Jogos Matemáticos - Aula 01

Equações e Sistemas

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- aprendemos alguns conceitos do vocabulário matemático;
- recapitulamos conceitos básicos de lógica (sentenças, conectivos, quantificadores, equivalência lógica);
- tivemos um primeiro contato com a ideia de demonstração;
- recapitulamos conceitos básicos da teoria dos conjuntos (conjunto, subconjunto, partes, união, intersecção, diferença).

Equações

Equações

Os seguinte problema foi extraído do Livro A Dama ou o Tigre? de R. Smullyan:

Equações

Exercício 2.1 (Quanto?)

Suponha que eu e você temos a mesma quantia em dinheiro. Quanto preciso lhe dar para que você tenha dez reais a mais do que eu?

Exercício 2.2 (O Enigma dos Políticos)

Um grupo de cem políticos encontrava-se reunido. Cada político ou era honesto ou era desonesto, e somos informados dos seguintes dois fatos:

1. Pelo menos um dos políticos era honesto.
2. Dados quaisquer dois políticos, pelo menos um dos dois era desonesto.

É possível determinar a partir desses dois fatos, quantos políticos eram honestos e quantos eram desonestos?

Exercício 2.3 (Pinga Velha em Garrafa (nem tão) nova)

Uma garrafa de 51 custava dez reais. A pinga valia nove reais a mais do que a garrafa. Quanto valia a garrafa?

Equações

Agora vamos para um exemplo mais próximo da profissão de vocês:

Exercício 2.4

O lucro mensal de uma empresa é dado por

$$L = 50Q - 2000,$$

em que Q é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a $R\$5000$?

Equações

Precisamos de uma maneira sistemática de lidar com esses problemas.

Equações

Definição 2.5

Dado um conjunto U, uma **equação algébrica** com coeficientes em U na variável x é uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n \in U$. Se $a_n \neq 0$ dizemos que a **equação tem grau** n.

Exemplo 2.6

Podemos pensar em

$$3x^3 + x - 1 = 0$$

como uma equação algébrica com coeficientes em $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Q}$ (ou ainda $\mathbb{R}$) de grau 3.

Exemplo 2.7

Podemos pensar em

$$\frac{3x^4}{2} + 2x^2 - x = 0$$

como uma equação algébrica com coeficientes em $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$ de grau 4. Note que esta **não é** uma equação com coeficientes em $\mathbb{Z}$ (por quê?).

Equações

Exemplo 2.8

Podemos pensar em

$$x^5 + 3x^3 - x^2 + 4x - \sqrt{2} = 0$$

como uma equação algébrica com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau 5. Note que esta **não é** uma equação com coeficientes em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ (por quê?).

Equações

Para nós, se o universo de uma equação não for especificado, vamos sempre considerar o **maior universo possível** (contido em $\mathbb{R}$).

Exercício 2.9

Discuta os possíveis universos para as equações:

a - $2x + 1 = 0$;

b - $x^3 + 3x - 2 = 0$;

c - $\frac{4x^3}{2} - x^2 + 1 = 0$;

d - $(\sqrt{2})^2 x^8 - x^2 + 4 = 0$.

Equações

Definição 2.10

Seja $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação com coeficientes em U. Uma **solução** é um elemento $\alpha \in U$ tal que

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Equações

Exemplo 2.11

Para a equação $2x^2 + 2 = 0$ em $\mathbb{Z}$, o elemento $1 \in \mathbb{Z}$ é uma solução. O elemento $-1 \in \mathbb{Z}$ é outra solução.

Equações

As soluções de uma equação **dependem** do universo que está sendo considerado.

Exemplo 2.12

Considere a equação $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ em $\mathbb{Z}$. Temos que 1 e -1 são soluções. Se considerarmos a mesma equação em $\mathbb{Q}$, temos (além dessas) as soluções $1/2$ e $-1/2$.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Até agora não temos um processo sistemático para calcular as soluções de uma equação.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Vamos lidar com isso em etapas.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Teorema 3.1

Para a equação do primeiro grau $ax + b = 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$ temos uma única solução

$$\alpha = -\frac{b}{a}$$

Exercício 3.2

Resolva as equações:

a - $4x + 6x = 8 + 12$;

b - $-3x + 1 = -8$;

c - $5(x - 2) = 4x + 6$;

d - $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1}{6}$.

Para a equação do segundo grau em $\mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

considere

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Teorema 3.3

Para a equação do segundo grau em $\mathbb{R}$ $ax^2 + bx + c = 0$:

- Se $\Delta < 0$ então a equação não tem soluções reais.
- Se $\Delta = 0$ então a única solução da equação é

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

- Se $\Delta > 0$ então a equação admite duas soluções

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } \alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercício 3.4

Resolva as equações:

a - $x^2 - 4x + 3 = 0$;

b - $x^2 - 5x + 4 = 0$;

c - $t^2 - 6t + 8 = 0$;

d - $y^2 - 6y - 3 = 0$.

