2018–2019 学年线性代数 I (H) 期末答案

张晋恺

2024 年 1 月 18 日

一、

(1) 求核空间即求使得 $T(f(x))$ 为 0 矩阵的 $f(x)$ 构成的空间, 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 则有

$$\begin{cases} f(0) = d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \\ f(2) = -a + b - c + d = 0 \end{cases}$$

令 $a = t$ 有 $f(x) = t(x^3 - x)$, 故 $N(T) = L(x^3 - x)$

求像空间，取 $\mathbf{R}[\mathbf{x}]_4$ 的一组常用基 $1, x, x^2, x^3$,

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求它们的极大线性无关组, 我们发现 $T(x) = T(x^3)$, 先丢弃 $T(x^3)$, 然后令

$$k_1T(1) + k_2T(2) + k_3T(x^2) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_1 + k_2 + k_3 \\ k_1 - k_2 + k_3 & k_1 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

故 $T(1), T(x), T(x^2)$ 线性无关, 故 $R(T) = L\{T(1), T(x), T(x^2)\}$.

(2) 简单验证即可，略.

二、

(1) B 为上三角矩阵, 则特征值为对角线元素 $2, 0, 1, 9$,$A \backsim B$ 则有相同的特征值则 $f(A) = A^2 - 9A + 4E_4$ 的特征值为 $f(\lambda_i) = -10, 4, -4, 4$ 行列式的值等于特征值的乘积, 为 640.

(2) 由于 A 有一个一重特征值 0, 故 A 不可逆, 且 $AX = 0$ 的解空间维数为 $n - r(A) = 1$, 故 $r(A) = 3, r(A^*) = 1$ 而 9 也为一重特征值, 同理有 $r(9E - A) = 3$ 故 $r(A^*) + r(9E - A) = 4$.

三、

(1) 设 $\delta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 由正交的定义可知

$$\begin{cases} \alpha\delta = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \beta\delta = -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ \gamma\delta = x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

令 $x_1=t$, 解得 $\delta=t(1,1,-3,1)$, 又 δ 为单位向量,$\|\delta\|=1$, 解得 $\delta=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

(2) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(1,-1,1,3)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ 故 $\|\alpha+\beta+\gamma+\delta\|=\sqrt{13}$ (事实上两种计算结果是一样的).

四、

(1) 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix}$, 设 A 的三个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 由

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=a=1,a=1,$$

再由

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{vmatrix}=-2(2+b^2)=-12且b>0,得b=2.$$

(2) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda+3)(\lambda-2)^2=0$, 得, A的特征值为$\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=2$.
方程组 $(-3E-A)X=0,(2E-A)X=0$ 的基础解系为

$$\xi_1=(-1,0,2)^{\mathrm{T}},\xi_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

正交规范化得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

正交变换为 $X=QY$, 其中$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

(3)A 有负的特征值, 非正定.

五、

LALU 例 15.3, 例 15.4.

六、

取 $\mathbf{R}^3$的一组基$\{e_1,e_2,e_3\}$, 其中

$$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$$

则

$$T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

故特征多项式为 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-5)$, 特征值$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=5$.

(2) 对于 $\lambda_1=\lambda_2=3$求得特征子空间为$\operatorname{span}\{(0,1,0),(1,0,-1)\}$ 为二维的, 而对于 λ_3 必有一一维子空间. 故几何重数等于代数重数,T 可对角化.

七、

$AX=0, \dim N(A)=n-r, AB=0, r(B)\leqslant n-r(A)$,要使得$r(A)+r(B)=k$,即$r(B)\leqslant k-r(A)\leqslant n-r(A)$成立

八、

令 $\sum\limits_{i=1}^{s}=\lambda_i\alpha_i=0$ 我们知道 $(A-\lambda E)\alpha_1=0$, 且 $(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i$ 故我们有

$$(A-\lambda E)^j\alpha_i=\begin{cases}\alpha_{i-j}, i-j\geqslant 1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

故作用 $(A-\lambda E)^{s-1}$ 有 $\lambda_s\alpha_1=0$ 故 $\lambda_s=0$ 以此类推, 依次作用 $(A-\lambda E)^{s-i}, i=1,2\ldots s-1$ 即可得到 $\lambda_i=0$.

九、(1) 正确, 因为 A 的特征值不为有理数.

(2) 错误, 若存在这样两组向量, 则两个空间正交, 从而是直和, 则 5 维欧式空间有 6 个线性无关的向量, 矛盾.

(3) 正确, 该式子结果只能为 0,2,4.

(4) 正确,A有特征值 10, 其特征向量为$(1,1,1\ldots,1)$ 故 $f(A)$有特征值$f(10)=2019$.