Estatística Avançada - Aula 01

Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidades I

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- tipos de variáveis;
- classificação de variáveis;
- recapitulamos alguns tópicos de Estatística Descritiva;
- tivemos um primeiro contato com os conceitos da Teoria de Amostragem.

Variável Aleatória

Variável Aleatória

Vamos relembrar alguns conceitos e terminologias relacionados à Teoria das Probabilidades.

Definição 2.1

Um **experimento** consiste em qualquer processo de observação ou medida. Um **experimento aleatório** é aquele que gera resultados imprevisíveis, de modo que, se o processo for repetido inúmeras vezes, torna-se impossível prever seu resultado.

Exemplo 2.2

O lançamento de uma moeda ou de um dado são exemplos de experimentos aleatórios.

Definição 2.3

O espaço amostral S consiste em todos os possíveis resultados de um experimento.

Exemplo 2.4

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, podemos obter cara (k) ou coroa (c). Logo,

$$S = \{k, c\}.$$

Já no lançamento de um dado, o espaço amostral é representado por

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Definição 2.5

Um **evento** é qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Exemplo 2.6

Por exemplo, o evento A contém apenas as ocorrências pares do lançamento de um dado. Logo,

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Definição 2.7 (Variável Aleatória)

Consideremos $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e S o espaço amostral associado ao experimento. A função X que associa a cada elemento $s \in S$ um número real $X(s)$ é denominada **variável aleatória**.

Variável Aleatória

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas.

Variável Aleatória

Vamos usar variáveis aleatórias para associar probabilidades aos eventos do espaço amostral.

Variável Aleatória Discreta

Variável Aleatória Discreta

Definição 3.1

Uma **variável aleatória discreta** é aquela que assume valores em um conjunto enumerável, não podendo assumir, portanto, valores decimais ou não inteiros.

Exercício 3.1

Considere o experimento de lançar uma certa moeda e observar se ocorre cara (k) ou coroa (c). Descreva o comportamento da variável

$$N = \text{Número de caras em dois lançamentos dessa moeda.}$$

Exercício 3.2

Considere duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Descreva o comportamento da variável

$$X = \text{Número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações.}$$

Exercício 3.3

Considere duas extrações, com reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Descreva o comportamento da variável

$$Y = \text{Número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações.}$$

Variável Aleatória Discreta

Para esta Seção, considere X uma variável aleatória discreta que pode assumir os valores $\{x_1, .., x_n\}$ com as respectivas probabilidades $\{p(x_1), .., p(x_n)\}$.

Variável Aleatória Discreta

Definição 3.2

A função/associação $x_i \mapsto p(x_i)$ é chamada **função de probabilidade** da variável aleatória X e associa, a cada valor x_i a sua probabilidade de ocorrência:

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \; i = 1, 2, ..., n$$

de modo que $P(X = x_i) \geq 0$ para todo i e

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

Variável Aleatória Discreta

Exercício 3.4

Obtenha a distribuição de probabilidades associada às variáveis aleatórias N, X e Y.

Definição 3.3 (Esperança)

A **esperança (valor esperado ou médio)** de X é dada pela expressão:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Exercício 3.5

Calcule a Esperança de N, X e Y.

Variável Aleatória Discreta

Definição 3.4 (Variância e Desvio-padrão)

A **variância** de uma variável aleatória discreta X é a média ponderada das distâncias entre os valores que X pode assumir e a esperança de X, em que os pesos são as probabilidades dos possíveis valores de X. O **desvio-padrão** de X é a raiz quadrada da variância.

Variável Aleatória Discreta

Denotamos a variância de X por $\text{var}(X)$ ou $\sigma^2(X)$, e o desvio-padrão de X por $\sigma(X)$. Em símbolos temos

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = E[X - (E[X])^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

e

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Exercício 3.6

Calcule a Variância e desvio-padrão de N, X e Y.

Variável Aleatória Discreta

Definição 3.5

A **função de distribuição acumulada (f.d.a.)** de uma variável aleatória X, denotada por $F(x)$, corresponde à soma das probabilidades dos valores de x_i; menores ou iguais a x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

Variável Aleatória Discreta

Exercício 3.7

Descreva a distribuição acumulada de N, X e Y.

Variável Aleatória Discreta

Agora vamos descrever algumas dentre as principais distribuições discretas.

