Jogos Matemáticos - Aula 00

Fundamentos: Lógica, Conjuntos

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Vocabulário Matemático

Vocabulário Matemático

Definição

Termo usado para dar nomes aos objetos matemáticos

Vocabulário Matemático

Noção Primitiva

Objetos Matemáticos cuja defincção e/ou existência são aceitas sem a necessidade de justificativas

Vocabulário Matemático

Axioma

Propriedades que envolvem as Noções Primitivos, aceitas sem a necessidade de prova ou justificativa

Vocabulário Matemático

Teorema
Proposição
Corolário
Lema

Afirmações matemáticas que precisam de prova/demonstração

Vocabulário Matemático

Em geral, Teorema $>$ Proposição $>$ Lema.

Em geral um Corolário é um resultado que segue como consequência imediata de um Teorema ou Proposição.

Sentenças

Sentenças

Definição 2.1 (Sentenças)

Uma **sentença** *é uma oração declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.*

Sentenças

Toda sentença apresenta três características obrigatórias:

1. sendo oração tem sujeito (por exemplo, um indivíduo ou objeto) e predicado (por exemplo, algo acontecendo com esse indivíduo ou objeto);
2. é declarativa (não exclamativa nem interrogativa);
3. tem um e somente um dos dois valores lógicos: ou é Verdadeira (V) ou é Falsa (F).

Sentenças

P: Vermelho, branco e azul são cores.

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

P é sentença?

Sentenças

Q: Hoje é segunda-feira?

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

Q é sentença?

Sentenças

R: Um, dois, três, quatro.

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

R é sentença?

Sentenças

S: Vá arrumar o seu quarto.

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

S é sentença?

Sentenças

T: Sete é maior que cinco.

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

T é sentença?

Sentenças

U: Quatro é um número negativo.

- Tem sujeito e predicado.
- É declarativa.
- É Verdadeira ou Falsa.

U é sentença?

Conectivos

Conectivos

Usamos **conectivos** para produzir ou juntar sentenças.

Conectivos

Definição 3.1 (Negação)

Dada uma sentença P, a **negação de** *P, notação $\neg P$, é a sentença que tem valor verdade oposto ao de P.*

P	$\neg P$
V	F
F	V

Conectivos

P: Setembro é um mês par.

$\neg P$:

Conectivos

Q: $2+3=7$.

$\neg Q$:

Conectivos

R: Quatro é múltiplo de dois.

$\neg R$:

Definição 3.2 (Conjunção)

Dadas sentença P e Q, a **conjunção** $P \wedge Q$ *("P e Q") é a sentença satisfazendo a seguinte tabela verdade:*

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definição 3.3 (Disjunção)

Dadas sentença P e Q, a **disjunção** $P \vee Q$ *("P ou Q") é a sentença satisfazendo a seguinte tabela verdade:*

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos

P: $2 + 3 = 5$.
Q: $5 > 4$.

$P \wedge Q$:

$P \vee Q$:

Conectivos

P: $2 + 2 = 5$.
Q: 17 é um número primo.
R: $1 < 3$.

$P \wedge (Q \vee R)$:

Definição 3.4 (Implicação)

Dadas sentença P e Q, a **implicação** $P \rightarrow Q$ *(”P implica Q”) é a sentença satisfazendo a seguinte tabela verdade:*

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos

São sinônimos de $P \to Q$:

- P implica Q;
- se P então Q;
- P é condição suficiente para Q;
- Q é condição necessária para P.

Definição 3.5 (Equivalência)

Dadas sentença P e Q, a **equivalência** $P \leftrightarrow Q$ *("P se e só se Q") é a sentença satisfazendo a seguinte tabela verdade:*

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conectivos

São sinônimos de $P \leftrightarrow Q$:

- P é equivalente a Q;
- P se e só se Q;
- P é condição necessária e suficiente para Q;
- Q é condição necessária e suficiente para P;
- Se P então Q e reciprocamente.

Conectivos

P: $2 + 3 = 5$.
Q: $5 > 4$.

$P \to Q$:

$P \leftrightarrow Q$:

Conectivos

P: $2 + 2 = 5$.
Q: 17 é um número primo.
R: $1 < 3$.

