Estatística Avançada - Aula 03

A Distribuição Normal

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- variáveis aleatórias discretas e contínuas;
- distribuições de probabilidades discretas e contínuas.

Variável Aleatória Contínua

Variável Aleatória Contínua

Definição 2.1

Uma **variável aleatória contínua** é aquela que pode assumir diversos valores num intervalo de números reais.

Variável Aleatória Contínua

Exemplo 2.2

Como exemplos de variáveis aleatórias contínuas, podemos citar a renda familiar, o faturamento da empresa ou a altura de determinada criança.

Variável Aleatória Contínua

Para calcular probabilidades no contexto das variáveis contínuas vamos recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral.

Variável Aleatória Contínua

Definição 2.3

Uma variável aleatória contínua X está associada a uma função $f(x)$, denominada função **densidade de probabilidade (f.d.p.)** de X, que satisfaz a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,\; f(x) \geq 0.$$

Variável Aleatória Contínua

Para quaisquer a e b, tal que $-\infty < a < b < \infty$, a probabilidade de que a variável aleatória X assuma valores nesse intervalo é:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

A esperança matemática (valor esperado ou médio) de uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada pela expressão:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Variável Aleatória Contínua

A variância de uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$ é calculada como:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx.$$

Variável Aleatória Contínua

Como no caso de variáveis aleatórias discretas, podemos calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória contínua X a partir de uma função de distribuição acumulada.

Variável Aleatória Contínua

A função de **distribuição acumulada** $F(x)$ de uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$ é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < \infty.$$

A Distribuição Normal

A Distribuição Normal

A distribuição normal, também conhecida como distribuição Gaussiana, é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas, por pelo menos 2 motivos:

A Distribuição Normal

- permite modelar fenômenos naturais, estudos do comportamento humano, processos industriais, entre outros;

A Distribuição Normal

- possibilita o uso de aproximações para o cálculo de probabilidades de muitas variáveis aleatórias.

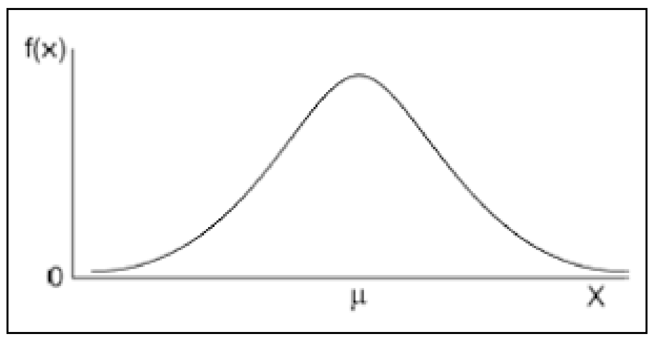
A Distribuição Normal

Definição 3.1

Uma variável aleatória X com média $\mu \in \mathbb{R}$ e desvio padrão $\sigma > 0$ tem **distribuição Normal** denotada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função de distribuição de probabilidades for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \, x \in \mathbb{R}.$$

A Distribuição Normal



Do gráfico da densidade da Normal podemos concluir algumas propriedades básicas:

- $f(x)$ é simétrica em relação a μ;
- $f(x)$ decresce a medida que $|x|$ cresce;
- o valor máximo de $f(x)$ se dá para $x = \mu$.

A Distribuição Normal

Note que, para calcular $P(a \leq X \leq b)$ devemos realizar a conta

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

A Distribuição Normal

Também pode-se demostrar que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$E(X) = \mu \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Claro, vocês em geral não fizeram cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Mas mesmo se esse fosse o caso, essa integral **não é calculável (não existe fórmula fechada)**.

A Distribuição Normal

Apesar disso, existem métodos para aproximação do cálculo integrais com excelente precisão, e para o caso da distribuição Normal, esses valores já estão tabelados.

A Distribuição Normal

Dito isso, vamos usar boa parte da Aula-03 para entender como calcular essas probabilidades usando a tabela "tabela-normal".

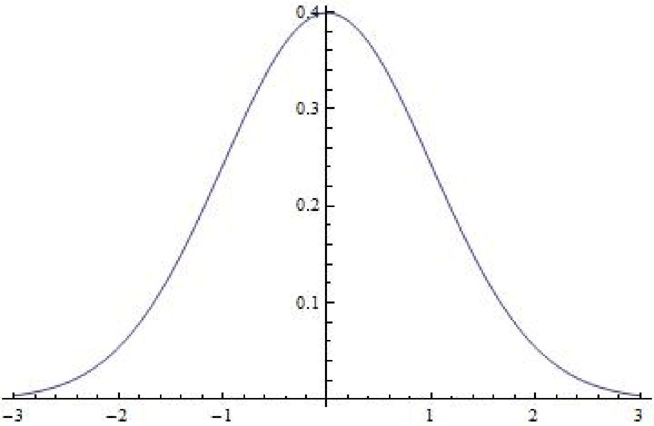
A Normal $N(0, 1)$

A Normal $N(0,1)$

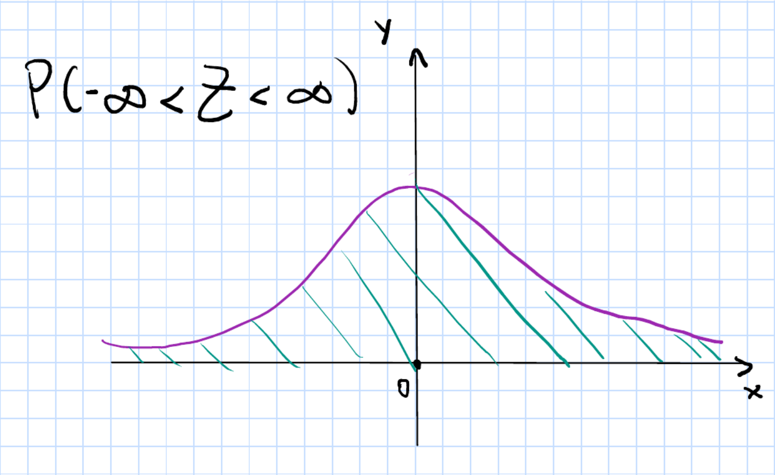
Definição 4.1

A Normal $N(0,1)$ é denominada **Normal Padrão**. Denotamos $Z \sim N(0,1)$.

