数研部員と勝負！2019

5348 米田 寛峻 (square1001)

自己紹介

- 5348 米田 寛峻
- プログラミングが得意です

- 日本情報オリンピック '19 5位
- アジア太平洋数学オリンピック 日本8位
- などなど

square1001

早速、ゲームで対戦！

<ルール>

- 11 × 11 のマス目があります
- 左上にサイコロが置かれていて、一番上の面の数は 1
- 先手と後手が交互に、サイコロを右または下方向に 1 マス転がします
- マス目の外にサイコロを動かすことはできない
- 20 ターン終わった後、上の面の数が **2, 3, 4, 5** なら先手が勝ち、**1, 6** なら後手が勝ち

早速、ゲームで対戦！

ROUND　#1

早速、ゲームで対戦！

ROUND　#2

早速、ゲームで対戦！

ROUND #3

Q1. どちらが勝てるのか？

先手

後手

Q1. どちらが勝てるのか？

先手

後手

Q2. どうやったら勝てるのか・・・？

このゲームには、なんと

簡単な「必勝法」がありますす

Q2. どうやったら勝てるのか…？

- 今の一番上の面の数を1とします
- 先手が右に1マス転がしたとします
  - その次のターンで、後手も右に1マス転がします
  - すると、一番上の面が6になります
- 先手が下に1マス転がしたとします
  - その次のターンで、後手も下に1マス転がします
  - すると、一番上の面の数が6になります

どっちの場合でも
1 → 6 にできる！！！

Q2. どうやったら勝てるのか・・・？

- 3, 4 ターン目は、先ほどと同じように 6 → 1 にできます
- 5, 6 ターン目は、先ほどと同じように 1 → 6 にできます
- 7, 8 ターン目は、先ほどと同じように 6 → 1 にできます
- (中略)
- 19, 20 ターン目は、先ほどと同じように 6 → 1 にできます

よって後手の勝ち！！！

早速、ゲームで対戦！

- これは、**数研部員と勝負！2018 の問題 1** です
  - わたしが作りました 面白かったですか？

- 去年の問題 (3 問) は以下のページで見ることができます！
  - https://drive.google.com/file/d/10r5pDLIYF1ijDpOkv-qsJfxBhozObu7y/view?usp=sharing

数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1: 組み合わせゲーム理論入門
- Section #2: ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3: 物真似戦法
- Section #4: XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5: Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6: おわりに・ゲームの例題集

「数研部員と勝負！」について

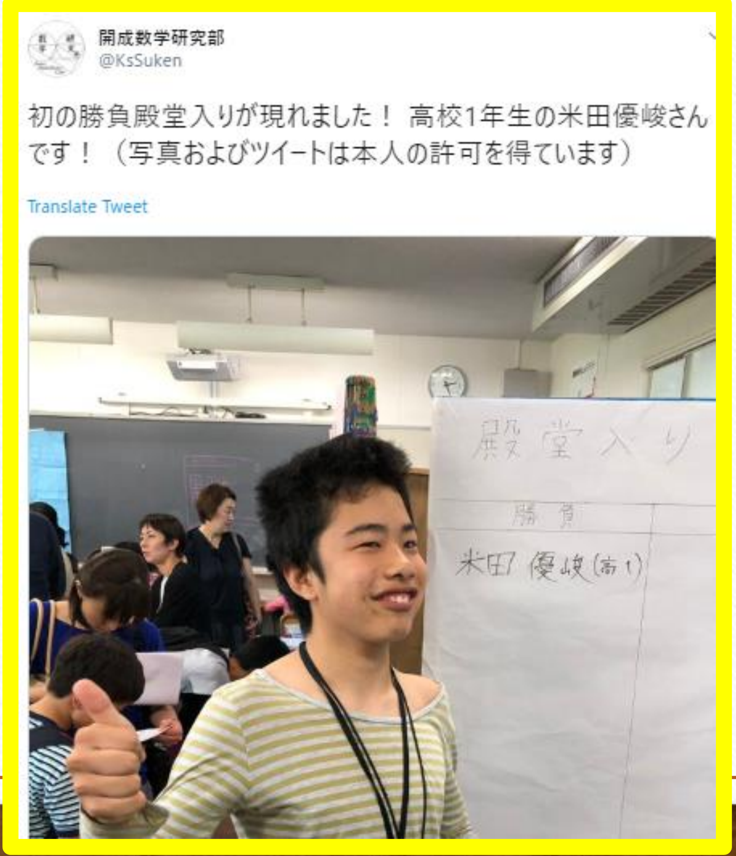
- 数研部員と勝負！では、毎年の文化祭で3問「2人でゲームをする形式の問題」が出されます

