Jogos Matemáticos - 2022
Lista de Exercícios

Kaique Matias de Andrade Roberto

28 de setembro de 2022

Estes são os Exercícios recomendados para a disciplina. Afim de que você possa extrair o maior proveito possível destes exercícios tenha em mente as seguintes observações:

- esta é a **única** lista de exercícios da disciplina toda;
- esta lista **contém** os exercícios que resolveremos em aula;
- as Seções estão nomeadas de acordo com as aulas (por exemplo, na Seção 10 estão os exercícios recomendados para a Aula 10);
- os exercícios que aparecem em aula estão marcados com (A);
- os exercícios com ($*$) ou ($**$) são exercícios que consideramos mais desafiadores.

0 Noções de Lógica e Conjuntos

Exercício 0.1 (A)**.** Demonstre as equivalências abaixo.

a - $\neg(\neg P) \equiv P$.

b - $P \vee P \equiv P$.

c - $P \wedge P \equiv P$.

d - $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

e - $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

f - $(P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

g - $(P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.

h - $P \to Q \equiv (\neg P) \vee Q$.

i - $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

j - $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$.

k - $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$.

Exercício 0.2 (A)**.** Transforme as sentenças abertas abaixo em sentenças verdadeiras usando quantificadores.

a - $-(-x) = x$.

b - $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$.

c - $\sqrt{x^2} = x$.

d - $5a + 4 \leq 11$.

e - $x^2 \leq x$.

f - $a^2 + b^2 \leq 0$.

Exercício 0.3. Diga qual é a negação de cada uma das sentenças abaixo.

a - O Palmeiras tem mundial.

b - Toda fruta é doce e todo remédio é amargo.

c - Todo dia da semana é segunda-feira.

d - Todo final de semana tem um sábado e um domingo.

e - Todo número inteiro primo é impar.

f - Todo triângulo isóceles é equilátero.

g - Existe um losango que não é um quadrado.

h - Existe um número cuja raíz quadrada é zero.

Exercício 0.4. Quando estamos fora do contexto matemático negar uma sentença pode ser uma tarefa relativamente difícil. Afim de ilustrar isso, escreva a negação das sentenças abaixo (que na verdade são ditados da sabedoria popular).

a - Camarão que dorme, a onda leva.

b - Gato escaldado tem medo de água fria.

c - Mente vazia, oficina do diabo.

d - O que não tem remédio, remediado está.

e - O que os olhos não veem, o coração não sente.

f - Quando o dinheiro fala, a verdade se cala.

g - Para quem está se afogando, jacaré é tronco.

h - Vão-se os anéis e ficam os dedos.

i - Para bom entendedor, meia palavra basta.

j - Se conselho fosse bom, a gente não dava, vendia.

Exercício 0.5 ($*$)**.** Escreva a contra-positiva para as sentenças dos Exercícios 0.3, 0.4 desde que seja possível.

Exercício 0.6. Calcule o conjunto das partes de $A = \{a, b, c, d\}$.

Exercício 0.7. Seja $B = \{a, b, c, d, e\}$. Encontre o conjunto X tal que $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup X$, sendo A o conjunto da questão anterior.

Exercício 0.8 ((A) Propriedades da Inclusão)**.** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $\emptyset \subseteq A$;

ii - $A \subseteq A$;

iii - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Exercício 0.9 ((A) Propriedades da União)**.** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cup A = A$;

ii - $A \cup \emptyset = A$;

iii - $A \cup B = B \cup A$;

iv - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Exercício 0.10 ((A) Propriedades da Intersecção)**.** Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cap A = A$;

ii - Se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$;

iii - $A \cap B = B \cap A$;

iv - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

1 Equações

Exercício 1.1 ((A) Quanto?)**.** Suponha que eu e você temos a mesma quantia em dinheiro. Quanto preciso lhe dar para que você tenha dez reais a mais do que eu?

Exercício 1.2 ((A) O Enigma dos Políticos)**.** Um grupo de cem políticos encontrava-se reunido. Cada político ou era honesto ou era desonesto, e somos informados dos seguintes dois fatos:

1. Pelo menos um dos políticos era honesto.
2. Dados quaisquer dois políticos, pelo menos um dos dois era desonesto.

É possível determinar a partir desses dois fatos, quantos políticos eram honestos e quantos eram desonestos?

