# Estatística Avançada - Aula 01

## Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidades I


Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

# Conteúdo

# Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

# Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- tipos de variáveis;
- classificação de variáveis;
- recapitulamos alguns tópicos de Estatística Descritiva;
- tivemos um primeiro contato com os conceitos da Teoria de Amostragem.

# Variável Aleatória

# Variável Aleatória

Vamos relembrar alguns conceitos e terminologias relacionados à Teoria das Probabilidades.

# Variável Aleatória

**Definição 2.1**

Um **experimento** consiste em qualquer processo de observação ou medida. Um **experimento aleatório** é aquele que gera resultados imprevisíveis, de modo que, se o processo for repetido inúmeras vezes, torna-se impossível prever seu resultado.

**Exemplo 2.2**

O lançamento de uma moeda ou de um dado são exemplos de experimentos aleatórios.

# Variável Aleatória

**Definição 2.3**

O espaço amostral $S$ consiste em todos os possíveis resultados de um experimento.

# Variável Aleatória

**Exemplo 2.4**

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, podemos obter cara $(k)$ ou coroa $(c)$. Logo,

$$S = \{k, c\}.$$

Já no lançamento de um dado, o espaço amostral é representado por

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

# Variável Aleatória

**Definição 2.5**

Um **evento** é qualquer subconjunto de um espaço amostral.

**Exemplo 2.6**

Por exemplo, o evento $A$ contém apenas as ocorrências pares do lançamento de um dado. Logo,

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

**Definição 2.7 (Variável Aleatória)**

Consideremos $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e $S$ o espaço amostral associado ao experimento. A função $X$ que associa a cada elemento $s \in S$ um número real $X(s)$ é denominada **variável aleatória**.

# Variável Aleatória

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas.

# Variável Aleatória

Vamos usar variáveis aleatórias para associar probabilidades aos eventos do espaço amostral.

# Variável Aleatória Discreta

# Variável Aleatória Discreta

**Definição 3.1**

Uma **variável aleatória discreta** é aquela que assume valores em um conjunto enumerável, não podendo assumir, portanto, valores decimais ou não inteiros.

**Exercício 3.1**

Considere o experimento de lançar uma certa moeda e observar se ocorre cara (k) ou coroa (c). Descreva o comportamento da variável

$$N = \text{Número de caras em dois lançamentos dessa moeda.}$$

**Exercício 3.2**

Considere duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Descreva o comportamento da variável

$$X = \text{Número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações.}$$

**Exercício 3.3**

Considere duas extrações, com reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Descreva o comportamento da variável

$$Y = \text{Número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações.}$$

# Variável Aleatória Discreta

Para esta Seção, considere $X$ uma variável aleatória discreta que pode assumir os valores $\{x_1, .., x_n\}$ com as respectivas probabilidades $\{p(x_1), .., p(x_n)\}$.

# Variável Aleatória Discreta

**Definição 3.2**

A função/associação $x_i \mapsto p(x_i)$ é chamada **função de probabilidade** da variável aleatória $X$ e associa, a cada valor $x_i$ a sua probabilidade de ocorrência:

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \; i = 1, 2, ..., n$$

de modo que $P(X = x_i) \geq 0$ para todo $i$ e

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

# Variável Aleatória Discreta

**Exercício 3.4**

Obtenha a distribuição de probabilidades associada às variáveis aleatórias $N, X$ e $Y$.

**Definição 3.3 (Esperança)**

A **esperança (valor esperado ou médio)** de $X$ é dada pela expressão:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

**Exercício 3.5**

Calcule a Esperança de $N, X$ e $Y$.

## Variável Aleatória Discreta

**Definição 3.4 (Variância e Desvio-padrão)**

A **variância** de uma variável aleatória discreta $X$ é a média ponderada das distâncias entre os valores que $X$ pode assumir e a esperança de $X$, em que os pesos são as probabilidades dos possíveis valores de $X$. O **desvio-padrão** de $X$ é a raiz quadrada da variância.

# Variável Aleatória Discreta

Denotamos a variância de $X$ por $\mathrm{var}(X)$ ou $\sigma^2(X)$, e o desvio-padrão de $X$ por $\sigma(X)$. Em símbolos temos

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = E[X - (E[X])^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

e

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

**Exercício 3.6**

Calcule a Variância e desvio-padrão de $N, X$ e $Y$.

# Variável Aleatória Discreta

**Definição 3.5**

A **função de distribuição acumulada (f.d.a.)** de uma variável aleatória $X$, denotada por $F(x)$, corresponde à soma das probabilidades dos valores de $x_i$; menores ou iguais a $x$:

$$F(x) = P(x \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i).$$

**Exercício 3.7**

Descreva a distribuição acumulada de $N, X$ e $Y$.