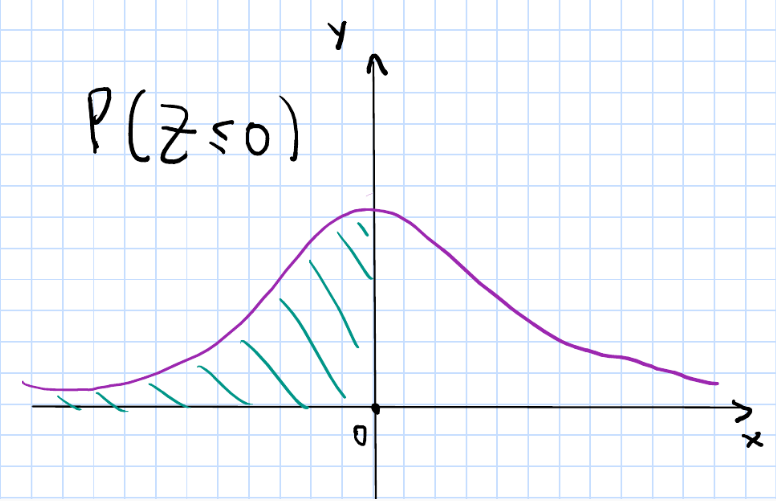
A Normal $N(0, 1)$



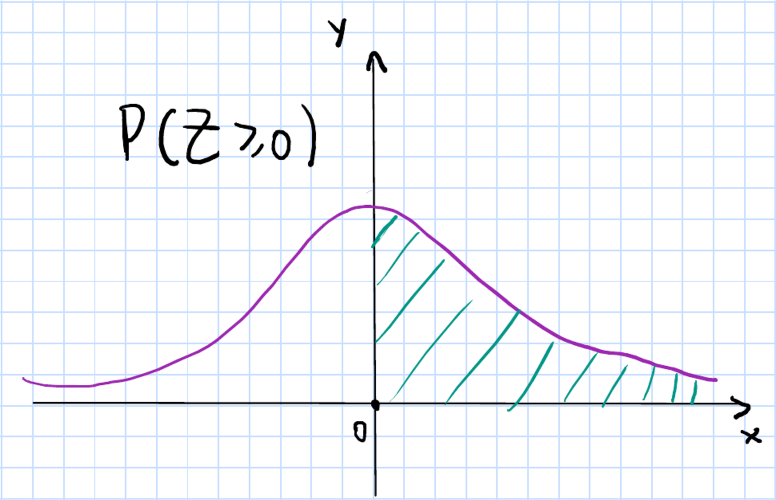
A Normal $N(0, 1)$



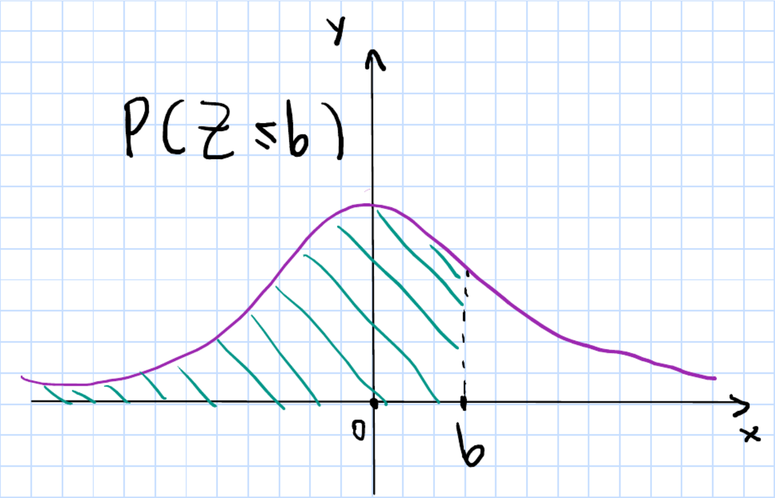
A Normal $N(0, 1)$



A Normal $N(0, 1)$



A Normal $N(0,1)$



A Normal $N(0,1)$

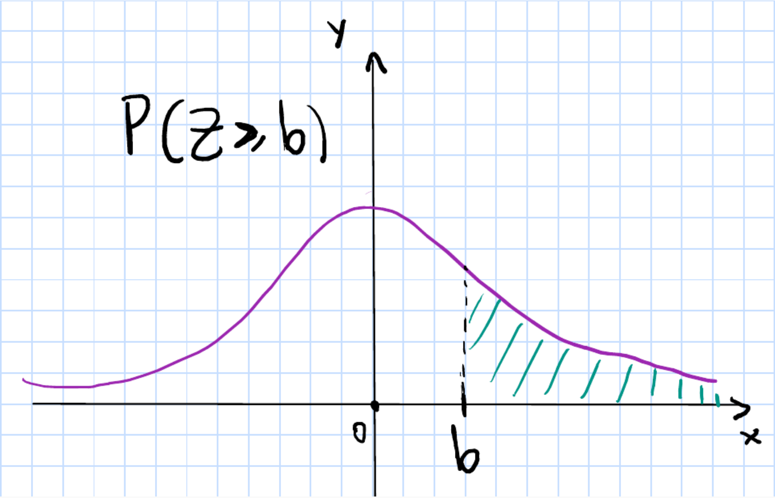
Exemplo 4.2

Seja $Z \sim N(0,1)$ a Normal Padrão. Calcule:

a - $P(Z < 1)$;

b - $P(Z < 1.5)$.

