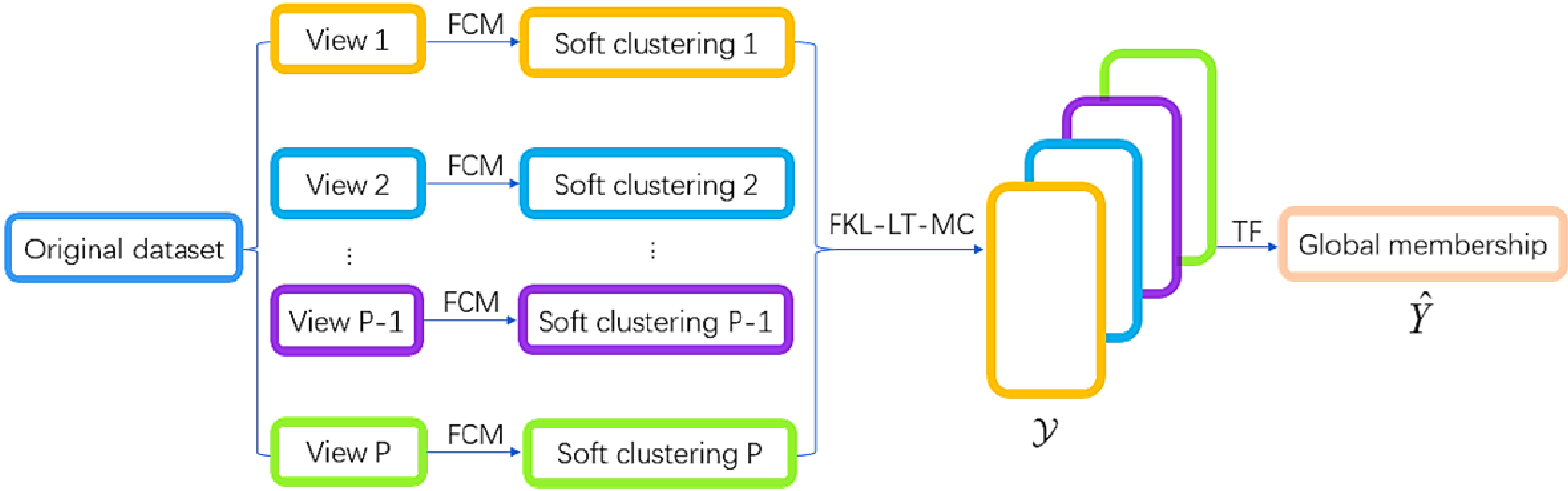
基于KL散度的低秩张量约束模糊多视图聚类

作者：凯鲁嘎吉 - 博客园 http://www.cnblogs.com/kailugaji/

阅读文本的前提：多视图子空间聚类/表示学习(Multi-view Subspace Clustering/Representation Learning)。通过上述文章了解张长青团队2015ICCV的Low-Rank Tensor Constrained Multiview Subspace Clustering这篇文章大体思路，了解张量的相关概念，ADMM求解过程等，然后再阅读本篇博文。还需了解奇异值分解(SVD)、张量分解相关知识，可参考最后给出的相关文献。

本博文主要对"**Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data**"这篇文章进行展开叙述。由于数据通过不同的技术从不同的来源收集，多视图聚类已成为一种新兴的无监督数据分类技术。然而，现有的多视图软聚类方法大多只考虑视图之间的两两相关性，而忽略了多视图之间的高阶相关性。为了从不同视角整合更全面的信息，本文创新了一种利用低秩张量的模糊聚类模型来解决多视角数据聚类问题。本文方法首先对数据的不同观点分别进行标准模糊聚类。然后，将得到的软划分结果聚合为新的数据，由低秩张量约束的基于Kullback-Leibler (KL)散度的模糊模型处理。用KL散度函数代替传统的最小欧氏距离，增强了模型的鲁棒性。更重要的是，将不同视图的模糊划分矩阵表示为一个三阶张量。因此，在基于KL散度的模糊聚类中引入低秩张量作为范数约束，以灵巧地获得不同视图的高阶相关性。最终模型的最小化是凸的，本文提出了一种有效的增广拉格朗日交替方向法来处理这一问题。特别地，利用张量因式分解得到了全局隶属度。在多个多视图数据集上与最新的多视图聚类算法进行了比较，证明了该方法的有效性和优越性。

