Escuela de Administración de Negocios 27/04/2024
Zegel IPAE **Curso:** Solución de Problemas Matemáticos Aplicados a los Negocios
Ciclo: 2025-IE **Profesor:** Alex Chire

Examen Parcial/Final

(2 pts) 1. Si 6 obreros tardan 10 días en construir un muro, ¿cuántos días tardarán 15 obreros en construir el mismo muro, suponiendo que todos trabajan al mismo ritmo?

Solución: Este es un problema de **regla de tres simple inversa**, porque a mayor número de obreros, menor es el tiempo requerido.

Sabemos que: - 6 obreros tardan 10 días en construir el muro. - 15 obreros tardarán x días en construir el mismo muro.

Como es una relación inversa, la ecuación es:

$$\text{obreros}_1 \times \text{días}_1 = \text{obreros}_2 \times \text{días}_2$$

Sustituyendo los valores:

$$6 \times 10 = 15 \times x$$

Despejamos x:

$$x = \frac{6 \times 10}{15}$$

$$x = \frac{60}{15} = 4$$

Por lo tanto, **15 obreros tardarán 4 días en construir el muro**.

(2 pts) 2. En una fábrica, 4 máquinas producen 500 tornillos en 7 horas. ¿Cuántas horas necesitarán 6 máquinas para producir 750 tornillos al mismo ritmo?

Solución: Este es un problema de **regla de tres compuesta**, ya que involucra dos variables que afectan el tiempo: la cantidad de máquinas y la cantidad de tornillos.

Paso 1: Plantear la relación Sabemos que: - 4 máquinas producen 500 tornillos en 7 horas. - Queremos saber cuántas horas (x) tardarán 6 máquinas en producir 750 tornillos.

El tiempo depende de dos factores: 1. **Cantidad de tornillos**: Más tornillos implican más tiempo (**relación directa**). 2. **Cantidad de máquinas**: Más máquinas reducen el tiempo (**relación inversa**).

Paso 2: Plantear la ecuación Usamos la fórmula de la regla de tres compuesta:

$$\text{horas}_1 \times \frac{\text{tornillos}_2}{\text{tornillos}_1} \times \frac{\text{máquinas}_1}{\text{máquinas}_2} = \text{horas}_2$$

Sustituyendo los valores:

$$7 \times \frac{750}{500} \times \frac{4}{6} = x$$

Paso 3: Resolver

Calculamos el primer factor:

$$\frac{750}{500} = 1.5$$

$$7 \times 1.5 = 10.5$$

Calculamos el segundo factor:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$10.5 \times \frac{2}{3} = 7$$

Respuesta final:

6 máquinas necesitarán 7 horas para producir 750 tornillos.

(2 pts) 3. Determina el dominio de la función

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 9}.$$

Solución: El dominio de una función es el conjunto de valores de x para los cuales la función está definida. En este caso, $g(x)$ es una función racional, y las funciones racionales están definidas en todos los números reales excepto donde el denominador es cero.

Paso 1: Identificar restricciones La función está dada por:

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$$

El denominador no puede ser igual a cero:

$$x^2 - 9 \neq 0$$

Paso 2: Resolver la ecuación

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Esto significa que la función no está definida en $x = 3$ ni en $x = -3$.

Paso 3: Escribir el dominio El dominio de $g(x)$ es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$ y $x = -3$. En notación de conjuntos:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$$

En notación de intervalos:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

Respuesta final: El dominio de $g(x)$ es $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

(2 pts) 4. Halla el valor mínimo de la función cuadrática

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3.$$

Solución: El valor mínimo de una función cuadrática de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

se encuentra en el vértice de la parábola. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y el vértice representa el valor mínimo.

Paso 1: Calcular la coordenada del vértice La coordenada x del vértice se encuentra con la fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Sustituyendo los valores $a = 2$ y $b = -8$:

$$x_v = \frac{-(-8)}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Paso 2: Evaluar $f(x)$ en el vértice Sustituyéndolo en la función:

$$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 3$$

$$= 2(4) - 16 + 3$$

$$= 8 - 16 + 3 = -5$$

Respuesta final: El valor mínimo de la función es -5 y ocurre en $x = 2$.

(2 pts) 5. Una población de bacterias se triplica cada 2 horas. Si inicialmente hay 200 bacterias, ¿cuántas habrá después de 6 horas?

Solución: Este es un problema de crecimiento exponencial. La cantidad de bacterias crece según la fórmula:

$$P(t) = P_0 \cdot r^{\frac{t}{T}}$$

donde: - $P_0 = 200$ es la población inicial, - $r = 3$ es el factor de crecimiento (se triplica cada cierto tiempo), - $T = 2$ es el tiempo en el que ocurre cada triplicación, - $t = 6$ es el tiempo total transcurrido.

Paso 1: Sustituir valores en la fórmula

$$P(6) = 200 \cdot 3^{\frac{6}{2}}$$

$$= 200 \cdot 3^3$$

$$= 200 \cdot 27$$

$$= 5400$$

Respuesta final: Después de 6 horas, habrá **5400 bacterias**.

(2 pts) 6. El pH de una solución está dado por la ecuación

$$pH = -\log[H^+].$$

Si una solución tiene una concentración de iones de hidrógeno de 10^{-5} moles/litro, ¿cuál es su pH?

Solución: El pH de una solución se define como:

$$pH = -\log[H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro.