- 参加者は先手か後手かを選ぶ権利があります
- 実際にゲームを**数研部員と勝負**して、(2回とか連続して) 勝てたらこのゲームはクリアとなります

「数研部員と勝負！」について

- 3 問全部解けたら**「殿堂入り」**です
- 去年は 5 人くらい出ました
- 例年 0〜2 人くらいですが、今年は去年同様 4〜7 人くらいを狙っています

(右の写真は数研部員と勝負！2018 の初の殿堂入りのツイートです。55 Retweets / 244 Likes)



組み合わせゲーム理論

- 2 人で対戦するゲームについて考える数学の分野、これが「組み合わせゲーム理論」
- 基本的に次の仮定をします
  - 「完全情報ゲーム」である (完全情報ゲームでない例: 「じゃんけん」など)
  - 確率や運の要素がない
  - どのゲームにも勝ち・負け (+ 引き分け？) が定義される
  - ターン数が有限回

組み合わせゲーム理論

- どのようなゲームも、先手・後手のどちらが勝つか求めることができます
  - これは次の章で説明します

- どのくらい効率的に求められるかはものによる
  - 例えば、8×8 のオセロは、先手・後手のどちらが勝つかを求める方法はあるが、あまりにも答えを求めるのに時間がかかりすぎる方法しか考案されておらず、現代のコンピューターに至っても計算できない。今の方法だと、最低でも 10^{22} 種類の手を解析しないといけない

組み合わせゲーム理論

- 一方で、先ほど挙げたサイコロを転がす問題のように、「良い性質が見つかると効率的に先手が勝つか後手が勝つか判定できる」ものもある！

＜先手必勝か後手必勝かがすぐに判定できる有名な問題＞

- 21 個の石があります。先手と後手はそれぞれのターンで 1 個から 3 個までの石を取り除きます。石を 0 個にした方が勝ちです。どちらが勝つか？

数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1:　組み合わせゲーム理論入門
- Section #2:　ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3:　物真似戦法
- Section #4:　XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5:　Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6:　おわりに・ゲームの例題集

ゲームの勝敗の「計算」

- 先ほど挙げた有名な問題を再掲します

- $n = 21$ 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 個以上 3 個以下の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- つまり、0 個にされて操作できなくなった方が負けです

- 今からこのゲームを “計算” します

ゲームの勝敗の「計算」

- $n = 0$ のとき ･･･ 先手が動かせないので後手必勝
- $n = 1$ のとき ･･･ 先手が 1 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- $n = 2$ のとき ･･･ 先手が 2 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- $n = 3$ のとき ･･･ 先手が 3 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- ここまでは OK

ゲームの勝敗の「計算」

- $n=0$ のとき・・・ 先手が動かせないので後手必勝
- $n=1$ のとき・・・ 先手が 1 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- $n=2$ のとき・・・ 先手が 2 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- $n=3$ のとき・・・ 先手が 3 個の石を取り除くと 0 個になるので先手必勝
- $n=4$ のとき・・・ 先手が 1 個の石を取り除くと後手が 3 個取り除くし、先手が 2 個取り除くと後手が 2 個取り除くし、先手が 3 個取り除くと後手が 1 個取り除くので、後手必勝

？？？

重要な定理

＜重要な定理＞

- 「負け」の状態に動かせるムーブがあるなら、**勝ちの状態**
- そうでないなら**負けの状態**

- 先手必勝、後手必勝で考えるのではなくて、「このターンから勝てるように動かせるか (**勝ちの状態**)、そうでないか (**負けの状態**)」を考える
- めっちゃ便利な性質そう…！