Variável Aleatória Discreta

A mais simples das distribuições discretas de probabilidade e recebe o nome uniforme porque todos os possíveis valores da variável aleatória têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Variável Aleatória Discreta

Definição 3.6

Uma variável aleatória discreta X que assume os valores $x_1, ..., x_n$ tem **distribuição uniforme discreta** com parâmetro n, denotada por $X \sim U_d\{x_1, ..., x_n\}$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, ..., n.$$

Variável Aleatória Discreta

Exemplo 3.7

Um dado não viciado é lançado, de modo que a variável aleatória X que representa o valor da face voltada para cima. Temos que X assume distribuição discreta de probabilidades.

A esperança de uma variável discreta X é dada por

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Exemplo 3.8

Vamos calcular a esperança da variável X citada anteriormente.

Distribuição Bernoulli e Binomial

Distribuição Bernoulli e Binomial

O **experimento de Bernoulli** é um experimento aleatório que fornece apenas dois resultados possíveis, convencionalmente denominados de sucesso ou fracasso.

Distribuição Bernoulli e Binomial

Exemplo 4.1

Como exemplo de um experimento de Bernoulli, podemos citar o lançamento de uma moeda, cujos resultados possíveis são cara e coroa.

Distribuição Bernoulli e Binomial

Para determinado experimento de Bernoulli, vamos considerar a variável aleatória X que assume o valor 1 no caso de sucesso e 0 no caso de fracasso.

Distribuição Bernoulli e Binomial

A probabilidade de sucesso é representada por p e a probabilidade de fracasso por $(1 - p)$ ou q.

Distribuição Bernoulli e Binomial

A distribuição de Bernoulli fornece, portanto, a probabilidade de sucesso ou fracasso da variável X na realização de um *único experimento*.

Definição 4.2

A variável X que assume os valores 0 ou 1 segue uma **distribuição de Bernoulli** com parâmetro p, denotada por $X \sim \text{Bern}(p)$, se sua função de probabilidade for dada por:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k},\ k \in \{0, 1\}.$$

Distribuição Bernoulli e Binomial

É possível demonstrar que se $X \sim \text{Bern}(p)$ então

$$E[X] = p \text{ e } \text{Var}(X) = p(1-p).$$

Exemplo 4.3

A final do Masterchef Brasil ocorrerá entre os participantes G (de Greice Kelly) e M (de Michael Jaquisson). A variável aleatória X representa o vencedor. Sabe-se que a probabilidade de G ser vencedora é 0,60. Determine a distribuição de X, além da esperança e variância de X.

Um **experimento binomial** consiste em n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade p de sucesso, probabilidade essa que permanece constante em todas as repetições.

Definição 4.4

A variável aleatória discreta X de um modelo binomial corresponde ao número de sucessos (k) nas n repeti- ções do experimento. Então, X tem **distribuição binomial** com parâmetros n e p, denotada por $X \sim b(n, p)$, se sua função de distribuição de probabilidade for dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^x (1 - p)^{n-x}, \; x \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Lembrando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Distribuição Bernoulli e Binomial

Pode-se demonstrar que se $X \sim b(n, p)$ então

$$E[X] = np \text{ e } \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Distribuição Bernoulli e Binomial

Podemos notar que a média e a variância da distribuição binomial são iguais à média e variância da distribuição de Bernoulli, multiplicadas por n, que representa o número de repetições de um experimento de Bernoulli.

Exemplo 4.5

Determinada peça é produzida em uma linha de produção.A probabilidade de que a peça não tenha defeitos é de 99%. Se forem produzidas 30 peças, qual a probabilidade de que pelo menos 28 delas esteja em boas condições? Determine também a média e a variância da variável aleatória associada.

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A **distribuição Poisson** é utilizada para registrar a ocorrência de eventos raros, com probabilidade de sucesso muito pequena ($p \to 0$), em determinada exposição (por exemplo, em determinado intervalo de tempo ou espaço).

Distribuição Poisson

Diferentemente do modelo binomial, que fornece a probabilidade do número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento), o modelo Poisson fornece a probabilidade do número de sucessos em determinado intervalo contínuo (tempo, área, entre outras possibilidades de exposição).

Distribuição Poisson

Como exemplos de variáveis que representam a distribuição Poisson, podemos mencionar a quantidade de clientes que chegam à fila por unidade de tempo, a quantidade de defeitos por fábrica, a quantidade de acidentes por município, etc.

