kaique.roberto@fmu.br

Análise Multivariada de Dados - Aula 05

Coisas que Precisamos Saber Sobre Matrizes

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

1. Recomendações para o Trabalho N1
2. Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores
3. Definições Básicas
4. Diagonalização
5. Comentários Finais
6. Referências

Recomendações para o Trabalho N1

Recomendações para o trabalho N1

O Trabalho devera ser entregue no AvA até o dia 22/10.

Recomendações para o trabalho N1

Para trabalho N1 será cobrado os conteúdos cobertos nas Aulas 00-05.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Dado que os exercícios foram resolvidos em sua maioria durante as aulas, **para um gabarito completo, consulte o material das aulas**.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Segue a lista dos exercícios:

- Aula-00: 0.6, 0.9, 0.12 e 0.13;
- Aula-01: 1.1, 1.2, 1.5;
- Aula-02: 2.1, 2.2, 2.3;
- Aula-03: 3.1, 3.2, 3.3;
- Aula-05: 5.1, 5.2, 5.3.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Lembrando que os exercícios podem ser resolvidos em grupos de **até 4 participantes**, e vocês precisam entregar **apenas uma resolução por grupo**.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

O arquivo com as resoluções **será obrigatoriamente do tipo .pdf**. Há várias opções de conversão para arquivos .pdf e caso vocês tenham alguma dificuldade com isso, **me avisem o quanto antes**. **Qualquer extensão diferente de .pdf NÃO será aceita**.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Nas últimas Aulas focamos em aspectos teóricos e práticos dos Esquemas de Aglomeração (ou Análise de Cluster).

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Lembrando que os Esquemas de Aglomeração são métodos **exploratórios**. Nosso objetivo subsequente é introduzir os métodos multivariados **preditivos**.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Para uma compreensão teórica satisfatória dos métodos multivariados (mesmo para um curso introdutório como o nosso) é **fundamental** entender alguns aspectos da Teoria de Matrizes.

Definições Básicas

Definições Básicas

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Definição 3.1 (Matriz $m \times n$)

Sejam m, n inteiros positivos. Uma **matriz real** $m \times n$ A é uma dupla sequência de números reais, distribuidos em m linhas e n colunas. O conjunto das matrizes reais $m \times n$ é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos as matrizes reais $n \times n$ por $M_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}[x]$

Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é representada por uma "tabela", como abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada número a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ é chamado **termo ou coeficiente** da matriz A.

De maneira mais sucinta, uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ pode ser denotada das seguintes maneiras:

- $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;
- $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$;
- ou simplesmente $A = (a_{ij})$, desde que o contexto permita.

Definições Básicas

- As matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes quadradas de ordem** n.
- As matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes retangulares**.
- Identificamos as matrizes 1×1 com números reais.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_2(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$a_{11} = 3 \qquad a_{12} = 2$$

$$a_{22} = -1 \qquad a_{22} = 5$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C, D \in M_2(\mathbb{R})$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

Definições Básicas

- As matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes quadradas de ordem** n.
- As matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes retangulares**.
- Identificamos as matrizes 1×1 com números reais.

Podemos realizar operações com matrizes (de maneira análoga ao que fazemos com números reais, funções e polinômios). Vamos definir algumas operações com matrizes.

Definição 3.2 (Soma de Matrizes)

Dadas matrizes $m \times n$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, definimos a **matriz soma** $A + B$, como sendo a matriz $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+2 & 2-2 \\ -1+0 & 5+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Definição 3.3 (Matriz Oposta)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, a **matriz oposta** $-A$ é a matriz cujo termo geral é $-a_{ij}$. Mais explícitamente

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{12} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad -B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Definição 3.4 (Produto de Matrizes por Escalar)

Dado um número real α e uma matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$, definimos a **o produto de A pelo escalar** α como sendo a matriz $\alpha A := (\alpha a_{ij})$. Mais explicitamente

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2(-2) & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Definição 3.5 (Produto de Matrizes)

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. Definimos a **matriz produto** $A \cdot B$ (ou simplesmente AB) como sendo a matriz $m \times p$ cujo termo geral é

