Técnicas de Amostragem - Aula 01

Definições e Notações Básicas I: População, Amostra e Planejamento Amostral

Kaique Matias de Andrade Roberto

Ciências Atuariais

HECSA - Escola de Negócios

FIAM-FAAM-FMU

$$N_1 = \frac{E_0 + E_2 + \ldots + E_7 - \min\{E_0, E_7\}}{6}$$

$$\begin{cases} N_2 = 0 - 9 \\ APS = 0 - 1 \end{cases}$$

Conteúdo

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

Conceitos que aprendemos em Aulas anteriores

- recapitulamos os tipos de variáveis;
- aprendemos como classificar variáveis;
- recapitulamos alguns tópicos de Estatística Descritiva;
- relembramos o conceito de Variável Aleatória;
- listamos as principais distribuições discretas e contínuas;
- tivemos um primeiro contato com os conceitos de Amostragem.

População

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$a =$

$b =$

$c =$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

População

Definição 2.1

A **População ou Universo** é o conjunto $\mathcal{U}$ de todas as unidades elementares de interesse. É indicado por

$$\mathcal{U} = \{1, 2, ..., N\}$$

onde N é o tamanho fixo (e na maioria dos casos, desconhecido) da população.

População

Definição 2.2

Elemento Populacional é a nomenclatura usada para denotar qualquer elemento $i \in \mathcal{U}$. É também conhecido por **Unidade Elementar**.

População

Definição 2.3

Característica(s) de Interesse é a nomenclatura que será usada para denotar a variável ou vetor de informações associado a cada elemento da população. Será representada por

$$Y_i,\ i \in \mathcal{U},$$

ou no caso multivariado,

$$\boldsymbol{Y}_i = (Y_{i1}, ..., Y_{ip}),\ i \in \mathcal{U}.$$

População

Definição 2.4

Parâmetro Populacional é a nomenclatura utilizada para denotar o vetor correspondente a todos os valores de uma variável de interesse que denota-se por

$$\boldsymbol{D} = (Y_1, ..., Y_N),$$

no caso de uma única característica de interesse, e pela matriz

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{Y}_1, ..., \boldsymbol{Y}_N)$$

no caso em que para cada unidade da população tem-se associado um vetor $\boldsymbol{Y}_i$ de características de interesse.

População

Definição 2.5

Função Paramétrica Populacional é uma característica numérica qualquer da população, ou seja, uma expressão numérica que condensa funcionalmente os Y_i's (ou $\boldsymbol{Y}_i$'s), $i \in \mathcal{U}$. Tal função será denotada por

$$\theta(\boldsymbol{D}).$$

População

Esta função pode ser, por exemplo, o total, as médias, ou ainda o quociente de dois totais. É comum utilizar-se a expressão parâmetro populacional de interesse, ou simplesmente parâmetro populacional.

População

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$$

Exemplo 2.6

Considere a população formada por três domicílios $\mathcal{U}$ e que estão sendo observadas as seguintes variáveis: nome (do chefe), sexo, idade, fumante ou não, renda bruta familiar e número de trabalhadores. Os dados estão na planilha "aula-01-exemplo".

População

Vamos usar as notações

Unidade	i
Nome do Chefe	A_i
Sexo	X_i
Idade	Y_i
Fumante	G_i
Renda Bruta Familiar	F_i
Número de Trabalhadores	T_i

População

Portanto, para os dados descritos na planilha "aula-01-exemplo", os seguintes parâmetros populacionais podem ser definidos:

População

- para a variável idade,

$$\boldsymbol{D} = (20, 30, 40) = \boldsymbol{Y};$$

População

- para o vetor $\begin{pmatrix} F_i \\ T_i \end{pmatrix}$ (renda e número de trabalhadores),

$$\begin{pmatrix} 12 & 30 & 18 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

População

Com relação à funções paramétricas populacionais, tem-se:

População

- idade média,

$$\theta(\boldsymbol{Y}) = \theta(\boldsymbol{D}) = \frac{20 + 30 + 40}{3} = 30;$$

População

- média das variáveis renda e número de trabalhadores,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \begin{pmatrix} \dfrac{12+30+18}{3} \\ \dfrac{1+3+2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix};$$