Definição 3.5

A equação em $\mathbb{R}$ do tipo

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

é chamada **biquadrada**.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Para resolver uma equação biquadrada basta realizar a substituição $z = x^2$ e resolver a equação de segundo grau correspondente.

Exercício 3.6

Resolva as equações biquadradas:

a - $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b - $x^4 - 5x^2 + 10 = 0$;

c - $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$;

d - $(x^2 - 1)(x^2 - 12) + 24 = 0$.

O problema de fornecer/caracterizar as soluções de uma equação algébrica geral

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ficou em aberto por mais de 2000 anos!

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Após a formulação das fórmulas de Bháskara (algo em torno do Século V A.C), só houve avanços na solução desse problema no Século XVI.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

No final do Século XVI, os matemáticos Cardano, Tartaglia e Scipiano del Ferro calcularam as soluções da equação cúbica

$$z^3 + pz + q = 0.$$

As soluções são:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$z = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Por volta da mesma época, o matemático L. Ferrari desenvolveu uma fórmula para calcular as soluções de uma equação de grau 4 (com uma fórmula ainda mais sinistra).

Equações de Primeiro e Segundo Grau

Em seguida, uma série de pessoas atacaram o problema de encontrar as soluções de uma equação de grau 5.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

No Século XIX, o matemático E. Galois afirmou que não era possível obter uma fórmula para as soluções das equações de grau maior que 5. Mas teve uma morte trágica e não pode desenvolver as suas teorias.

Apenas no século XX, com os trabalhos de Emmy Noether e Emil Artin que houve uma resposta definitiva e satisfatória para o problema.

Equações de Primeiro e Segundo Grau

E portanto, para equações de grau maior ou igual a 5, não existe uma fórmula (tipo a fórmula de Bháskara) para calcular as soluções da equação.

Sistemas Lineares

Definição 4.1 (Equação Linear)

Uma **equação linear** é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ e $x_1, ..., x_n$ são variáveis. Uma **solução** dessa equação é uma sequência de n números reais $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$ de tal forma que a afirmação

$$a_1d_1 + a_2d_2 + ... + a_nd_n = b$$

seja verdadeira.

Exemplo 4.2

- A equação $x + y = 2$ é linear. Temos soluções $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$, $y = 2$.

Sistemas Lineares

- A equação $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ é linear. Temos soluções $x = 1,\ y = 1,\ z = 2)$ e $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$.

Sistemas Lineares

- A equação $v^2 + w = 1$ **não** é linear. Apesar disso, $v = 1$, $w = 0$ e $v = 0$, $w = 1$ são soluções.

Definição 4.3 (Sistema Linear)

Um **sistema linear de m equações e n incógnitas** $(m, n \in \mathbb{N})$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Uma **solução** de um sistema linear é uma sequência $d_1, ..., d_n$ de números reais que é solução simultânea de todas as n-equações.

Um sistema linear é comumente representado da seguinte maneira:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Assim, $d_1, ..., d_n$ é solução do sistema S se as afirmações

$$S : \begin{cases} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + ... + a_{1n}d_n = b_1 \\ a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + ... + a_{2n}d_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}d_1 + a_{n2}d_2 + ... + a_{nn}d_n = b_n \end{cases}$$

forem verdadeiras.

Aqui focaremos em sistemas onde $m = n$ e $m \leq 3$, isto é, sistemas de no máximo três equações e três incógnitas.

Exemplo 4.4

Dado o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + 0z = 6 \end{cases}$$

uma solução é $x = 0$, $y = 3$ e $z = 4$. Uma outra solução é $x = 6$, $y = 0$, $z = -11$.

Definição 4.5

Dizemos que um sistema linear S é:

- **incompatível (ou impossível)** se S não admite solução;
- **compatível indeterminado (ou possível indeterminado)** se S admite mais de uma solução;
- **compatível determinado (ou possível determinado)** se S admite uma única solução.

Exemplo 4.6

O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + 0z = 6 \end{cases}$$

é compatível indeterminado (acabamos de exibir duas soluções deste sistema).

Exemplo 4.7

O sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

é compatível determinado: sua solução única é $x = 1$, $y = 2$.

Exemplo 4.8

Já o sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

é incompatível.

Definição 4.9 (Discussão, Resolução de Sistemas)

Discutir um sistema linear S significa classificar S como incompatível, compatível determinado ou compatível indeterminado. **Resolver** um sistema linear S significa determinar o conjunto solução de S (que pode ser eventualmente vazio).

O grande objetivo aqui é explicitar um método para discutir e resolver sistemas 2×2 e 3×3.

Os sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas que apresentam uma única solução (chamados determinados) são habitualmente resolvidos por substituição e adição.

Exemplo 4.10

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$$

pelo método da substituição.

