MATLAB常微分方程的数值解法

作者：凯鲁嘎吉 - 博客园
http://www.cnblogs.com/kailugaji/

一、实验目的

科学技术中常常要求解常微分方程的定解问题，所谓**数值解法**就是求未知函数在一系列离散点处的近似值。

二、实验原理

对于定解问题$\begin{cases} y' = f(x,y), a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$，取$x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{n}, i = 0,1,2,\cdots,n$.

1. 在(x_i, y_i)处用一阶差商代替方程左端的一阶导数，有

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \approx f(x_i, y_i) \quad \text{或} \quad y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y_i)$$

设$y(x_{i+1})$的近似值为y_{i+1}，$y(x_i)$的近似值为y_i，则得尤拉公式

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

2. 若用向后差商则可得后退的尤拉公式

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

此式关于y_{i+1}是隐式常用迭代法求解而迭代过程$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$的实质是逐步显式化.

3. 利用梯形公式$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$可以得到改进的尤拉公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

或表为平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = y_i + h/2 \cdot (y_p + y_c) \end{cases}$$

4. 若用中心差商则可得尤拉两步公式(以上三种方法均相应称为单步法)

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i),$$

此式中需利用单步法求出y_1后与y_0一起代入求解，优点是它调用了两个节点的已知信息，从而能以较少的计算量获得较高的精度.

三、实验程序

1. 尤拉公式程序

输入　端点a,b,区间等分数n,初值y_0.

输出　$y(t)$在t的n个点处的近似值y.

$step\ 1$　$h \leftarrow (b-a)/n$,

$t \leftarrow a$,

$y \leftarrow y_0$.

$step\ 2$　对$i=1,\cdots,n$,做$step 3-4$

$step\ 3$　$y \leftarrow y + hf(t,y)$

$t \leftarrow a + ih$.

$step\ 4$　输出(t,y)

$step\ 5$　停机

四、实验内容

选一可求解的常微分方程的定解问题，分别用以上1, 4两种方法求出未知函数在

节点处的近似值，并对所求结果与分析解的（数值或图形）结果进行比较。

五、解答

1. 程序

求解初值问题 $\frac{dy}{dx} = -3y + 8x - 7,\ y(0) = 1$

取n=10

源程序：

euler23.m:

```
function [A1,A2,B1,B2,C1,C2]=euler23(a,b,n,y0)
%欧拉法解一阶常微分方程
%初始条件y0
```

```
h = (b-a)/n; %步长h
%区域的左边界a
%区域的右边界b
x = a:h:b;
m=length(x);

%前向欧拉法
y = y0;
for i=2:m
    y(i)=y(i-1)+h*oula(x(i-1),y(i-1));
    A1(i)=x(i);
    A2(i)=y(i);
end
plot(x,y,'r-');
hold on;

%改进欧拉法
y = y0;
for i=2:m
    y(i)=y(i-1)+h/2*( oula(x(i-1),y(i-1))+oula(x(i),y(i-1))+h*(oula(x(i-1),x(i-1))));
    B1(i)=x(i);
    B2(i)=y(i);
end
plot(x,y,'m-');
hold on;

%欧拉两步公式
y=y0;
y(2)=y(1)+h*oula(x(1),y(1));
for i=2:m-1
    y(i+1)=y(i-1)+2*h*oula(x(i),y(i));
    C1(i)=x(i);
    C2(i)=y(i);
end
plot(x,y,'b-');
hold on;

%精确解用作图
xx = x;
f = dsolve('Dy=-3*y+8*x-7','y(0)=1','x');%求出解析解
y = subs(f,xx); %将xx代入解析解，得到解析解对应的数值

plot(xx,y,'k--');
legend('前向欧拉法','改进欧拉法','欧拉两步法','解析解');

oula.m:
```