$(P \vee Q) \rightarrow R$:

Conectivos

P: $2 + 2 = 5$.
Q: 17 é um número primo.
R: $1 < 3$.

$P \leftrightarrow (\neg Q \to R)$:

Conectivos

P: $2 + 2 = 5$.
Q: 17 é um número primo.
R: $1 < 3$.

$(P \to \neg Q) \wedge (Q \to R)$:

Quantificadores

Quantificadores

Há expressões como

$$x + 1 = 2;\ y \geq 3;\ z \neq 0$$

que contém **variáveis** e cujo valor lógico (V ou F) depende do valor atribuído à variável.

Quantificadores

Orações que contém variáveis são chamadas **sentenças abertas**. Tais orações **não são** sentenças, pois seu valor lógico (V ou F) depende do valor dado às variáveis.

Quantificadores

Há duas maneiras de transformar sentenças abertas em sentenças:

1. atribuir valores às variáveis;
2. utilizar quantificadores.

Definição 4.1 (Quantificador Universal)

O **quantificador universal** $\forall$ *transforma uma sentença aberta* $P(x)$ *em uma sentença do tipo* $\forall\, x\, P(x)$ *("para todo x vale* $P(x)$*"). A sentença* $\forall\, x\, P(x)$ *é verdadeira se para todo x (em um universo fixado), a sentença* $P(x)$ *for verdadeira.*

Quantificadores

Sinônimos de $\forall x\, P(x)$:

- qualquer que seja x vale $P(x)$;
- para todo x vale $P(x)$;
- para cada x vale $P(x)$.

Definição 4.2 (Quantificador Existencial)

O **quantificador existencial** $\exists$ *transforma uma sentença aberta* $P(x)$ *em uma sentença do tipo* $\exists\, x\, P(x)$ *("existe* x *tal que* $P(x)$*"). A sentença* $\exists\, x\, P(x)$ *é verdadeira se existe algum* x *(em um universo fixado) tal que a sentença* $P(x)$ *for verdadeira.*

Quantificadores

Sinônimos de $\exists x\, P(x)$:

- existe x tal que vale $P(x)$;
- existe um x tal que vale $P(x)$;
- existe ao menos um x tal que vale $P(x)$.

Quantificadores

P: O mês x tem 31 dias.

$\forall\, x\, P(x)$:

$\exists\, x\, P(x)$:

Quantificadores

Q: $x + 1 = 7$.

$\forall x\, Q(x)$:

$\exists x\, Q(x)$:

Equivalência Lógica

Equivalência Lógica

Definição 5.1 (Equivalência Lógica)

Duas sentenças P *e* Q *são* **logicamente equivalentes** *quando* P *e* Q *têm sempre o mesmo valor lógico, isto é,* P *e* Q *tem a mesma tabela-verdade. Se este é o caso, escreveremos* $P \equiv Q$.

Equivalência Lógica

Exemplo 5.2

Mostre as equivalências lógicas:

a- $P \equiv \neg\neg P$;

b- $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$;

c- $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$.

O que é uma Demonstração?

O que é uma Demonstração?

Essencialmente, todos os resultados em matemática (ou seja, os teoremas, proposições, lemas e corolários) são da forma

hipótese(s) implica(m) tese.

Dito de outra maneira, os resultados são da forma: partindo de alguns pressupostos (**hipóteses**) posso concluir a **tese**.

O que é uma Demonstração?

Quais são estes pressupostos? Eles podem estar explicitamente escritos no enunciado do resultado ou subentendidos. Por exemplo, não vamos escrever toda a hora os axiomas da teoria que estamos estudando. Eles são automaticamente assumidos como hipóteses.

O que é uma Demonstração?

Resultados provados anteriormente também podem ser assumidos como hipóteses. (A menos que haja menção explícita de que não devam ser usados!)

O que é uma Demonstração?

O **processo de demonstrar** um resultado basicamente é partir dessas hipóteses e, mediante raciocínios elementares, ir obtendo conclusões intermediárias, até chegar à conclusão desejada.

O que é uma Demonstração?