Distribuição Poisson

Podemos notar que as unidades de medida de exposição (tempo, unidade fabril e município, nessas situações) são contínuas, mas a variável aleatória (número de ocorrências) é discreta.

Distribuição Poisson

A distribuição Poisson apresenta as seguintes hipóteses:

- Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;
- Em intervalos de mesmo comprimento, as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos são iguais;
- Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de ocorrência de mais de um sucesso é desprezível;
- Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de um sucesso é proporcional ao comprimento do intervalo.

Distribuição Poisson

Consideremos uma variável aleatória discreta X que representa a quantidade de sucessos (k) em determinada unidade de tempo, de área, entre outras possibilidades.

Distribuição Poisson

Definição 5.1

A variável aleatória X, com parâmetro $\lambda \geq 0$, apresenta **distribuição Poisson**, denotada por $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \, x \in \mathbb{N}.$$

Distribuição Poisson

Lembre que

- e é a base do logaritmo neperiano (ou natural), sendo $e \approx 2.718282$;
- λ é a taxa média estimada de ocorrência do evento de interesse para dada exposição (intervalo de tempo, área, etc).

Distribuição Poisson

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ pode-se demonstrar que

$$E[X] = \text{Var}[X] = \lambda.$$

A demonstração não é exatamente difícil mas faz uso de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral (e portanto não abordaremos aqui).

Exemplo 5.2

Seja X a variável aleatória que denota o número de clientes que chegam a um banco e suponha que X siga uma distribuição Poisson. Verifica-se que, em média, chegam 12 clientes por minuto. Calcule:

a - probabilidade de chegada de 10 clientes no próximo minuto;

b - probabilidade de chegada de 40 clientes nos próximos 5 minutos;

c - média e variância de X.

Distribuição Poisson

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial com parâmetros n e p,isto é, $X \sim b(n, p)$.

Distribuição Poisson

Quando o número de repetições de um experimento aleatório for muito grande ($n \to \infty$) e a probabilidade de sucesso for muito pequena ($p \to 0$), de tal forma que $np \to \lambda < \infty$, a distribuição binomial aproxima-se da de Poisson:

$$X \sim b(n, p) \approx \text{Poisson}(\lambda), \text{ com } np \to \lambda.$$

Distribuição Poisson

Essas considerações podem ser resumidas no seguinte Teorema:

Teorema 5.3 (Binomial converge para Poisson)

Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros positivos e $(p_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais positivos. Suponha que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_n p_n = \lambda < \infty.$$

Então

$$b(a_n, p_n) \to \text{Poisson}(\lambda).$$

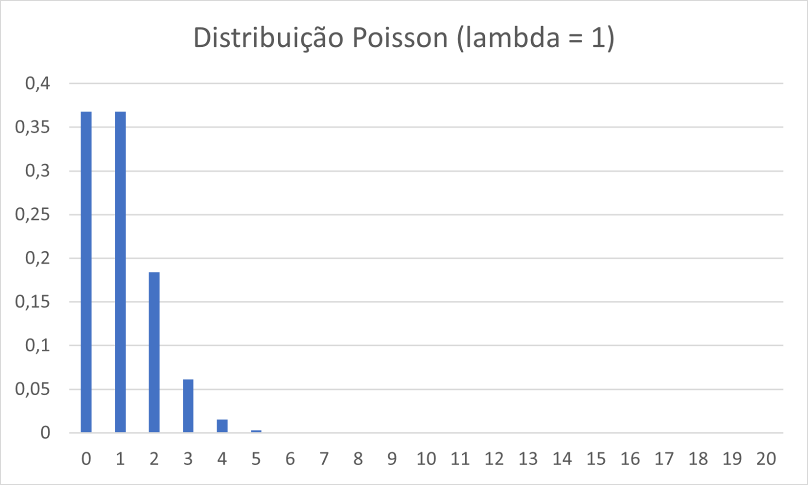
Distribuição Poisson

Não vamos demonstrar esse resultado aqui pois exige técnicas de Cálculo Diferencial e Integral que fogem ao escopo do curso. De qualquer maneira, usem esse resultado sempre que necessário.

