Основные теоремы дифференциального исчисления

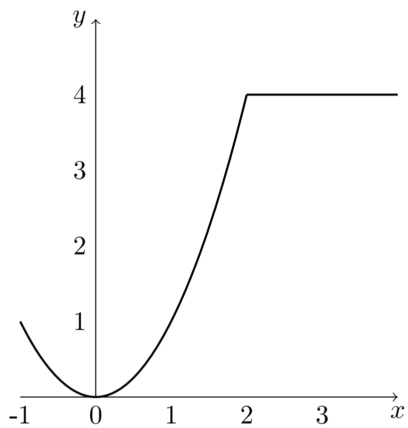
Каширин Кирилл

22 Февраля 2021

Определение 3. Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума*, а значения функции в них — *локальными экстремумами функции.*

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, если } -1 \leq x < 2, \\ 4 & \text{, если } 2 \leq x \end{cases} \tag{1}$$



Для этой функции
$x = -1$ — точка строгого локального максимума;
$x = 0$ — точка строгого локального минимума;
$x = 2$ — точка локального максимума;
$x > 2$ — точки экстремума, являющиеся одновременно точками и локального максимума, и локального минимума, поскольку здесь функция локально постоянна.

Пример 2. Пусть $f(\mathrm{x}) = sin(\frac{1}{x})$ на множестве E = R 0. Точки $\mathrm{x} = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}$, $k \in Z$ являются точками строгого локального максимума, а точки $\mathrm{x} = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}$, $k \in Z$ строгого локального минимума для $f(x)$ (см. рис. 12).

Определение 4. Точку $x_o \in E$ экстремума функции $f : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ будем называть точкой внутреннего экстремума, если x_o является предельной точкой как для множества $\mathrm{E}_- = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{x} < \mathrm{x}_o\}$, так и для множества $\mathrm{E}_+ = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{x} > \mathrm{x_o}\}$.

В примере 2 все точки экстремума являются точками внутреннего экстремума, а в примере 1 точка $\mathrm{x} = -1$ не является точкой внутреннего экстремума.

Лемма 1 (Ферма). *Если функция $f : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума $x_o \in E$, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_o) = 0$.*