A Normal $N(0, 1)$



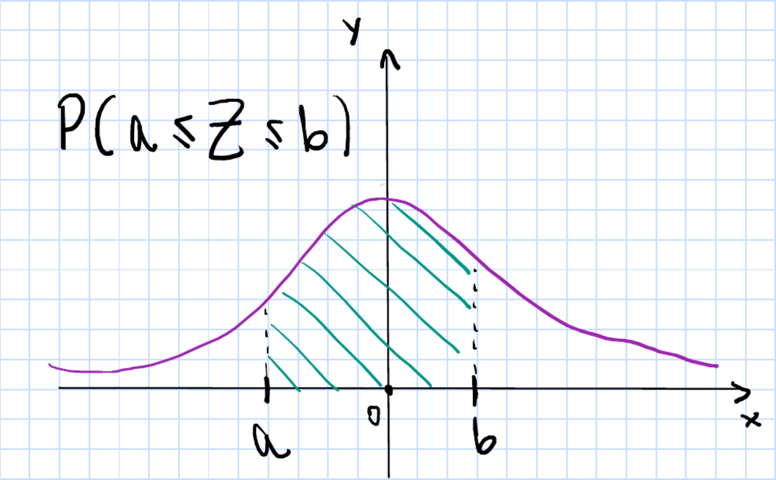
Exemplo 4.3

Seja $Z \sim N(0, 1)$ a Normal Padrão. Calcule:

a - $P(Z > 2)$;

b - $P(Z > 3)$.

A Normal $N(0, 1)$



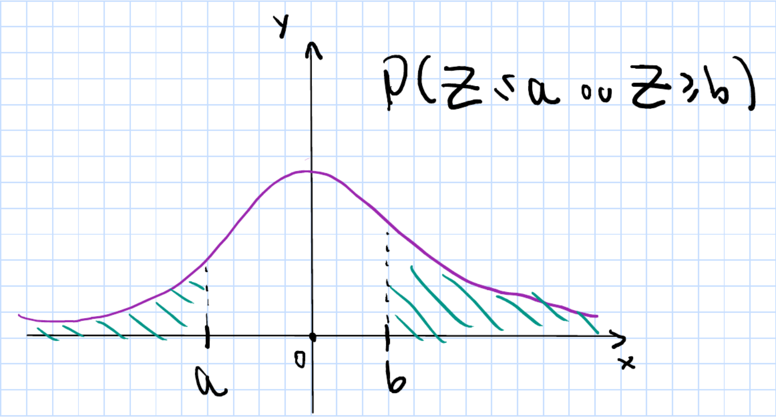
Exemplo 4.4

Seja $Z \sim N(0, 1)$ a Normal Padrão. Calcule:

a - $P(-1 < Z < 1)$;

b - $P(0.5 < Z < 1.7)$.

A Normal $N(0,1)$



Exemplo 4.5

Seja $Z \sim N(0,1)$ a Normal Padrão. Calcule:

a - $P(Z < -0.7 \text{ ou } Z > 0.7)$;

b - $P(Z < -0.4 \text{ ou } Z > 1)$.

Exercício 4.1

Seja $Z \sim N(0,1)$ a Normal Padrão. Calcule:

a - $P(-1 < Z < 1)$;

b - $P(-2 < Z < 2)$;

c - $P(-3 < Z < 3)$;

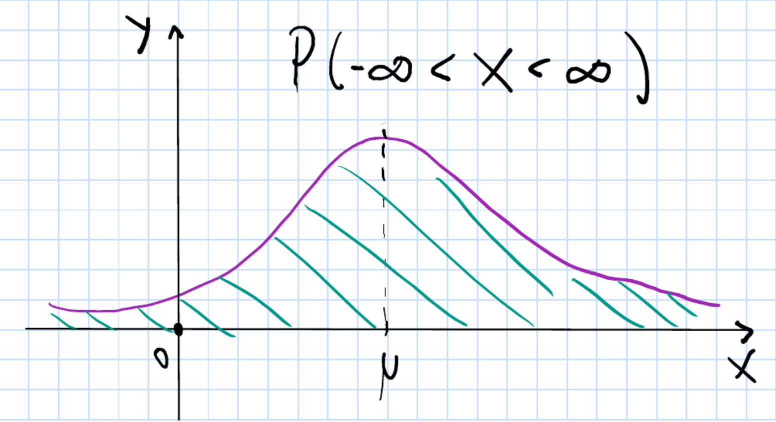
d - $P(-4 < Z < 4)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

