Jogos Matemáticos - Aula 03

Produto Cartesiano, Funções

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- Equações algébrica;
- Resolução de equações de primeiro e segundo grau;
- Não existe uma fórmula para equações de grau maior que 4;
- Resolução sistemas lineares 2×2 e 3×3.

Produto Cartesiano

Produto Cartesiano

Chama-se **par** todo conjunto formado por dois elementos.

Produto Cartesiano

Assim $\{1, 2\}, \{3, -1\}, \{a, b\}$ indicam pares.

Produto Cartesiano

Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par:

$$\{1,2\} = \{2,1\},\ \{3,-1\} = \{-1,3\},\ \{a,b\} = \{b,a\}.$$

Em Matemática existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos.

Produto Cartesiano

Por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ e $y = 1$ é solução, ao passo que $x = 1$ e $y = 2$ não é solução.

Produto Cartesiano

Essa é apenas uma das situações onde é necessário distinguir a ordem de elementos em um conjunto.

Produto Cartesiano

Definição 2.1

Definimos o **par ordenado** (a, b) como sendo

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Produto Cartesiano

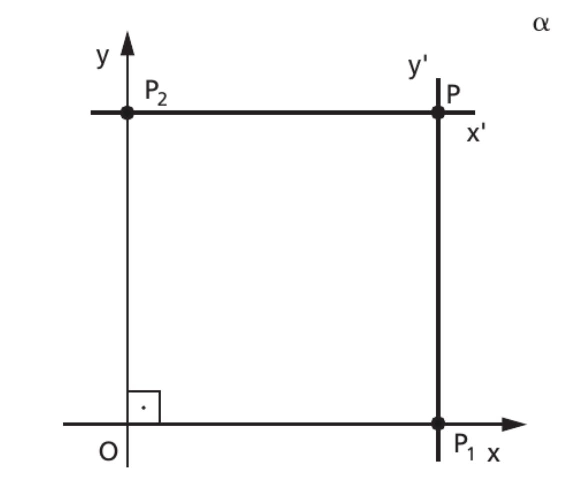
A Definição anterior resolve a questão da ordem no seguinte sentido:

$(a, b) = (c, d)$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

Produto Cartesiano

Com isso podemos "guardar" essas abstrações na "sala de máquinas" da matemática e trabalhar com os pares (a, b) de maneira "usual":

Produto Cartesiano



Produto Cartesiano

Exemplo 2.2

Vamos localizar os seguintes pontos no plano cartesiano:

$$A = (2, 0),\ B = (0, -3),\ C = (2, 5), D = (-3, 4),$$

$$E = (-7, -3),\ F = (4, -5),\ G = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right),\ H = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

Definição 2.3

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Em símbolos,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Produto Cartesiano

Lê-se a notação $A \times B$ assim: "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Produto Cartesiano

Se A ou B for o conjunto vazio, definiremos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio:

$$A \times \emptyset := \emptyset \times A = \emptyset \times \emptyset = \emptyset.$$

Produto Cartesiano

Exemplo 2.4

Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ descreva e represente $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ e $B \times B$.

Produto Cartesiano

Exemplo 2.5

Para $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$ represente $A \times B$ e $B \times A$.

Funções

Funções

Definição 3.1 (Função)

Uma **função** f é uma terna

$$f : (A, B, a \mapsto b)$$

onde A e B são conjuntos e $a \mapsto b$ é uma regra que permite associar a cada elemento de A um **único** elemento de B.

Funções

- O conjunto A é chamado **domínio** da função f, notação $\text{Dom}(f) = A$.
- O conjunto B é chamado **contradomínio** da função f, notação $\text{Codom}(f) = B$.

Funções

- A regra $a \mapsto b$ costuma ser indicada por $f(a) = b$.
- Dizemos que $f(a)$ é o **valor** de f em a.

Funções

- Uma função $f : (A, B, a \mapsto b)$ costuma ser denotada por $f : A \to B$ (lê-se "f é uma função de A em B").