Exercício 1.3 ((A) Pinga Velha em Garrafa (nem tão) nova)**.** Uma garrafa de 51 custava dez reais. A pinga valia nove reais a mais do que a garrafa. Quanto valia a garrafa?

Exercício 1.4 (A)**.** O lucro mensal de uma empresa é dado por

$$L = 50Q - 2000,$$

em que Q é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a $R\$5000$?

Exercício 1.5 (A)**.** Discuta os possíveis universos para as equações:

a - $2x + 1 = 0$;

b - $x^3 + 3x - 2 = 0$;

c - $\frac{4x^3}{2} - x^2 + 1 = 0$;

d - $(\sqrt{2})^2 x^8 - x^2 + 4 = 0$.

Exercício 1.6 (A)**.** Resolva as equações:

a - $4x + 6x = 8 + 12$;

b - $-3x + 1 = -8$;

c - $5(x - 2) = 4x + 6$;

d - $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1}{6}$;

e - $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{6}$;

f - $\dfrac{3x}{x+1} = 4 + \dfrac{2x}{2x+2}$;

g - $\dfrac{2x+5}{x-3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{x-3}$;

h - $\dfrac{2y}{5} + \dfrac{5+2y}{3} = 1$.

Exercício 1.7 (A)**.** Resolva as equações:

a - $x^2 - 4x + 3 = 0$;

b - $x^2 - 5x + 4 = 0$;

c - $t^2 - 6t + 8 = 0$;

d - $y^2 - 6y - 3 = 0$;

e - $x^2 - 7x + 12 = 0$;

f - $y^2 - 6y - 3 = 0$;

g - $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

h - $x^4 - 5x^2 + 10 = 0$;

i - $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$;

j - $(x^4 - 1)(x^4 - 12) + 24 = 0$.

Exercício 1.8 (**)**.** Resolva as equações cúbicas reduzidas usando o método de Cardano:

a - $x^3 - 3x + 2 = 0$;

b - $x^3 - 3x + 4 = 0$.

2 Reforço: Mais Equações e Sistemas

Exercício 2.1 (A). Resolva os sistemas:

a - $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$

b - $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$

c - $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=0 \end{cases}$

d - $\begin{cases} -2x+-y=16 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$

e - $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=-2 \end{cases}$

f - $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 18x-12y=5 \end{cases}$

g - $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$

h - $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+2z=-4 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Exercício 2.2 (A). O custo mensal de produção de x camisas de uma fábrica é $C = 5000+15x$. Qual a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é $R\$8000$?

Exercício 2.3 (A). O saldo de uma aplicação financeira após t meses de aplicação é dado por $S = 2000 + 40t$. Após quanto tempo da aplicação o saldo dobra?

Exercício 2.4 (A). O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 10x - 16$, em que x é a quantidade mensal vendida. Para que os valores de x o lucro é nulo? E para qual valor de x o lucro é 9?

Exercício 2.5 (A). A receita diária de um estacionamento para automóveis é $R = 100p - 5p^2$, em que p é o preço cobrado pela diária de um veículo estacionado. Qual o preço que deve ser cobrado para obtermos uma receita diária de $R\$375$?

Exercício 2.6 (A). Um investidor aplicou parte do seu patrimônio de $R\$30000$ em um fundo A e parte no fundo B, por um ano. O fundo A rendeu 10% e o B rendeu 15%. Sabendo-se que o total dos rendimentos foi de $R\$4000$, calcule quanto foi aplicado em cada fundo.

Exercício 2.7 (A). Um investidor aplicou parte do seu patrimônio de $R\$20000$ em um fundo A e parte no fundo B, por um ano. O fundo A rendeu 10% e o B rendeu 20%. Sabendo-se que o total dos rendimentos foi de $R\$2500$, calcule quanto foi aplicado em cada fundo.

Exercício 2.8 (A). Uma empresa pretende gastar $R\$225000$ por ano em propaganda, parte em jornal e parte em televisão. Sabendo-se que a quantia gasta em televisão deve ser quatro vezes maior que a gasta em jornal, obtenha a quantia a ser gasta em televisão.