# Variável Aleatória Discreta

Agora vamos descrever algumas dentre as principais distribuições discretas.

# Variável Aleatória Discreta

A mais simples das distribuições discretas de probabilidade e recebe o nome uniforme porque todos os possíveis valores da variável aleatória têm a mesma probabilidade de ocorrência.

**Definição 3.6**

Uma variável aleatória discreta $X$ que assume os valores $x_1, ..., x_n$ tem **distribuição uniforme discreta** com parâmetro $n$, denotada por $X \sim U_d\{x_1, ..., x_n\}$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, ..., n.$$

# Variável Aleatória Discreta

**Exemplo 3.7**

Um dado não viciado é lançado, de modo que a variável aleatória $X$ que representa o valor da face voltada para cima. Temos que $X$ assume distribuição discreta de probabilidades.

# Variável Aleatória Discreta

A esperança de uma variável discreta $X$ é dada por

$$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

# Variável Aleatória Discreta

**Exemplo 3.8**

Vamos calcular a esperança da variável $X$ citada anteriormente.

# Distribuição Bernoulli e Binomial

# Distribuição Bernoulli e Binomial

O **experimento de Bernoulli** é um experimento aleatório que fornece apenas dois resultados possíveis, convencionalmente denominados de sucesso ou fracasso.

# Distribuição Bernoulli e Binomial

**Exemplo 4.1**

Como exemplo de um experimento de Bernoulli, podemos citar o lançamento de uma moeda, cujos resultados possíveis são cara e coroa.

# Distribuição Bernoulli e Binomial

Para determinado experimento de Bernoulli, vamos considerar a variável aleatória $X$ que assume o valor 1 no caso de sucesso e 0 no caso de fracasso.

A probabilidade de sucesso é representada por $p$ e a probabilidade de fracasso por $(1 - p)$ ou $q$.

A distribuição de Bernoulli fornece, portanto, a probabilidade de sucesso ou fracasso da variável $X$ na realização de um *único experimento*.

**Definição 4.2**

A variável $X$ que assume os valores 0 ou 1 segue uma **distribuição de Bernoulli** com parâmetro $p$, denotada por $X \sim \text{Bern}(p)$, se sua função de probabilidade for dada por:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^k, \; k \in \{0, 1\}.$$

# Distribuição Bernoulli e Binomial

É possível demonstrar que se $X \sim \text{Bern}(p)$ então

$$E[X] = p \text{ e } \text{Var}(X) = p(1-p).$$

**Exemplo 4.3**

A final do Masterchef Brasil ocorrerá entre os participantes $G$ (de Greice Kelly) e $M$ (de Michael Jaquisson). A variável aleatória $X$ representa o vencedor. Sabe-se que a probabilidade de $G$ ser vencedora é 0,60. Determine a distribuição de $X$, além da esperança e variância de $X$.

Um **experimento binomial** consiste em n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade $p$ de sucesso, probabilidade essa que permanece constante em todas as repetições.

**Definição 4.4**

A variável aleatória discreta $X$ de um modelo binomial corresponde ao número de sucessos $(k)$ nas $n$ repeti- ções do experimento. Então, $X$ tem **distribuição binomial** com parâmetros $n$ e $p$, denotada por $X \sim b(n, p)$, se sua função de distribuição de probabilidade for dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^x (1 - p)^x,\ x \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Lembrando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

# Distribuição Bernoulli e Binomial

Pode-se demonstrar que se $X \sim b(n, p)$ então

$$E[X] = np \text{ e } \mathrm{Var}(X) = np(1 - p).$$

# Distribuição Bernoulli e Binomial

Podemos notar que a média e a variância da distribuição binomial são iguais à média e variância da distribuição de Bernoulli, multiplicadas por n, que representa o número de repetições de um experimento de Bernoulli.

**Exemplo 4.5**

Determinada peça é produzida em uma linha de produção.A probabilidade de que a peça não tenha defeitos é de 99%. Se forem produzidas 30 peças, qual a probabilidade de que pelo menos 28 delas esteja em boas condições? Determine também a média e a variância da variável aleatória associada.

# Distribuição Poisson

# Distribuição Poisson

A **distribuição Poisson** é utilizada para registrar a ocorrência de eventos raros, com probabilidade de sucesso muito pequena ($p \to 0$), em determinada exposição (por exemplo, em determinado intervalo de tempo ou espaço).