Funções

Definição 3.2

Seja $f : A \to B$ uma função. A **imagem** de f é o conjunto $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$ definido por

$$\mathrm{Im}(f) := \{b \in B : b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}.$$

É usual representar uma função $f : A \to B$ simplesmente por

$$y = f(x),\ x \in A$$

ficando subentendido o contradomínio B.

Funções

Note que duas funções $f : (A, B, a \mapsto b)$ e $g : (C, D, c \mapsto d)$ são iguais se e só se $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Funções

Algumas funções importantes:

Funções

Algumas funções importantes:

- A **função identidade** de um conjunto A, que é a função $1_A : A \to A$ dada pela regra $1_A(x) = x$, $x \in A$.

Funções

- As **funções constantes**: dado $a \in A$ definimos a função constante $f_a : A \to B$ dada pela regra $f_a(x) = a$, $x \in A$.

Funções

- A **função nula** em $\mathbb{R}$, que é a função $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela regra $0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Para uma função $f : A \to B$, podemos representar no plano $A \times B$ os pontos $(x, f(x))$ com $x \in A$. Essa representação é chamada **gráfico** de f.

Composição de Funções

Composição de Funções

Definição 4.1 (Função Composta)

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções com $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. A **função composta** de g e f (nesta ordem), denotada $g \circ f$ é a função $g \circ f : A \to C$ cuja regra é dada para $x \in A$ por $g \circ f(x) := g(f(x))$.

Composição de Funções

- A composição $g \circ f$ só está definida quando $\text{Im}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$.
- Pode acontecer de somente uma dentre as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ estarem definidas.
- Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Funções Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras, Inversas

Definição 5.1 (Função Sobrejetora)

Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** se $\mathrm{Im}(f) = B$.

Definição 5.2 (Função Injetora)

Uma função $f : A \to B$ é **injetora** se para todo $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \text{ implica } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funções Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras, Inversas

Definição 5.3 (Função Bijetora)

Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** se for injetora e sobrejetora.

Definição 5.4 (Função Inversa)

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. A **função inversa** de f, notação f^{-1}, é a função $f^{-1} : B \to A$ definida para $y \in B$ pela regra

$$f^{-1}(y) = x \text{ se e só se } f(x) = y.$$

Teorema 5.5

Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Valem as seguintes propriedades:

a - $f \circ 1_A = f$, $1_B \circ f = f$;

b - se f é bijetora então $(f^{-1})^{-1} = f$;

c - se f é bijetora então $f \circ f^{-1} = 1_B$ e $f^{-1} \circ f = 1_A$;

d - $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

e - Se f e g são bijetoras então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- definimos a noção de produto cartesiano;
- definimos a noção de função;
- lidamos com alguns tipos de função.

Comentários Finais

Nas próximas aulas nós vamos focar nas propriedades das funções afins. A saber:

- gráficos;
- zeros;
- pontos importantes;
- crescimento/decrescimento;
- aplicações.

Comentários Finais

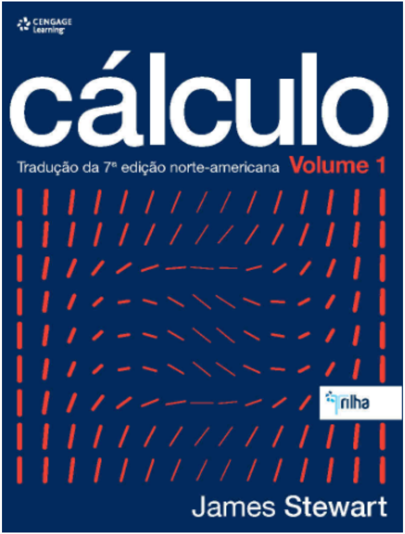
ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Em grupos de até 5 integrantes resolva os Exercícios 3.1, 3.2, 3.3, 3.6, 3.9, 3.10.

Referências

Comentários Finais e Referências

Referências



Bons Estudos!