3 Plano cartesiano e Conceito de Função

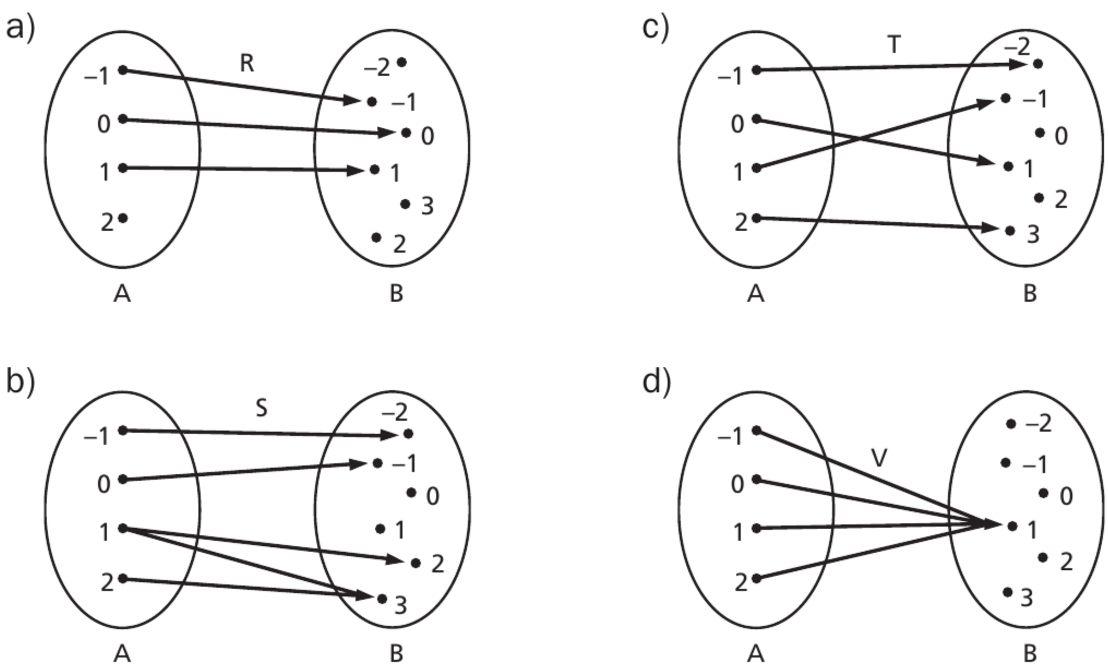
Exercício 3.1 (A)**.** Localize os seguintes pontos no plano cartesiano:

$$A = (2, 0),\ B = (0, -3),\ C = (2, 5), D = (-3, 4),$$
$$E = (-7, -3),\ F = (4, -5),\ G = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right),\ H = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

Exercício 3.2 (A)**.** Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ descreva e represente $A \times B$ e $B \times A$.

Exercício 3.3 (A)**.** Para $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$ represente $A \times B$ e $B \times A$.

Exercício 3.4 (A)**.** Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.



Exercício 3.5 (A)**.** Seja f a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

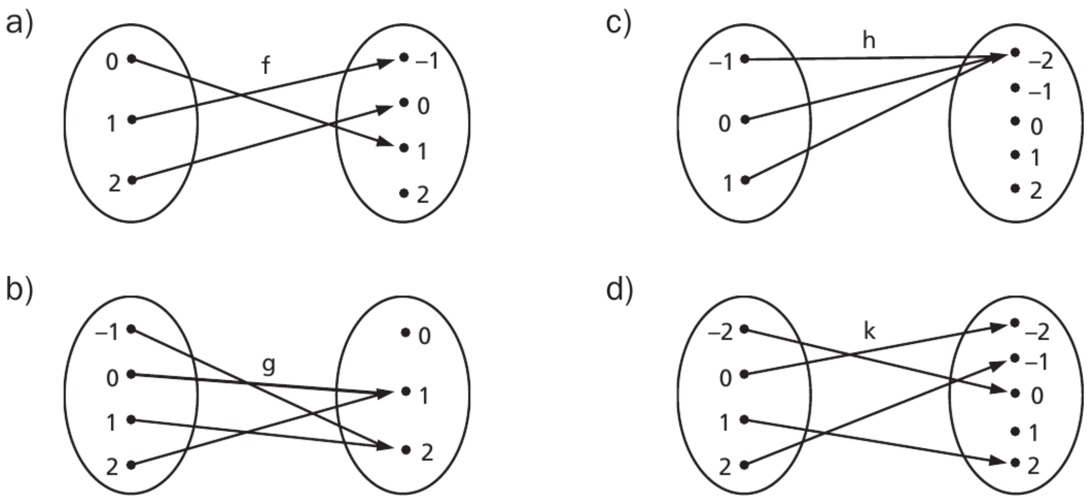
a - $f(2)$;

b - $f(-3)$;

c - $f(0)$;

d - $f(3/2)$.

