O Tamanho da Amostra para o Caso AASs

Kaique Matias de Andrade Roberto

28 de outubro de 2022

Após algumas contas erradas, vamos fazer a dedução da fórmula para o caso AASs. **Lembrando que vocês não precisam executar a dedução para efeito de prova/trabalho**.

Vimos (Aula-05) que em uma população de tamanho N com média μ vale

$$\frac{\overline{y}-\mu}{\sqrt{(1-f)s^2/n}} \sim N(0,1), \text{ sendo } f=\frac{n}{N}$$

isto é, a distribuição amostral da média amostral (após a transformação apropriada) se aproxima de uma normal $N(0,1)$.

Fixada uma precisão B, para calcular o tamanho da amostra AASs com precisão B e confiança γ devemos calcular

$$P(|\overline{y}-\mu|) \leq B) = \gamma.$$

Após a transformação obtemos

$$P\left(\frac{|\overline{y}-\mu|}{\sqrt{(1-f)s^2/n}} \leq \frac{B}{\sqrt{(1-f)s^2/n}}\right) = \gamma.$$

Uma vez encontrado z_γ tal que $P(|Z| \leq z_\gamma) = \gamma$, obtemos

$$\frac{B}{\sqrt{(1-f)s^2/n}} = z_\gamma.$$

Devemos isolar n na equação acima para obter o tamanho da amostra:

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\sqrt{(1-f)s^2/n}} = z_\gamma \Rightarrow \frac{B^2}{(1-f)s^2/n} = z_\gamma^2 \Rightarrow B^2 = \frac{z_\gamma^2(1-f)s^2}{n} \\
\frac{B^2 n}{s^2} = z_\gamma^2(1-f) \overset{f=\frac{n}{N}}{\Rightarrow} \frac{B^2 n}{s^2} = z_\gamma^2\left(1-\frac{n}{N}\right) \\
\frac{B^2 n}{s^2} = z_\gamma^2 - z_\gamma^2 s^2\frac{n}{N} \Rightarrow \frac{B^2 n}{s^2} + z_\gamma^2\frac{n}{N} = z_\gamma^2 s^2 \Rightarrow \\
n\left(\frac{B^2}{s^2}+\frac{z_\gamma^2}{N}\right) = z_\gamma^2 \Rightarrow n\left(\frac{B^2}{s^2}+\frac{z_\gamma^2}{N}\right) = z_\gamma^2 \\
n\left(\frac{B^2 N + z_\gamma^2 s^2}{N s^2}\right) = z_\gamma^2 \Rightarrow n = z_\gamma^2\left(\frac{N s^2}{B^2 N + z_\gamma^2 s^2}\right).
\end{aligned}$$

Poderíamos parar por aqui, mas vamos transformar essa fórmula na fórmula que está no livro:

$$\begin{aligned}
n &= z_\gamma^2 \left(\frac{Ns^2}{B^2N + z_\gamma^2 s^2} \right) \\
&= \frac{z_\gamma^2 N s^2}{B^2N + z_\gamma^2 s^2} \\
&= \frac{\frac{z_\gamma^2 N s^2}{z_\gamma^2 N s^2}}{\frac{B^2N + z_\gamma^2 s^2}{z_\gamma^2 N s^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{B^2N + z_\gamma^2 s^2}{z_\gamma^2 N s^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{B^2N}{z_\gamma^2 N s^2} + \frac{z_\gamma^2 s^2}{z_\gamma^2 N s^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{B^2}{z_\gamma^2 s^2} + \frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

E assim, fazendo $D = \frac{B^2}{z_\gamma^2}$ chegamos na fórmula do livro:

$$n = \frac{1}{\frac{D}{s^2} + \frac{1}{N}}.$$

Com isso, resolvemos o Exercício 5.2 da Lista de Exercícios:

Exercício 1 (Exercício 5.2)**.** Uma pesquisa amostral foi conduzida com o objetivo de se estudar o índice de ausência ao trabalho em um determinado tipo de indústria. Uma AAS sem reposição de mil operários de um total de 36 mil é observada com relação ao número de faltas não justificadas em um período de 6 meses. Os resultados obtidos foram:

Faltas:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Trabalhadores:	451	162	187	112	49	21	5	11	2

Para esta amostra tem-se que uma estimativa de μ é dada por $\overline{y} = 1,296$. Observa-se também que $s^2 = 2,397$. Encontre n tal que $B = 0,05$ e $\gamma = 0,05$.

Solução:

Nestes termos, obtemos:

$$N = 36000,\ B = 0,05,\ s^2 = 2,397,\ \gamma = 0,95.$$

Dos valores tabelados em aula, para $\gamma = 0,95$ temos $z_\gamma = 1,96$. Logo

$$D = \frac{B^2}{z_\gamma^2} = \frac{0,05^2}{1,96^2} \approx 0,00065.$$

Assim, o tamanho da amostra é

$$n = \frac{1}{\dfrac{0,00065}{2,397} + \dfrac{1}{36000}} \approx 3345,04$$

logo $n = 3346$ (pois o tamanho da amostra deve ser um número inteiro).