2022–2023 谈之奕线性代数 I (H) 期中答案

张晋恺

2024 年 1 月 25 日

一、

初等行变换可化为 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$ 故当 $\lambda = 3$ 时有解，解得其一般解为

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

二、

取 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 即可, 按列排成矩阵化成简化阶梯矩阵说明或者利用行列式不为 0.

三、

(1)$x_1 = x_2, \Rightarrow \ker\sigma = \operatorname{span}\{(1,1)\}$, 令 $\tau = I - \sigma$, 则 $\tau(x_1, x_2) = (x_2, 3x_2 - 2x_1)$ 取自然基可得

$$\operatorname{im}\sigma = \operatorname{span}\{(0,-2),(1,3)\}$$

.

(2) 该结论不一定成立, 证明如下：

$\ker\tau \subseteq im(I-\tau) \Rightarrow \forall\alpha \in \ker\sigma, \exists\beta, s.t, (I-\tau)(\beta) = \alpha, \implies I(\beta)-\tau(\beta) = \alpha, \tau(\beta)-\tau^2(\beta) = \tau(\alpha) = 0, thus, \tau(\beta) = \tau^2(\beta)$

故只要证 $(I-\tau)(\tau(\gamma)) = 0 \implies \tau(\gamma) = \tau^2(\gamma)$ 但是，γ 要求是任意的, 而 β 只是特定的, 并不能保证覆盖整个 V, 事实上第一问的 τ 就是一个反例.

四、

(1) 证明略, 题目应改为次数小于 3 设

$$f(x) = ax^2 + bx + c, f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

解得

$$(a,b,c) = k_1(1,0,-1) + k_2(0,1,-1)$$

故

$$W = \operatorname{span}\{x^2-1, x-1\}, \dim W = 2$$

.

(2) 证明略,$\ker T$ 即为第一问的 W,$\operatorname{im} T$=span$\{1\}$.

(3) 二维线性空间任意三个向量线性相关，$f, g, h \in W$ 故线性相关.

五、

(1) 错,$\alpha = 0, \beta \neq 0$ 为反例.

(2) 错, 对于复数域不构成线性空间, 因为实数与复数的数乘不封闭于实数.

(3) 错, 三元向量,$(0,0,1) + (1,0,0)$ 不封闭于 $\mathbf{R}_1^3$.

(4) 错, 反例与第一问一致.

(5) 错, 不一定是满射.

(6) 对, 将 W 的基扩充为 V 的基, 构造线性映射将 W 的基映射为 0, 扩充的基做恒等变换即可得到要求的线性映射,

即 $\sigma\{\alpha_i, \beta_j\} = \{0, \beta_j\}$, 对于 $\gamma = \Sigma\lambda_i\alpha_i + \Sigma\mu_j\beta_j \in \ker\sigma$ 易得到 $\mu_j = 0$, 故 $\ker\sigma = W$.