Exercício 3.6 (A)**.** Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:



Exercício 3.7 (A). Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

a- Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b- Calcule $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.

Exercício 3.8 (A). Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$.

a- Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

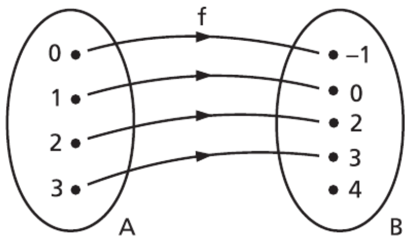
b- Calcule $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.

c- Esboce o gráfico de $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.

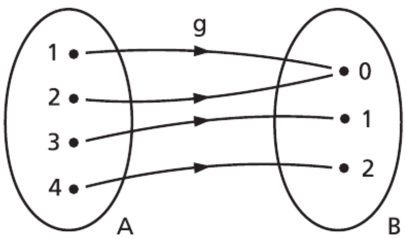
d- Indique qual das funções $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

Exercício 3.9 (A). Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora.

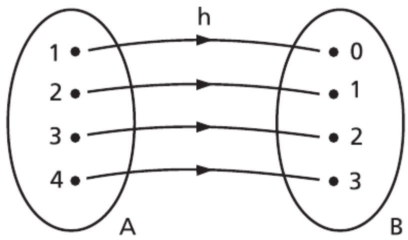
a)



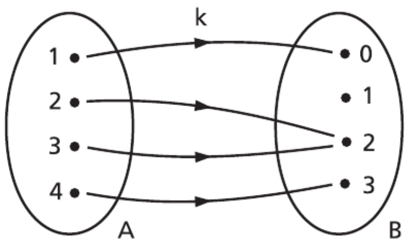
b)



c)



d)



Exercício 3.10 (A)**.** Abaixo há uma lista de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

a - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

b - $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

c - $f(x) = x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

d - $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$.

Exercício 3.11 $(*)$**.** Determine os maiores domínios e contra-domínios possíveis para uma função considerando as regras abaixo. Após isso, determine a imagem de tal função:

a - $f(x) = x^2$;

b - $g(x) = 1 - x$;

c - $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

d - $z(t) = \dfrac{t^2}{1 - t}$;

e - $y(x) = x^3$;

f - $w(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Exercício 3.12 $(*)$**.** Quais dentre as funções do Exercício 3.11 são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras?

Exercício 3.13 $(*)$**.** Calcule a inversa das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a - $f(x) = 2x + 3$;

b - $g(x) = \frac{4x-1}{3}$;

c - $h(x) = x^3 + 2$;

d - $p(x) = (x-1)^3 + 2$.

4 Função Afim I

Exercício 4.1 (A)**.** Para as funções afim abaixo identifique a e b:

a - $y = 3x + 2$;

b - $y = -2x + 1$;

c - $y = x - 3$;

d - $y = -3x - 4$;

