

Jogos Matemáticos - 2022

Lista de Exercícios

Kaique Matias de Andrade Roberto

28 de setembro de 2022

Estes são os Exercícios recomendados para a disciplina. Afim de que você possa extrair o maior proveito possível destes exercícios tenha em mente as seguintes observações:

- esta é a **única** lista de exercícios da disciplina toda;
- esta lista **contém** os exercícios que resolveremos em aula;
- as Seções estão nomeadas de acordo com as aulas (por exemplo, na Seção 10 estão os exercícios recomendados para a Aula 10);
- os exercícios que aparecem em aula estão marcados com (A);
- os exercícios com (*) ou (**) são exercícios que consideramos mais desafiadores.

0 Noções de Lógica e Conjuntos

Exercício 0.1 (A). Demonstre as equivalências abaixo.

a - $\neg(\neg P) \equiv P$.

g - $(P \vee (P \wedge Q)) \equiv P$.

b - $P \vee P \equiv P$.

h - $P \rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$.

c - $P \wedge P \equiv P$.

i - $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

d - $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

j - $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$.

e - $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

k - $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$.

f - $(P \wedge (P \vee Q)) \equiv P$.

Exercício 0.2 (A). Transforme as sentenças abertas abaixo em sentenças verdadeiras usando quantificadores.

a - $-(-x) = x$.

d - $5a + 4 \leq 11$.

b - $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$.

e - $x^2 \leq x$.

c - $\sqrt{x^2} = x$.

f - $a^2 + b^2 \leq 0$.

Exercício 0.3. Diga qual é a negação de cada uma das sentenças abaixo.

a - O Palmeiras tem mundial.

b - Toda fruta é doce e todo remédio é amargo.

c - Todo dia da semana é segunda-feira.

d - Todo final de semana tem um sábado e um domingo.

e - Todo número inteiro primo é ímpar.

f - Todo triângulo isósceles é equilátero.

g - Existe um losango que não é um quadrado.

h - Existe um número cuja raiz quadrada é zero.

Exercício 0.4. Quando estamos fora do contexto matemático negar uma sentença pode ser uma tarefa relativamente difícil. Afim de ilustrar isso, escreva a negação das sentenças abaixo (que na verdade são ditados da sabedoria popular).

a - Camarão que dorme, a onda leva.

b - Gato escaldado tem medo de água fria.

c - Mente vazia, oficina do diabo.

d - O que não tem remédio, remediado está.

e - O que os olhos não veem, o coração não sente.

f - Quando o dinheiro fala, a verdade se cala.

g - Para quem está se afogando, jacaré é tronco.

h - Vão-se os anéis e ficam os dedos.

i - Para bom entendedor, meia palavra basta.

j - Se conselho fosse bom, a gente não dava, vendia.

Exercício 0.5 (*). Escreva a contra-positiva para as sentenças dos Exercícios 0.3, 0.4 desde que seja possível.

Exercício 0.6. Calcule o conjunto das partes de $A = \{a, b, c, d\}$.

Exercício 0.7. Seja $B = \{a, b, c, d, e\}$. Encontre o conjunto X tal que $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup X$, sendo A o conjunto da questão anterior.

Exercício 0.8 ((A) Propriedades da Inclusão). Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $\emptyset \subseteq A$;

ii - $A \subseteq A$;

iii - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Exercício 0.9 ((A) Propriedades da União). Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cup A = A$;

ii - $A \cup \emptyset = A$;

iii - $A \cup B = B \cup A$;

iv - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Exercício 0.10 ((A) Propriedades da Intersecção). Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Mostre que:

i - $A \cap A = A$;

ii - Se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$;

iii - $A \cap B = B \cap A$;

iv - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

1 Equações

Exercício 1.1 ((A) Quanto?). Suponha que eu e você temos a mesma quantia em dinheiro. Quanto preciso lhe dar para que você tenha dez reais a mais do que eu?

Exercício 1.2 ((A) O Enigma dos Políticos). Um grupo de cem políticos encontrava-se reunido. Cada político ou era honesto ou era desonesto, e somos informados dos seguintes dois fatos:

1. Pelo menos um dos políticos era honesto.
2. Dados quaisquer dois políticos, pelo menos um dos dois era desonesto.

É possível determinar a partir desses dois fatos, quantos políticos eram honestos e quantos eram desonestos?

