Estatística Avançada - Aula 06

Testes de Hipóteses I

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Recomendações para a prova N1

Recomendações para a prova N1

Realizaremos a prova N1 na semana do dia 17/10-21/10. No caso:

- A turma do Campus Liberdade Matutino realizará a prova no dia 17/10 das 8h50min às 11h50min.
- A turma do Campus Liberdade Noturno realizará a prova no dia 17/10 das 19h às 22h.

Recomendações para a prova N1

Para a prova N1 será cobrado os conteúdos cobertos nas Aulas 01-06.

Recomendações para a prova N1

RESUMO N1

Para a N1 vocês poderão levar um resumo escrito em folha A4 frente e verso. **Qualquer resumo em formato diferente desse será desconsiderado e recolhido na hora da prova. O resumo também auxilia na nota da N1.**

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Caso vocês tenham optado pela resolução dos exercícios, estes devem ser entregues no dia da prova, **imediatamente antes** do início da prova. **Entregas após o início da prova não serão aceitas.**

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Lembrando que a entrega dos exercícios é **opcional**, no sentido de que a nota dos exercícios **auxilia a nota da N1** e caso vocês não queiram entregar, não serão prejudicados por isso.

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Mesmo assim, **recomendo fortemente** que vocês resolvam os exercícios sugeridos, pois **a N1 será baseada nestes exercícios**.

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Dado que os exercícios foram resolvidos em sua maioria durante as aulas, **para o gabarito completo, consulte o material das aulas**.

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Segue a lista dos exercícios recomendados:

- Aula-00: 0.4 - 0.6;
- Aula-01: 1.2, 1.11, 1.12, 1.14;
- Aula-02: 2.1 - 2.7;
- Aula-03: escolha três dentre os Exercícios 3.1 - 3.5;
- Aula-04: escolha três dentre os Exercícios 4.1 - 4.7;
- Aula-05: 5.1 - 5.6;
- Aula-06: 6.1 - 6.5.

Recomendações para a prova N1

EXERCÍCIOS N1

Lembrando que os exercícios podem ser resolvidos em grupos de **até 4 participantes** (com algumas exceções pontuais), e vocês precisam entregar **apenas uma resolução por grupo**.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Nas aulas anteriores estudamos Inferência Estatística. Em particular, falamos de:

- população e amostra;
- amostragem;
- distribuição amostral e tamanho da amosta;
- distribuição amostral para média e proporção;
- estimadores e estimativas;
- propriedades dos estimadores;
- intervalo de confiança.

Exemplo 2.1

Uma máquina enche pacotes de café com uma variância igual a $100g$. Ela estava regulada para encher os pacotes com $500g$, em média. Agora, ela se desregulou, e queremos saber qual a nova média μ. Uma amostra de 25 pacotes apresentou uma média igual a $485g$. Construa um intervalo de confiança com 95% de confiança para μ.

Um Exemplo

Um Exemplo

Nesta aula iremos introduzir o procedimento básico de teste de hipótese sobre um parâmetro de uma população.

Um Exemplo

A ideia central desse procedimento é a de supor verdadeira a hipótese em questão e verificar se a amostra observada é “verossímil” nessas condições.

Um Exemplo

Vamos introduzir a ideia de teste de uma hipótese por meio de um exemplo hipotético que, partindo de uma situação simples, será gradualmente ampliado para atender à situação geral do teste de hipóteses.

Um Exemplo

Exemplo 3.1

Uma indústria usa, como um dos componentes das máquinas que produz, um parafuso importado, que deve satisfazer a algumas exigências. Uma dessas é a resistência à tração. Esses parafusos são fabricados por alguns países, e as especificações técnicas variam de país para país. Por exemplo, o catálogo do país A afirma que a resistência média à tração de seus parafusos é de 145 kg, com desvio padrão de 12 kg. Já para o país B, a média é de 155 kg e desvio padrão 20 kg.

Um Exemplo

Um lote desses parafusos, de origem desconhecida, será leiloado a um preço muito convidativo. Para que a indústria saiba se faz ou não uma oferta, ela necessita saber qual pais produz tais parafusos.