➢ The framework of FKL-LT-MC for multiview data



算法大体步骤:

1) 预处理：每个视图(共P个视图)的数据做一遍FCM，得到P个模糊隶属度矩阵U。
2) 输入：将P个隶属度矩阵当做相应视图的数据作为算法的输入。现在不要再叫隶属度了，已经看成多视图数据了。
3) 利用本文新提算法FKL-LT-MC得到每个视图的隶属度y。
4) 张量分解得到(所谓的)全局隶属度。
5) 将全局隶属度作为原始数据输入，用FCM训练得到最终聚类结果。

H. Wei, L. Chen, K. Ruan, L. Li and L. Chen, "Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 12, pp. 3087-3099, Dec. 2020.

➢ FKL-LT-MC

各视图隶属度

KL散度作为距离度量
各视图各自的隶属度(这里已经作为数据进行使用)与聚类中心

隶属度构成的张量(N*K*P)的核范数，用于约束低秩张量

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} y_{ik,p}^{m} D_{KL}(u_{ij,p} \parallel o_{kj,p}) + \xi \parallel \mathcal{Y} \parallel_{*}$$

$$s.t.\quad \mathcal{Y} = \Phi(y_{ik,1}, y_{ik,2}, \cdots y_{ik,P})$$

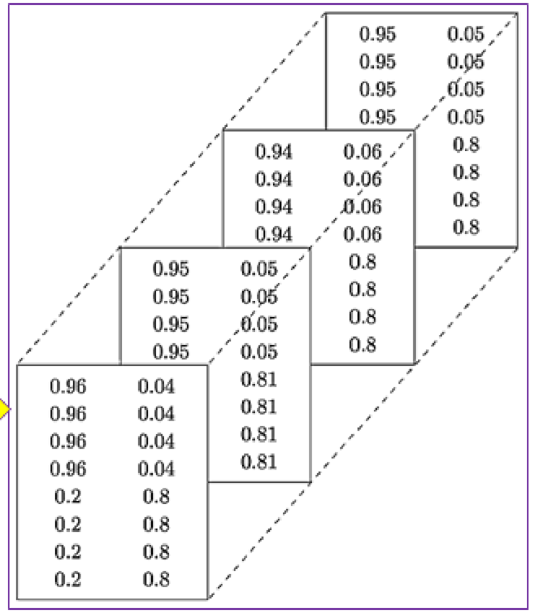
每个视图隶属度堆叠起来构成的三阶张量(N*K*P)

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ik,p} = 1, \quad i = 1, \cdots, N; \quad p = 1, \cdots, P$$

每个视图每个样本的所有类的隶属度之和为1

$$\sum_{j=1}^{K} o_{kj,p} = 1, \quad k = 1, \cdots, K; \; p = 1, \cdots, P$$

每个视图每个样本的所有类的类中心之和为1



求解过程仍然采用ADMM进行分步求，与张长青2015ICCV的文章中LT-MSC算法的求解完全一致。最终得到每个视图的隶属度y。

- H. Wei, L. Chen, K. Ruan, L. Li and L. Chen, "Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 12, pp. 3087-3099, Dec. 2020.
- C. Zhang, H. Fu, S. Liu, G. Liu and X. Cao, "Low-Rank Tensor Constrained Multiview Subspace Clustering," 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2015.