Exercício 1.3 ((A) Pinga Velha em Garrafa (nem tão) nova). Uma garrafa de 51 custava dez reais. A pinga valia nove reais a mais do que a garrafa. Quanto valia a garrafa?

Exercício 1.4 (A). O lucro mensal de uma empresa é dado por

$$L = 50Q - 2000,$$

em que Q é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a R\$5000?

Exercício 1.5 (A). Discuta os possíveis universos para as equações:

a - $2x + 1 = 0$;

c - $\frac{4x^3}{2} - x^2 + 1 = 0$;

b - $x^3 + 3x - 2 = 0$;

d - $(\sqrt{2})^2 x^8 - x^2 + 4 = 0$.

Exercício 1.6 (A). Resolva as equações:

a - $4x + 6x = 8 + 12$;

f - $\frac{3x}{x+1} = 4 + \frac{2x}{2x+2}$;

b - $-3x + 1 = -8$;

c - $5(x-2) = 4x + 6$;

g - $\frac{2x+5}{x-3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{x-3}$;

d - $\frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} = \frac{1}{6}$;

e - $\frac{x-1}{4} + \frac{x}{3} = \frac{1}{6}$;

h - $\frac{2y}{5} + \frac{5+2y}{3} = 1$.

Exercício 1.7 (A). Resolva as equações:

a - $x^2 - 4x + 3 = 0$;

f - $y^2 - 6y - 3 = 0$;

b - $x^2 - 5x + 4 = 0$;

g - $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

c - $t^2 - 6t + 8 = 0$;

h - $x^4 - 5x^2 + 10 = 0$;

d - $y^2 - 6y - 3 = 0$;

i - $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$;

e - $x^2 - 7x + 12 = 0$;

j - $(x^4 - 1)(x^4 - 12) + 24 = 0$.

Exercício 1.8 (**). Resolva as equações cúbicas reduzidas usando o método de Cardano:

a - $x^3 - 3x + 2 = 0$;

b - $x^3 - 3x + 4 = 0$.

2 Reforço: Mais Equações e Sistemas

Exercício 2.1 (A). Resolva os sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a - } \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases} & \text{d - } \begin{cases} -2x + -y = 16 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases} & \text{g - } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases} \\ \text{b - } \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} & \text{e - } \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{cases} & \\ \text{c - } \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} & \text{f - } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 18x - 12y = 5 \end{cases} & \text{h - } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \end{array}$$

Exercício 2.2 (A). O custo mensal de produção de x camisas de uma fábrica é $C = 5000 + 15x$. Qual a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é R\$8000?

Exercício 2.3 (A). O saldo de uma aplicação financeira após t meses de aplicação é dado por $S = 2000 + 40t$. Após quanto tempo da aplicação o saldo dobra?

Exercício 2.4 (A). O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 10x - 16$, em que x é a quantidade mensal vendida. Para que os valores de x o lucro é nulo? E para qual valor de x o lucro é 9?

Exercício 2.5 (A). A receita diária de um estacionamento para automóveis é $R = 100p - 5p^2$, em que p é o preço cobrado pela diária de um veículo estacionado. Qual o preço que deve ser cobrado para obtermos uma receita diária de R\$375?

Exercício 2.6 (A). Um investidor aplicou parte do seu patrimônio de R\$30000 em um fundo A e parte no fundo B , por um ano. O fundo A rendeu 10% e o B rendeu 15%. Sabendo-se que o total dos rendimentos foi de R\$4000, calcule quanto foi aplicado em cada fundo.

Exercício 2.7 (A). Um investidor aplicou parte do seu patrimônio de R\$20000 em um fundo A e parte no fundo B , por um ano. O fundo A rendeu 10% e o B rendeu 20%. Sabendo-se que o total dos rendimentos foi de R\$2500, calcule quanto foi aplicado em cada fundo.

Exercício 2.8 (A). Uma empresa pretende gastar R\$225000 por ano em propaganda, parte em jornal e parte em televisão. Sabendo-se que a quantia gasta em televisão deve ser quatro vezes maior que a gasta em jornal, obtenha a quantia a ser gasta em televisão.