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nk}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

AB , AE , $DA - AD$

não está definido

2×3

$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2)+2\cdot 2 & 3\cdot 5 + 2\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2 + 5\cdot 0 & (-1)(-2)+5\cdot 2 & (-1)\cdot 5 + 5\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2)+2\cdot 2 & 3\cdot 5 + 2\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2 + 5\cdot 0 & (-1)(-2)+5\cdot 2 & (-1)\cdot 5 + 5\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 21 \\ -2 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Definição 3.6 (Transposta de Matrizes)

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Definimos a **matriz transposta** A^t como sendo a matriz $n \times m$ cujo termo geral é $c_{ji} = a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ não é inversível

Definição 3.7 (Matriz Inversa)

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **inversível** se existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso, denotamos $B := A^{-1}$.

A é inversível sse

$\det(A) \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- somar linhas
- multiplicar linha por escalar
- trocar linhas

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3+3(-1) & 2+3.5 & 1+3.0 & 0+3.1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_2 \leftarrow L_2/17 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \overset{0}{\boxed{2/3}} & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/17 & 3/17 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \overset{0}{\boxed{2/3}} & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/17 & 3/17 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3} L_2$$

$$\begin{array}{cc} 1 - \frac{2}{3}\cdot 0 & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot 1 & & \\ & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17} & 0 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{17} \\ 0 & 1 & 1/17 & 3/17 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 15/3\cdot 17 & -2/17 \\ 0 & 1 & 1/17 & 3/17 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15/51 & -2/17 \\ 1/17 & 3/17 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad B \text{ não é inversível}$$

Definição 3.8 (Determinante de uma Matriz $n \times n$)

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos o **determinante** A **desenvolvido na linha** i é definido como

$$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(M_{ik}).$$

Teorema 3.9 (Fórmula de Laplace I)

O determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ não depende da linha escolhida para o desenvolvimento. Em outras palavras, dados i, j com $1 \leq i, j \leq n$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(M_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(M_{jk}).$$

Definições Básicas

Teorema 3.10 (Fórmula de Laplace II)

O determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ também pode ser desenvolvido por uma coluna i. Em outras palavras vale

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \det(M_{ik}).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2$$
$$= 2 - 4 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3$$
$$= 1 + 6 = 7$$

$$\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-0) \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) =$$

$$1 - 0 + 2 - 0 = 3$$

$$\det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$\cancel{0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}} + \cancel{(-0) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$+ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = 9$$

Diagonalização

Definição 4.1 (Autovalor, Autovetor de Matriz)

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ é chamado **autovetor** de A se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Neste caso λ é um **autovalor** de A associado a v.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$$

v_1 é autovetor associado ao autovalor 1.

$$A v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot v_2$$

v_2 é autovetor associado ao autovalor -1

Os autovalores de A caso

Definição 4.2 (Polinômio Característico de uma Matriz)

Dada uma matriz $A = \in M_n(\mathbb{R})$ chama-se **polinômio característico** de A o polinômio

$$p_A(t) = \det(tI - A).$$

existam são raízes de $p_A(t)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad t.I - A$$

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t-3 & 0-2 \\ 0-(-1) & t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 & -2 \\ 1 & t-5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det (tI - A)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-3 & -2 \\ 1 & t-5 \end{pmatrix}$$

$$= (t-3)(t-5) - 1.(-2)$$

$$= t^2 - 8t + 15 + 2 = t^2 - 8t + 17$$

Diagonalização

A variável "t" na definição de polinômio característico pode ser trocada, de modo que podemos escrever $p_A(t), p_A(x), p_A(z)$, etc conforme for mais conveniente.

Diagonalização

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definição 4.3 (Diagonalização)

Diagonalizar uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ significa exibir uma decomposição

$$A = BDB^{-1} \,(\text{ou } D = B^{-1}AB),$$

onde D é uma matriz diagonal e B uma matriz inversível obtida à partir dos autovetores de A.

Diagonalização

Nem sempre é possível diagonalizar uma matriz. Vamos descrever um algoritmo para decidir se uma dada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ou não diagonalizável.