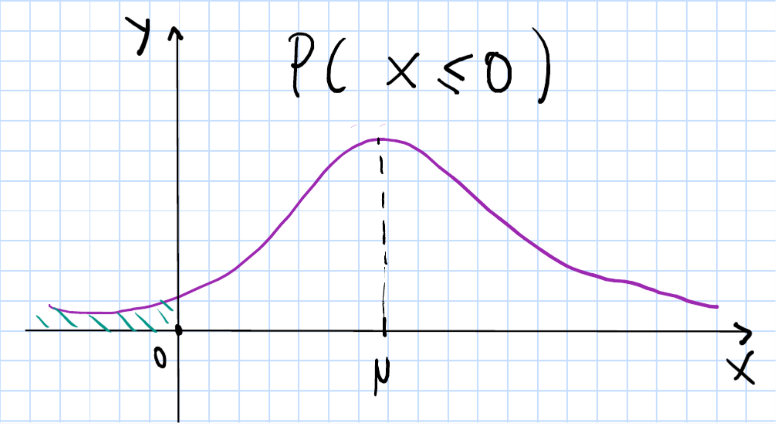
A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Vamos usar a Normal Padrão $Z \sim N(0, 1)$ para calcular probabilidades para qualquer normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Para obtermos, a partir da distribuição normal, a distribuição normal padrão ou distribuição normal reduzida, a variável original X é transformada em uma nova variável aleatória Z, com média zero ($\mu = 0$) e variância 1 ($\sigma^2 = 1$):

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Este tipo de transformação, conhecida por **zscore**, é muito utilizada para a padronização de variáveis, pois não altera a forma da distribuição da variável original e gera uma nova variável com média zero e variância 1.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Logo, para calcular $P(X < 0)$ para uma normal $N(\mu, \sigma^2)$ basta aplicar o zscore e calcular

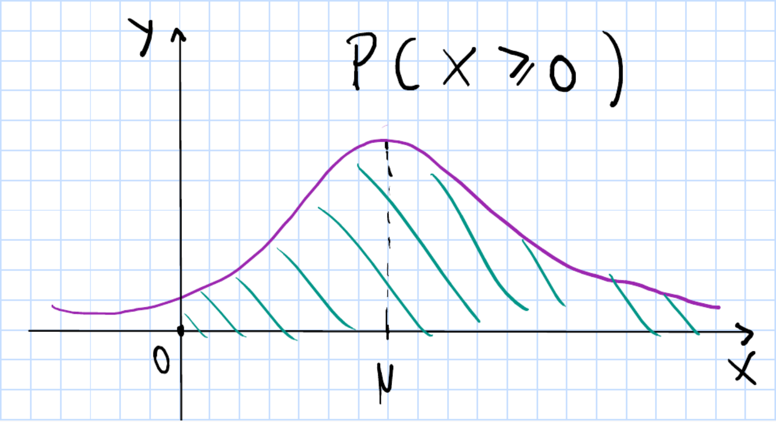
$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0-\mu}{\sigma}\right)$$

e proceder da mesma maneira que fizemos para o caso $Z \sim N(0,1)$.

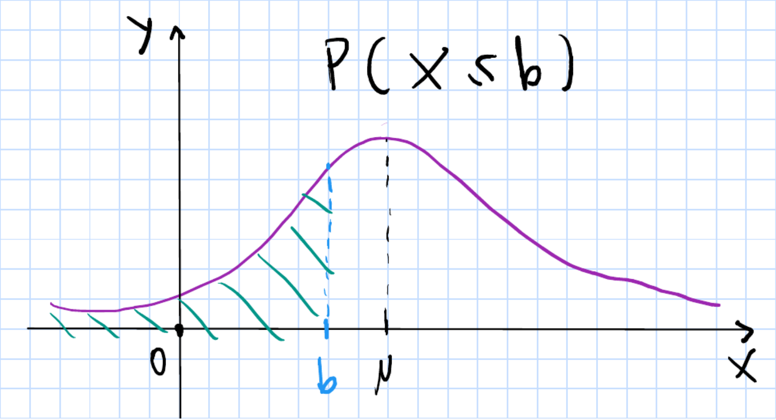
A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Vamos ilustrar as contas com a Normal $X \sim N(8, 36)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



A Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Novamente, para calcular $P(X < b)$ para uma normal $N(\mu, \sigma^2)$ basta aplicar o zscore e calcular

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

e proceder da mesma maneira que fizemos para o caso $Z \sim N(0, 1)$.

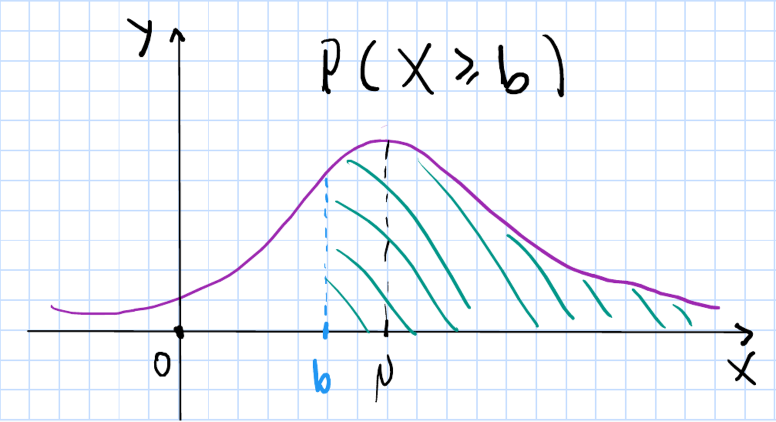
Exemplo 5.1

Seja $X \sim N(8, 36)$. Calcule:

a - $P(X \leq 12)$;