3 Plano cartesiano e Conceito de Função

Exercício 3.1 (A). Localize os seguintes pontos no plano cartesiano:

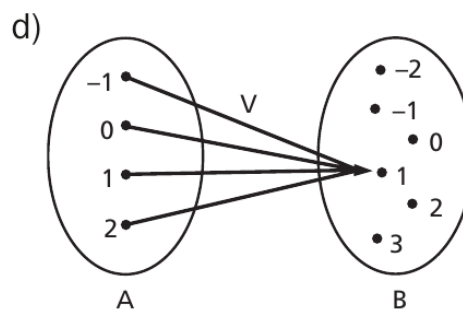
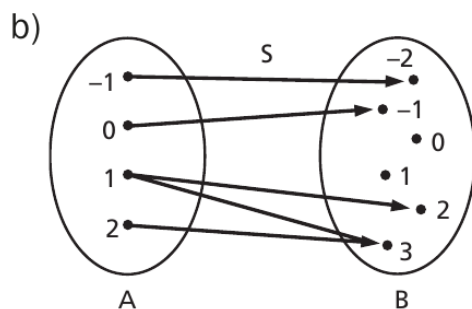
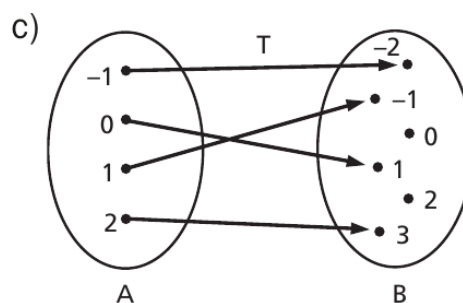
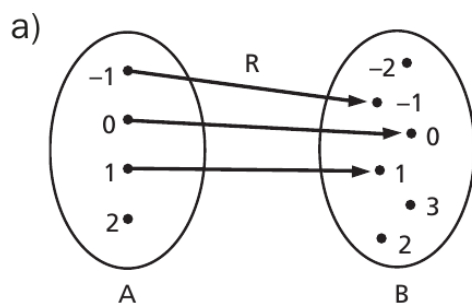
$$A = (2, 0), B = (0, -3), C = (2, 5), D = (-3, 4),$$

$$E = (-7, -3), F = (4, -5), G = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), H = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

Exercício 3.2 (A). Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ descreva e represente $A \times B$ e $B \times A$.

Exercício 3.3 (A). Para $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$ represente $A \times B$ e $B \times A$.

Exercício 3.4 (A). Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.



Exercício 3.5 (A). Seja f a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

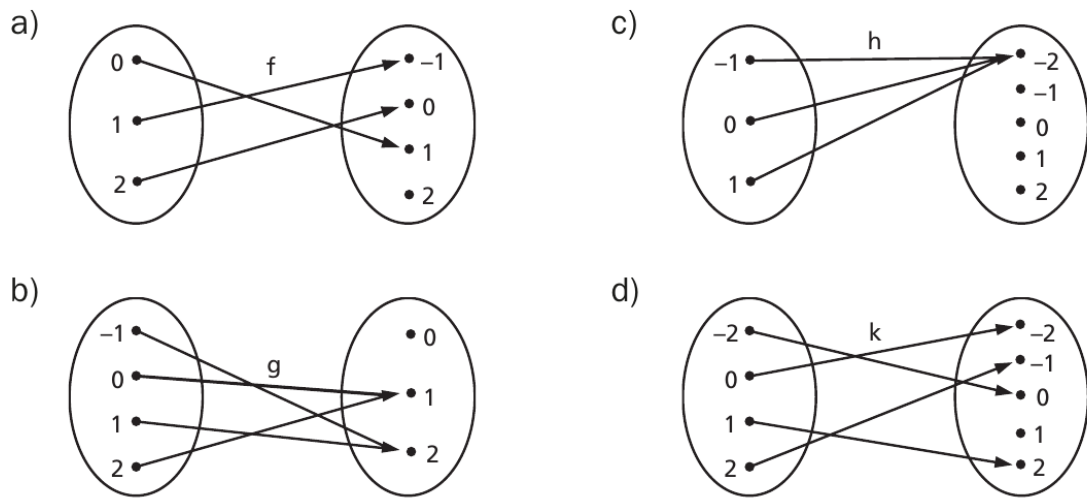
a - $f(2)$;

c - $f(0)$;

b - $f(-3)$;

d - $f(3/2)$.

Exercício 3.6 (A). Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:



Exercício 3.7 (A). Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

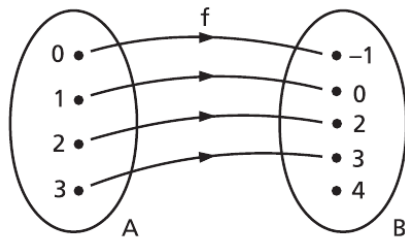
- a- Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
- b- Calcule $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.