População

- renda média por trabalhador,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \frac{12 + 30 + 18}{1 + 3 + 2} = 10.$$

População

Para uma variável de interesse, os parâmetros populacionais mais usados são:

População

- total populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \theta(\boldsymbol{Y}) = \tau = \sum_{i=1}^{N} Y_i;$$

População

- média populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \theta(\boldsymbol{Y}) = \mu = \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i;$$

População

- variância populacional, representada por

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \theta(\boldsymbol{Y}) = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \mu)^2,$$

ou às vezes,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \theta(\boldsymbol{Y}) = s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \mu)^2.$$

População

Para vetores bidimensionais, isto é, duas variáveis de interesse, representadas por (X, Y) são bastante usuais os seguintes parâmetros:

População

- covariância populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \sigma_{XY} = \mathrm{Cov}[X, Y] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y);$$

ou às vezes

$$\theta(\boldsymbol{D}) = s_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y);$$

onde μ_X e μ_Y denotam as médias populacionais correspondentes às variáveis de interesse X e Y, respectivamente;

População

- correlação populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y};$$

População

- razão populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \frac{\tau_Y}{\tau_X} = \frac{\mu_Y}{\mu_X} = R,$$

População

- razão média populacional,

$$\theta(\boldsymbol{D}) = \overline{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{Y_i}{X_i}.$$

População

Lembre-se: estas características populacionais **raramente são conhecidas** e na prática, usamos procedimentos amostrais para **estimá-las**.

População

Amostra

Amostra

Consideremos uma população fixa

$$\mathcal{U} = \{1, 2, ..., N\}.$$

Amostra

Definição 3.1

Uma sequência qualquer de n unidades de $\mathcal{U}$, é denominada **amostra ordenada** de $\mathcal{U}$, isto é,

$$\underline{s} \neq \boldsymbol{s} = (k_1, ..., k_n),\ k_i \in \mathcal{U}.$$

A entrada k_i é chamada de i-**ésimo componente** de $\boldsymbol{s}$.

Amostra

Exemplo 3.2

Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo"). Os vetores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1 &= (1, 2) \\ \boldsymbol{s}_2 &= (2, 1) \\ \boldsymbol{s}_3 &= (1, 1, 3) \\ \boldsymbol{s}_4 &= (3) \\ \boldsymbol{s}_5 &= (2, 2, 1, 3, 2) \end{aligned}$$

são exemplos de amostras ordenadas de $\mathcal{U}$.

Amostra

Definição 3.3

Seja $f_i(\boldsymbol{s})$ a variável que indica o número de vezes (freqüência) que a i-ésima unidade populacional aparece na amostra $\boldsymbol{s}$. Seja $\delta_i(\boldsymbol{s})$ a variável binária que indica a presença ou não da i-ésima unidade na amostra $\boldsymbol{s}$, isto é,

$$\delta_i(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 1 \text{ se } i \in \boldsymbol{s}, \\ 0 \text{ se } i \notin \boldsymbol{s}. \end{cases}$$

Amostra

Exemplo 3.4

Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo"). Considere as amostras

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1 &= (1, 2) \\ \boldsymbol{s}_2 &= (2, 1) \\ \boldsymbol{s}_3 &= (1, 1, 3) \\ \boldsymbol{s}_4 &= (3) \\ \boldsymbol{s}_5 &= (2, 2, 1, 3, 2) \end{aligned}$$

Vamos calcular $f_i(s_j)$ e $\delta_i(s_j)$.

$f_i(\underline{s})$ = nº de vezes que i aparece na amostra

$$\delta_i(\underline{s}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \underline{s} \\ 0 & \text{se } i \notin \underline{s} \end{cases}$$

$\underline{s_1} = (1,2)$; $\underline{s_2} = (2,1)$;

$\underline{s_3} = (1,1,3)$

$f_1(\underline{s_1}) = 1$; $f_2(\underline{s_1}) = 1$;

$f_3(\underline{s_1}) = 0$

$f_1(\underline{s_2}) = 1$; $f_2(\underline{s_2}) = 1$; $f_3(\underline{s_2}) = 0$

$f_1(\underline{s_3}) = 2$; $f_2(\underline{s_3}) = 0$;

