

Successive Convex Approximation (SCA)

作者：凯鲁嘎吉 - 博客园 <http://www.cnblogs.com/kailugaji/>

Successive Convex Approximation(连续凸近似, SCA)是一种求解非凸优化问题的处理方法, 它将非凸优化问题转化为一系列凸问题, 从而得到原问题的近似解。

1. 非凸优化问题描述

考虑如下非凸优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & U(x) = F(x) + G(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in K \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $F(x) = \sum_{i=1}^I f_i(x)$, 每一个 $f_i: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 是第 i 个节点的代价函数, 光滑的, 可能是非凸的, 不可分的, G 是一个凸函数, 可能是非光滑, 不可分的, $K \in \mathbf{R}^m$ 是闭式的, 凸的。

2. SCA求解非凸优化问题

首先，把 $F(x)$ 拆开， $F(x_i) = f_i(x_i) + \sum_{j \neq i} f_j(x_i)$ ，其中 $\sum_{j \neq i} f_j(x_i)$ 关于 $x_i[n]$ 是线性的， n 是时间间隔（迭代次数）。

问题(1)重写为

$$\hat{x}_i(x_i[n]) = \arg \min_{x_i \in K} U(x_i) = F(x_i) + G(x_i) = f_i(x_i) + \sum_{j \neq i} f_j(x_i) + G(x_i) \quad (2)$$

用 $\tilde{f}_i(x_i; x_i[n])$ 来近似代替 $f_i(x_i)$ ，如果 $f_i(x_i)$ 是凸函数的话，则可以将 $f_i(x_i)$ 替换为如下

$$\tilde{f}_i(x_i; x_i[n]) = f_i(x_i) + \frac{\tau_i}{2} \|x_i - x_i[n]\|^2 \quad (3)$$

如果 $f_i(x_i)$ 只是一个普通函数，没有特殊结构，则 $f_i(x_i)$ 替换为如下

$$\tilde{f}_i(x_i; x_i[n]) = f_i(x_i) + \nabla f_i(x_i[n])^T (x_i - x_i[n]) + \frac{\tau_i}{2} \|x_i - x_i[n]\|^2 \quad (4)$$

其他情况可参见文献[1]。

式(2)可近似写为如下式子:

$$\tilde{x}_i(x_i[n]) = \arg \min_{x_i \in K} \tilde{f}_i(x_i; x_i[n]) + \pi_i(x_i[n])^T (x_i - x_i[n]) + G(x_i) \quad (5)$$

其中 $\pi_i(x_i[n])$ 是 $\sum_{j \neq i} f_j(x_i)$ 关于 $x_i[n]$ 的梯度, 即

$$\pi_i(x_i[n]) = \sum_{j \neq i} \nabla_x f_j(x_i[n]) = I \left(\frac{1}{I} \sum_{j=1}^I \nabla f_j(x_i[n]) \right) - \nabla f_i(x_i[n]) \quad (6)$$

用 $\tilde{\pi}_i[n]$ 近似代替 $\pi_i(x_i[n])$, $\tilde{\pi}_i[n] = I \cdot y_i[n] - \nabla f_i(x_i[n])$, 其中

$$y_i[n+1] = \sum_{j=1}^I w_{ij}[n] y_j[n] + (\nabla f_i(x_i[n+1]) - \nabla f_i(x_i[n])) \quad (7)$$

且 $y_i[0] = \nabla f_i(x_i[0])$ 。

求解非凸问题(1)已经转化为求解凸优化问题(5), 然后应用凸优化方法[2]进行求解即可。

3. 参考文献

[1] Di Lorenzo P, Scutari G. [Next: In-network nonconvex optimization](#)[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2016, 2(2): 120-136.

[2] Boyd S, Vandenberghe L. [Convex optimization](#)[M]. Cambridge university press, 2004.

[3] Razaviyayn, Meisam. (2014). [Successive convex approximation: analysis and applications](#). Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy, <http://hdl.handle.net/11299/163884>.