Exercício 3.8 (A). Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$.

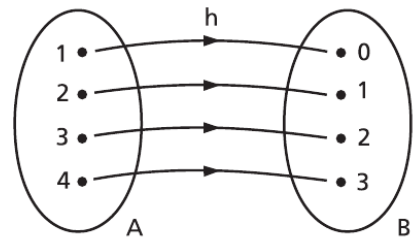
- a- Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
- b- Calcule $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.
- c- Esboce o gráfico de $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$.
- d- Indique qual das funções $f \circ g(2)$ e $g \circ f(2)$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

Exercício 3.9 (A). Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora.

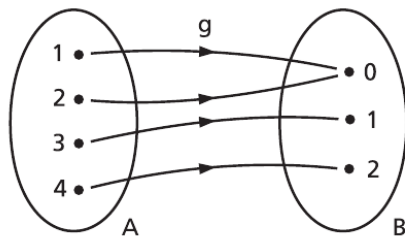
a)



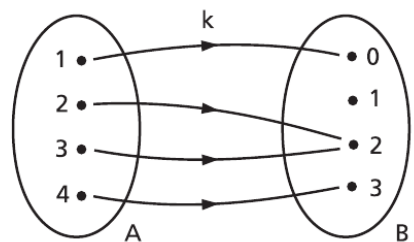
c)



b)



d)



Exercício 3.10 (A). Abaixo há uma lista de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

a - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

b - $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

c - $f(x) = x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

d - $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$.

Exercício 3.11 (*). Determine os maiores domínios e contra-domínios possíveis para uma função considerando as regras abaixo. Após isso, determine a imagem de tal função:

a - $f(x) = x^2$;

d - $z(t) = \frac{t^2}{1-t}$;

b - $g(x) = 1 - x$;

e - $y(x) = x^3$;

c - $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

f - $w(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.

Exercício 3.12 (*). Quais dentre as funções do Exercício 3.11 são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras?

Exercício 3.13 (*). Calcule a inversa das seguintes funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

a - $f(x) = 2x + 3$;

c - $h(x) = x^3 + 2$;

b - $g(x) = \frac{4x-1}{3}$;

d - $p(x) = (x - 1)^3 + 2$.

4 Função Afim I

Exercício 4.1 (A). Para as funções afim abaixo identifique a e b :

a - $y = 3x + 2$;

d - $y = -3x - 4$;

b - $y = -2x + 1$;

e - $y = \frac{2x-3}{2}$;

c - $y = x - 3$;

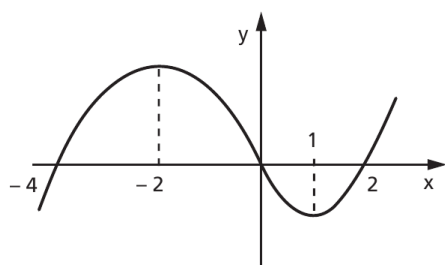
f - $y = \frac{4-3x}{2}$.

Exercício 4.2 (A). Construa o gráfico das funções do Exercício 4.1.

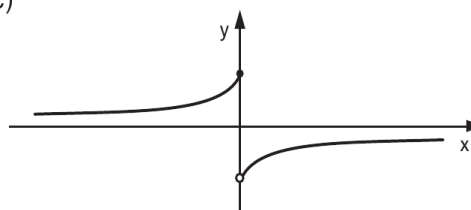
Exercício 4.3 (A). Calcule os zeros das funções do Exercício 4.1.

Exercício 4.4 (A). Com base nos gráficos abaixo, de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , especifique os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

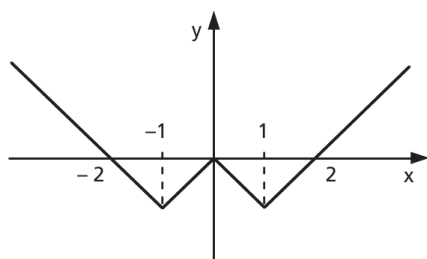
a)



c)