$f_3(\underline{s_3}) = 1$;

$$\delta_1(\underline{s}_1) = 1 \; ; \quad \delta_2(\underline{s}_1) = 1 \; ; \quad \delta_3(\underline{s}_1) = 0 \; ;$$

$$\delta_1(\underline{s}_2) = 1 \; ; \quad \delta_2(\underline{s}_2) = 1 \; ; \quad \delta_3(\underline{s}_2) = 0 \; ;$$

$$\delta_1(\underline{s}_3) = 1 \; ; \quad \delta_2(\underline{s}_3) = 0 \; ; \quad \delta_3(\underline{s}_3) = 1 \; ;$$

$\underline{s}_4 = (3)$; $\underline{s}_5 = (2, 2, 1, 3, 2)$;

$\delta_1(\underline{s}_4) = 0$; $\delta_2(\underline{s}_4) = 0$; $\delta_3(\underline{s}_4) = 1$;

$\delta_1(\underline{s}_5) = 1$; $\delta_2(\underline{s}_5) = 1$; $\delta_3(\underline{s}_5) = 1$;

$\underline{s}_4 = (3)$; $\underline{s}_5 = (2, 2, 1, 3, 2)$;

$f_1(\underline{s}_4) = 0$; $f_2(\underline{s}_4) = 0$; $f_3(\underline{s}_4) = 1$;

$f_1(\underline{s}_5) = 1$; $f_2(\underline{s}_5) = 3$; $f_3(\underline{s}_5) = 1$;

Amostra

Definição 3.5

Chama-se **tamanho** $n(\boldsymbol{s})$ da amostra s a soma das frequências das unidades populacionais na amostra, isto é,

$$n(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{s}).$$

Amostra

Definição 3.6

Chama-se **tamanho efetivo** $\nu(\boldsymbol{s})$ da amostra s o número de unidades populacionais na amostra, isto é,

$$\nu(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i(\boldsymbol{s}).$$

Amostra

Exemplo 3.7

Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo"). Considere as amostras

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_1 &= (1, 2)\\
\boldsymbol{s}_2 &= (2, 1)\\
\boldsymbol{s}_3 &= (1, 1, 3)\\
\boldsymbol{s}_4 &= (3)\\
\boldsymbol{s}_5 &= (2, 2, 1, 3, 2)
\end{aligned}$$

Vamos calcular $n(s_j)$ e $\nu(s_j)$.

Amostra

Definição 3.8

Seja $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, ou simplesmente $\mathcal{S}$, o conjunto de todas as amostras (sequências ordenadas) de $\mathcal{U}$, de qualquer tamanho. E seja $\mathcal{S}_n(\mathcal{U})$, a subclasse de todas as amostras de tamanho n. Muitas vezes, $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ é denominado **espaço amostral**.

$\mathcal{U} = \{$ 30 alunos da sala $\}$

$= \{ A_1, A_2, \dots, A_{30} \}$

$S(\mathcal{U}) = \{ A_1; A_2; \dots; A_{30};$

$A_1 A_2; A_1 A_3; \dots; A_1 A_{30}; \dots;$

$A_{29} A_{30}; A_1 A_2 A_3; A_1 A_2 A_4; \dots;$

$A_1 A_2 \dots A_{30} \}$

Exemplo 3.9

Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo"). Vamos descrever $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{S}_2(\mathcal{U})$.

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$$

$$S(\mathcal{U}) = \{1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, \ldots\}$$

$$S_2(\mathcal{U}) = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

Amostra

Algumas vezes é interessante trabalhar com amostras não ordenadas (por exemplo, considerar as amostras $(1, 2)$ e $(2, 1)$ como sendo as mesmas). No caso de amostras não ordenadas sem reposição, uma amostra é simplesmente um subconjunto de elementos de $\mathcal{U}$.

Amostra

$\Omega = \{1, \dots, N\}$

O número de amostras ordenadas de tamanho n (p), com reposição, é N^n, enquanto que, sem reposição, é dado pelo coeficiente binomial $\binom{N}{n}$ (p).

N^p

Planejamento Amostral

Planejamento Amostral

Conforme mencionado anteriormente, um dos nossos objetivos é apresentar procedimentos amostrais probabilísticos, ou seja, aqueles que permitem associar a cada amostra uma probabilidade conhecida de ser sorteada.

