「確率」とは何か？

5814 熊谷勇輝

開成学園　数学研究部

2019 年 9 月 22 日

宣伝

活動

- 数オリ講座
- ゼミ
- 合宿 (夏)
- 七則 (A405 で体験できます！)
- 手軽な頭脳戦のワードウルフ

問題意識

この章では次のことを紹介します.

- 普通の感覚で確率を扱うと「ヤバい」
- 無限は「人類には早すぎる」
- 解決策への道筋

ルイス・キャロル

[1832–1898] イギリスの童話作家・数学者. 本名, チャールズ・ドッジソン. 童話「不思議の国のアリス」「鏡の国のアリス」で知られる[1].

[1] スーパー大辞林

Pillow Problems

1893 年に「眠れない夜に頭の中で考えた問題集」として出版された.

問 (45 番)

無限個の棒を折ったとき, 少なくとも 1 本は真ん中で折れている確率を求めよ.

回答

棒それぞれはその n 分点でのみ (ただし n は奇数). 折れやすさはどこも等しいとする. このとき, ある棒が真ん中以外で折れる確率は, $1-\dfrac{1}{n}$ だから, n 本全部が真ん中以外で折れる確率は $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ である. $n\to\infty$ で $\dfrac{1}{e}$ だから, 少なくとも 1 本は真ん中で折れる確率は $\boxed{1-\dfrac{1}{e}}$.

疑問

- 分点と棒の数を合わせている！
- $n \to \infty$ で「無限個の棒を折っていく」ことになるのか？

問 (1885)

与えられた直線上にランダムに 1 点を選ぶとき, それが事前に指定した点と一致する確率はいくらか？

完全に 0 派

1 点は長さが 0 であるから確率は 0 であるべきで, 少しでも確率があれば無限個集まると 1 を超えてしまう.

ある種の“無限小”派

確率 0 をいくら集めても全体の確率 1 になりえない以上, 0 でない値を持つべき.

問 (1888)

与えられた線分にランダムに 1 点を選んだとき, この点が線分を

1. 同じ長さで割り切れるように (長さが整数比で表せる)
2. 同じ長さで割り切れないように (長さが整数比で表せない)

分ける確率はいくらか？

キャロルは「長さは整数比で表せるか表せないかのどちらかなんだから, 合計は絶対に１になるはず, 完全に０派はおかしい！」と主張しました.

解決の道筋

1. ルベーグが測度という「長さや面積, 体積のような"ものさし"の一種」で新しい積分論を生み出した.
2. コルモゴロフ「$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ という三つ組を確率の住む世界としよう」
3. ルベーグ測度を上手く使って「線分上にランダムに1点を選ぶ」を定式化して, コルモゴロフの定義に照らし合わせる
4. 確率が計算できる！

注意

この章は難しいので, 名言[2]を引用します.

1. 全然わからなくても気に病む必要はありません.
2. 逆にわからないからこそ頭に残って, 数年後, 数十年後に何かの役に立つかもしれません.
3. 咀嚼に長い時間かかるものに触れることって, すばらしいことだと思いませんか.

[2]『圏論の歩き方』(日本評論社, 2015), 第 7 章

定義 (σ 加法族)

S の部分集合の集合族 $\mathcal{M}$ が以下の性質を満たすとき, $\mathcal{M}$ は (S 上の) σ 加法族であるという.

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{M}$
3. $A_n \in \mathcal{M}\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

定義 (可測空間)

組 $(S, \mathcal{M})$ を可測空間という. $\mathcal{M}$ の元を可測集合という

生成されるσ加法族

事実 S の任意の部分集合族 $\mathcal{M}$ に対し, $\mathcal{M}$ を含む最小の σ 加法族 $\sigma[\mathcal{M}]$ が存在する.

定義 $\sigma[\mathcal{M}]$ を $\mathcal{M}$ で生成される σ 加法族という.

定義 (集合の直和)

どの相異なる 2 つをとっても共通する元がない (互いに素) ような集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合を直和といい, $\displaystyle\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ で表す.

定義 (測度)

可測空間 $(S, \mathcal{M})$ に対し，$\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ で，$A_n \in \mathcal{M}$ が互いに素ならば

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\star)$$

を満たすものを測度という．可測空間とその上の測度の組を測度空間という．

注意

性質 $(\star)$ を σ 加法性という．また，$\mathcal{M}$ が σ 加法族でなくとも，$\bigsqcup A_n \in \mathcal{M}$ のとき $(\star)$ が成り立つ場合は同様に σ 加法性ということにする．

定義 $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{M}$ を μ 零集合という.

事実 空集合ならば零集合であるが, 零集合ならば空集合であるとは限らない.

定義

$Y \subset X$ とし, $P(x)$ を $x \in Y$ に関する命題とする. ある零集合 N が存在して, 任意の $x \in Y \setminus N$ に対して $P(x)$ が成り立つとき, $P(x)$ はほとんどすべての (almost every) $x \in Y$ に対して, または Y 上ほとんどいたるところ (almost everywhere) 成り立つといい,

$$P(x) \ \mathrm{a.e.}\, x \in Y$$

と書く.

確率の正体

定義 (確率空間)

$P(\Omega) = 1$ である測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という．

注意

P を確率測度あるいは単に確率, $\mathcal{F}$ の元を事象, $A \in \mathcal{F}$ に対し $P(A)$ を事象 A の確率, Ω を全事象, $\varnothing$ を空事象という．また, Ω を標本空間ということもあり, その場合は Ω の元を標本 (点) という．

大事なこと

1. つまり「確率とは全測度１の測度」が現代的な立脚点ということです.
2. 可算集合を扱っている分にはこんな仰々しい定義なんていりません. 人類には無限は早すぎるので, こういったツールを用いないと非可算にはまず対応できないだけです.

