# 向量范数与矩阵范数

作者：凯鲁嘎吉 - 博客园 http://www.cnblogs.com/kailugaji/

请移步这里：浅谈范数正则化

## 1. 向量范数

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$

向量的 1-范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

向量的 2-范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

向量的 p-范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, \infty)$$

向量的∞-范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

补充：$L_0$ 范数

向量 $\boldsymbol{x}$ 中非 0 元素的个数

## 2. 矩阵范数

$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$

矩阵的 Frobenius 范数：

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

矩阵的行范数：

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

矩阵的列范数：

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

矩阵的 2-范数：

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

其中 $\lambda_{\max}(A^T A)$ 表示 $A^T A$ 的最大特征值。

补充：$L_{2,1}$ 范数

$m$ $n$

## 3. 参考文献

$$\|A\|_{2,1} = \sum_{i=1} \sqrt{\sum_{j=1} a_{ij}^2}$$

李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析.第5版[M]. 清华大学出版社, 2008.