重要な定理

＜重要な定理＞

- 「負け」の状態に動かせるムーブがあるなら、**勝ちの状態**
- そうでないなら**負けの状態**

- 先ほどの $n = 4$ の例だと、そのターンの人は $n = 1, 2, 3$ に動かせて、全部「**先手必勝**」(次のターンの人にとっては**勝ちの状態**) なので、$n = 4$ は「**後手必勝**」(そのターンの人にとっては**負けの状態**)

表を使って計算しよう

- 実は、表を使うと、整理して計算するのに便利

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
勝敗	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け				

「勝ち」の状態にしか行けないので負け

表を使って計算しよう

- 実は、表を使うと、整理して計算するのに便利

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
勝敗	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け	勝ち			

$n = 4$ にすると「負け」の状態にできるので、そうすると勝てる

表を使って計算しよう

- 実は、表を使うと、整理して計算するのに便利

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
勝敗	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け	勝ち	勝ち		

$n=4$ にすると「負け」の状態にできるので、そうすると勝てる

表を使って計算しよう

- 実は、表を使うと、整理して計算するのに便利

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
勝敗	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17
勝敗	勝ち	勝ち	勝ち	負け	勝ち	勝ち	勝ち	負け	勝ち

規則性はあるかな？

- ゲームによっては、n の値によって規則性がある
- 今回の場合は・・・？
- $\boldsymbol{n}$ **が 4 の倍数のとき「負けの状態」**
- $\boldsymbol{n}$ **が 4 の倍数でないとき「勝ちの状態」**