Uma **demonstração** é uma lista de evidências de que a afirmação do teorema é verdadeira.

O que é uma Demonstração?

Note que, por mais que os termos "raciocínio elementar", "conclusão intermediária", "lista de evidência"sejam até certo ponto auto explicativos, eles à rigor precisariam de uma definição formal na linguagem que estamos usando (seja ela por exemplo, a da Teoria dos Conjuntos ou da Lógica de Primeira Ordem).

O que é uma Demonstração?

A formalização de tudo isso foge (e muito) do escopo deste curso. Vamos então, adotar uma perspectiva compatível com os nossos interesses, e descrever (de maneira "ingênua") algumas técnicas que usaremos para realizar demonstrações conforme elas forem surgindo durante o curso.

O que é uma Demonstração?

Dentre os vários métodos de demonstração, destacam-se os três abaixo:

- Demonstração direta;
- Demonstração por Absurdo;
- Demonstração por Contrapositiva;
- Demonstração por Indução Finita.

Conjunto

Conjunto

Na Teoria dos Conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas **noções primitivas**:

- Conjunto;
- Elemento;
- Pertinência entre Elemento e Conjunto.

Conjunto

São sinônimos de Conjunto:

- Agrupamento;
- Coleção;
- Família.

Exemplo 7.1

- *O conjunto V das vogais:*

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Conjunto

- O conjunto f dos dias do final de semana:

$$f = \{\text{sábado, domingo}\}.$$

Conjunto

É comum descrever um conjunto por uma propriedade que caracteriza **todos** os seus elementos:

Conjunto

Exemplo 7.2

- $A = \{z : z \text{ é dia do final de semana}\} = \{\text{sábado, domingo}\};$

Conjunto

- $x = \{E : E \text{ é estado da região sudeste}\} = \{\text{São Paulo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, Espírito santo}\}$.

Conjunto

Escreveremos "$x \in A$" para indicar que "x é um elemento do conjunto A". Escreveremos "$x \notin A$" para indicar que "x não é um elemento do conjunto A".

Conjunto

Exemplo 7.3

- $\textit{Corinthians} \in \{x : x \text{ é time que tem Mundial}\}$;

Conjunto

- Palmeiras $\notin \{x : x \text{ é time que tem Mundial}\}$.

Conjunto

- $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Conjunto

- $\{2\} \in \{1, \{2\}\}$.

Definição 7.4 (Axioma do Vazio)

Chama-se **conjunto vazio**, *notação* $\emptyset$, *aquele que não possui elementos. A existência do conjunto vazio é um dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos (chamado* **Axioma do Vazio***).*

Conjunto

Exemplo 7.5

- $\{x : x \neq x\} = \emptyset$;
- $\{z : z \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$;
- $\{w : w < 0 \text{ e } w > 0\} = \emptyset$.

Definição 7.6 (Subconjunto)

Um conjunto A *é* **subconjunto** *de* B *se e só se todo elemento de* A *for elemento de* B*. Se este for o caso, denotamos* $A \subseteq B$*. Em símbolos,*

$$A \subseteq B \text{ se e só se } \forall x (x \in A \to x \in B).$$

Exemplo 7.7

- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$;

Conjunto

- $\{2, 4\} \subseteq \{x : x \text{ é inteiro par}\}$;

Conjunto

- $\{a\} \subseteq \{a\}$ mas $\{a\} \notin \{a\}$;

Conjunto

- $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ e $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$.

Conjunto

Definição 7.8 (Axioma da Extensionalidade)
Dados conjuntos A e B, vale que $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Lema 7.9 (Propriedades da Inclusão)

Sejam A, B e C conjuntos. Valem as seguintes propriedades:

i - $\emptyset \subseteq A$;

ii - $A \subseteq A$;

iii - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Definição 7.10 (Conjunto das Partes)

Dado um conjunto A chama-se **conjunto das partes de** A*, notação $\mathcal{P}(A)$, aquele que é formado por todos os subconjuntos de A.*

Conjunto

Em símbolos,

$$X \in \mathcal{P}(A) \text{ se e só se } X \subseteq A.$$

Ou ainda,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Conjunto

Exemplo 7.11
Vamos escrever o conjunto das partes para os conjuntos abaixo:

- $A = \{a, b\}$.
- $B = \{a, b, c\}$.