b - $P(X \leq 20)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



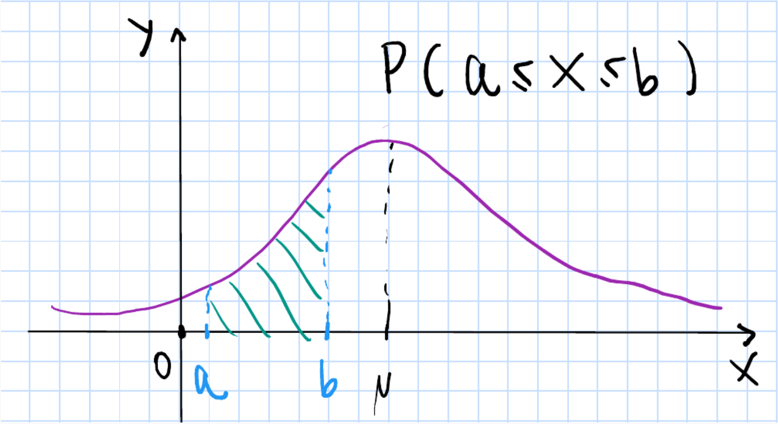
Exemplo 5.2

Seja $X \sim N(8, 36)$. Calcule:

a - $P(X \geq 2)$;

b - $P(X \geq 5)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



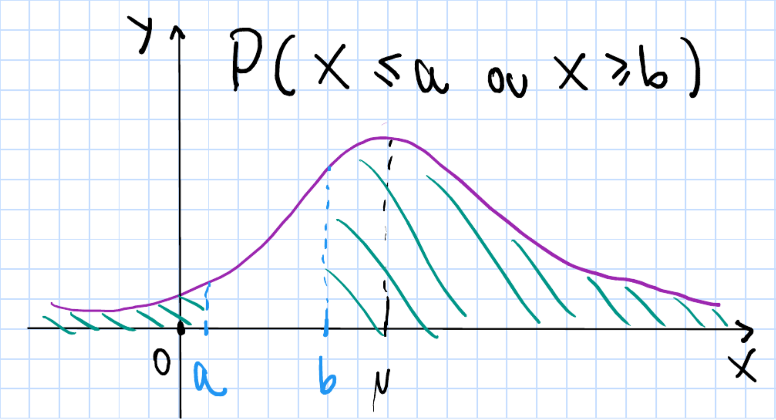
Exemplo 5.3

Seja $X \sim N(8, 36)$. Calcule:

a - $P(6 \leq X \geq 11)$;

b - $P(10 \leq X \geq 25)$.

A Normal $N(\mu, \sigma^2)$



Exemplo 5.4

Seja $X \sim N(8, 36)$. Calcule:

a - $P(X \leq 3 \text{ ou } X \geq 9)$;

b - $P(X \leq 9 \text{ ou } X \geq 20)$.

Exemplo 5.5

Os depósitos efetuados no Banco de Palmares durante o mês de Setembro são distribuídos normalmente, com média $R\$10000,00$ e desvio-padrão $R\$1500,00$. Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontre a probabilidade de que o depósito seja:

a - $R\$10000,00$ ou menos;

b - pelo menos $R\$10000,00$;

c - um valor entre $R\$12000,00$ e $R\$15000,00$;

d - maior que $R\$20000,00$.

Exercício 5.1

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcule:

a - $P(-\sigma + \mu < Z < \sigma + \mu)$;

b - $P(-2\sigma + \mu < Z < 2\sigma + \mu)$;

c - $P(-3\sigma + \mu < Z < 3\sigma + \mu)$;

d - $P(-4\sigma + \mu < Z < 4\sigma + \mu)$.

Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal

Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal

Teorema 6.1 (Binomial converge para Normal)

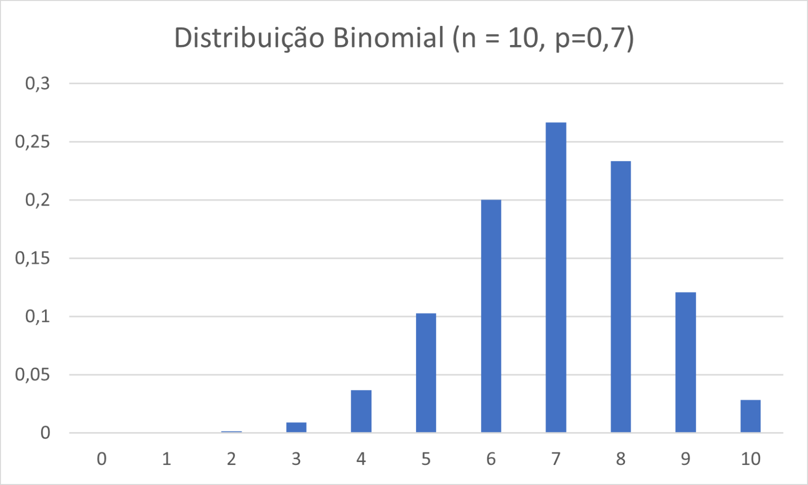
Seja $X \sim b(n, p)$. Se $np \to \infty$ e $n(1-p) \to \infty$ então

