作者：凯鲁嘎吉 - 博客园
http://www.cnblogs.com/kailugaji/

一、实验目的

1．借助矩阵理论进一步对消去法作分析，建立高斯消去法与矩阵因式分解的关系。

2．会矩阵的紧凑格式的 LU 分解法、对称阵的 LDL^T 分解法。

3．会直接三角分解法线性方程组 $Ax=b$；会选列主元三角分解法解线性方程组 $Ax=b$。

二、实验原理

Gauss-Jordan 消元法;初等变换。

三、实验程序

1. 矩阵A的LU分解(*Doolittle*(杜里特尔)分解)

输入　矩阵$A_{n\times n}$

Step 1　对$k=1,2,\cdots,n-1$做Step 2-3.

Step 2　对$i=k+1,\cdots,n$做Step 3

$A[i,k]=A[i,k]/A[k,k]$--因(k,k)位以下将被化为零故来存$l_{ik}=A[i,k]$)

Step 3　对$j=k+1,\cdots,n$--因(k,k)位下被化为零且存了l_{ik},故j从$k+1$起

$A[i,j]=A[i,j]-A[i,k]A[k,j]$

输出　L,　U.

2. 解方程组$Ax=b$的直接三角分解法

输入　增广矩阵$B=(A\ b)$及阶数n--前3步同上后3步是向上消元

Step 1　对$k=1,2,\cdots,n-1$,做Step 2-3.

Step 2　对$i=k+1,\cdots,n$,做Step 3

$B[i,k]=B[i,k]/B[k,k]$

Step 3　对$j=k+1,\cdots,n+1$--j取到$n+1$是因为增广矩阵多一列

$B[i,j]=B[i,j]-B[i,k]B[k,j]$

Step 4　对$k=n,n-1,\cdots,2$,做Step 5.

Step 5　对$i=k-1,k-2,\cdots,1$,做

$$B[i,k]=B[i,k]/B[k,k]$$
$$B[i,n+1]=B[i,n+1]-B[i,k]B[k,n+1]$$
$$B[k,n+1]=B[k,n+1]/B[k,k]$$

分解出的L,U

4. 将第 2 个程序改为选列主元三角分解法解方程组 $Ax=b$ 的程序。

四、实验内容

1. 求一个 4 阶矩阵的 LU 分解。
2. 用直接三角分解法，求一个 4 元线性方程组 $Ax=b$ 的解。

五、解答（按如下顺序提交电子版）

1.(程序)

(1)LU分解源程序：

```
function [l,u]=lu12(a,n)
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        a(i,k)=a(i,k)/a(k,k);
        for j=k+1:n
            a(i,j)=a(i,j)-a(i,k)*a(k,j);
        end
    end
end
l=eye(n);
u=zeros(n,n);
for k=1:n
    for i=k:n
        u(k,i)=a(k,i);
    end
end
for k=1:n
    for j=1:k-1
        l(k,j)=a(k,j);
    end
end
```

(2)直接三角分解法源程序：

```
function [a,l,u,y,x]=direct_triangle(a,b,n)
%a为N*N矩阵，b为n*1列向量
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        a(i,k)=a(i,k)/a(k,k);
        for j=k+1:n
            a(i,j)=a(i,j)-a(i,k)*a(k,j);
        end
    end
end
l=eye(n);
u=zeros(n,n);
for k=1:n
    for i=k:n
        u(k,i)=a(k,i);
    end
end
for k=1:n
    for j=1:k-1
        l(k,j)=a(k,j);
    end
end
y=ones(n,1);
x=ones(n,1);
y(1,1)=b(1,1);
for i=2:n
    s=0;
    for k=1:i-1
        s=s+l(i,k)*y(k,1);
     end
     y(i,1)=b(i,1)-s;
 end

 x(n,1)=y(n,1)/u(n,n);
 for j=n-1:-1:1
     s1=0;
     for k1=j+1:n
         s1=s1+u(j,k1)*x(k1,1);
     end
     x(j,1)=(y(j,1)-s1)/u(j,j);
 end
```

2.(运算结果)

（1）求一个4阶矩阵的LU分解。

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

```
>> a=[10,7,8,7;7,5,6,5;8,6,10,9;7,5,9,10];
>> [l,u]=lu12(a,4)

l =

    1.0000         0         0         0
    0.7000    1.0000         0         0
    0.8000    4.0000    1.0000         0
    0.7000    1.0000    1.5000    1.0000


u =

   10.0000    7.0000    8.0000    7.0000
         0    0.1000    0.4000    0.1000
         0         0    2.0000    3.0000
         0         0         0    0.5000
```

（2） $A=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$

```
>>  a=[10 7 8 7;7 5 6 5;8 6 10 9;7 5 9 10];b=[32 23 33 31]';
>> [a,l,u,y,x]=direct_triangle(a,b,4)

a =

   10.0000    7.0000    8.0000    7.0000
    0.7000    0.1000    0.4000    0.1000
    0.8000    4.0000    2.0000    3.0000
    0.7000    1.0000    1.5000    0.5000


l =

    1.0000         0         0         0
```

```
    0.7000    1.0000         0         0
    0.8000    4.0000    1.0000         0
    0.7000    1.0000    1.5000    1.0000


u =

   10.0000    7.0000    8.0000    7.0000
         0    0.1000    0.4000    0.1000
         0         0    2.0000    3.0000
         0         0         0    0.5000


y =

   32.0000
    0.6000
    5.0000
    0.5000


x =

    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

3.(拓展（方法改进、体会等））

一个线性方程组 $AX=b$，若右端向量 b 或系数矩阵 A 的微小变化就会引起方程组的解发生很大的变化，则称 $AX=b$ 为病态方程组。方程组的系数矩阵 A 的条件数 $Cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ 刻画了方程组的性态，若 $Cond(A)\geq 1$，则称 $AX=b$ 为“病态”方程组；若 $Cond(A)$ 相对较小，则称 $AX=b$ 为“良态”方程组。良态方程组用 GAUSS 消去法和 JACOBI 等简单的迭代法就可以得到比较好的计算解，而对于病态方程组，一般的直接法和迭代法会有较大的误差，甚至严重失真。所以，在解方程组时，有必要先对方程组的性态进行研究，采用相应的算法，才能得到比较精确的计算解。利用方程组的条件数来判断就是一个很好的办法。

比如，希尔伯特矩阵就是一个病态矩阵，在方程组问题求解之前，可以先判断其条件数是否较大。

源程序：hilbert.m:

```
function [A,cond1]=hilbert(k)
format rat
A=zeros(k,k);
for m=1:k
    for n=1:k
        A(m,n)=1/(m+n-1);
    end
end
cond1=cond(A,inf);
```

运行结果：

```
>> [A,cond1]=hilbert(3)

A =

       1              1/2            1/3
       1/2            1/3            1/4
       1/3            1/4            1/5


cond1 =

     748
>> [A,cond1]=hilbert(4)

A =

       1              1/2            1/3            1/4
       1/2            1/3            1/4            1/5
       1/3            1/4            1/5            1/6
       1/4            1/5            1/6            1/7


cond1 =

   28375
>> [A,cond1]=hilbert(5)

A =

       1              1/2            1/3            1/4            1/5
```

```
1/2    1/3    1/4    1/5    1/6
1/3    1/4    1/5    1/6    1/7
1/4    1/5    1/6    1/7    1/8
1/5    1/6    1/7    1/8    1/9


cond1 =

  943656
```

从结果可见希尔伯特矩阵是一个病态矩阵，用一般的直接法和迭代法会有较大的误差，甚至严重失真。