Paso 1: Sustituir el valor de $[H^+]$ Dado que $[H^+] = 10^{-5}$:

$$pH = -\log(10^{-5})$$

Paso 2: Aplicar la propiedad del logaritmo Sabemos que $\log(10^a) = a$, por lo que:

$$pH = -(-5)$$

$$pH = 5$$

Respuesta final: El pH de la solución es **5**.

(2 pts) 7. Calcula la derivada de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

Solución: Dado que la función $f(x)$ es una fracción, aplicamos la **regla del cociente**, que establece que si una función tiene la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

su derivada es:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}.$$

Paso 1: Identificar $g(x)$ y $h(x)$ Definimos:

$$g(x) = x^2 - 4, \quad h(x) = x + 2.$$

Calculamos sus derivadas:

$$g'(x) = 2x, \quad h'(x) = 1.$$

Paso 2: Aplicar la regla del cociente

$$f'(x) = \frac{(2x)(x + 2) - (x^2 - 4)(1)}{(x + 2)^2}$$

Paso 3: Desarrollar el numerador

$$(2x)(x + 2) = 2x^2 + 4x$$

$$(x^2 - 4)(1) = x^2 - 4$$

Restamos:

$$(2x^2 + 4x) - (x^2 - 4) = 2x^2 + 4x - x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4.$$

Factorizando el numerador:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

Paso 4: Simplificar la fracción

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} = 1, \quad \text{para } x \neq -2.$$

Respuesta final:

$$f'(x) = 1, \quad \text{para } x \neq -2.$$

(2 pts) 8. La función de costo de producción de una empresa está dada por

$$C(x) = 5x^2 + 40x + 200,$$

donde x es la cantidad de productos fabricados. ¿Cuántas unidades deben producirse para minimizar el costo?

Solución:

Dado que la función de costo $C(x)$ es una **función cuadrática** de la forma:

$$C(x) = ax^2 + bx + c,$$

con $a = 5$, $b = 40$ y $c = 200$, sabemos que su gráfica es una **parábola con abertura hacia arriba** ($a > 0$), lo que implica que tiene un **mínimo** en su vértice.

Paso 1: Usar la fórmula del vértice

El valor de x que minimiza la función cuadrática se encuentra con la fórmula:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Sustituyendo los valores de a y b:

$$x = \frac{-40}{2(5)} = \frac{-40}{10} = -4.$$

Paso 2: Interpretación del resultado

Dado que x representa la cantidad de productos fabricados, el resultado $x = -4$ no tiene sentido en este contexto, ya que la cantidad de productos debe ser un número **no negativo**. En este caso, el modelo matemático puede requerir ajustes o restricciones adicionales para valores válidos de x.

Respuesta final:

No tiene sentido producir una cantidad negativa de productos. Si la pregunta requiere un número válido de unidades, se debe reconsiderar el dominio de la función o incluir restricciones adicionales.

(2 pts) 9. Una empresa vende un producto con una función de demanda dada por

$$p = -0.01x + 500,$$

donde p es el precio unitario en dólares y x es la cantidad demandada. Encuentra la función de ingreso total y el ingreso marginal.

Solución:

Paso 1: Definir la función de ingreso total

El ingreso total $I(x)$ se obtiene multiplicando la cantidad demandada x por el precio unitario p:

$$I(x) = x \cdot p.$$

Sustituyendo la función de demanda:

$$I(x) = x(-0.01x + 500).$$

Distribuyendo:

$$I(x) = -0.01x^2 + 500x.$$

Paso 2: Encontrar la función de ingreso marginal

El ingreso marginal $I'(x)$ se obtiene derivando la función de ingreso total:

$$I'(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.01x^2 + 500x\right).$$

Aplicando las reglas de derivación:

$$I'(x) = -0.02x + 500.$$

Respuesta final:

- **Función de ingreso total:**

$$I(x) = -0.01x^2 + 500x.$$

- **Función de ingreso marginal:**

$$I'(x) = -0.02x + 500.$$

(2 pts) 10. Un monopolista tiene una función de utilidad

$$U(q) = 400q - 5q^2 - 1200,$$

donde q es la cantidad de unidades producidas y vendidas. Determina el valor de q que maximiza la utilidad.

Solución:

Paso 1: Identificar la función a maximizar

La función de utilidad está dada por:

$$U(q) = 400q - 5q^2 - 1200.$$

Esta es una función cuadrática de la forma:

$$U(q) = -5q^2 + 400q - 1200.$$

Dado que el coeficiente de q^2 es negativo (-5), la parábola tiene una concavidad hacia abajo, lo que implica que la función tiene un **máximo**.

Paso 2: Encontrar el punto crítico

Para encontrar el valor de q que maximiza la utilidad, derivamos $U(q)$ respecto a q:

$$U'(q) = \frac{d}{dq}(400q - 5q^2 - 1200).$$

Aplicando las reglas de derivación:

$$U'(q) = 400 - 10q.$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero:

$$400 - 10q = 0.$$

Despejando q:

$$10q = 400.$$

$$q = 40.$$

Paso 3: Verificar que es un máximo

Para confirmar que $q = 40$ es un punto de máximo, evaluamos la segunda derivada:

$$U''(q) = \frac{d}{dq}(-10q + 400) = -10.$$

Dado que $U''(q) < 0$, la función es cóncava hacia abajo, lo que confirma que $q = 40$ maximiza la utilidad.

Respuesta final:

El monopolista maximiza su utilidad cuando produce y vende **40 unidades**.