禅問答1

「事象 A の確率が 1 であるとき A は必ず起こるし, 事象 B の確率が 0 であるとき B は必ず起こらないよ」というのは適切か？

『プログラミングのための確率統計』には次のような問答があります.

Q. 面積 0 というのは図形がないことを意味するはずだ. 線分なら図形はあるのだから面積 0 はおかしい.

A. あなたの主張は「集合 B の面積が 0 なら B は空集合である」なわけですが, 主張の根拠は何でしょうか. そんな気がしたという以上の根拠はないはずです. (中略)

(中略) 整理しましょう.

- 0 を何個足しても 0
- 点の面積は 0
- Ω は点の集合
- Ω の面積は 1

これらはどれも確かです. 矛盾と感じる理由は, 点の面積を足したものが正方形の面積なはずだと素朴に思ったからでしょう.

しかし, 上で挙げたことがすべて正しいのなら, その素朴な思い込みは否定せざるをえません. いくら直感に合わないと不平を言ったところで, 論理的に否定されてしまいます.

定義

$P(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$ であるし,
$P(B) = 0 \not\Rightarrow B = \varnothing$ であるので,
$P(A) = 1$ となるとき A は, ほとんど確実に (almost surely, a.s.) 起きるという.

禅問答2

標本と事象の違いを説明せよ．たとえば「標本の確率」を求めることはできるか？

有限回のコイントス

$\varnothing \subsetneqq {}^{\exists}A \subsetneqq \Omega$ なら $\mathcal{F}_1 = \{0, A, A^{\complement}, \Omega\}$ は σ 加法族である．$P_1(A) = p \in [0,1]$ とすれば P_1 は確率測度である．この三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}_1, P_1)$ をベルヌーイ型の確率空間といい，$\mathcal{F}_1$ で記述されるような事象をベルヌーイ型の事象という．

定義

- $[a,b]$ は閉区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$
- $[a,b)$ は半開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$
- $(a,b]$ は半開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$
- (a,b) は開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

定義 (ボレル集合族)

ボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とは $\mathbb{R}$ 内の任意の区間を含む最小の σ 加法族である．ボレル集合族の要素をボレル可測な集合，あるいは単にボレル集合という．

事実 (ボレル集合族上のルベーグ測度)

可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度 l で, 任意の $a < b \in \mathbb{R}$ について $l((a, b]) = b - a$ となるものが一意的に存在する.

定義 (測度空間の完備性)

測度空間 $(S, \mathcal{M}, \mu)$ の零集合の部分集合が常に可測ならば, 完備であるという.

注意

どんな測度空間でも, 零集合の部分集合をすべて σ 加法族に追加すれば完備にできる (完備化).

定義 (ルベーグ測度空間)

測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), l)$ を完備化した $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \bar{l})$ をルベーグ測度空間といい, $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ をルベーグ可測集合族, その要素をルベーグ可測集合, 測度 $\bar{l}$ をルベーグ測度という.

準備

- 実数 $\mathbb{R}$ のうち, 整数の分数で表せる数を有理数 $\mathbb{Q}$, そうでない数を無理数 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ という.
- $1, 2, 3, \ldots$ と全部を一つずつ対応できるなら可算という. それ以上ありすぎてできないなら非可算という.

事実 $\mathbb{Q}$ は可算である.

事実 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は非可算.

事実 $[0, 1]$ は非可算.

解決

1. $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度空間を $[0,1]$ 上に制限にする.
2. $l([0,1]\cap\mathbb{Q})=0$ が示せる (時間があれば示します).
3. 無理数は有理数の実数における補集合であるから可測である.
4. 測度の定義から $l([0,1]\cap\mathbb{Q}^{\complement})=1.$
5. ランダムに選んだ点が有理数である確率は 0 で, 無理数である確率は 1.

準備

単調性 $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ について $A_1 \subset A_2$ ならば $\mu(A_1) \leqq \mu(A_2)$.

下方連続性 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ なる $A_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

定理 $l([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

証明. σ 加法性から $l(\{a\}) = 0$ を示せば十分.
$\forall \varepsilon > 0$, $\{a\} \subset [a, a+\varepsilon)$ より測度の単調性から

$$0 \leqq l(\{a\}) \leqq l([a, a+\varepsilon)) = \varepsilon$$

であり, 測度の下方連続性から $l(\{a\}) = 0$ を得る. $\square$

ルベーグ非可測

σ 加法族で考えたのは実は次の定理に起因していた.

定理 (Vitali) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の完全代表系はルベーグ非可測.

この証明の最中に選択公理を用いるのだが, 選択公理は現代数学では (今では頼りにされているが) 昔は少し疑念を抱かれていた時期もあった (らしい).

今後の発展

実はルベーグ非可測集合と基礎論との関係は未だに数学のフロンティアである:

定理 (Solovay) ZFC に強到達不能基数の存在を仮定した公理系が無矛盾ならば, ZF に従属選択公理 (DC) と「実数の部分集合はすべてルベーグ測度である」(LM) を仮定した公理系も無矛盾である.

定理 (Shelah) ZF+DC+LM が無矛盾なら, 到達不能基数の存在も無矛盾.

ご清聴ありがとうございました。