Planejamento Amostral

O modo como essas probabilidades são associadas é que irá definir um planejamento amostral. Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 4.1

Uma função $P(\boldsymbol{s})$ definida em $\mathcal{S}(\mathcal{U})$, satisfazendo

$$P(\boldsymbol{s}) \geq 0, \text{ para quaisquer } \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$$

e tal que

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})} P(s) = 1,$$

é chamado um **planejamento amostral ordenado**.

Planejamento Amostral

Exemplo 4.2

Considere $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo").
Considere os seguintes exemplos de planejamentos amostrais:

Plano A

$$P(11) = P(12) = P(13) = 1/9$$
$$P(21) = P(22) = P(23) = 1/9$$
$$P(31) = P(32) = P(33) = 1/9$$
$$P(\boldsymbol{s}) = 0, \text{ para as demais } \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}.$$

Plano B

$$P(12) = P(13) = P(21) = P(23) = P(31) = P(32) = 1/6$$

$P(\boldsymbol{s}) = 0$, para as demais $\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}$.

Plano C

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 1/3 \\
P(12) &= P(32) = 1/9 \\
P(112) &= P(132) = P(332) = P(312) = 1/27 \\
P(111) &= P(113) = P(131) = P(311) = 1/27 \\
P(133) &= P(313) = P(331) = P(333) = 1/27 \\
P(\boldsymbol{s}) &= 0, \text{ para as demais } \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}.
\end{aligned}
$$

Planejamento Amostral

Plano D

$$
\begin{aligned}
P(12) &= 1/10 \\
P(21) &= 1/6 \\
P(13) &= 1/15 \\
P(31) &= 1/12 \\
P(23) &= 1/3 \\
P(32) &= 1/4 \\
P(\boldsymbol{s}) &= 0, \text{ para as demais } \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}.
\end{aligned}
$$

Planejamento Amostral

Plano E

$$P(12) = P(32) = 1/2$$
$$P(\boldsymbol{s}) = 0, \text{ para as demais } \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}.$$

Planejamento Amostral

Do exposto anteriormente, constata-se que é possível criar infinitos planejamentos amostrais.

Planejamento Amostral

Entretanto, descrever probabilidades associadas a cada amostra passa a ser uma tarefa bastante árdua, principalmente para populações grandes.

Planejamento Amostral

Seria muito mais fácil se existissem descrições que permitissem associar, ou calcular, as probabilidades correspondentes a cada amostra de $\mathcal{S}$.

Por exemplo, o Plano C poderia ser descrito mais facilmente da seguinte maneira:

Planejamento Amostral

Sorteie uma unidade após a outra, repondo a unidade sorteada antes de sortear a seguinte, até o surgimento da unidade 2 ($i = 2$) ou até que 3 unidades tenham sido sorteadas.

Planejamento Amostral

Podem ser usados vários tipos de descritores para representar as probabilidades associadas a cada amostra.

Planejamento Amostral

Um deles muito utilizado na abordagem clássica da amostragem é a descrição do planejamento através de regras para o sorteio da amostra.

Exemplo 4.3

Considere $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ (vide planilha "aula-01-exemplo") e a seguinte regra de sorteio:

i - sorteia-se com igual probabilidade um elemento de $\mathcal{U}$, e anota-se a unidade sorteada;

ii - este elemento é devolvido à população e sorteia-se um segundo elemento do mesmo modo.

Este é o mesmo plano amostral do Plano A. Este plano é conhecido como **amostragem aleatória simples com reposição** (e será detalhado algumas Aulas adiante).

$(11)\ ,\ (12)$

$S_2(\mathcal{U})$

$$P(11) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Observa-se que para a maioria dos planejamentos, atribui-se probabilidade nula para muitas amostras de $\mathcal{S}$.

Planejamento Amostral

Por isso é comum ao apresentar um plano amostral A, restringir $\mathcal{S}$ a alguma subclasse $\mathcal{S}_A$, contendo apenas as amostras $\boldsymbol{s}$, tais que $P(\boldsymbol{s}) > 0$. Isso facilita bastante a apresentação dos resultados.