União, Interseção, Diferença

Definição 8.1 (União)

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **união (ou reunião)** *de A e B, notação $A \cup B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B. Em símbolos,*

$$x \in A \cup B \text{ se e só se } (x \in A) \vee (x \in B).$$

União, Interseção, Diferença

Definição 8.2 (Interseção)

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **interseção (ou intersecção)** *de A e B, notação $A \cap B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B. Em símbolos,*

$$x \in A \cap B \textit{ se e só se } (x \in A) \wedge (x \in B).$$

União, Interseção, Diferença

Exemplo 8.3

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$;
- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$;

União, Interseção, Diferença

- $\{a, b, d\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$;
- $\{a, b, d\} \cap \{c, d, e\} = \{d\}$.

Lema 8.4 (Propriedades da União)

Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

i - $A \cup A = A$;

ii - $A \cup \emptyset = A$;

iii - $A \cup B = B \cup A$;

iv - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Lema 8.5 (Propriedades da Interseção)

Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

i - $A \cap A = A$;

ii - *Se* $A \subseteq B$ *então* $A \cap B = A$;

iii - $A \cap B = B \cap A$;

iv - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Definição 8.6

Diremos que dois conjuntos A e B são **disjuntos** *se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 8.7 (Diferença)

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença** *de A e B, notação $A \setminus B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem à B. Em símbolos,*

$$x \in A \setminus B \text{ se e só se } (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Lema 8.8 (Propriedades da Diferença)

Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer com $B, C \subseteq A$. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \setminus A = \emptyset$ *e* $A \setminus \emptyset = A$.
2. $B \cup (A \setminus B) = A$ *e* $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$.
3. $A \setminus (A \setminus B) = B$.
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Conjuntos Numéricos

Conjuntos Numéricos

Vamos apresentar rapidamente os principais conjuntos numéricos, em uma perspectiva "ingênua".

Conjuntos Numéricos

O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$$

e o conjunto dos **números inteiros** é o conjunto

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Conjuntos Numéricos

Os **números racionais** são os números da forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Em símbolos

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ dois racionais quaisquer. A **soma** e o **produto** destes racionais são obtidos da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Conjuntos Numéricos

Os **números reais** $\mathbb{R}$ é o conjunto formado por números racionais e irracionais.

Por exemplo, os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ são números reais que não são racionais (não podem ser escritos no formato $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$).

Comentários Finais e Referências

Comentários Finais e Referências

Em resumo, na aula de hoje nós:

- aprendemos alguns conceitos do vocabulário matemático;
- recapitulamos conceitos básicos de lógica (sentenças, conectivos, quantificadores, equivalência lógica);
- tivemos um primeiro contato com a ideia de demonstração;
- recapitulamos conceitos básicos da teoria dos conjuntos (conjunto, subconjunto, partes, união, intersecção, diferença).

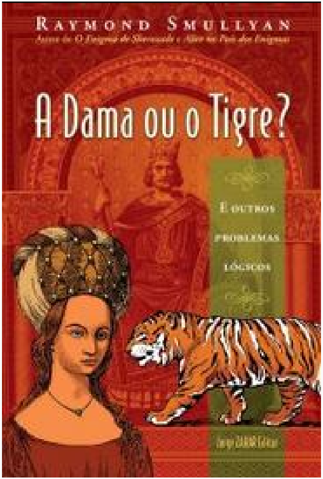
Comentários Finais e Referências

Na próximas aula nós vamos focar em:

- reconhecer o sistema de coordenadas cartesianas;
- plano cartesiano;
- desenvolver o conceito de função.

Comentários Finais e Referências

Comentários Finais e Referências



A Linguagem Matemática - artigo do Professor Ricardo Bianconi

Nesse material, o professor Bianconi explica em mais detalhes como lidar com o "alfabeto matemático". Aos interessados, confira o link `https://www.ime.usp.br/~bianconi/recursos/mat.pdf`.

Comentários Finais e Referências

Bons Estudos!