

Técnicas de Amostragem - Aula 04

Exercícios, Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs) I

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

1. Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores
2. Amostragem Aleatória Simples
3. Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)
4. Comentários Finais
5. Referências

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Na aula passada nós lidamos com os aspectos da AASc:

- definição da AASc;
- propriedades das principais estatísticas;
- normalidade e intervalo de confiança;
- tamanho da amostra.

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Agora vamos resolver alguns exercícios para fixar os conceitos da AASc.

Amostragem Aleatória Simples

Amostragem Aleatória Simples

A amostragem aleatória simples (AAS) é o método mais simples e mais importante para a seleção de uma amostra.

Além de servir como plano próprio, o seu procedimento é usado de modo repetido em procedimento de múltiplos estágios.

A principal caracterização para o uso do plano AAS é a existência de um sistema de referências completo, descrevendo cada uma das unidades elementares.

Deste modo tem-se bem listado o universo

$$\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, N\}.$$

O plano é descrito do seguinte modo:

Amostragem Aleatória Simples

- Utilizando algum procedimento aleatório (tabela de números aleatórios, urna, etc) sorteia-se com igual probabilidade um elemento da população \mathcal{U} ;

Amostragem Aleatória Simples

- repete-se o processo anterior até que sejam sorteados n unidades, tendo sido este número pré-fixado anteriormente;

- caso seja permitido o sorteio de uma unidade mais de uma vez, tem-se o processo AAS com reposição (AASc). Quando o elemento sorteado é removido de \mathcal{U} antes do sorteio próximo, tem-se o plano AAS sem reposição (AASs).

Do ponto de vista prático, o plano AASs é muito mais interessante, pois vai de encontro ao princípio intuitivo que "não se ganha mais informação se uma mesma unidade aparece mais de uma vez na amostra".

Por outro lado, o plano AASc, introduz vantagens matemáticas e estatísticas, como a independência entre as unidades sorteadas, que facilita em muito a determinação das propriedades estatísticas dos estimadores das quantidades populacionais de interesse.

Basta observar na maioria dos assuntos tratados em livros de inferência há imposição de que as unidades que fazem parte da amostra sejam independentes.

Também vamos considerar inferências para os seguintes parâmetros de interesse: considere para cada unidade i , uma característica populacional unidimensional de interesse, Y_i , $i \in \mathcal{U}$. Vamos considerar:

- total populacional,

$$\tau = \sum_{i=1}^N Y_i;$$

- média populacional,

$$\mu = \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i;$$

- variância populacional, representada por

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \mu)^2 \text{ e } S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \mu)^2.$$

Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)

Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)

A AASs opera da seguinte forma:

- A população está numerada de 1 a N , de acordo com o sistema de referências, ou seja,

$$\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, N\}.$$

Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)

- Utilizando um software ou tabela de números aleatórios, sorteia-se, com igual probabilidade, uma das N unidades da população;

Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)

- sorteia-se um elemento seguinte, com o elemento anterior sendo retirado da população;

Amostragem Aleatória Simples Sem Reposição (AASs)

- repete-se esse procedimento até que n unidades tenham sido sorteadas.

Teorema 3.1

Para o plano amostral AASs, a variável f_i , número de vezes que a unidade i aparece na amostra segue uma distribuição Bernoulli $f_i \sim \text{Ber}\left(\frac{n}{N}\right)$ e que satisfaz

$$P(f_i = 1) = \frac{n}{N} \text{ e } P(f_i = 0) = 1 - \frac{n}{N},$$

de modo que

$$E[f_i] = \frac{n}{N}, \text{ Var}[f_i] = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

$$\text{Cov}[f_i, f_j] = -\frac{n}{N^2} \frac{N-n}{N-1} \text{ para } i \neq j.$$

Convém ressaltar ainda a similaridade entre muitos dos resultados que os dois planos apresentam, e que embora as fórmulas sejam diferentes, são próximas quando N , o tamanho da população, tende a ser grande quando comparado com o tamanho da amostra.

Teorema 3.2

A estatística $t(\mathbf{s})$, total da amostra, definida por

$$t(\mathbf{s}) = \sum_{i \in \mathbf{s}} Y_i$$

tem, para o plano AASs, as seguintes propriedades:

$$E[t] = n\mu \text{ e } \text{Var}[t] = n(1 - f)\sigma^2,$$

onde $f = n/N$ é denominada fração amostral.

Corolário 3.3

Com relação à AASs, um estimador não-viesado do total populacional é

$$T(\mathbf{s}) = N\bar{y} = \frac{N}{n}t(\mathbf{s}),$$

cujas variância amostral é dada por

$$\text{Var}[T] = N^2(1 - f)\frac{S^2}{n}.$$

Corolário 3.4

Com relação às AASs, a média amostral

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i \in s}^n Y_i = \frac{t(s)}{n}$$

é um estimador não-viesado da média populacional, com variância amostral dada por

$$\text{Var}[\bar{y}] = (1 - f) \frac{S^2}{n}.$$

Teorema 3.5

A variância amostral

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i \in s} (Y_i - \bar{y})^2$$

é um estimador não viesado da variância populacional S^2 para o planejamento amostral AASs.

Exemplo 3.6

Considere novamente os dados na planilha "aula-02-exemplo", e considere a variável renda familiar, onde o universo é \mathcal{U} e o parâmetro populacional é $\mathbf{D} = (12, 30, 18)$. Verifique o comportamento das estatísticas \bar{y} e s^2 com relação as funções paramétricas μ e σ^2 de \mathbf{D} para o plano amostral AASs com $n = 2$.

Comentários Finais

Em resumo, na aula de hoje nós resolvemos alguns exercícios e lidamos com os seguintes aspectos da AASs:

- exercícios envolvendo AASc;
- definição da AASs;
- propriedades das principais estatísticas.

Na próxima aula nós resolvemos mais exercícios e lidaremos com os outros aspectos da AASs:

- normalidade e intervalo de confiança;
- tamanho da amostra;
- estimação da proporção;
- comparação entre AASc e AASs.

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 4.1-4.3.

Referências