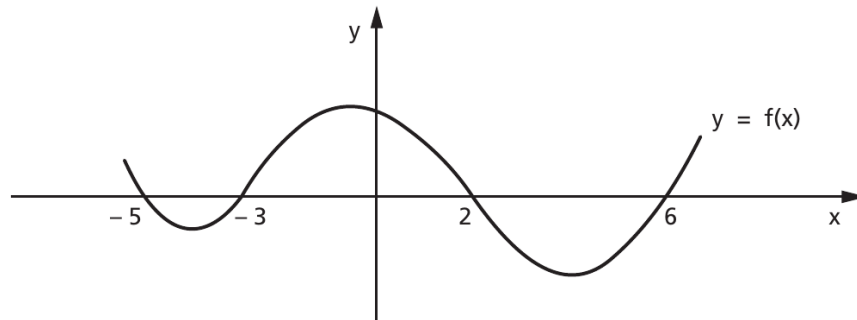
b)



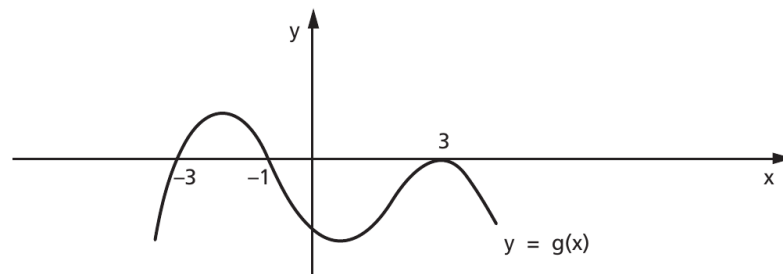
Exercício 4.5 (A). Classifique as funções do Exercício 4.1 como crescentes/decrescentes.

Exercício 4.6 (A). Estude o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.

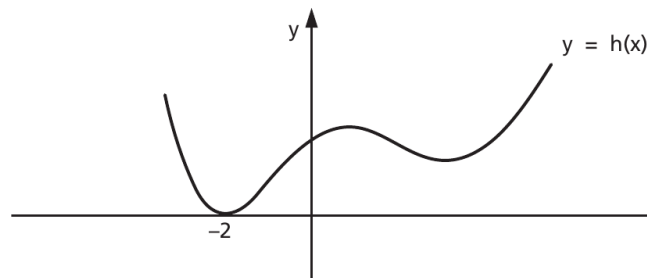
a)



b)



c)



Exercício 4.7 (A). Estude o sinal das funções do Exercício 4.1 como crescentes/decrescentes.

5 Função Afim II

Exercício 5.1. Na produção de peças, uma indústria tem custo fixo de $R\$8.00$ reais mais um custo variável de $R\$0.50$ centavos por unidade produzida. Sendo x o número de peças produzidas:

- a - Escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças;
- b - Calcule o custo de 100 peças;

c - Escreva a taxa de crescimento da função.

Exercício 5.2. Um comerciante teve uma despesa de R\$230.00 reais na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R\$5.00 reais, o lucro final L será dado em função das x unidades vendidas.

a - Qual é a lei dessa função L ?

b - Para quais valores de x temos $L(x) < 0$? Como pode ser interpretado este caso?

c - Para quais valores de x haverá um lucro de R\$315.00?

d - Para quais valores de x o lucro será maior que R\$280.00?

e - Para quais valores de x o lucro estará entre R\$100.00 e R\$280.00?

Exercício 5.3. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B .

- o plano A cobra R\$100.00 reais de inscrição e R\$50.00 reais por consulta num certo período.
- o plano B cobra R\$180.00 reais de inscrição e R\$40.00 reais por consulta num mesmo período.

O gasto total de cada plano é em função do número x de consultas.

a- Determine a função correspondente para cada plano.

b- Em quais condições é possível afirmar que o plano A é mais econômico que o plano B , o plano B é mais econômico que o plano A , ou ambos os planos são equivalentes?

Exercício 5.4. Na hora de fazer seu testamento, uma pessoa tomou a seguinte decisão: dividiria sua fortuna entre sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, dando a cada criança que fosse nascer o dobro daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser repartida a herança legada?

Exercício 5.5. Uma fábrica só contrata trabalhadores com idade acima de 16 anos. O salário médio, por hora de trabalho, nessa fábrica de 110 trabalhadores é de R\$20.00 reais. Calculando-se, no entanto, apenas com os 100 trabalhadores de idade igual ou maior que 18 anos, a média passa a ser R\$21.20. Qual o salário médio dos trabalhadores com menos de 18 anos, por hora de trabalho, em reais?