# Distribuição Poisson

Diferentemente do modelo binomial, que fornece a probabilidade do número de sucessos em um intervalo discreto ($n$ repetições de um experimento), o modelo Poisson fornece a probabilidade do número de sucessos em determinado intervalo contínuo (tempo, área, entre outras possibilidades de exposição).

# Distribuição Poisson

Como exemplos de variáveis que representam a distribuição Poisson, podemos mencionar a quantidade de clientes que chegam à fila por unidade de tempo, a quantidade de defeitos por fábrica, a quantidade de acidentes por município, etc.

# Distribuição Poisson

Podemos notar que as unidades de medida de exposição (tempo, unidade fabril e município, nessas situações) são contínuas, mas a variável aleatória (número de ocorrências) é discreta.

# Distribuição Poisson

A distribuição Poisson apresenta as seguintes hipóteses:

- Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;
- Em intervalos de mesmo comprimento, as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos são iguais;
- Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de ocorrência de mais de um sucesso é desprezível;
- Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de um sucesso é proporcional ao comprimento do intervalo.

# Distribuição Poisson

Consideremos uma variável aleatória discreta $X$ que representa a quantidade de sucessos $(k)$ em determinada unidade de tempo, de área, entre outras possibilidades.

# Distribuição Poisson

**Definição 5.1**

A variável aleatória $X$, com parâmetro $\lambda \geq 0$, apresenta **distribuição Poisson**, denotada por $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x \in \mathbb{N}.$$

# Distribuição Poisson

Lembre que

- $e$ é a base do logaritmo neperiano (ou natural), sendo $e \approx 2.718282$;
- $\lambda$ é a taxa média estimada de ocorrência do evento de interesse para dada exposição (intervalo de tempo, área, etc).

# Distribuição Poisson

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ pode-se demonstrar que

$$E[X] = \text{Var}[X] = \lambda.$$

# Distribuição Poisson

A demonstração não é exatamente difícil mas faz uso de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral (e portanto não abordaremos aqui).

**Exemplo 5.2**

Seja $X$ a variável aleatória que denota o número de clientes que chegam a um banco e suponha que $X$ siga uma distribuição Poisson. Verifica-se que, em média, chegam 12 clientes por minuto. Calcule:

a - probabilidade de chegada de 10 clientes no próximo minuto;

b - probabilidade de chegada de 40 clientes nos próximos 5 minutos;

c - média e variância de $X$.

# Distribuição Poisson

Seja $X$ uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial com parâmetros $n$ e $p$,isto é, $X \sim b(n, p)$.

# Distribuição Poisson

Quando o número de repetições de um experimento aleatório for muito grande ($n \to \infty$) e a probabilidade de sucesso for muito pequena ($p \to 0$), de tal forma que $np \to \lambda < \infty$, a distribuição binomial aproxima-se da de Poisson:

$$X \sim b(n, p) \approx \text{Poisson}(\lambda), \text{ com } np \to \lambda.$$

# Distribuição Poisson

Essas considerações podem ser resumidas no seguinte Teorema:

# Distribuição Poisson

**Teorema 5.3 (Binomial converge para Poisson)**

Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros positivos e $(p_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais positivos. Suponha que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_n p_n = \lambda < \infty.$$

Então

$$b(a_n, p_n) \to \text{Poisson}(\lambda).$$

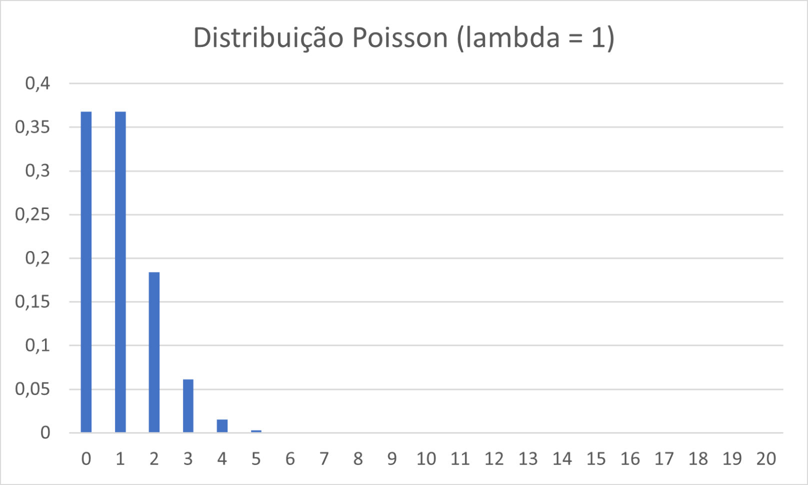
# Distribuição Poisson

Não vamos demonstrar esse resultado aqui pois exige técnicas de Cálculo Diferencial e Integral que fogem ao escopo do curso. De qualquer maneira, usem esse resultado sempre que necessário.