$n \leq 20$ くらいまで勝敗を計算すると、
規則性が見えた！

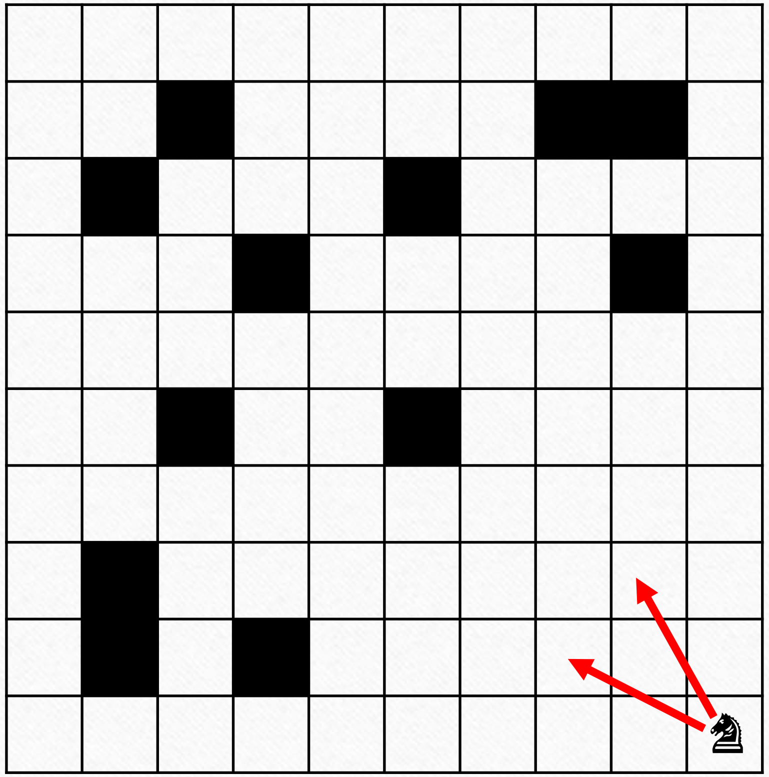
ゲームを解く方針 #1

1. 先ほどのように n とかの値によって変わる勝敗を計算する
2. 規則性があれば見出す

- こんな感じでやると意外と面白い性質が見つかったりします。

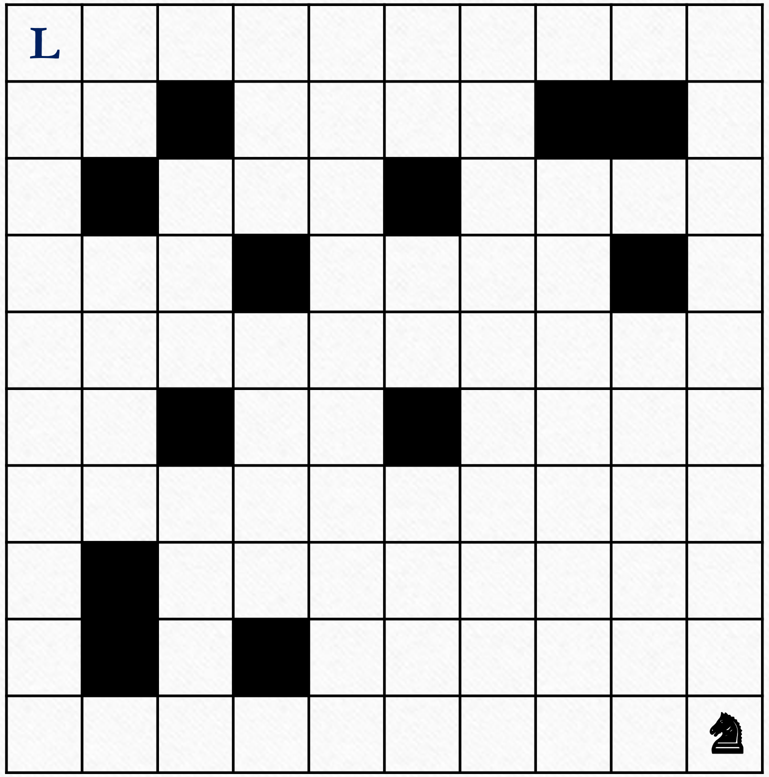
問題 1

- 10 × 10 のチェスボードがある
- 右下のマスに 1 つ駒が置かれている
- 駒の許される動かし方
  - 左に 2 マス、上に 1 マスの位置に動かす
  - 左に 1 マス、上に 2 マスの位置に動かす
  - 盤面の外や黒マスには入れない
- 動かせなくなった方が負け



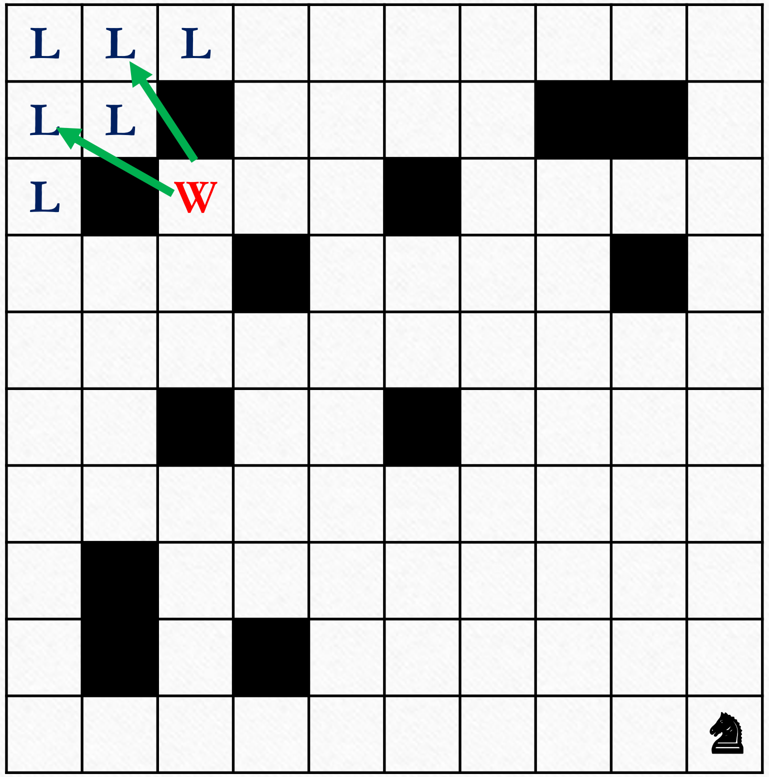
解法 1

- 左上のマスから順に**「勝ちの状態」**なのか**「負けの状態」**なのか求めていく
- ありうる “ボードの状態” は高々 100 通りしかないので、計算が簡単
- 右図では **“W”** を**勝ちの状態**、**”L”** を**負けの状態**とする