➢ Tensor Factorization

1. 各视图隶属度构成的三阶张量 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{N\times K\times P}$
2. 张量的矩阵展开 $Y^{(1)} \in \mathbb{R}^{N\times KP}$

$Y^{(2)} \in \mathbb{R}^{K\times NP}$

$Y^{(3)} \in \mathbb{R}^{NK\times P}$

3. 每个展开矩阵做奇异值分解

$$Y^{(t)} = A^{(t)}\Sigma^{(t)}(B^{(t)})^T, \quad t = 1, 2, 3$$

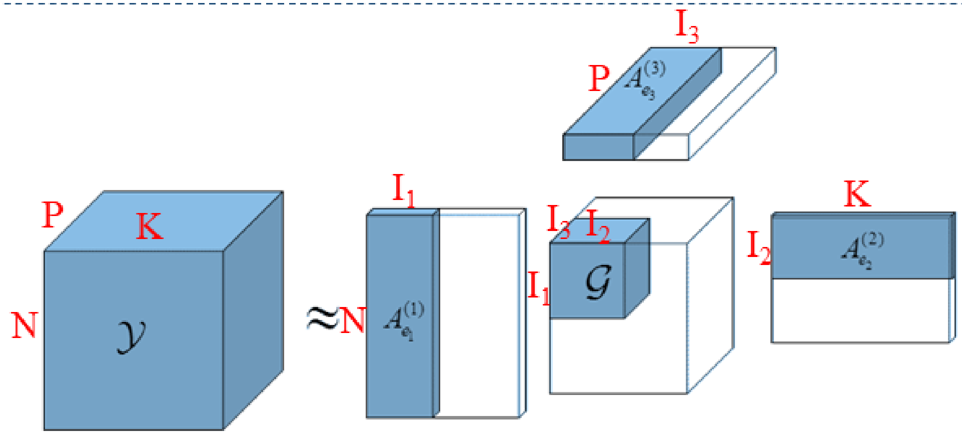
4. 构建核张量G

$$\mathcal{G} = \mathcal{Y} \times_1 (A_{e1}^{(1)})^T \times_2 (A_{e2}^{(2)})^T \times_3 (A_{e3}^{(3)})^T$$

5. 张量y的重构

$$\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{G} \times_1 A_{e1}^{(1)} \times_2 A_{e2}^{(2)} \times_3 A_{e3}^{(3)}$$

6. 用高阶正交迭代法(higher-order orthogonal iteration, HOOI)求解最小化问题 $\| \mathcal{Y} - \hat{\mathcal{Y}} \|_F^2$ 得到最终的 $A_{e_t}^{(t)}$
7. 将 $A_{e1}^{(1)}$ 作为全局隶属度 $\hat{Y}$
8. 将全局隶属度作为数据输入，用FCM训练得到最终聚类结果



procedure HOOI($\mathfrak{X}$, R_1, R_2, $\ldots$, R_N)
  initialize $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n\times R}$ for $n = 1, \ldots, N$ using HOSVD
  repeat
    for $n = 1, \ldots, N$ **do**
      $\mathcal{Y} \leftarrow \mathfrak{X} \times_1 \mathbf{A}^{(1)\mathsf{T}} \cdots \times_{n-1} \mathbf{A}^{(n-1)\mathsf{T}} \times_{n+1} \mathbf{A}^{(n+1)\mathsf{T}} \cdots \times_N \mathbf{A}^{(N)\mathsf{T}}$
      $\mathbf{A}^{(n)} \leftarrow R_n$ leading left singular vectors of $\mathbf{Y}_{(n)}$
    end for
  until fit ceases to improve or maximum iterations exhausted
  $\mathcal{G} \leftarrow \mathfrak{X} \times_1 \mathbf{A}^{(1)\mathsf{T}} \times_2 \mathbf{A}^{(2)\mathsf{T}} \cdots \times_N \mathbf{A}^{(N)\mathsf{T}}$
  return $\mathcal{G}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(N)}$
end procedure

- H. Wei, L. Chen, K. Ruan, L. Li and L. Chen, "Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 12, pp. 3087-3099, Dec. 2020.
- Kolda T G, and Ba Der B W, "Tensor Decompositions and Applications," Siam Review, 2009, 51(3):455-500.

