# MATLAB线性方程组的迭代求解法

作者：凯鲁嘎吉 - 博客园
http://www.cnblogs.com/kailugaji/

## 一、实验目的

1. 借助矩阵按模最大特征值，判断解方程组的Jacobi迭代法所得迭代序列的敛散性。

2. 会在Jacobi迭代法所得迭代序列收敛时，用修改后的Gauss-Seidel迭代法。

3. 会逐次超松驰迭代法。

## 二、实验原理

1. Jacobi迭代法

在$Ax=b$中,令$L$为严格下三角阵,且$l_{ij}=-a_{ij}$,令$U$为严格上三角阵,且$u_{ij}=-a_{ij}$,

令$D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,$B_0=D^{-1}(L+U)$,$f=D^{-1}b$,则迭代格式为

$$x^{(k+1)}=B_0x^{(k)}+f,\quad (k=1,2,\cdots) \tag{1}$$

设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为$M$的全部特征值,称$\rho(M)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$为矩阵$M$的谱半径.

**Th.** 对任$x_0$及$f$,迭代格式(1)收敛的充要条件是:$\rho(M)<1$.

2. Gauss − Seidel迭代法

迭代公式: $$Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b. \tag{2}$$

或 $$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b. \tag{2'}$$

或 $$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f. \tag{2''}$$

3. 超松驰迭代法(SOR方法)

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}),\ (i=1,2,\cdots,n,\ k=0,1,\cdots) \tag{3}$$

或 $$x^{(k+1)}=(D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D+\omega U)x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b=x^{(k+1)} \tag{3'}$$

或 $$x^{(k+1)}=L_\omega x^{(k)}+f \tag{3''}$$

**Th.** 设$a_{ii}\ne 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则解$Ax=b$的$SOR$方法收敛的充要条件是$\rho(L_\omega)<1$.

**Th.** 设$a_{ii}\ne 0$,解$Ax=b$的$SOR$方法收敛,则$0<\omega<2$.

**Th.** 设$A$为对称正定矩阵,且$0<\omega<2$,则解$Ax=b$的$SOR$方法收敛.

# 三、实验程序

1. 输入　方程组$Ax=b$中的$A,b$初始向量$x0$,误差容限$TOL$,最大迭代次数$m$.

输出　近似解$x$或迭代次数超过$m$的信息.

step 1　对$k=1,\cdots,m$做step 2 - 4.

step 2　对$i=1,\cdots,n$

$$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij} x0_j)/a_{ii}$$

step 3　若$\|x-x_0\|<TOL$,则输出$(x_1,\cdots,x_n)$,停机.

step 4　对$i=1,\cdots,n$

$$x0_i \leftarrow x_i.$$

step 5　输出('Maximum number of iterations exceeded'),停机.

2. Gauss - Seidel迭代法

只需将step 2改为：$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x0_j)/a_{ii}$

3. Gauss - Seidel迭代法

只需将step 2改为：$x_i \leftarrow (1-\omega)x0_i + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x0_j)/a_{ii}$

# 四、实验内容

用上面前二种方法求解4元线性方程组的近似解，所选方程组尽可能可以用多种方法求得收敛解。

注：要注意判断迭代法收敛性，方法之一就是用程序求矩阵的按模最大特征值。

# 五、解答

## 1.(程序)

（1）Jacobi迭代法源程序：

```
function x=jacobi(a,b,x0,n,tol,m)
x=zeros(n,1);
for k=0:m
    for i=1:n
        s=0;
```

```
        for j=1:n
            if j~=i
                s=s+a(i,j)*x0(j,1);
            end
        end
        x(i,1)=(b(i,1)-s)/a(i,i);
        if norm(x-x0,inf)<tol
            break;
        end
        x0(i,1)=x(i,1);
    end
end
```

（2）Gauss-Seidel迭代法源程序：

```
function x=gauss_seidel(a,b,x0,n,tol,m)
x=zeros(n,1);
for k=0:m
    for i=1:n
        s=0;s2=0;
        for j=1:i-1
            s2=s2+a(i,j)*x(j,1);
        end
        for j=i+1:n
                s=s+a(i,j)*x0(j,1);
        end
        x(i,1)=(b(i,1)-s-s2)/a(i,i);
        if norm(x-x0,inf)<tol
            break;
        end
        x0(i,1)=x(i,1);
    end
end
```

## 2.(运算结果)

(1)求解线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

```
>> a=[8 -3 2;4 11 -1;6 3 12];b=[20 33 36]';x0=[0 0 0]';
>> x=jacobi(a,b,x0,3,1e-6,50)

x =

    3.0000
    2.0000
    1.0000
```

（2）Gauss-Seidel迭代法

```
>>  a=[8 -3 2;4 11 -1;6 3 12];b=[20 33 36]';x0=[0 0 0]';
>> x=gauss_seidel(a,b,x0,3,1e-6,50)

x =

    3.0000
    2.0000
    1.0000
```

## 3.(拓展（方法改进、体会等））

逐次超松驰迭代法源程序：

```
function x=SOR(a,b,x0,n,w,tol,m)
x=zeros(n,1);
for k=0:m
    for i=1:n
        s=0;s2=0;
        for j=1:i-1
            s2=s2+a(i,j)*x(j,1);
        end
        for j=i+1:n
                s=s+a(i,j)*x0(j,1);
        end
        x(i,1)=(1-w)*x0(i,1)+w*(b(i,1)-s-s2)/a(i,i);
        if norm(x-x0,inf)<tol
            break;
        end
        x0(i,1)=x(i,1);
    end
end
```

运算结果：

```
>>  a=[-4 1 1 1;1 -4 1 1;1 1 -4 1;1 1 1 -4];b=[1 1 1 1]';x0=[0 0 0 0]';
>> x=SOR(a,b,x0,4,1,1e-6,20)

x =

   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000
```