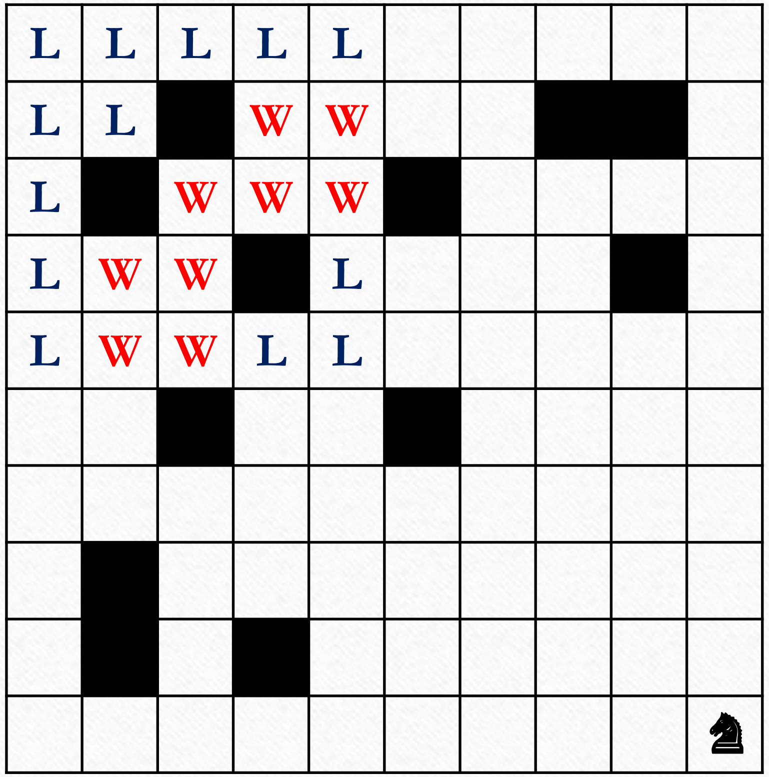
解法 1

- 左上のマスから順に**「勝ちの状態」**なのか**「負けの状態」**なのか求めていく
- ありうる“ボードの状態”は高々 100 通りしかないので、計算が簡単
- 右図では **“W”** を**勝ちの状態**、**”L”** を**負けの状態**とする



解法 1

- 左上のマスから順に**「勝ちの状態」**なのか**「負けの状態」**なのか求めていく
- ありうる “ボードの状態” は高々 100 通りしかないので、計算が簡単
- 右図では **“W”** を**勝ちの状態**、**”L”** を**負けの状態**とする



解法 1

- 左上のマスから順に **「勝ちの状態」** なのか **「負けの状態」** なのか求めていく
- ありうる “ボードの状態” は高々 100 通りしかないので、計算が簡単
- 右図では **“W”** を**勝ちの状態**、**”L”** を**負けの状態**とする

L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
L	L		W	W	W	W			W
L		W	W	W		W	W	W	W
L	W	W		L	L	L	L		L
L	W	W	L	L	L	W	W	W	W
L	W		L	L		W	W	W	L
L	W	W	L	W	W	W	L	L	L
L		W	L	W	W	L	L	L	W
L		W		W	W	L	L	W	W
L	W	W	L	W	L	L	W	W	♞

???

解法 1

- 左上のマスから順に「**勝ちの状態**」なのか「**負けの状態**」なのか求めていく

- 右図では **“W”** を**勝ちの状態**、**”L”** を**負けの状態**とする

- 結果: **先手必勝**
    - 矢印の方向両方で “L” に行き着ける

L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
L	L		W	W	W	W			W
L		W	W	W		W	W	W	W
L	W	W		L	L	L	L		L
L	W	W	L	L	L	W	W	W	W
L	W		L	L		W	W	W	L
L	W	W	L	W	W	W	L	L	L
L		W	L	W	W	L	L	L	W
L		W		W	W	L	L	W	W
L	W	W	L	W	L	L	W	W	W

問題 2

- 最初、石が 50 個あり、カウンターの値は 10
- 各プレイヤーは次の操作のうちどちらかを選べる
  - カウンターの値が 2 以上のとき、これを 1 減らす
  - 石の個数がカウンターの値以上のとき、石をカウンターの値だけ取り除く
- 操作を行えなくなった方が負け