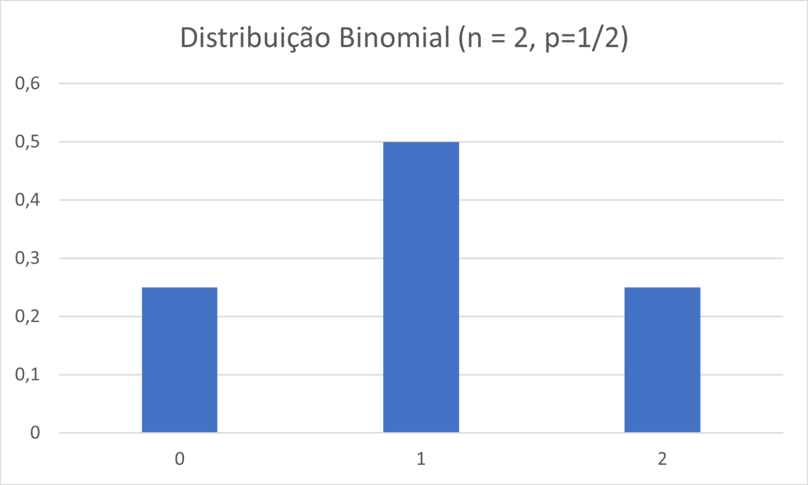
# Distribuição Poisson

Para ilustrar esse fato, vamos observar como as binomiais $b(2^n, 1/2^n)$ ($n \geq 1$) convergem para Poisson(1) conforme $k$ vai crescendo:

