2022 2023 线性代数 I (H) 期末答案

张晋恺

2024 年 1 月 18 日

一、$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 1-k \end{bmatrix}$ 当 $k=2$ 时无解。当 $k+1=0$ 时，即 $k=-1$ 时为 $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$ 令 $x_1 = t$ 有通解 $(0 \ -\frac{1}{3} \ \frac{2}{3})^T + t(1 \ 1 \ 0)^T$ 当 $k \neq 2$ 且 $k \neq -1$ 时有特解 $(\frac{1}{2-k} \ 0 \ \frac{1-k}{2-k})$

二、$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 + 0{x_3}^2$ 令 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

正负惯性指数均为 1

三、$AA^* = |A|E$, 故 $A = (A^*)^{-1} * |A|$ $|A^*| = |A|^2 = 16, |A| = \pm 4$, $(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

故 $A = \pm \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

四、$LALU$ 例 4.3

五、容易知道 A 的特征值为 1,2,-1.

$|A + 3E| = \prod \lambda_i' = \prod (\lambda_i + 3) = 4 \times 5 \times 2 = 40$

六、

(1)$r(A) = r$, 通过可逆矩阵 P 进行列变换作用 A 可以把其后 $n-r$ 列变为 0, 再通过 P^{-1} 进行行变换即可

(2) 相抵分解 $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = \alpha\beta^T, tr(A) = 1$ 故 $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = tr(A)\alpha\beta^T = A$

七、

(1) 验证 $\sigma(\lambda p_1(x) + \mu p_2(x)) = \lambda p_1(x) + \mu p_2(x)$ 即可

(2) 取 $R_3[x]$ 的基 $B_1 = \{1 \ x \ x^2\} = \{e_1 \ e_2 \ e_3\}$

取 $R^{2\times 2}$ 的基为 $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4\}$

$$\sigma(e_1\ e_2\ e_3) = (\epsilon_1\ \epsilon_2\ \epsilon_3\ \epsilon_4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)$Im\sigma = span\{\epsilon_3\ \epsilon_4\}$ 设 $p(x) = ax^2 + bx + c \in \ker\sigma \subseteq R_3[x]$ 则有 $\begin{cases} (a+b+c) - (4a+2b+c) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

解得 $\ker\sigma = span\{-3x^2 + x\}$

(4) 给出维数相同的子空间即可，例如 $span\{1\ x\} \cong Im\sigma, span\{\epsilon_1\} \cong \ker\sigma$

八、

(1) 错, 令所有的 α 为零向量，β 非零即可

(2) 错, 平面上三线共点的两两直线均可张成平面, 但是任意两条直线显然线性无关

(3) 错, 反例:$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) 显然是正确的