

# PROBLEMA PRIMAL-DUAL E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

**Kaio Gefferson de Almeida Mesquita**

Universidade Federal do Ceará

Departamento de Engenharia de Transportes

## 1. PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A aviação brasileira está estudando a compra de três tipos de aviões: Boeing 717 para as pontes aéreas de curta distância, Boeing 737 para voos domésticos de média distância e MD11 para voos internacionais de longa distância. Em um estudo preliminar, considerou-se que a capacidade máxima dos aviões a serem comprados será sempre preenchida para efeito de planejamento. Os dados de planejamento constam da Tabela 1.

Avião	Custo $10^6$ US\$	Receita $10^6$ US\$	Pilotos Aptos
Boeing 717	5,1	330	30
Boeing 737	3,6	300	20
MD-11	6,8	420	10

**Tabela 1:** Relação Custo, receita e Pilotos aptos por modelo de avião.

A verba disponível para compra é de 220 milhões. Os pilotos do MD11 podem pilotar todos os aviões da empresa, mas os demais só podem ser escalados às aeronaves que foram habilitados. Cada aeronave necessita de dois pilotos para operar. As oficinas de manutenção podem suportar até 40 Boeings 717. Um Boeing 737 equivale, em esforço de manutenção a  $3/4$ , e um MD11 a  $5/3$  quando comparados ao Boeing 717.

## 2. CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA PRIMAL

O Problema PRIMAL neste caso é um problema de maximização da função objetivo cuja função remete a receita da aviação brasileira. As variáveis escolhidas para compor a receita são o número de aviões de cada modelo, Boeing 717, Boeing 737 e MD – 11, correspondendo as variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , respectivamente. As tabelas 2 e 3 discretizam essas relações.

Função Objetivo
$Z = 330X_1 + 300X_2 + 420 X_3$

**Tabela 2:** Função objetivo do PPL.

Variáveis	
Número de aviões Boeing 717	$X_1$
Número de aviões Boeing 737	$X_2$
Número de aviões MD - 11	$X_3$

**Tabela 3:** Relação de variáveis do problema de PPL

Quanto as restrições do problema, foram classificadas em 3 categorias, sendo elas: Nível de custo, remetendo ao custo de compra e de manutenção das aeronaves; Mão-de-obra disponível para pilotar as aeronaves e Não Negatividade das variáveis básicas, pois a sua negatividade tornaria o problema infactível. A Tabela 4 mostrar a relação de classificação de cada grupo quanto as cores para melhor análise da Tabela 5.

	Custo
	Mão - de - Obra
	Não-Negatividade

**Tabela 4:** Categorias consideradas nas restrições do PPL.

Para a categoria financeira tem-se duas restrições, uma quanto ao custo de obtenção de cada aeronave e outra quanto ao custo de manutenção, sendo a segunda restrição dessa categoria com todas as variáveis colocadas em relação ao Boeing 717, o limitante do custo de manutenção de acordo com o problema.

Paras as restrições do número de pilotos máximos por aeronave, foram considerados a quantidade de pilotos disponíveis pela empresa para cada modelo, ressaltando que os pilotos do modelo MD – 11, pilotam quaisquer outras aeronaves da empresa, sendo possível aloca-los para outras aeronaves na falta de aviões MD -11. Esse fato é bastante importante e altera significativamente as restrições de pilotos, sendo necessário uma quarta restrição de pilotos para limitar o número máximo total de pilotos dado os aviões e dado essa possível migração, tornando o PPL possivelmente factível.

Por fim definiu-se as restrições de não-negatividade das Variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  para viabilizar a análise. Valendo a ressalva que caso não tivessem pilotos o lucro obviamente seria zero, então mesmo assumindo valores maiores ou igual a zero, para fins de análise os testes devem ser para valores maiores que zero para análise de sensibilidade. A Tabela 5 resumi as relações de restrição consideradas, sendo os coeficientes obtidos a partir do enunciado do problema e da relação da Tabela 1.