Teorema Espectral:

Teorema 4.4

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Então A é diagonalizável se e só se

a - o polinômio característico $p_A(x)$ tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$;

b - para todo autovalor λ de A, $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$.

Toda matriz simétrica é diagonalizável

Uma matriz $A = (a_{ij})$ é <u>simétrica</u> se $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ é simétrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ não é simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t.I - A =$$

$$t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-0 & 0-1 \\ 0-1 & t-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \det\begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^2 - (-1)(-1) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

As $\underbrace{\text{raízes de } p_A(t)}_{}$ são 1 e -1

$\hookrightarrow p_A(\alpha) = 0$ e pertencem a $\mathbb{R}$

$$P_A(t) = (t-1)^{1}(t+1)^{1} \rightarrow m_A(-1)$$

$\rightarrow m_A(1)$

$$P_B(t) = (x-2)^3(x-5)^2$$

$$m_A(2) = 3 \qquad m_A(5) = 2$$

Vamos calcular os autovetores

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Precisamos resolver o sistema

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo autovalor λ

$$\boxed{\lambda = 1} \quad (\underbrace{1I - A}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$(2, 2)$

$v_1 = (1, 1)$ é solução do sistema

$$\boxed{\lambda = -1} \quad (-I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(-3, 3)$

$$\ldots \Rightarrow \quad v_2 = (-1, 1)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = BDB^{-1}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_B(t) = \det(tI - B)$$

$$t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-2 \end{pmatrix}$$

$$P_B(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-2 \end{pmatrix} =$$

$$(t-1)(t-2) - 4 = t^2 - 3t + 2 - 4$$

$$= t^2 - 3t - 2$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(1)\cdot(-2)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda I - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$B = P \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$tI - C = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 0 & -2 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 0 & -2 & t-1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$(t-1) \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & t-1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(t-1)^3 + (-1)$$

$$(t-1)^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(t-1)^3 = 1 \Rightarrow t - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

$P_C(t)$ não tem todas as raízes reais.

Logo C não é diagonalizável.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- recapitulamos o que é uma matriz;
- relembramos algumas operações com matrizes;
- calculamos determinantes e inversas de matrizes;
- tivemos uma introdução à diagonalização.

Comentários Finais

Há vários tópicos que não cobrimos mas que são importantes e deixo como dica para um aprofundamento futuro:

- soluções de sistemas lineares;
- matrizes ortogonais;
- forma de Jordan;
- decomposições matriciais.

Comentários Finais

Na próxima aula nós vamos lidar com a Análise de Componentes Principais.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.735 & 0.662 & 0.645 & 0.605 \\ 0.735 & 1 & 0.674 & 0.769 & 0.529 \\ 0.662 & 0.674 & 1 & 0.763 & 0.526 \\ 0.645 & 0.769 & 0.763 & 1 & 0.607 \\ 0.605 & 0.529 & 0.526 & 0.607 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentários Finais

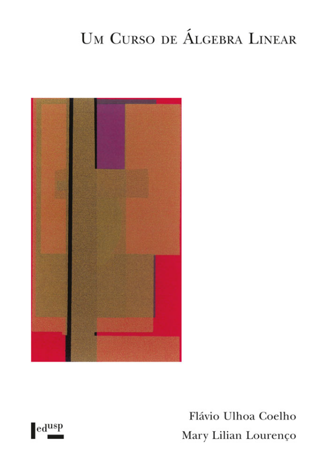
ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 3.1, 3.2, 3.3.

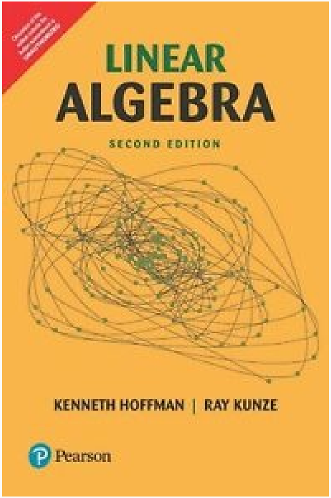
Referências

Referências

Referências



Referências



Bons Estudos!