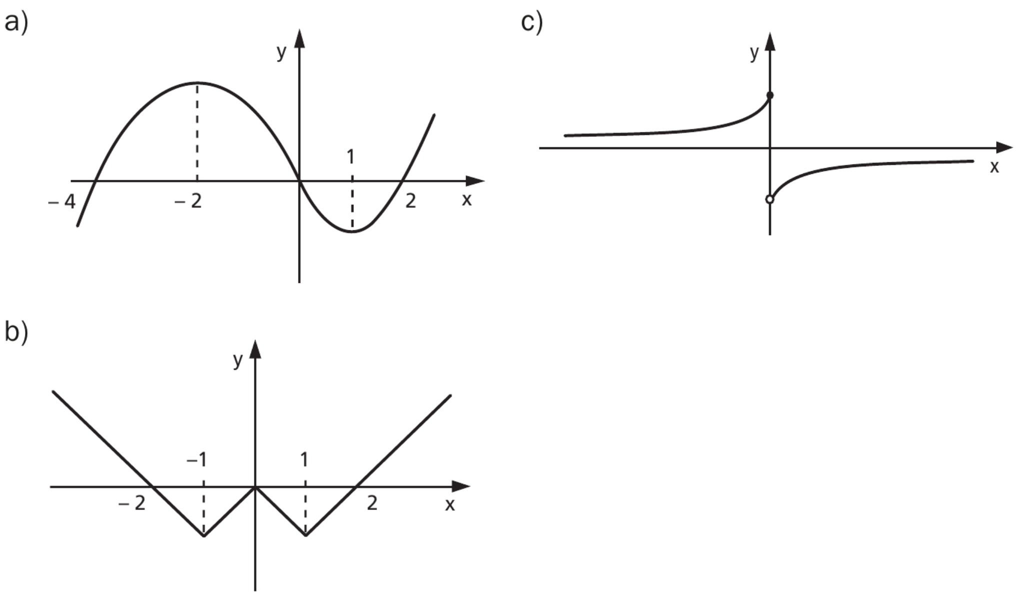
e - $y = \frac{2x-3}{2}$;

f - $y = \frac{4-3x}{2}$.

Exercício 4.2 (A)**.** Construa o gráfico das funções do Exercício 4.1.

Exercício 4.3 (A)**.** Calcule os zeros das funções do Exercício 4.1.

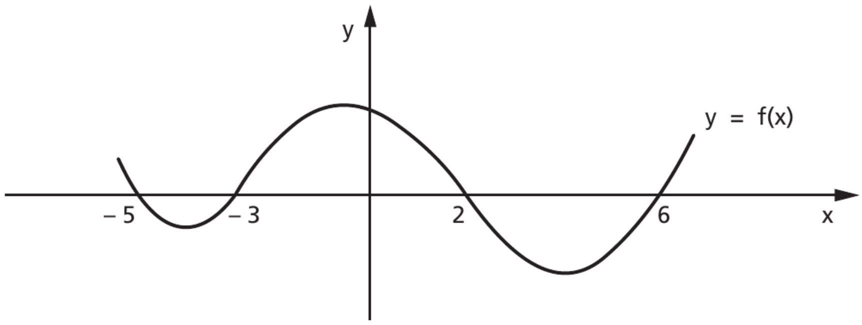
Exercício 4.4 (A)**.** Com base nos gráficos abaixo, de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, especifique os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.



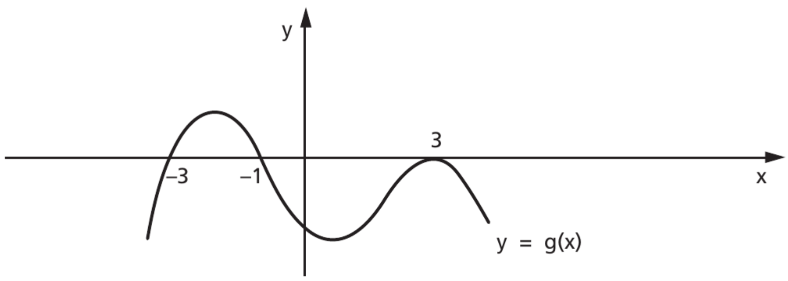
Exercício 4.5 (A)**.** Classifique as funções do Exercício 4.1 como crescentes/decrescentes.

Exercício 4.6 (A)**.** Estude o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.

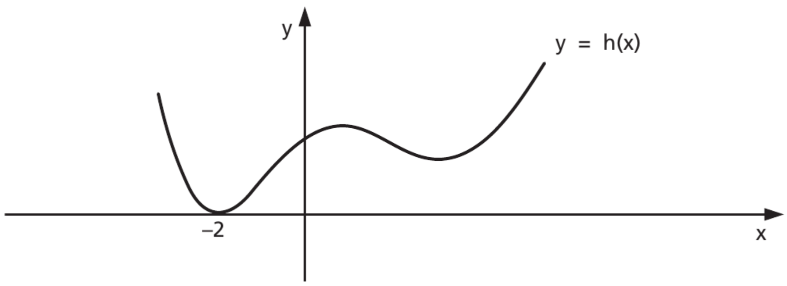
a)



b)



c)



Exercício 4.7 (A)**.** Estude o sinal das funções do Exercício 4.1 como crescentes/decrescentes.