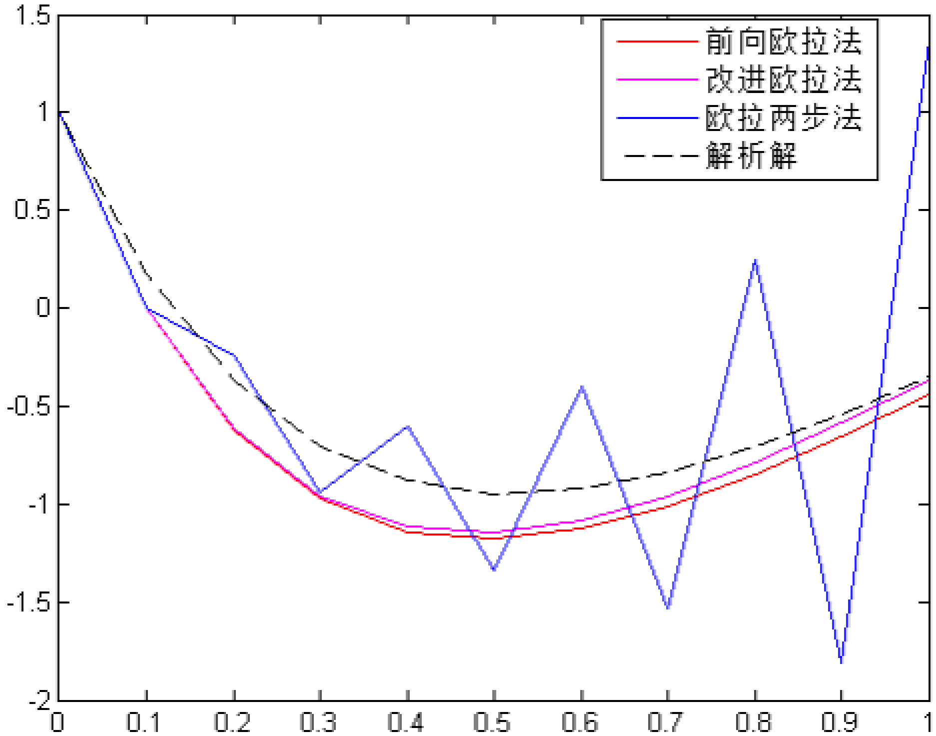
```
function f=oula(x,y)
f=-3*y+8*x-7;
```

2. 运算结果

A1,A2为前向欧拉法在节点处的近似值，B1,B2为改进的欧拉法在节点处的近似值，C1,C2为欧拉公式法在节点处的近似值。

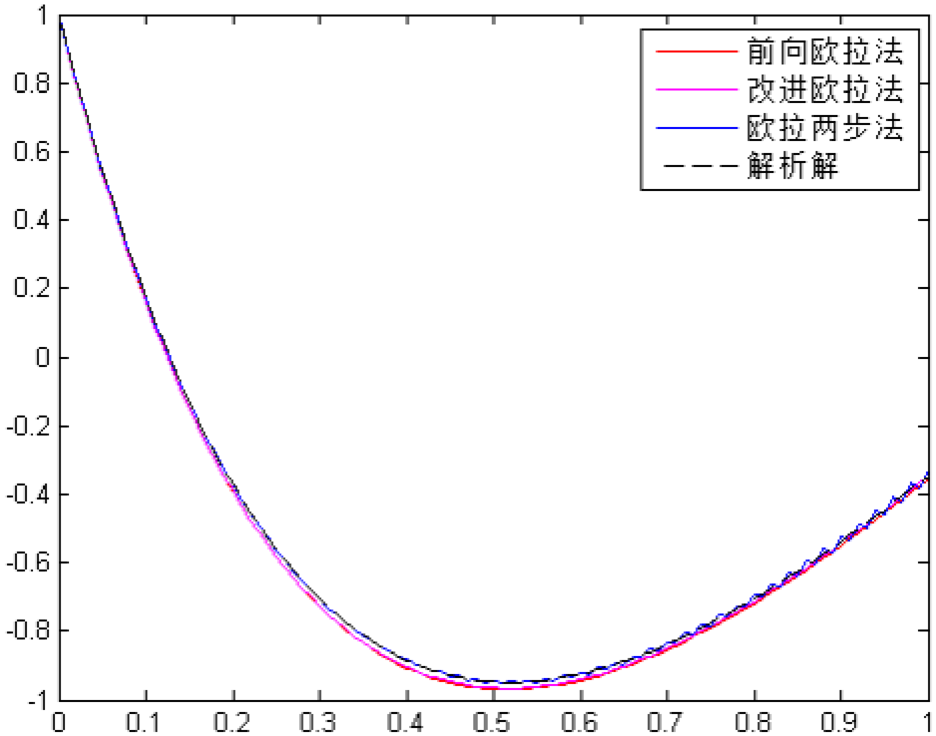
```
>> [A1,A2,B1,B2,C1,C2]=euler23(0,1,10,1)

A1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000


A2 =

         0         0   -0.6200   -0.9740   -1.1418   -1.1793   -1.1255   -1.0078   -0.8455   -0.6518   -0.4363


B1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000


B2 =

         0    0.0050   -0.6090   -0.9563   -1.1169   -1.1468   -1.0853   -0.9597   -0.7893   -0.5875   -0.3638


C1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000


C2 =

         0         0   -0.2400   -0.9360   -0.5984   -1.3370   -0.3962   -1.5392    0.2473   -1.8076

>> [A1,A2,B1,B2,C1,C2]=euler23(0,1,10,1)

A1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000
```

```
A2 =

         0         0   -0.6200   -0.9740   -1.1418   -1.1793   -1.1255   -1.0078   -0.8455   -0.6518   -0.4363

B1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000

B2 =

         0    0.0050   -0.6090   -0.9563   -1.1169   -1.1468   -1.0853   -0.9597   -0.7893   -0.5875   -0.3638

C1 =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000

C2 =

         0         0   -0.2400   -0.9360   -0.5984   -1.3370   -0.3962   -1.5392    0.2473   -1.8076
```

