + \lambda_2 E - A) \leq$

故 $\boxed{r(\lambda_1 E - A) + r(\lambda_2 E - A) = n.}$

② A若有两个特征值 λ_1、λ_2 其对应的特征子空间为

r_{λ_1} 为 $r((A-\lambda_1 E)X=0$ 解空间) 和 $r_{\lambda_2}((A-\lambda_2 E)X=0$ 的解空间)

故 $r_{\lambda_1}+r_{\lambda_2}=n-r(\lambda_1 E-A)+n-r(\lambda_2 E-A)=n$ 故A有n个特征向量.

故 A可对角化

① 设 $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ 为 $\lambda_1 E-A$ 的线性无关组

$(\beta_1 \cdots \beta_s)$ $r+s=n$. 故 $(A-\lambda_1 E)\beta_i=0$

$A\beta_i=\lambda_1\beta_i$ & $A\alpha_i=\lambda_2\alpha_i$

Tip: 事实上: $f(A)=0$ $f(\lambda)=0$ 的解 λ 为A的特征值

Tip: 只能说明A可对角化, 不能说明A一定有这两个

可能是 λ_1, λ_2

λ_1, λ_1 三种

λ_2 λ_2.

相抵 $A \cong B$ $A=PAQ$. $|P||Q|\neq 0$

相似 $A\sim B$ $A=C^{-1}AC$

相合 $A\simeq B$. $A=C^{T}AC$ $|C|\neq 0$

定理7.1X pf. $B = C^T A C$

$(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) C$. $C = (C_1 \cdots C_n)$.

$b_{ij} = f(\eta_i, \eta_j) = f((\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) C_i, (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) C_j)$.

$= C_i^T A C_j$

$= (C^T A C)_{ij}$

A正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq E$ $\Leftrightarrow$ $A = P^T P$, $|P| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A的所有特征值均大于0

实对称矩阵 A, B

若 $A \sim B$ 则 $A \simeq B$ $\longrightarrow$ $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = V^{-1}BV$ $U^{-1}=U^{T}$. $V^{-1}=V^{T}$

$A \simeq \mathrm{diag} \simeq B$

但 $A \simeq B$. 不一定有 $A \sim B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\not\sim$$

同理. 对于一般矩阵. 要有 $A \sim B$ 也一般没有 $A \simeq B$

若 A 正定 $\Leftrightarrow$ 则其 k 阶主子式均大于 0

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix} = |B| > 0$$

① $\Rightarrow$

令 $X^T = (0\ 0\ 0\ (x_{i_1} \cdots x_{i_k})\ 0\ 0\ 0\ 0)$
$$\underbrace{\phantom{(x_{i_1} \cdots x_{i_k})}}_{Y^T}$$

则 $X^TAX = Y^TBY$, 故 $|B|>0$.

② $\Leftarrow$

由条件知 A 顺序主子式均大于 0. 运用归纳法

1. $n=1$. $|A|=|a_{11}|>0$ 故 A 正定. $f(x)=a_{11}x^2$.

2. 若 $n-1$ 阶成立. 则 n 阶时 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}$.

A_{n-1} 正定 $\left\{\begin{array}{l} A\text{的}k\text{阶顺序主子式均大于}0 \\ A\text{的}\ k-1\ \text{阶顺序主子式均大于}0. \\ \text{由归纳假设}\ A_{n-1}\ \text{正定} \end{array}\right.$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A^{-1} & 1\end{pmatrix}}_{Q^T}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{Q}$$

$$= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha^T & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$

故 $\underset{>0}{|A|}=\underset{>0}{|A_{n-1}|}\,\underset{>0}{|a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha|}>0$

故 $a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha>0$. 令其为 b^2.

$$Q^TAQ=Q^T\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & b^2\end{pmatrix}Q = Q^T\begin{pmatrix} P_{n-1}^T & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-1} & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}Q.$$

$= M^TEM \simeq E$

故 $A\simeq E$

A 半正定 $\Leftrightarrow$ 所有主子式大于0.

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$

所有顺序主子式 ≥ 0

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$

秩为1的矩阵可对角化 $\Leftrightarrow$ 迹不为0

① 一阶 显然

② $n>1$. 秩为1. 不可逆 $|A|=0$. $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ 且 $\lambda_i=0$. 0为其特征值 特征子空间为 $AX=0$. 所以为 $n-1$ 维.

A有n重的特征值 0已给了 $n-1$ 重 (至少)

i. $\lambda^n=0$. 则 代数重数 > 几何重数, 不可逆迹为0

ii. $\lambda^{n-1}=0$. 则最后一个特征值为A的迹, 不为0. λ_n

相似

相合 $\Rightarrow$ 相抵

$\not\Leftarrow$

实对称 相似 $\Rightarrow$ 相合

$\not\Leftarrow$

复对称 相合 $\Leftrightarrow$ 相抵