「数研部員と勝負！2017」問題 2 より、作問者は私です

問題 2

- ゲームの「ありうる状態数」はどのくらい？
  - 石が 0 個 ～ 50 個
  - カウンターが 1 ～ 10
  - 状態数は高々 51 × 10 = 510 通り

- **510 通りなので、計算できる気がしない**

問題 2

- ゲームの「ありうる状態数」はどのくらい？
  - 石が 0 個 ～ 50 個
  - カウンターが 1 ～ 10
  - 状態数は高々 51 × 10 = 510 通り

- 規則性を見つけられないか？？？
- 石の個数 ≦ 10、カウンターの値 ≦ 5 くらいで「実験」してみよう！

問題 2

- 先ほどみたいな勝敗のテーブルを作るとこんな感じになります

石の個数

カウンターの値

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**L**									
2										
3										
4										
5										

問題 2

- 先ほどみたいな勝敗のテーブルを作るとこんな感じになります

石の個数

カウンターの値

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	L	W	L	W	L	W	L	W	L	W
2										
3										
4										
5										

問題 2

- 先ほどみたいな勝敗のテーブルを作るとこんな感じになります

石の個数

カウンターの値

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	L	W	L	W	L	W	L	W	L	W
2	W	L	L	L	W	L	L	L	W	L
3										
4										
5										

問題 2

- 先ほどみたいな勝敗のテーブルを作るとこんな感じになります

石の個数

カウンターの値

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	L	W	L	W	L	W	L	W	L	W
2	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L
3	L	W	L	W	L	W	L	W	L	W
4	W	L	W	L	W	W	W	W	W	L
5	L	W	L	W	L	W	L	W	L	W

問題 2

- 表をよく見てみると、次のような規則性が分かりそう

- カウンターの値が 1:「LW」の繰り返し
- カウンターの値が 2:「WLWW」の繰り返し
- カウンターの値が 3:「LW」の繰り返し
- カウンターの値が 4:「WLWLWWWW」の繰り返し
- カウンターの値が 5:「LW」の繰り返し

問題 2

- カウンターの値が奇数のときは、「**LW**」の繰り返しになりそう
- カウンターの値が偶数のときは･･･？
  - $C = 2$:「**WLWW**」の繰り返し
  - $C = 4$:「**WLWLWWWW**」の繰り返し
  - $C = 6$:「**WLWLWLWWWWWW**」の繰り返し
  - $C = 8$:「**WLWLWLWLWWWWWWWW**」の繰り返し
- 何か規則性がある気がする･･･？

問題 2

- カウンターの値が $2k$ のとき、「**WL**」が k 個の後に「**W**」が $2k$ 個、が繰り返される！！！
- つまり、カウンターの値が 10 のとき・・・？
  - 「**WLWLWLWLWLWWWWWWWWWW**」の繰り返しになる
- この 51 番目 (0 から始まっているので) の値は「**W**」なので、このゲームはなんと先手必勝

問題 2

Q1: どうやって証明するの？

A1: カウンターの値 1 から順に、数学的帰納法 (カウンターの値が C のときに、1 個前の結果 ($C-1$ のとき) を利用する方法) で証明します。

Q2: 解く方針が明らかすぎて、簡単すぎませんか？

A2: こういう問題も 1 問くらいはあっても良いと思います。(???)

数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1: 組み合わせゲーム理論入門
- Section #2: ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3: 物真似戦法
- Section #4: XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5: Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6: おわりに・ゲームの例題集

「物真似戦法」って何？

- 「物真似戦法」は、ゲームの戦略を考える際の基本的な考え方です
- そもそも、これはいったい・・・？

- 相手の動きに対応する動きをする戦法です

「物真似戦法」とは？

- 先ほど挙げたゲームを再掲します
- $n = 21$ 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 個以上 3 個以下の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- 先手・後手の戦略を簡単に考えたい！