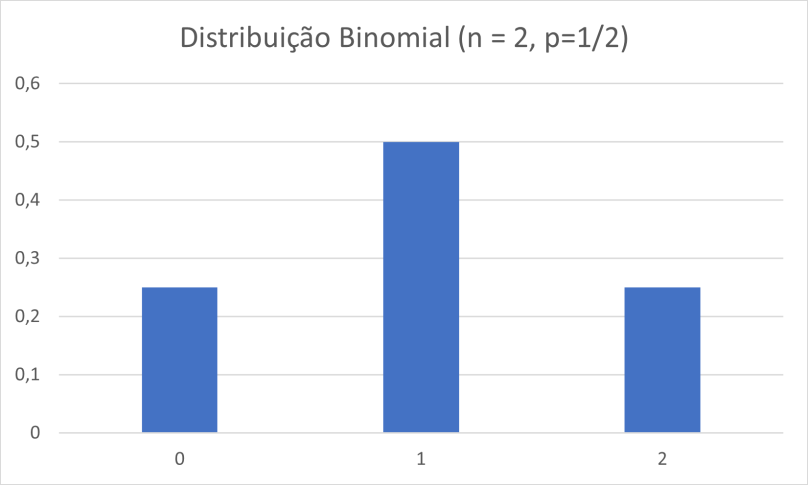
Distribuição Poisson

Para ilustrar esse fato, vamos observar como as binomiais $b(2^n, 1/2^n)$ ($n \geq 1$) convergem para Poisson(1) conforme k vai crescendo:

