

Jogos Matemáticos - Aula 09

Logaritmos, Funções Exponenciais e Logarítmicas

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

1. Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores
2. Logaritmo
3. Propriedades
4. Função Exponencial e Logarítmica
5. Comentários Finais
6. Referências

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- recapitulamos a definição de potenciação e radiciação;
- lidamos com vários tipos de potências e raízes;
- simplificamos vários tipos de potências e raízes;
- comentamos sobre potências de expoente real (e irracional).

Logaritmo

Como lidar com equações do tipo

$$2^x = 3?$$

Definição 2.1

Sejam a, b números reais positivos com $a \neq 1$. Chama-se **logaritmo** de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b . Em símbolos:

$$\log_b a = x \text{ se e só se } a^x = b.$$

Em $\log_b a = x$, dizemos:

- a é a **base** do logaritmo;
- b é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Exemplo 2.2

Calcule:

$$a - \log_2 8;$$

$$b - \log_3 \frac{1}{9};$$

$$c - \log_5 5;$$

$$d - \log_4 8;$$

$$e - \log_{81} 3;$$

$$f - \log_{27} 81;$$

$$g - \log_{125} 25;$$

$$h - \log_{\frac{1}{4}} 32.$$

Com as restrições impostas ($a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$), dados a e b , existe um único $x = \log_a b$.

Definição 2.3

Chamamos de sistema de logaritmos de base a o conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0 < a \neq 1$).

Exemplo 2.4 (Sistema Decimal)

É o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos vulgares ou de Briggs, referência a Henry Briggs, matemático inglês (1556-1630), quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos de base 10, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1000 em 1617. Indicamos o logaritmo decimal pela notação $\log x$.

Exemplo 2.5 (Sistema Neperiano)

É o sistema de base e ($e \approx 2,71828...$ é um número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de John Napier, matemático escocês (1550-1617), autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome “natural” se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e . Indicamos o logaritmo decimal pela notação $\ln x$.

Propriedades

Agora vamos demonstrar as principais propriedades dos logaritmos.

P0

$$\log_a 1 = 0.$$

P1

$$\log_a a = 1.$$

P2

$$a^{\log_a b} = b.$$

P3

$\log_a b = \log_a c$ se e sólo se $b = c$.

P4

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

P5

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

P6

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Exemplo 3.1

Desenvolva aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b, c são reais positivos):

$$a - \log_2 \left(\frac{2ab}{c} \right);$$

$$b - \log_5 \left(\frac{5a}{bc} \right);$$

$$c - \log_3 \left(\frac{a^3 b^2}{c^4} \right);$$

$$d - \log \left(\frac{a^3}{b^2 \sqrt{c}} \right);$$

$$e - \log_2 \left(\frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} \right);$$

$$f - \log_3 \left(\frac{ab^3}{c \sqrt[3]{a^2}} \right).$$

Exemplo 3.2

Desenvolva aplicando as propriedades dos logaritmos (a, b, c são reais positivos):

$$a - \log \sqrt{\frac{2ab}{c}};$$

$$b - \log \sqrt[3]{\frac{a}{b^2 \sqrt{c}}};$$

$$c - \log_2 \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{b^3 \sqrt[3]{a^2 b}}};$$

$$d - \log \left(\sqrt[3]{\frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}}} \right)^2.$$

Há ocasiões em que logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente.

Mudança de Base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Exemplo 3.3

Usando a fórmula da mudança de base e a tabela de logaritmos calcule:

$$a - \log_3 5;$$

$$b - \log_4 27;$$

$$c - \log_{25} 1,41;$$

$$d - \log_9 20;$$

$$e - \log_2 7;$$

$$f - \log_2 1,001.$$

Função Exponencial e Logarítmica

Definição 4.1

Dado um número real positivo a com $a \neq 1$, chamamos **função exponencial** de base a , a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = a^x$.

Definição 4.2

Dado um número real positivo a com $0 < a \neq 1$, chamamos **função logarítmica** de base a , a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = \log_a x$.

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

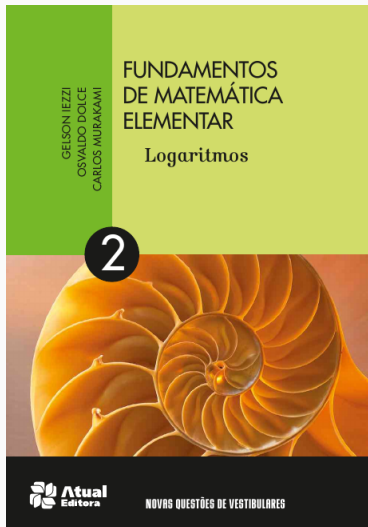
- definimos o conceito de logaritmo;
- demonstramos as principais propriedades;
- lidamos com a mudança de base;
- fizemos alguns comentários sobre funções exponenciais e logarítmicas.

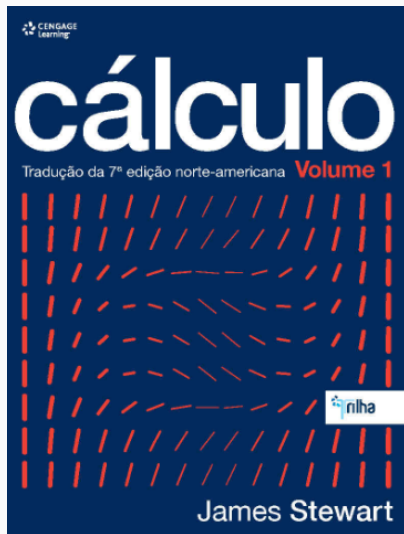
Nas próximas aulas nós faremos uma última aula de exercícios antes da prova N2.

Exercícios Recomendados para a Aula de Hoje

Em grupos de até 5 integrantes resolva os Exercícios 9.1-9.4.

Referências





Bons Estudos!