Exemplo 4.11

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases}$$

pelo método da adição.

Sistemas Lineares

Podemos extrapolar os mesmos métodos para a solução de um sistema de equações 3×3.

Exemplo 4.12

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

pelo método da substituição.

Para sistemas com mais de duas equações, o método da adição é chamado **escalonamento**.

Exemplo 4.13

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

pelo método do escalonamento.

Ou seja, em geral é mais vantajoso resolver um sistema linear pelo método do escalonamento.

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- aprendemos o que é uma equação algébrica;
- aprendemos a resolver equações de primeiro e segundo grau;
- aprendemos que não existe uma fórmula para equações de grau maior que 4;
- aprendemos a resolver sistemas lineares 2×2 e 3×3.

Comentários Finais

Nas próximas aulas nós vamos focar em:

- plano cartesiano;
- relações;
- funções.

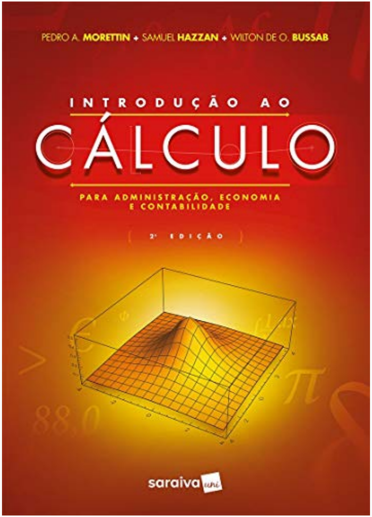
Comentários Finais

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

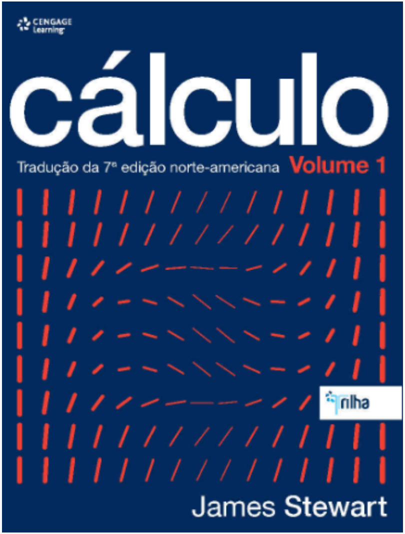
Em grupos de até 5 integrantes resolva os Exercícios 1.6, 1.7 e 1.9.

Referências

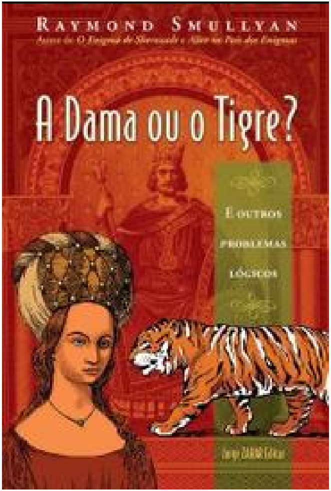
Referências

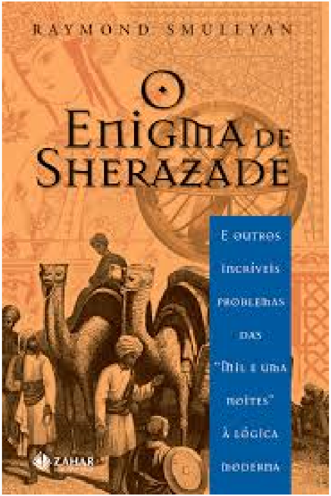


Referências

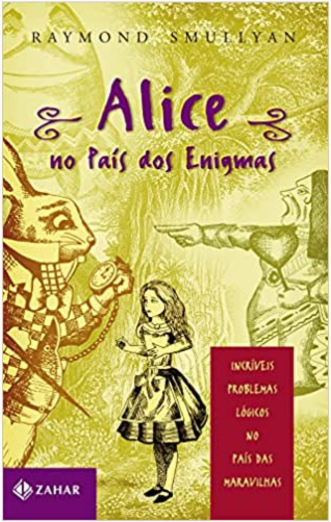


Referências

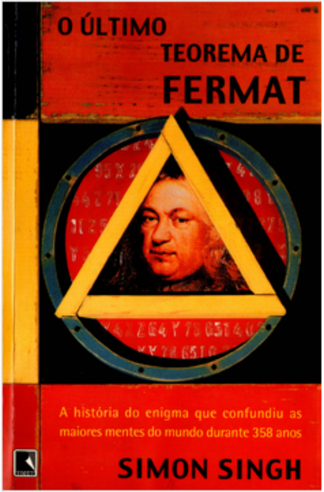



RAYMOND SMULLYAN
O Enigma de Sherazade
E outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna
ZAHAR

Referências



Referências



Bons Estudos!