「物真似戦法」とは？

- 次のような戦略を考えます

1. 先手は、まず 1 個石を取り除く (20 個になる)
2. 後手が石を 1, 2, 3 個のいずれか取り除く
3. 先手は石を**後手と合わせての取り除いた石の個数が 4 個になるように**3, 2, 1 個のいずれか取り除く
4. 石がなくなるまで、2. と 3. を繰り返す
5. 先手が石の個数を 20 → 16 → 12 → 8 → 4 → 0 にできて、**勝てる**

「物真似戦法」とは？

- 先ほどの戦略では、先手は2回目以降のターンで「後手が1を打ったら3、2を打ったら2、3を打ったら1」の動きしかしていない
- 直前の後手の動きだけを考えて、それに対応する動きをする戦略が「物真似戦法」(先手・後手が逆のときもある)
- ゲームの戦略を考える上で基本的な考え方

問題 3

- 25 個のコインがあり、すべて表を向いています
- 先手と後手は交互に、「隣に表を向いているコイン」があるような表向きのコインを選び、これを裏返す
- 最初に裏返せなくなった方が負け

- ヒント:「物真似戦法」が最適な戦略です。どのように対称性を作り出すのかを探るのが、キーポイントです。

解法 3

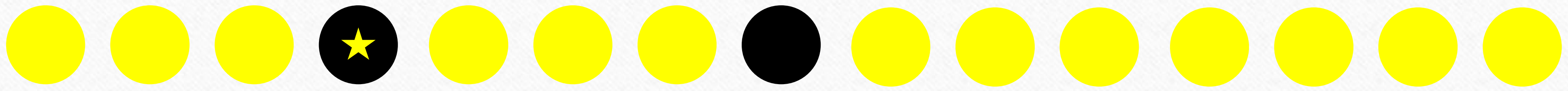
- これは先手必勝です
- 先手の戦略は「物真似戦法」です

解法 3

1. まず先手は、真ん中のコインを裏返します

解法 3

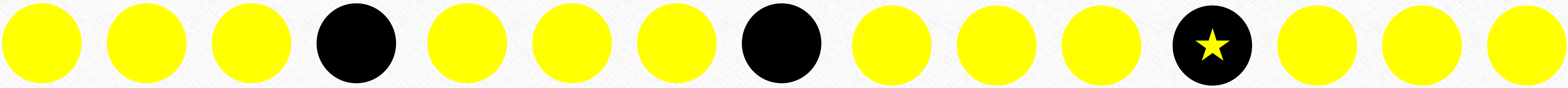
2. 後手は適当な場所を裏返します



解法 3

3. 先手は後手が打った場所に対称な位置のコインを裏返します

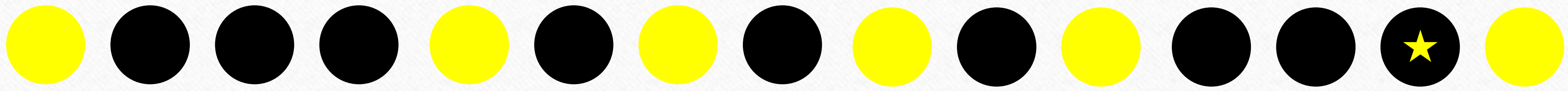
- このとき、コインの表裏は左右対称になっています



解法 3

4. 先ほどの 2., 3. の操作を繰り返すと、後手がいずれ置けなくなります

- 左右対称なので、**後手が置ければ先手も置ける**



数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1: 組み合わせゲーム理論入門
- Section #2: ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3: 物真似戦法
- Section #4: XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5: Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6: おわりに・ゲームの例題集

