Análise Multivariada de Dados - Aula 05

Coisas que Precisamos Saber Sobre Matrizes

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Recomendações para o Trabalho N1

Recomendações para o trabalho N1

O Trabalho devera ser entregue no AvA até o dia 22/10.

Recomendações para o trabalho N1

Para trabalho N1 será cobrado os conteúdos cobertos nas Aulas 00-05.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Dado que os exercícios foram resolvidos em sua maioria durante as aulas, **para um gabarito completo, consulte o material das aulas**.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Segue a lista dos exercícios:

- Aula-00: 0.6, 0.9, 0.12 e 0.13;
- Aula-01: 1.1, 1.2, 1.5;
- Aula-02: 2.1, 2.2, 2.3;
- Aula-03: 3.1, 3.2, 3.3;
- Aula-05: 5.1, 5.2, 5.3.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

Lembrando que os exercícios podem ser resolvidos em grupos de **até 4 participantes**, e vocês precisam entregar **apenas uma resolução por grupo**.

Recomendações para o trabalho N1

EXERCÍCIOS N1

O arquivo com as resoluções **será obrigatoriamente do tipo .pdf**. Há várias opções de conversão para arquivos .pdf e caso vocês tenham alguma dificuldade com isso, **me avisem o quanto antes**. **Qualquer extensão diferente de .pdf NÃO será aceita**.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Nas últimas Aulas focamos em aspectos teóricos e práticos dos Esquemas de Aglomeração (ou Análise de Cluster).

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Lembrando que os Esquemas de Aglomeração são métodos **exploratórios**. Nosso objetivo subsequente é introduzir os métodos multivariados **preditivos**.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Para uma compreensão teórica satisfatória dos métodos multivariados (mesmo para um curso introdutório como o nosso) é **fundamental** entender alguns aspectos da Teoria de Matrizes.

Definições Básicas

Definição 3.1 (Matriz $m \times n$)

Sejam m, n inteiros positivos. Uma **matriz real** $m \times n$ A é uma dupla sequência de números reais, distribuidos em m linhas e n colunas. O conjunto das matrizes reais $m \times n$ é denotado por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos as matrizes reais $n \times n$ por $M_n(\mathbb{R})$.

Definições Básicas

Uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é representada por uma "tabela", como abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada número a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ é chamado **termo ou coeficiente** da matriz A.

De maneira mais sucinta, uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ pode ser denotada das seguintes maneiras:

- $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$;
- ou simplesmente $A = (a_{ij})$, desde que o contexto permita.

Definições Básicas

- As matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes quadradas de ordem** n.
- As matrizes em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são chamadas **matrizes retangulares**.
- Identificamos as matrizes 1×1 com números reais.

Definições Básicas

Podemos realizar operações com matrizes (de maneira análoga ao que fazemos com números reais, funções e polinômios). Vamos definir algumas operações com matrizes.

Definição 3.2 (Soma de Matrizes)

Dadas matrizes $m \times n$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, definimos a **matriz soma** $A + B$, como sendo a matriz $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$.

Definição 3.3 (Matriz Oposta)

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, a **matriz oposta** $-A$ é a matriz cujo termo geral é $-a_{ij}$. Mais explícitamente

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{12} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definições Básicas

Definição 3.4 (Produto de Matrizes por Escalar)

Dado um número real α e uma matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$, definimos a **o produto de A pelo escalar** α como sendo a matriz $\alpha A := (\alpha a_{ij})$. Mais explicitamente

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 3.5 (Produto de Matrizes)

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. Definimos a **matriz produto** $A \cdot B$ (ou simplesmente AB) como sendo a matriz $m \times p$ cujo termo geral é

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nk}.$$

Definição 3.6 (Transposta de Matrizes)

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Definimos a **matriz transposta** A^t como sendo a matriz $n \times m$ cujo termo geral é $c_{ji} = a_{ij}$.

Definições Básicas

Definição 3.7 (Matriz Inversa)

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **inversível** se existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso, denotamos $B := A^{-1}$.

Definição 3.8 (Determinante de uma Matriz $n \times n$)

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos o **determinante** A **desenvolvido na linha** i é definido como

$$\det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(M_{ik}).$$

Teorema 3.9 (Fórmula de Laplace I)

O determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ não depende da linha escolhida para o desenvolvimento. Em outras palavras, dados i, j com $1 \leq i, j \leq n$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(M_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(M_{jk}).$$

Teorema 3.10 (Fórmula de Laplace II)

O determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ também pode ser desenvolvido por uma coluna i. Em outras palavras vale

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \det(M_{ik}).$$

Diagonalização

Definição 4.1 (Autovalor, Autovetor de Matriz)

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ é chamado **autovetor** de A se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Neste caso λ é um **autovalor** de A associado a v.

Definição 4.2 (Polinômio Característico de uma Matriz)

Dada uma matriz $A = \in M_n(\mathbb{R})$ chama-se **polinômio característico** de A o polinômio

$$p_A(t) = \det(tI - A).$$

Diagonalização

A variável "t" na definição de polinômio característico pode ser trocada, de modo que podemos escrever $p_A(t), p_A(x), p_A(z)$, etc conforme for mais conveniente.

Definição 4.3 (Diagonalização)

Diagonalizar uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ significa exibir uma decomposição

$$A = BDB^{-1} \,(\text{ou } D = B^{-1}AB),$$

onde D é uma matriz diagonal e B uma matriz inversível obtida à partir dos autovetores de A.

Diagonalização

Nem sempre é possível diagonalizar uma matriz. Vamos descrever um algoritmo para decidir se uma dada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ou não diagonalizável.

Teorema 4.4

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Então A é diagonalizável se e só se

a - o polinômio característico $p_A(x)$ tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$;

b - para todo autovalor λ de A, $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$.

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- recapitulamos o que é uma matriz;
- relembramos algumas operações com matrizes;
- calculamos determinantes e inversas de matrizes;
- tivemos uma introdução à diagonalização.

Comentários Finais

Há vários tópicos que não cobrimos mas que são importantes e deixo como dica para um aprofundamento futuro:

- soluções de sistemas lineares;
- matrizes ortogonais;
- forma de Jordan;
- decomposições matriciais.

Comentários Finais

Na próxima aula nós vamos lidar com a Análise de Componentes Principais.

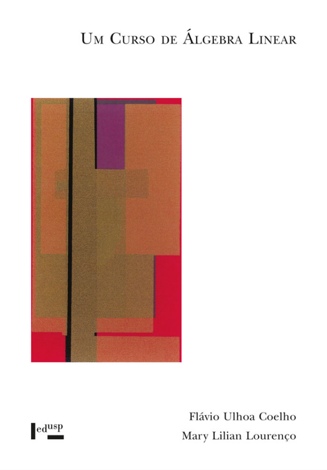
ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 5.1, 5.2, 5.3.

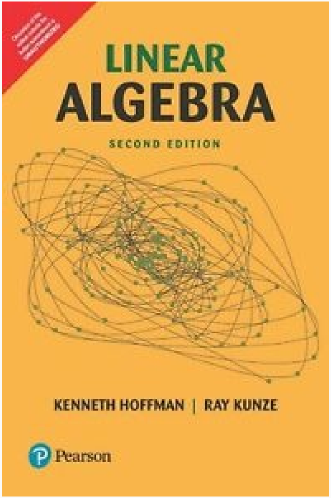
Referências

Referências

Referências



Referências



Bons Estudos!