Um Exemplo

O edital do leiloeiro afirma que, pouco antes do leilão, será divulgada a resistência média $\overline{x}$ de uma amostra de 25 parafusos do lote. Qual regra de decisão deve ser usada pela indústria para dizer se os parafusos são do país A ou B?

Um Exemplo

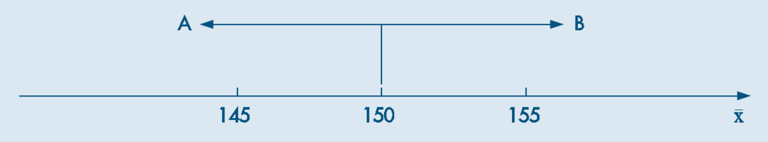
Uma resposta que ocorre imediatamente é a que considera como país produtor aquele para o qual a média da amostra mais se aproximar da média da população. Assim, uma possível regra de decisão seria:

Um Exemplo

Possível Regra

Se $\overline{x} \leq 150$ (o ponto médio entre 145 e 155), diremos que os parafusos são do país A; caso contrário, isto é, $\overline{x} > 150$, são do país B.

Um Exemplo



Um Exemplo

Suponha que, no dia do leilão, fôssemos informados de que $\overline{x} = 148$; de acordo com nossa regra de decisão, diríamos que os parafusos são de origem A.

Um Exemplo

Podemos estar enganados nessa conclusão? Ou, em outras palavras, é possível que uma amostra de 25 parafusos de origem B apresente média $\overline{x} = 148$?

Um Exemplo

Sim, é possível. Então, para melhor entendermos a regra de decisão adotada, é interessante estudarmos os tipos de erros que podemos cometer e as respectivas probabilidades.

Um Exemplo

Podemos cometer dois tipos de erros, e vamos numerá-los para facilitar a linguagem:

Um Exemplo

Erro de Tipo I

Consiste em dizer que os parafusos são de A quando na realidade são de B. Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de B apresenta média $\overline{x}$ inferior ou igual a 150 kg.

Um Exemplo

Erro de Tipo II

Consiste em dizer que os parafusos são de B, quando na realidade eles são de A. Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de A apresenta média $\overline{x}$ superior a 150 kg.

Um Exemplo

Para facilitar ainda mais, vamos definir duas hipóteses também numeradas:

Um Exemplo

H_0 : os parafusos são de origem B

Isso equivale a dizer que a resistência X de cada parafuso segue uma distribuição normal com média $\mu = 155$ e desvio-padrão $\sigma = 20$.

Um Exemplo

H_1 : os parafusos são de origem A

Isto é, a resistência X de cada parafuso segue uma distribuição normal com média $\mu = 145$ e desvio-padrão $\sigma = 12$.

Um Exemplo

Finalmente, vamos indicar por RC a região correspondente aos valores menores que 150, ou seja,

$$\text{RC} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 150\}.$$

Um Exemplo

Com as notações indicadas acima, a probabilidade de se cometer cada um dos erros pode ser escrita:

$$P(\text{erro I}) = P(\overline{X} \in \text{RC}|H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$
$$P(\text{erro II}) = P(\overline{X} \notin \text{RC}|H_1 \text{ é verdadeira}) = \beta.$$

Um Exemplo

Quando H_0 for verdadeira, isto é, os parafusos forem de B, sabemos do TLC que $\overline{X}$ terá distribuição aproximadamente normal, com média 155 e desvio padrão igual a 4, isto é

$$\overline{X} \sim N(155, 16).$$

Com isso obtemos $P(\text{erro I}) = \alpha \approx 0.1056$.

Um Exemplo

Analogamente, quando H_1 for verdadeira, $\overline{X}$ terá distribuição aproximadamente normal

$$\overline{X} \sim N(145; 5.76).$$

Com isso obtemos $P(\text{erro II}) = \beta \approx 0.0187$.

Um Exemplo

Observando esses dois resultados, notamos que, com a regra de decisão adotada, estaremos cometendo o erro de tipo I com maior probabilidade do que o erro de tipo II. De certo modo, essa regra de decisão privilegia a afirmação de que os parafusos são de A.