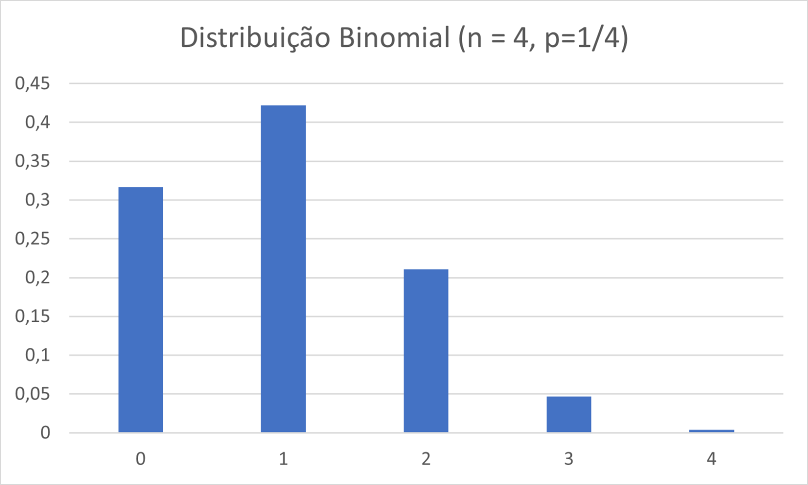
Distribuição Poisson



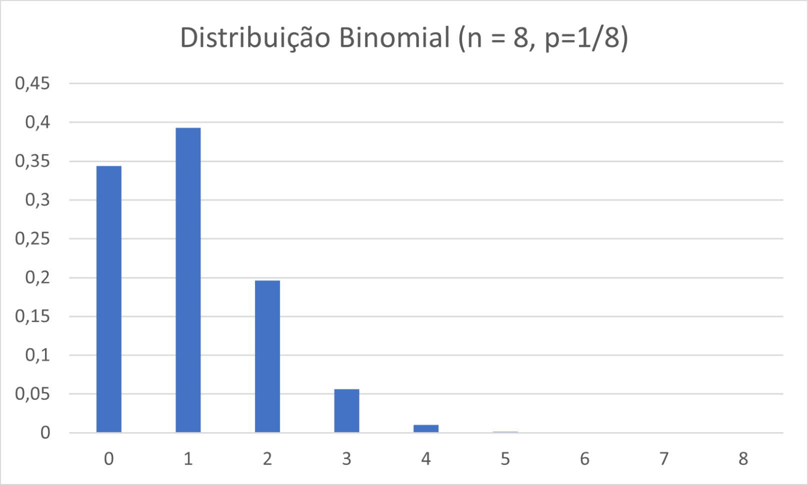
Distribuição Poisson



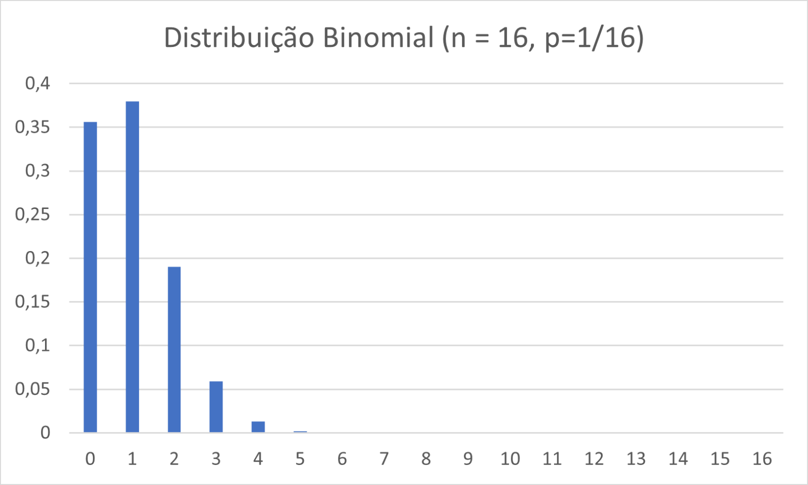
Distribuição Poisson



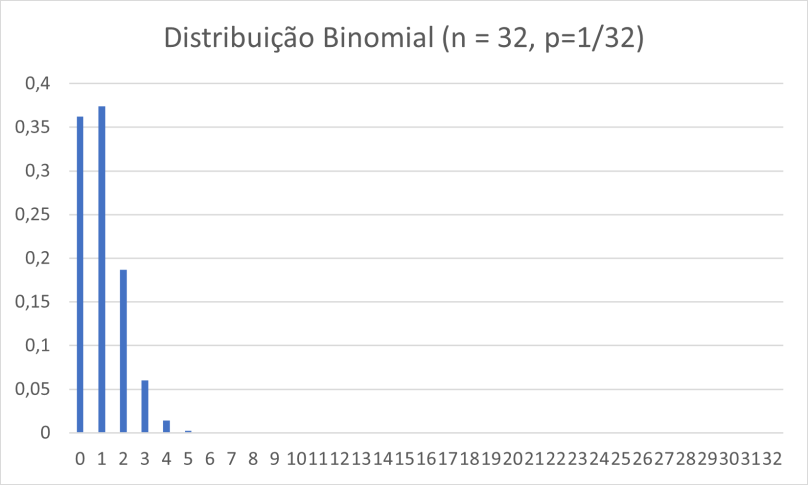
Distribuição Poisson



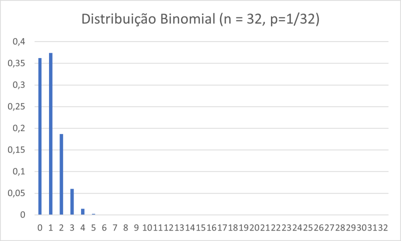
Distribuição Poisson

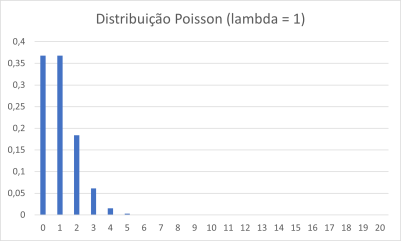


Distribuição Poisson



Distribuição Poisson





Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós lidamos com:

- variáveis aleatórias;
- variáveis aleatórias discretas;
- distribuições uniforme discreta, Bernoulli, binomial e Poisson;
- condições de convergência de distribuições binomiais para uma Poisson.

Comentários Finais

Na próxima aula nós vamos lidar com:

- distribuições geométrica e hipergeométrica;
- variáveis aleatórias contínuas;
- distribuições uniforme contínua e exponencial;
- outros exemplos de distribuições contínuas.

Comentários Finais

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 1.2,1.11,1.12,1.14.

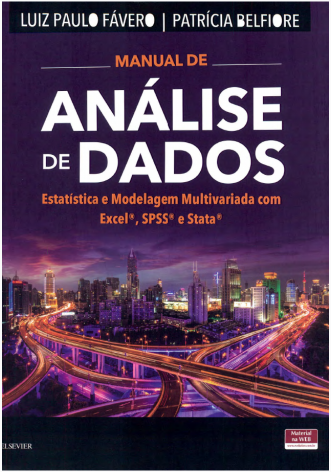
Comentários Finais

IMPORTANTE

Considere resolver o Exercício 1.1 caso você sinta necessidade de relembrar os principais fatos sobre Probabilidade.

Referências

Referências



Bons Estudos!