Planejamento Amostral

É evidente que quanto mais complexas as regras que descrevem os planos amostrais, mais difíceis serão os procedimentos para a determinação das probabilidades associadas ao espaço amostral $\mathcal{S}$.

Planejamento Amostral

Neste curso serão abordados os planos amostrais mais simples e mais usados, e que servem de base para planos amostrais mais complexos.

Outro conjunto de planos muito úteis e simples, são aqueles de tamanho fixo, ou seja, possuem probabilidades diferentes de zero apenas para a subclasse $\mathcal{S}_n$.

Planejamento Amostral

Os tipos de planejamentos amostrais mais utilizados são:

Amostragem Aleatória Simples (AAS)

Seleciona-se sequencialmente cada unidade amostral com igual probabilidade, de tal forma que cada amostra tenha a mesma chance de ser escolhida. A seleção pode ser feita com ou sem reposição.

Amostragem Estratificada (AE)

A população é dividida em estratos (por exemplo, pelo sexo, renda, bairro, etc.) e a AAS é utilizada na seleção de uma amostra de cada estrato.

Amostragem por Conglomerados (AC)

A população é dividida em subpopulações (conglomerados) distintas (quarteirões, residências, famílias, bairros, etc). Alguns dos conglomerados são selecionados segundo a AAS e todos os indivíduos nos conglomerados selecionados são observados.

Planejamento Amostral

Em geral a AC é menos eficiente que a AAS ou AE, mas por outro lado, é bem mais econômica. Tal procedimento amostral é adequado quando é possível dividir a população em um grande número de pequenas subpopulações.

Amostragem em Dois Estágios (A2E)

Neste caso, a população é dividida em subpopulações como na AE ou na AC. Num primeiro estágio, algumas subpopulações são selecionadas usando a AAS. Num segundo estágio, uma amostra de unidades é selecionada de cada subpopulação selecionada no primeiro estágio.

Planejamento Amostral

A AE e a AC podem ser consideradas, para certas finalidades como casos particulares da A2E.

Planejamento Amostral

Amostragem Sistemática (AS)

Quando existe disponível uma listagem de indivíduos da população, pode-se sortear, por exemplo, um nome entre os 10 primeiros indivíduos, e então observar todo décimo indivíduo na lista a partir do primeiro indivíduo selecionado. A seleção do primeiro indivíduo pode ser feita de acordo com a AAS. Os demais indivíduos que farão parte da amostra são então selecionados sistematicamente.

Também serão estudados os estimadores razão e regressão para o total e a média populacionais, que exploram uma possível relação linear entre a variável de interesse y e alguma variável auxiliar x, usualmente conhecida como variável independente na teoria de regressão linear.

Comentários Finais

Comentários Finais

Nas próximas aulas nós vamos focar em:

- estatísticas;
- distribuições amostrais;
- estimadores e suas propriedades;
- expressões úteis.

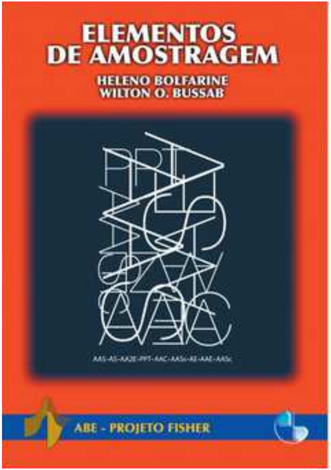
Comentários Finais

ATIVIDADE PARA ENTREGAR (E COMPOR A NOTA N1)

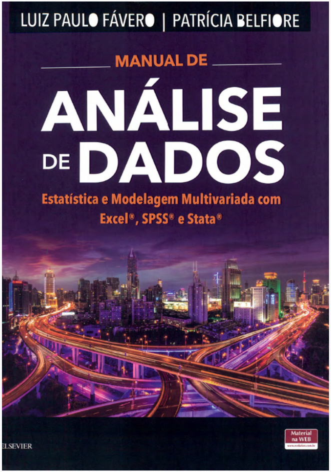
Resolva em grupos de até 4 integrantes os Exercícios 1.1, 1.5, 1.7 e 1.10.

Referências

Referências



Referências



Bons Estudos!