Restrições	
<b>Compra</b>	$5,1X_1 + 3,6 X_2 + 6,8X_3 \leq 220$
<b>Manutenção</b>	$X_1 + 3/4X_2 + 5/3X_3 \leq 40$
<b>Pilotos Boeing 717</b>	$X_1 + X_3 \leq 20$
<b>Pilotos Boeing 737</b>	$X_2 + X_3 \leq 15$
<b>Pilotos Boeing MD -11</b>	$X_3 \leq 5$
<b>Total de Pilotos</b>	$X_1 + X_2 + X_3 \leq 30$
<b>Não-negatividade de <math>X_1</math></b>	$X_1 \geq 0$
<b>Não-negatividade de <math>X_2</math></b>	$X_2 \geq 0$
<b>Não-negatividade de <math>X_3</math></b>	$X_3 \geq 0$

**Tabela 5:** Restrições do PPL por categoria

### 3.RESOLUÇÃO PELO MÉTODO SOLVER E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Para utilizar o suplemento Solver do Excel, é necessário permitir sua exibição no menu opções de suplementos. Após esta etapa técnica, a função objetivo e as devidas restrições foram inseridas, sendo retornado os relatórios de **Resposta**, **Limites** e de **Sensibilidade**.

Analizando primeiramente o relatório de Respostas (Figura 1), temos que o valor final da função objetivo é de US\$ 10050,00, correspondente ao mesmo valor da função no método simplex para folgas nulas.

Os valores das variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  também correspondem ao mesmo valor encontrado pelo método simplex, confirmando assim a solução ótima em 15 aviões Boeing 717, 10 aviões Boeing 737 e 5 aviões MD – 11.

Ainda analisando este relatório é possível verificar uma associação direta entre as restrições de pilotos (que não acontece com as outras restrições do grupo de não-negatividade e custo), além do que as restrições de custo de manutenção e obtenção de novas aeronaves não estão sobre seus valores máximos, indicando que a restrição de pilotos comandam o lucro.

#### Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
SE\$11	$Z = 330X_1 + 300X_2 + 420X_3$ Custo $10^6$ US\$	0	10050

#### Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
SK\$5	$X_1$	0	15	Conting.
SK\$6	$X_2$	0	10	Conting.
SK\$7	$X_3$	0	5	Conting.

#### Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
SK\$11	$5,1X_1 + 3,6X_2 + 6,8X_3 \leq 220$	146,5	$SK\$11 \leq SM\$11$	Não-associação	73,5
SK\$12	$X_1 + 3/4X_2 + 5/3X_3 \leq 40$	30,83333333	$SK\$12 \leq SM\$12$	Não-associação	9,16666667
SK\$13	$X_1 + X_3 \leq 20$	20	$SK\$13 \leq SM\$13$	Associação	0
SK\$14	$X_2 + X_3 \leq 15$	15	$SK\$14 \leq SM\$14$	Associação	0
SK\$15	$X_3 \leq 5$	5	$SK\$15 \leq SM\$15$	Associação	0
SK\$16	$X_1 + X_2 + X_3 \leq 30$	30	$SK\$16 \leq SM\$16$	Associação	0
SK\$17	$X_1 \geq 0$	15	$SK\$17 \geq SM\$17$	Não-associação	15
SK\$18	$X_2 \geq 0$	10	$SK\$18 \geq SM\$18$	Não-associação	10
SK\$19	$X_3 \geq 0$	5	$SK\$19 \geq SM\$19$	Não-associação	5

**Figura 1:** Relatório de resposta do PPL

Agora analisando o relatório de limites (Figura 2), de maneira concisa, temos os mesmos valores tanto para a função objetivo quanto para as variáveis. Além da variação da função objetivo dado uma variação das variáveis, respeitando seus limites inferior (zerando a variável) e superior (neste caso é o próprio limite da restrição, mas não necessariamente sempre vai ocorrer este fenômeno).

Portanto através desse relatório é possível afirmar que a os aviões do tipo Boeing 717 (Variável  $X_1$ ) são os que mais influenciam a função objetivo, seguidos dos aviões Boeing 737 e MD – 11. Esta afirmação é válida pois ao zerar o valor da variável  $X_1$ , obtemos o menor valor da função objetivo (US\$ 5100,00), mantendo os valores das outras variáveis.

Também é possível notar que a diferença entre o lucro dado o valor nulo das variáveis  $X_2$  e  $X_3$  é de apenas 12,76%, mostrando que a influência de ambas para o problema é bem aproximada, porém a variável  $X_2$  ainda assim tem maior influência sobre o lucro do que a variável  $X_3$ .

