

Jogos Matemáticos - Aula 07

Função Quadrática II

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

1. Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores
2. Imagem, Eixo de Simetria, Gráfico
3. Sinal
4. Aplicações
5. Comentários Finais
6. Referências

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- definimos o que é uma função quadrática;
- calculamos os zeros e esboçamos os gráficos de algumas funções quadráticas;
- lidamos com máximos/mínimos e vértices da parábola.

Imagem, Eixo de Simetria, Gráfico

Para determinar a imagem de uma função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$, tomemos inicialmente a função na forma canônica

$$f(X) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Teorema 2.1

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Se $a > 0$ então

$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}.$$

- Se $a < 0$ então

$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\}.$$

Exemplo 2.2

Calcule a imagem das funções quadráticas:

a - $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

d - $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$;

b - $f(x) = x^2 - 4x$;

c - $f(x) = x^2 + 1$;

e - $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$.

Usaremos estas funções durante toda a Aula 07.

Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ vamos seguir o roteiro abaixo:

1. O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = -b/2a$ perpendicular ao eixo x ;
2. verificar a concavidade da parábola;
3. calcular os zeros de f ;
4. calcular o vértice de f .

Sinal

A determinação do sinal de uma função quadrática depende do que acontece com Δ .

Caso I: $\Delta < 0$

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sinal a para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$a > 0 \text{ implica } f(x) > 0$$

$$a < 0 \text{ implica } f(x) < 0.$$

Caso II: $\Delta = 0$

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem sinal a para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/2a\}$ (sendo $-b/2a$ a única raiz de f):

$$a > 0 \text{ implica } f(x) \geq 0$$

$$a < 0 \text{ implica } f(x) \leq 0.$$

Caso III: $\Delta > 0$

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem duas raízes r_1 e r_2 , com $r_1 < r_2$. Daí:

$f(x)$ tem o sinal de a se $x < r_1$ ou $x > r_2$

$f(x)$ tem o sinal de $-a$ se $r_1 < x < r_2$.

Aplicações

Exemplo 4.1

O lucro de uma microempresa, em função do número de funcionários que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - 3n^2$. Com base nessas informações, qual é o número de funcionários necessário para que o lucro dessa microempresa seja máximo?

Exercício 4.2

Um fazendeiro tem 100 metros de arame para delimitar um curral de forma retangular. Quais as dimensões do curral para que a área cercada seja máxima?

Exemplo 4.3

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. Em que dia começou a segunda dedetização?

Exemplo 4.4

O custo C , em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por:

$$C = 2510 - 100n + n^2.$$

Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós completamos o estudo dos tópicos envolvendo funções quadráticas, que são:

- definição do que é uma função quadrática;
- cálculo dos zeros e esboço dos gráficos;
- máximos/mínimos e vértices da parábola;
- imagem, eixo de simetria,
- sinal,
- aplicações.

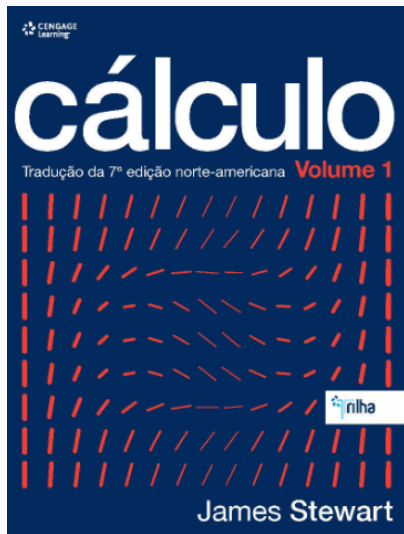
Nas próximas aulas nós vamos focar nos pré-requisitos para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas.

Exercícios Recomendados para a Aula de Hoje

Em grupos de até 5 integrantes resolva os Exercícios 7.1-7.5.

Referências





Bons Estudos!