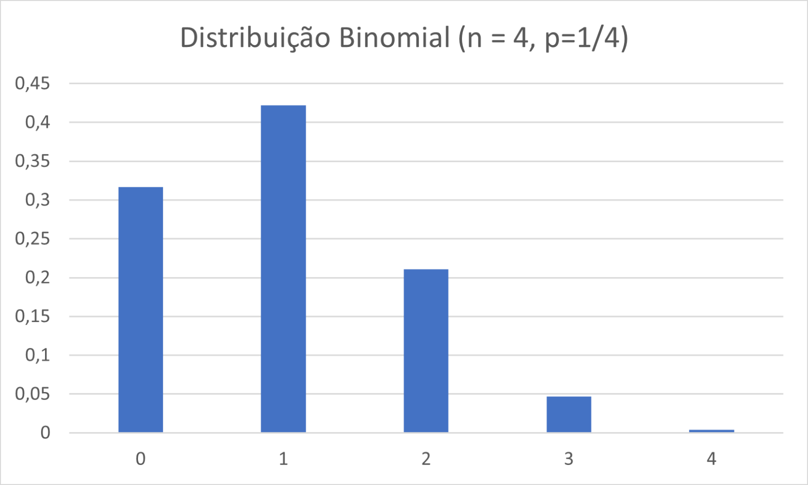
# Distribuição Poisson



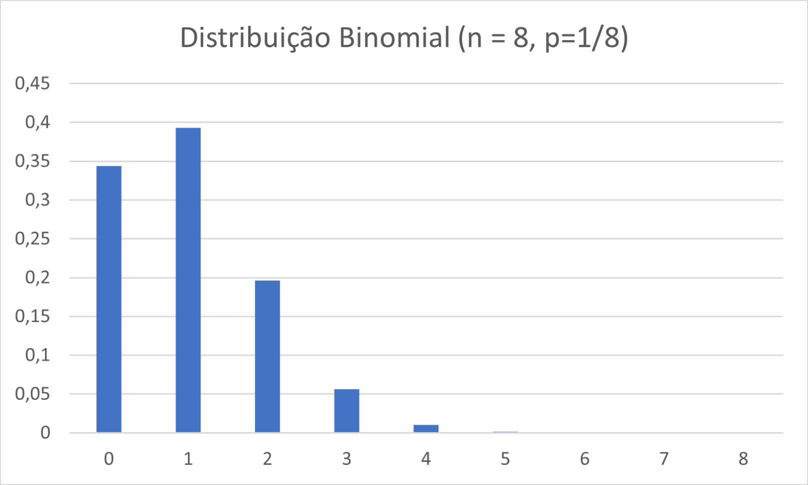
# Distribuição Poisson



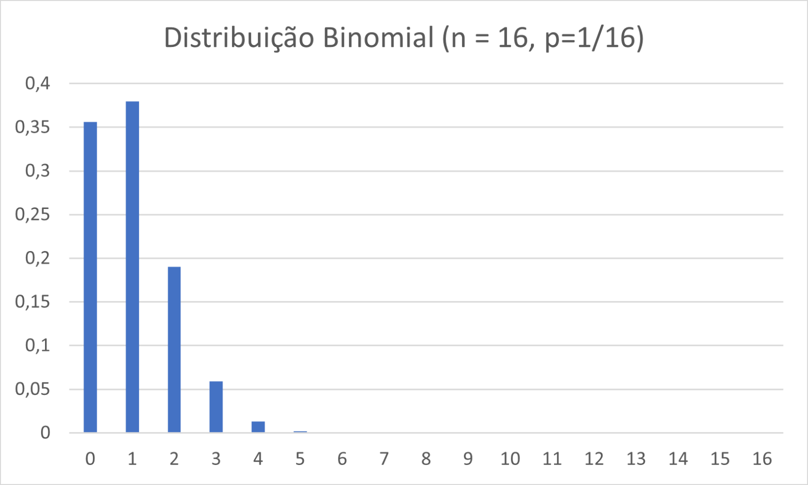
# Distribuição Poisson



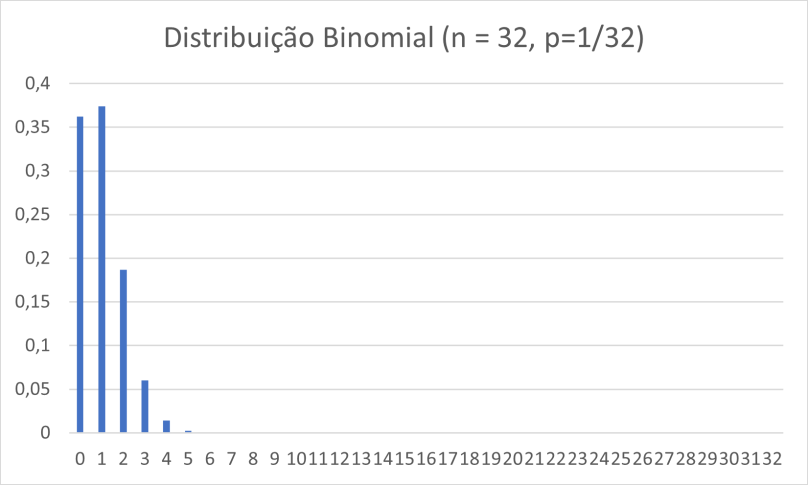
# Distribuição Poisson



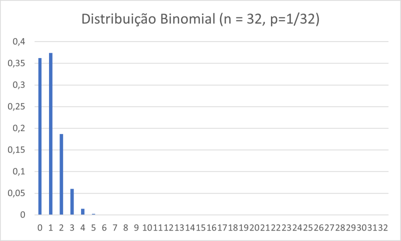
# Distribuição Poisson

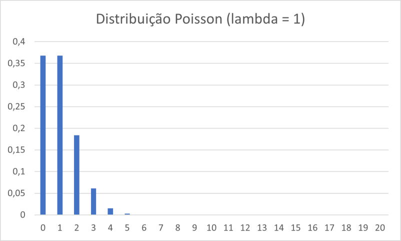


# Distribuição Poisson



# Distribuição Poisson



# Comentários Finais

# Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós lidamos com:

- variáveis aleatórias;
- variáveis aleatórias discretas;
- distribuições uniforme discreta, Bernoulli, binomial e Poisson;
- condições de convergência de distribuições binomiais para uma Poisson.

# Comentários Finais

Na próxima aula nós vamos lidar com:

- distribuições geométrica e hipergeométrica;
- variáveis aleatórias contínuas;
- distribuições uniforme contínua e exponencial;
- outros exemplos de distribuições contínuas.

# Comentários Finais

**ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)**

Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 1.2,1.11,1.12,1.14.

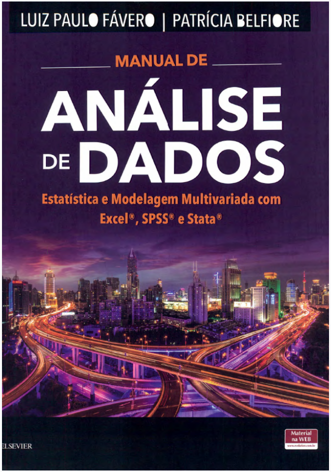
# Comentários Finais

**IMPORTANTE**

Considere resolver o Exercício 1.1 caso você sinta necessidade de relembrar os principais fatos sobre Probabilidade.

# Referências

# Referências



# Bons Estudos!