Objetivo		
Célula	Nome	Valor
\$E\$11	$Z = 330X1 + 300X2 + 420X3$	Custo $10^6$ US\$
		10050

Variável			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
\$K\$5	X1	15	0	5100	15	10050
\$K\$6	X2	10	0	7050	10	10050
\$K\$7	X3	5	0	7950	5	10050

**Figura 2:** Relatório de Limites do PPL

Por fim temos o relatório de sensibilidade, onde para cada restrição temos seu valor final para este problema e o Multiplicador de Lagrange, que também pode ser conhecido em algumas análises de funções comerciais e de operação como **preço sombra**.

O fato é que este indicador mostra o quanto uma perturbação na restrição influencia diretamente a função objetivo. Como visto na Figura 3, a restrição de total de pilotos, tem um multiplicador de Lagrange de 210, ou seja, uma perturbação positiva de uma unidade nessa restrição implicaria um acréscimo de 210 no valor final da função objetivo (Figura 4).

Restrições			
Célula	Nome	Final Valor	Lagrange Multiplicador
\$K\$11	$5,1X1 + 3,6X2 + 6,8X3 \leq 220$	146,5	0
\$K\$12	$X1 + 3/4X2 + 5/3X3 \leq 40$	30,83333333	0
\$K\$13	$X1 + X3 \leq 20$	20	120
\$K\$14	$X2 + X3 \leq 15$	15	90
\$K\$15	$X3 \leq 5$	5	0
\$K\$16	$X1 + X2 + X3 \leq 30$	30	210
\$K\$17	$X1 \geq 0$	15	0
\$K\$18	$X2 \geq 0$	10	0
\$K\$19	$X3 \geq 0$	5	0

**Figura 3:** Relatório de Sensibilidade do PPL

Caso essa perturbação venha a ser negativa, a pessoa responsável pela análise de viabilidade na compra das aeronaves saberá o impacto direto no lucro baseado no preço sombra. Desta forma as restrições que podem modificar diretamente a função objetivo, são as restrições de número total de pilotos, número de pilotos para os aviões Boeing 717 e número de pilotos para os aviões Boeing 737, respectivamente na ordem decrescente de influência.

Um ponto negativo da análise de sensibilidade pelo Solver do Excel é que o mesmo não retorna os limites inferior e superior das restrições onde o multiplicador de Lagrange é não-nulo. Isso implica ao operador aplicar quaisquer valores para aumentar o lucro, fato que não é possível na realidade, pois todo multiplicador tem seus limitantes, que podem ser explorados para a solução factível.

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$E\$11	$Z = 330X1 + 300X2 + 420X3$ Custo $10^6$ US\$	0	10260

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
\$K\$5	X1	0	16	Conting.
\$K\$6	X2	0	11	Conting.
\$K\$7	X3	0	4	Conting.

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
\$K\$11	$5,1X1 + 3,6X2 + 6,8X3 \leq 220$	148,4	$\$K\$11 \leq \$M\$11$	Não-associação	71,6
\$K\$12	$X1 + 3/4X2 + 5/3X3 \leq 40$	30,91666667	$\$K\$12 \leq \$M\$12$	Não-associação	9,083333333
\$K\$14	$X1 + X3 \leq 20$	20	$\$K\$14 \leq \$M\$14$	Associação	0
\$K\$15	$X2 + X3 \leq 15$	15	$\$K\$15 \leq \$M\$15$	Associação	0
\$K\$16	$X3 \leq 5$	4	$\$K\$16 \leq \$M\$16$	Não-associação	2
\$K\$18	$X1 + X2 + X3 \leq 30$	31	$\$K\$18 \leq \$M\$18$	Associação	0
\$K\$19	$X1 \geq 0$	16	$\$K\$19 \geq \$M\$19$	Não-associação	16
\$K\$20	$X2 \geq 0$	11	$\$K\$20 \geq \$M\$20$	Não-associação	11
\$K\$21	$X3 \geq 0$	4	$\$K\$21 \geq \$M\$21$	Não-associação	4

Figura 4: Relatório de Limites do PPL