Jogos Matemáticos - Aula 08

Potências, Raízes, Logaritmos I

Kaique Matias de Andrade Roberto

Administração - Ciências Atuariais - Ciências Contábeis - Ciências Econômicas

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- equações;
- sistemas lineares;
- funções;
- funções afim;
- funções quadráticas.

Potências de Expoente Natural e Inteiro

Definição 2.1

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A **potência de base** a **e expoente** n é definida por:

$$a^0 = 1$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Potências de Expoente Natural e Inteiro

Teorema 2.2

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Valem as seguintes propriedades:

P_1 - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

P_2 - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geq n$;

P_3 - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

P_4 - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;

P_5 - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Exemplo 2.3

Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a - $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$;

b - $3^6/3^2 = 3^3$;

c - $(5^3)^2 = 5^6$;

d - $(-2)^6 = 2^6$;

e - $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4$;

f - $3^4 = 9^2$;

g - $-2^2 = -4$.

Potências de Expoente Natural e Inteiro

Definição 2.4

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Potências de Expoente Natural e Inteiro

Teorema 2.5

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Valem as seguintes propriedades:

P_1 - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

P_2 - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geq n$;

P_3 - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

P_4 - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;

P_5 - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Exemplo 2.6

Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a - $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$;

b - $5^2/5^{-6} = 5^8$;

c - $2^{-4} = -16$;

d - $(2^{-3})^{-2} = 2^6$.

Exemplo 2.7

Calcule/simplifique:

a - $\dfrac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 - 2^{-2}}$;

b - $\dfrac{3^2 - 3^{-2}}{3^2 + 3^{-2}}$;

c - $\dfrac{(a^3 b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} b^3)^3}$.

Exemplo 2.8

Calcule/simplifique:

a - $(a^{-2}b^3)^{-2}(a^3b^{-2})^3$;

b - $\dfrac{(a^5b^3)^2}{(a^{-4}b)^{-3}}$;

c - $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$.

Raízes e Potências Racionais

Definição 3.1

Dado um número real $a \geq 0$ e um número natural $n \geq 1$, existe um único número real b tal que $b^n = a$. O número b é chamado **raíz** n**-ésima de** a, denotado $n = \sqrt[n]{a}$.

Raízes e Potências Racionais

Teorema 3.2

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ números reais não-negativos, $m \in \mathbb{Z}$ e $n, p \in \mathbb{N}$ naturais não nulos. Valem as seguintes propriedades:

- R_1 - $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$;
- R_2 - $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $a \neq 0$ ou $m \neq 0$;
- R_3 - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
- R_4 - $\left(\sqrt[n]{a}\right) = \sqrt[n]{a^m}$, $a \neq 0$ ou $m \neq 0$;
- R_5 - $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Exemplo 3.3

Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):

a - $\sqrt[3]{27} = 3$;

b - $\sqrt{4} = \pm 2$;

c - $\sqrt[4]{1} = 1$;

d - $-\sqrt{9} = -3$;

e - $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 3.4

Calcule/simplifique:

a - $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}$;

b - $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{3}$;

c - $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{5}$.

Exemplo 3.5

Reduza ao mesmo índice:

a - $\sqrt[3]{64}$;

b - $\sqrt{576}$;

c - $\sqrt{12}$;

d - $-\sqrt[3]{27}$;

e - $\sqrt{18}$.

f - $\sqrt[3]{128}$.

Exemplo 3.6

Racionalize os denominadores:

a - $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

b - $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

c - $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$;

d - $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$;

e - $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

f - $\dfrac{5}{3-\sqrt{7}}$;

g - $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Raízes e Potências Racionais

Definição 3.7

Dados $a \in \mathbb{R}$ um número real positivo e $p/q \in \mathbb{Q}$ definimos

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Teorema 3.8

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ números reais positivos, e $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$. Valem as seguintes propriedades:

P_1 - $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

P_2 - $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

P_3 - $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{r}{s}}$;

P_4 - $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

P_5 - $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$.

Exemplo 3.9

Expresse na forma de potências racionais:

a - $\sqrt{5}$;

b - $\sqrt{\sqrt{2}}$;

c - $\sqrt[4]{4}$;

d - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

e - $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Exemplo 3.10

Simplifique:

a - $9^{\frac{3}{2}}$;

b - $81^{-0,25}$;

c - $256^{\frac{5}{4}}$;

d - $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}}$;

e - $3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

Potência de Expoente real

Potência de Expoente real

Teorema 4.1

Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^{α} que é a potência de base a e expoente irracional α.

Potência de Expoente real

Considere por exemplo, a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos os valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$.

Potência de Expoente real

A_1	A_2	B_1	B_2
1	2	3^{1}	3^{2}
1,4	1,5	$3^{1,4}$	$3^{1,5}$
1,41	1,42	$3^{1,41}$	$3^{1,42}$
1,414	1,415	$3^{1,414}$	$3^{1,415}$
1,4142	1,4143	$3^{1,4142}$	$3^{1,4143}$

$\sqrt{2}$ $\quad$ $3^{\sqrt{2}}$

Comentários Finais

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós:

- recapitulamos a definição de potenciação e radiciação;
- lidamos com vários tipos de potências e raízes;
- simplificamos vários tipos de potências e raízes;
- comentamos sobre potências de expoente real (e irracional).

Comentários Finais

Nas próximas aulas nós vamos focar em logaritmos.

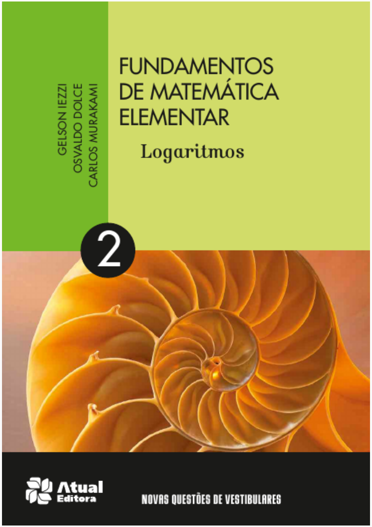
Comentários Finais

Exercícios Recomendados para a Aula de Hoje

Em grupos de até 5 integrantes resolva os Exercícios 8.1-8.10.

Referências

Referências



Bons Estudos!