$$X \to N(np, np(1-p)).$$

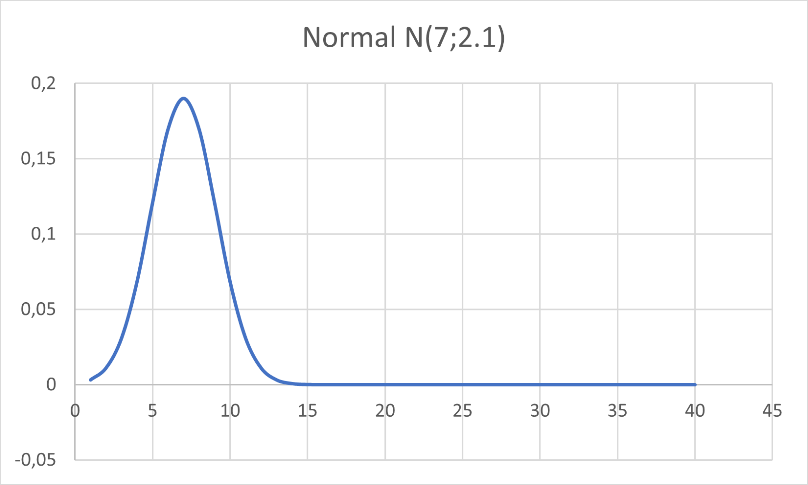
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal

Alguns autores admitem que a aproximação da binomial pela normal é adequada quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$, ou ainda quando $np(1-p) > 3$. Uma regra ainda mais conservadora exige que $np > 10$ e $n(1-p) > 10$.

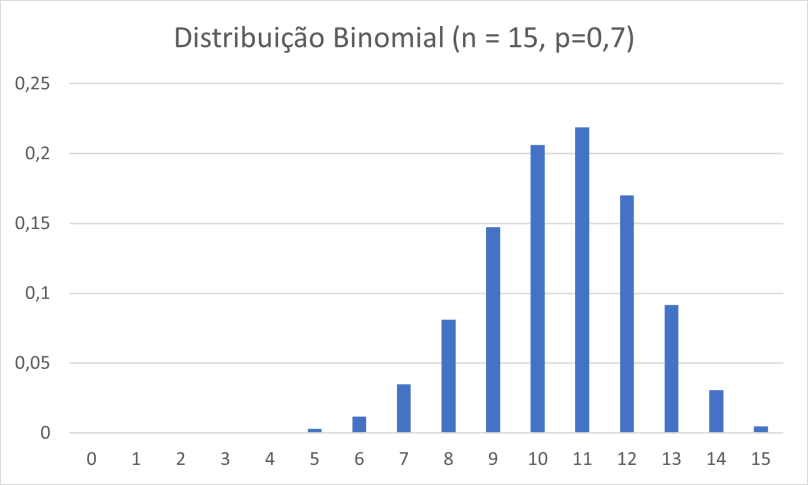
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



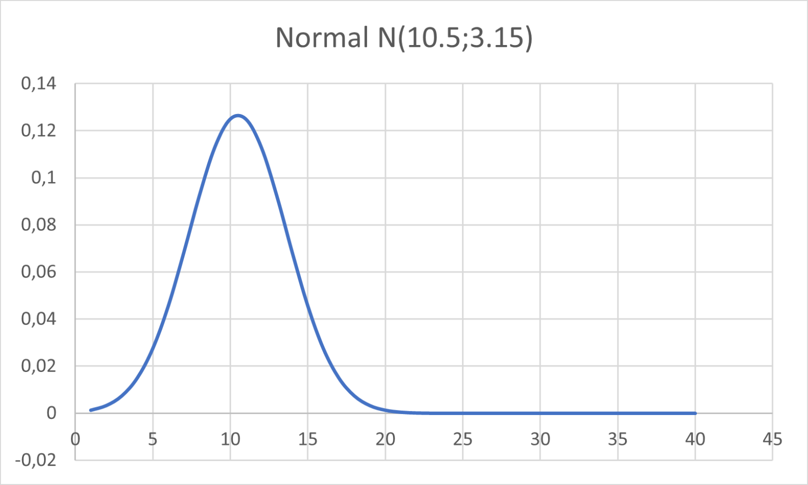
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



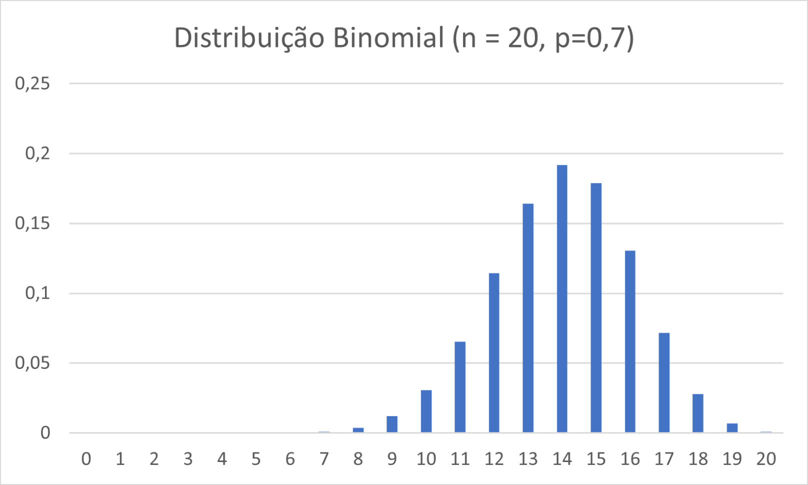
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