Um Exemplo

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
	RC 150 $\overline{X}$	
	A	B
A	Sem erro	Erro tipo II $\beta = 1{,}88\%$
B	Erro tipo I $\alpha = 10{,}56\%$	Sem erro

Um Exemplo

Para cada regra de decisão adotada, isto é, se escolhermos um valor $\overline{x}_c$ em vez de 150 no apenas as probabilidades α e β mudarão. Se $\overline{x}_c$ for escolhido menor que 150, notamos que α diminuirá e β aumentará.

Um Exemplo

Logo, deve existir um ponto em que α seja igual a β, ou seja, uma regra de decisão em que a probabilidade de errar contra A seja a mesma que errar contra B. Obteremos $\overline{x}_c = 148,75$, e nesse caso $\alpha = \beta = 5,94\%$.

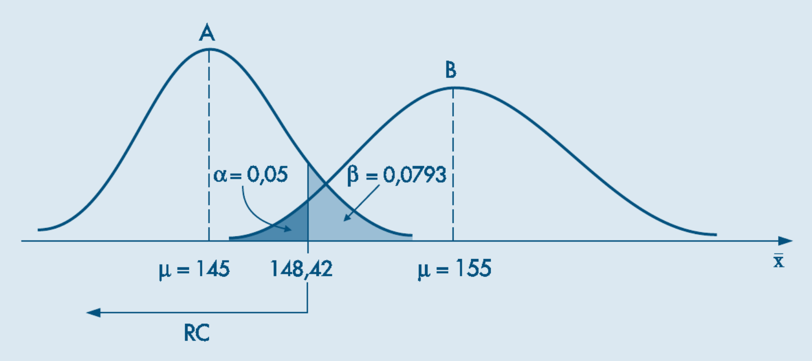
Um Exemplo

Do exposto acima constatamos que, escolhido um valor de $\overline{x}_c$, podemos achar as probabilidades α e β de cometer cada tipo de erro. Mas também podemos proceder de modo inverso: fixar um dos erros, digamos α, e encontrar a regra de decisão que irá corresponder à probabilidade de erro de tipo I igual a α.

Um Exemplo

Por exemplo, fixemos α em 5%, e vejamos qual a regra de decisão correspondente.

Um Exemplo



Um Exemplo

Esse segundo tipo de procedimento é bastante utilizado, porque usualmente a decisão que devemos tomar não é apenas entre duas possíveis populações. Os parafusos poderiam ser produzidos por outros países além daqueles citados e, portanto, com outras características quanto à resistência média.

Um Exemplo

A hipótese que nos interessa agora é:

Um Exemplo

H_0

Os parafusos são de origem B ($\mu = 155$ e $\sigma = 20$).

Um Exemplo

Caso essa não seja a hipótese verdadeira, a alternativa é muito mais ampla e pode ser expressa como:

Um Exemplo

H_1

Os parafusos não são de origem B (μ e σ desconhecidos).

Um Exemplo

Aqui não podemos especificar os parâmetros sob a hipótese alternativa H_1, pois se não forem de origem B, os parafusos podem ser de vários outros países, cada um com suas próprias especificações.

Um Exemplo

Alguns países podem ter técnicas mais sofisticadas de produção e, portanto, produzir com resistência média superior a 155. Outros, como no exemplo dado, com resistência menor. A especificação da hipótese alternativa depende muito do grau de informação que se tem do problema.

Um Exemplo

Por exemplo, vamos admitir que a indústria do país B para esse caso seja a mais desenvolvida, e nenhum outro país possa produzir uma resistência média superior à dela. Então, nossa hipótese alternativa seria mais explícita:

Um Exemplo

H_1

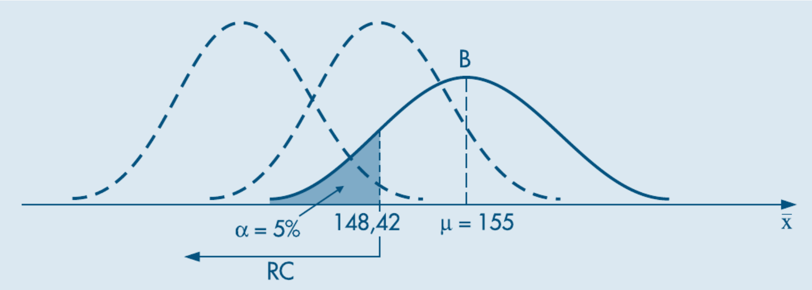
Os parafusos não são de origem B ($\mu < 155$ e σ desconhecidos).