➢ Algorithm of FKL-LT-MC

Input: Soft partition results: $u_{ij,1}, ..., u_{ij,P}$, cluster number K and parameters $\delta^t, t = 1, 2, ...T$

Output: The consensus clustering results

Make the initialization of membership values $y_{ik,p}$, cluster centers $o_{kj,p}$, $k = 1, 2, ..., K$, $j = 1, 2, ..., K$, $p = 1, 2, ..., P$; $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = ... = \alpha^{(T)} = 0$; $H^1 = H^2 = ... = H^T = 0$; $\eta = 10^{-6}$; $\rho = 2$; $\eta_{max} = 10^{10}$; $\varepsilon = 10^{-8}$, and set the iterative number f=1;

while *not converged* **do**

  for *each of P views* **do**

    Update $o_{kj,p}$ and $y_{ik,p}$ according to Eq. (18), (24) and (25)

  end

  for *each of T modes* **do**

    Update H^t and $\alpha^{(t)}$ according to Eq. (28) and (29)

  end

  Update the parameter η by $\eta = min(\rho\eta; \eta_{max})$;

  f = f+1;

  check the convergence conditions:

  $\| Y(f) - Y(f-1) \| < \varepsilon$ and

  $\| P^t y - h^t \|_\infty < \varepsilon$;

end

The global membership $\hat{Y}$ is obtained by using tensor factorization;

Apply the fuzzy c means method with the global membership $\hat{Y}$;

Return The consensus clustering results

将$A_{e_1}^{(1)}$作为$\hat{Y}$

用FCM对全局隶属度进行聚类

我的思考：

- 文章两次将隶属度作为FCM的输入。(1)刚开始时，对每个视图分别来一遍FCM得到隶属度，认为这些隶属度可以完全代替原始数据，并将其作为所提算法的输入用KL散度做度量距离。(2)最后一步，将(所谓的)全局隶属度作为FCM的输入进行聚类得到最终聚类结果。
- 算法求解与LT-MSC的求解过程完全一致，因此这里没有详细展开。
- 疑问：为什么将1模的$A^{(1)}$作为最终的全局隶属度？既然叫做全局隶属度，那么它有隶属度的性质吗？值都是正的吗？有没有归一化这一约束？它的大小是N*K吗？如果是N*K的话，是不是意味着e1为K？那么就直接将全局隶属度最大值所在的下标作为聚类结果不行吗？为什么还需要再来一遍FCM？如果大小不是N*K，为什么要起这个迷惑人的名字？从文章看，$A^{(1)}$作为全局隶属度的话，长的确是N，但宽不见得是K，要根据选多少个特征值来定，那么为什么它就能当做最终的全局隶属度呢？欢迎一起交流~

这一部分采用ADMM计算，目的是为了得到每个视图的隶属度矩阵y，为后面的张量分解做准备。

H. Wei, L. Chen, K. Ruan, L. Li and L. Chen, "Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 12, pp. 3087-3099, Dec. 2020.

参考文献：

[1] H. Wei, L. Chen, K. Ruan, L. Li and L. Chen, "Low-Rank Tensor Regularized Fuzzy Clustering for Multiview Data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 28, no. 12, pp. 3087-3099, Dec. 2020.

[2] Kolda T G, Ba Der B W. Tensor Decompositions and Applications[J]. Siam Review, 2009, 51(3):455-500.

[3] Golub G H, Loan C. Matrix Computations, 4th Edition[M]. Johns Hopkins University Press, 2012.

[4] 张量MATLAB工具箱：tensor_toolbox-v3.1

[5] 奇异值分解相关知识：字典更新与K-SVD、Computation of the Singular Value Decomposition

[6] 张量分解-Tucker分解