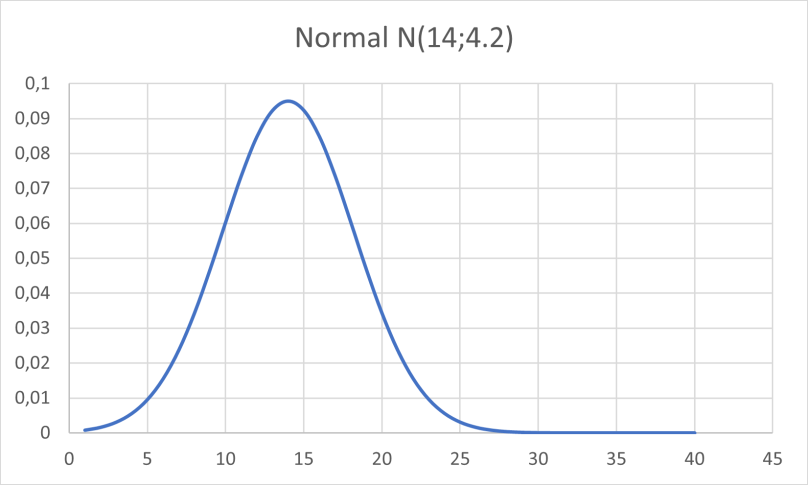
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal

Teorema 6.2 (Poisson converge para Normal)

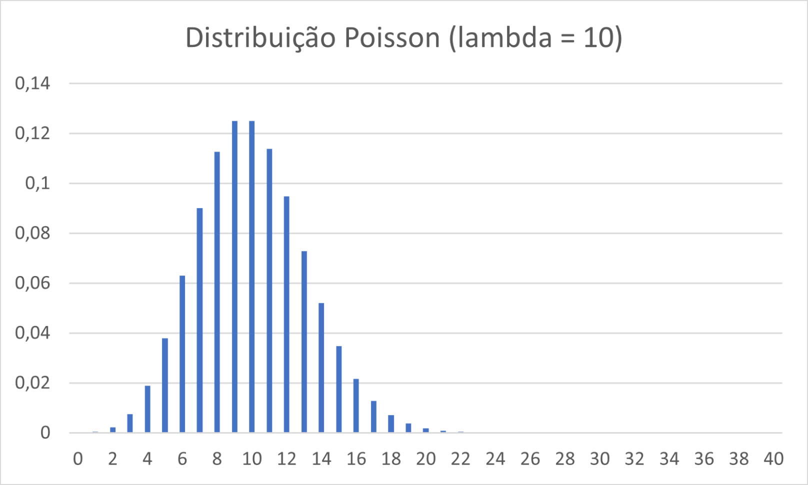
Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Se $\lambda \to \infty$ e $n(1-p) \to \infty$ então

$$X \to N(\lambda, \lambda).$$

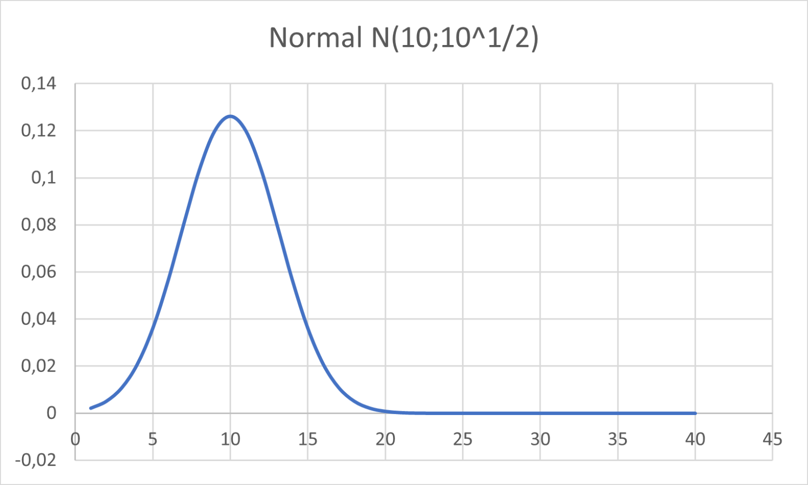
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal

Em geral, admite-se que a aproximação da distribuição Poisson pela normal é adequada quando $\lambda > 10$.

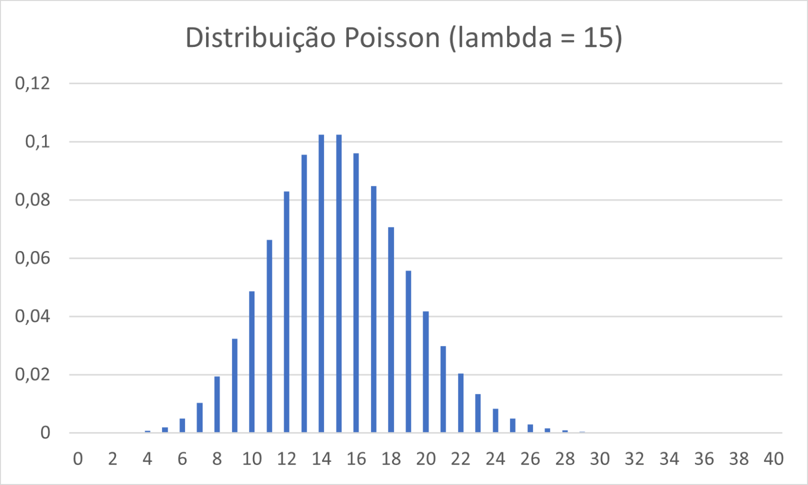
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