Um Exemplo

Podemos reescrever as hipóteses nessa situação da seguinte maneira:

$$H_0 : \mu = 155$$
$$H_0 : \mu < 155.$$

Um Exemplo[1]



[1] Para as contas não esqueça de usar o tamanho da amostra $n = 25$!

Um Exemplo

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
	RC 148,42 $\bar{x}$	
	não B	B
B	Erro tipo I, $\alpha = 5\%$	Sem erro
não B	Sem erro	Erro tipo II, $\beta = ?$

Um Exemplo

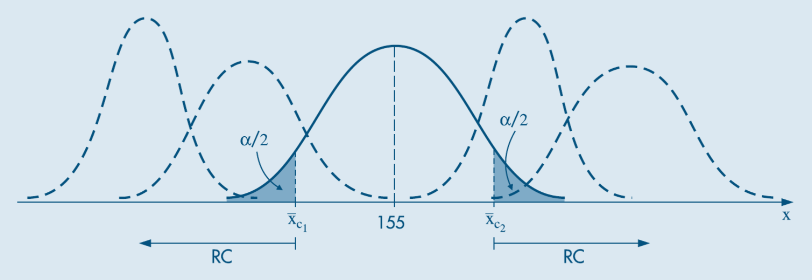
Admitamos, agora, que não exista razão alguma para acreditarmos que a resistência média dos parafusos de B seja maior ou menor do que a de outros países. Isso irá nos levar a duvidar que os parafusos não são de B, se a média observada for muito maior ou muito menor do que 155. Esta situação corresponde à seguinte hipótese alternativa:

Um Exemplo

H_1

Os parafusos não são de origem B ($\mu \neq 155$ e σ desconhecidos).

Um Exemplo



Um Exemplo

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
	RC 147,16	162,84 RC $\bar{x}$
	B	não B
B	Sem erro	Erro tipo II, β = ?
não B	Erro tipo I, α = 5%	Sem erro

Um Exemplo

Do apresentado nesta seção, vemos que, dependendo do grau de informação que se tem do problema, podemos ter regras de decisão unilaterais ou bilaterais. O próximo passo é construir regras gerais para lidar com testes de hipóteses.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

A construção de um teste de hipóteses, para um parâmetro populacional, pode ser colocada do seguinte modo. Existe uma variável X associada a dada população e tem-se uma hipótese sobre determinado parâmetro θ dessa população.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Por exemplo, afirmamos que o verdadeiro valor de θ é θ_0. Colhe-se uma amostra aleatória de elementos dessa população, e com ela deseja-se comprovar ou não tal hipótese.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Como já vimos anteriormente, iniciamos nossa análise explicitando claramente qual a hipótese que estamos colocando à prova e a chamamos de **hipótese nula**, e escrevemos

$$H_0 : \theta = \theta_0.$$

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Em seguida, convém explicitar também a hipótese que será considerada aceitável, caso H_0 seja rejeitada. A essa hipótese chamamos de **hipótese alternativa**, e a sua caracterização estatística irá depender do grau de conhecimento que se tem do problema estudado.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

A alternativa mais geral seria

$$H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Poderíamos, ainda, ter alternativas da forma

$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{ ou } H_1 : \theta > \theta_0$$

dependendo das informações que o problema traz.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Qualquer que seja a decisão tomada, vimos que estamos sujeitos a cometer erros. Para facilitar a linguagem, introduzimos as definições:

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Erro Tipo I

Consiste em rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira. Chamamos de α a probabilidade de cometer esse erro, isto é,

$$\alpha = P(\text{erro Tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}).$$

Erro Tipo II

Consiste em não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa. Chamamos de β a probabilidade de cometer esse erro, isto é,

$$\beta = P(\text{erro Tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}).$$

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

O objetivo do teste de hipóteses é dizer, usando uma estatística $\hat{\theta}$, se a hipótese H_0 é ou não rejeitável[2]. Operacionalmente, essa decisão é tomada através da consideração de uma região crítica RC. Caso o valor observado da estatística pertença a essa região, rejeitamos H_0; caso contrário, não rejeitamos H_0.