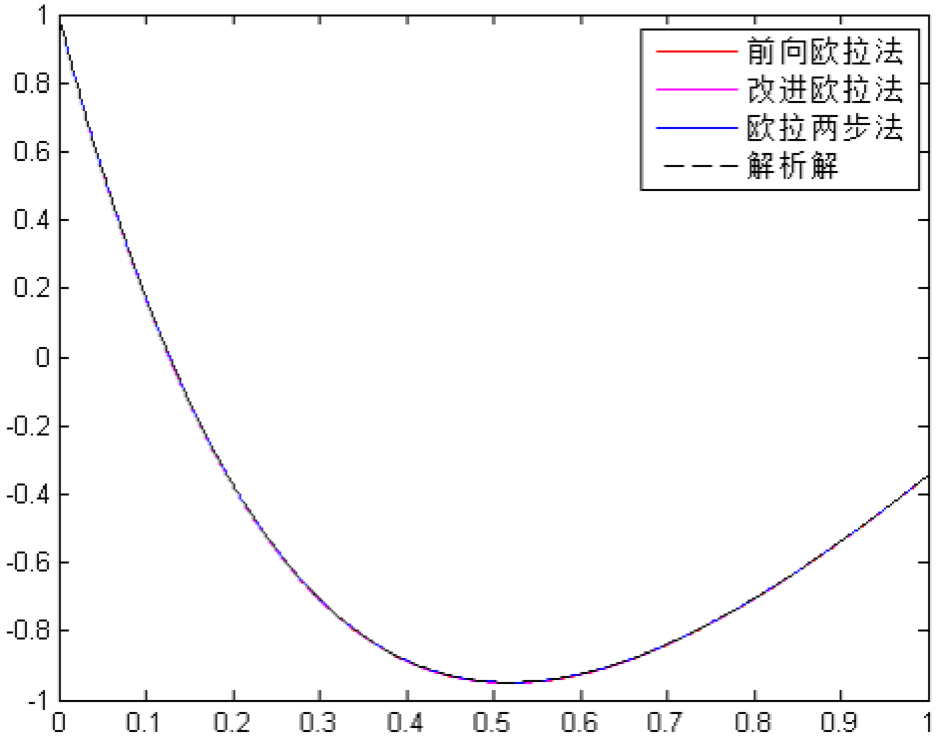


3. 拓展（方法改进、体会等）

从以上图形可以看出，在n=10时，改进的欧拉法精度更高，而欧拉两步法所求结果震荡不收敛，越接近1，震荡幅度越大，于是取n=100,时，结果如下所示：



当n=1000时，结果如下图：



当n=100时，三种方法与解析解非常接近，当n=1000时，几乎四者位于一条线中，从实验结果看出，n越大时，结果越精确。