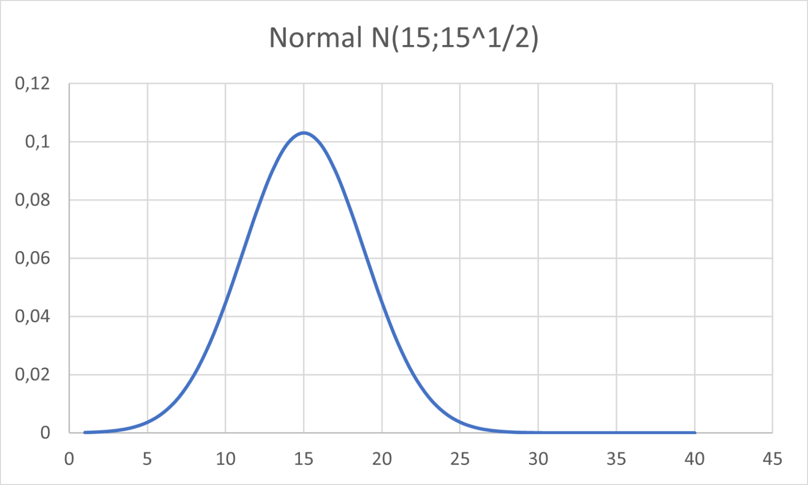
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



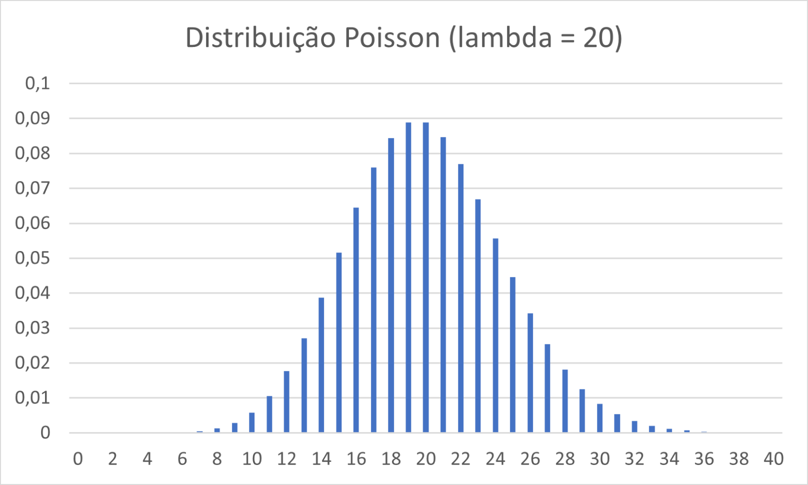
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



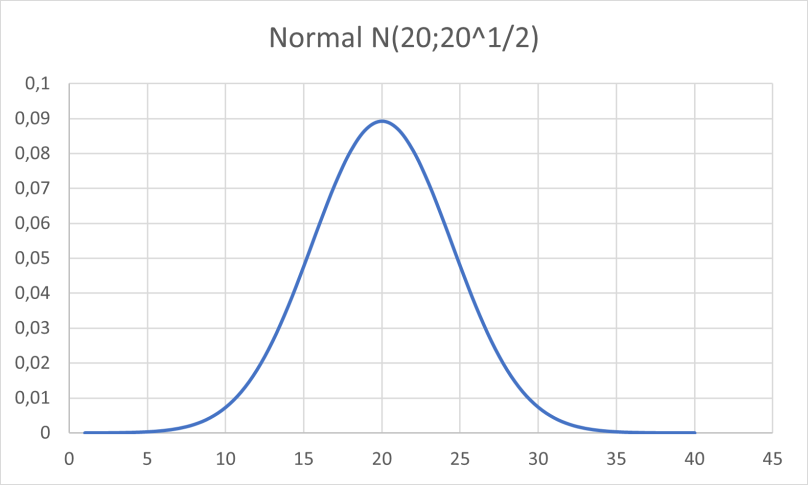
Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Aproximando uma Binomial ou Poisson por uma Normal



Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- calculamos probabilidades associadas à Normal Padrão $Z \sim N(0, 1)$;
- extrapolamos essas contas para uma normal $N(\mu, \sigma^2)$ qualquer;
- esboçamos (empiricamente) a convergência de uma binomial e uma Poisson para uma normal.

Comentários Finais

Estamos nos aproximando do grande objetivo da disciplina: estudar Inferência Estatística. Nas próximas aulas nós vamos lidar com alguns Fundamentos da Inferência. Em particular, na próxima aula falaremos de:

- população e amostra;
- amostragem;
- distribuição amostral;
- tamanho da amostra.

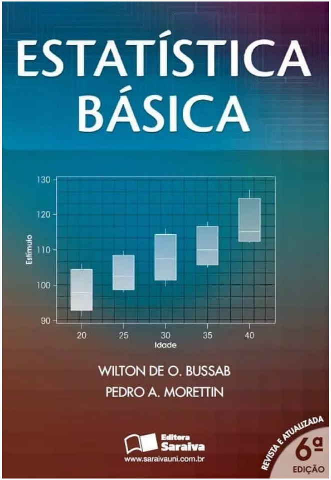
Comentários Finais

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

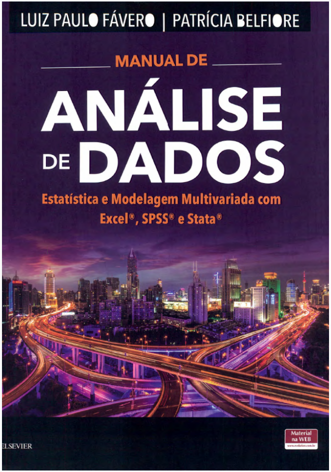
Em grupos de até 4 integrantes resolva três dentre os Exercícios 3.1-3.5.

Referências

Referências



Referências



Bons Estudos!