[2] Do ponto de vista estatístico, nunca teremos condições/certeza para "aceitar" H_0.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Esta região é construída de modo que

$$P(\hat{\theta} \in RC|H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

com α fixado a priori. RC recebe o nome de **região crítica ou região de rejeição do teste**.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

A probabilidade α de se cometer um erro de tipo I (ou de primeira espécie) é um valor arbitrário e recebe o nome de nível de significância do teste. O resultado da amostra é tanto mais significante para rejeitar H_0 quanto menor for esse nível α.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Ou seja, quanto menor for α, menor é a probabilidade de se obter uma amostra com estatística pertencente à região crítica, sendo pouco verossímil a obtenção de uma amostra da população para a qual H_0 seja verdadeira.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Usualmente, o valor de α é fixado em 5%, 1% ou $0,1\%$. A fixação do valor de α envolve uma questionável arbitrariedade. Neste sentido há um modo alternativo de se proceder, que será considerado nas próximas aulas.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Vamos resumir toda essa discussão em 5 Etapas para a realização de um teste de hipóteses:

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Passo 1

Fixe qual a hipótese H_0 a ser testada e qual a hipótese alternativa H_1.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Passo 2

Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual estatística (estimador) será usada para testar a hipótese H_0. Obter as propriedades dessa estatística (distribuição, média, desvio padrão).

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Passo 3

Fixe a probabilidade α de cometer o erro de tipo I e use este valor para construir a região crítica (regra de decisão). Lembre que essa região é construída para a estatística definida no Passo 2, usando os valores do parâmetro supostos em H_0.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Passo 4

Use as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.

Passo 5

Se o valor da estatística calculado com os dados da amostra não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário, rejeite H_0.

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

ATENÇÃO

Procuraremos, sempre que fizermos teste de hipóteses, distinguir bem esses cinco passos.

Teste para Média com Variância conhecida

Teste para Média com Variância conhecida

Vejamos, agora, uma aplicação dos cinco passos definidos anteriormente, para testar a hipótese de que a média de uma população μ seja igual a um número fixado μ_0, supondo-se a variância σ^2 dessa população conhecida.

Exemplo 5.1

Uma máquina automática para encher pacotes de café enche-os segundo uma distribuição normal, com média μ e variância sempre igual a $400g^2$. A máquina foi regulada para $\mu = 500g$. Desejamos, periodicamente, colher uma amostra de 16 pacotes e verificar se a produção está sob controle, isto é, se $\mu = 500g$ ou não. Se uma dessas amostras apresentasse uma média $\overline{x} = 492g$, você pararia ou não a produção para regular a máquina?

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- vimos uma motivação pra os testes de hipóteses;
- descrevemos os 5 Passos para uma boa execução de um teste de hipóteses;
- começamos a lidar com testes de hipóteses para média com variância conhecida.

Comentários Finais

Nas próximas aulas nós vamos focar em:

- testes de hipóteses para média com variância conhecida
- testes de hipóteses para proporção
- valor-p (ou p-valor).

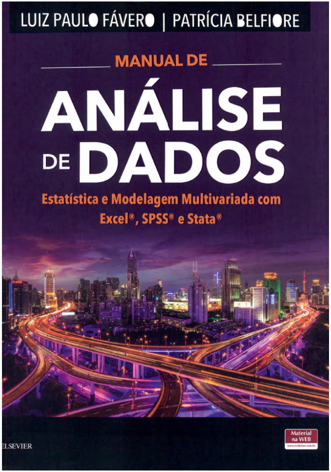
Comentários Finais

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Em grupos de até 4 integrantes resolva os Exercícios 6.1-6.5.

Referências

Referências



Bons Estudos!