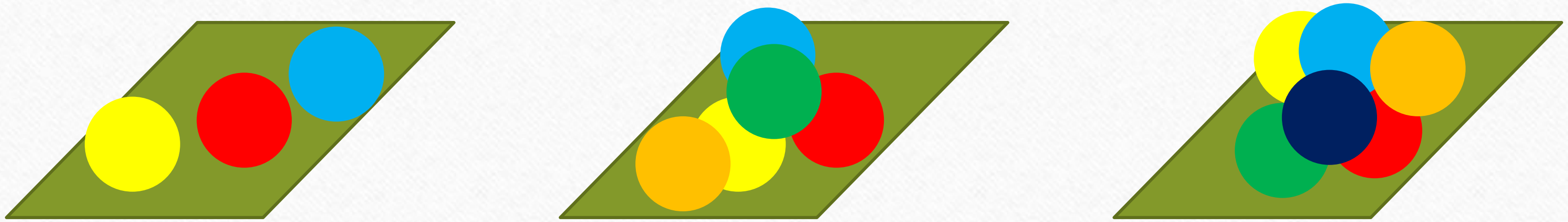
ニム (Nim) というゲーム

- Nim は次のようなゲームです

- N 個の石の山がある
- それぞれの石の山にある石の数は $A_1, A_2, \ldots, A_N$
- 先手と後手は、「山を 1 つ選んで 1 個以上の石 (全部もアリ) を取り除く」操作を交互に行う
- 最初に取り除けなくなった人が負け

具体例

- $N = 3, A = (3,5,6)$ のとき・・・どっちが勝てる？



具体例

- 実は、$N = 3, A = (3, 5, 6)$ の Nim は、**後手必勝** (つまり、**負けの状態**) です！！！

- なぜ？
- **「2 進法の XOR」を使うと、計算できる**

具体例

- 実は、$N = 3, A = (3, 5, 6)$ の Nim は、**後手必勝** (つまり、**負けの状態**) です！！！

- なぜ？
- **「2 進法の XOR」を使うと、計算できる**
- 「2 進法の XOR」って、なに？
- 次のスライド以降で説明します

XOR (exclusive or) とは？

- 2 つの 0 以上の整数 A, B に対して、$A + B, A \times B$ のように「$A \oplus B$」という演算ができます

＜例＞

- $1 \oplus 4 = 5$
- $8 \oplus 3 = 11$
- $259 \oplus 528 = 787$

XOR (exclusive or) とは？

- 2 つの 0 以上の整数 A, B に対して、$A+B, A\times B$ のように「$A \oplus B$」という演算ができます

＜例＞

- $1 \oplus 4 = 5$
- $8 \oplus 3 = 11$
- $259 \oplus 528 = 787$

もしかして、足し算と同じなのでは・・・？

XOR (exclusive or) とは？

- 2 つの 0 以上の整数 A, B に対して、$A+B, A\times B$ のように「$A \oplus B$」という演算ができます

＜例＞

- $1 \oplus 4 = 5$
- $8 \oplus 3 = 11$
- $259 \oplus 528 = 787$
- $3 \oplus 5 = 6$

？？？？？？？

XOR (exclusive or) とは？

【XOR の計算方法】

- A, B を 2 進数で表します
- 右から i 桁目が「片方 1 でもう片方が 0」の場合のみ、A と B の XOR を 2 進数で表したときの i 桁目が 1 になる (そうでない場合は 0)

- 例：$A = 3, B = 5$ のとき、3 は 2 進数で 011 と表され、5 は 2 進数で 101 と表されるので、XOR は 2 進数で 110 と表される、すなわち 6

XOR (exclusive or) とは？

(例 2) $110 \oplus 57$ の計算

110 =	1	1	0	1	1	1	0
57 =	0	1	1	1	0	0	1
XOR	1	0	1	0	1	1	1

よって、$110 \oplus 57 = (1010111)_2 = 87$

XOR (exclusive or) の性質

- 同じ数の XOR は 0 ($A \oplus A = 0$)
- 「交換法則」が成り立つ ($A \oplus B = B \oplus A$)
- 「結合法則」 が成り立つ ($(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$)
- $\boldsymbol{A \oplus B = C \Leftrightarrow B \oplus C = A \Leftrightarrow C \oplus A = B}$
  - これを使うと、$A \oplus x = B$ となる x は一つ ($A \oplus B$) であることも言える
- $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_N = \left((A_1 \oplus A_2) \oplus A_3\right) \oplus \cdots \oplus A_N$ であるが、どのような順序で計算しても良い

Nim の勝利条件

- Nim で「勝ちの状態」である条件は・・・？
  - $\boldsymbol{A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0}$

- Nim で「負けの状態」である条件は・・・？
  - $\boldsymbol{A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_N = 0}$

- 超単純！！！

Nim の勝利条件

- Nim で「勝ちの状態」である条件は・・・？
  - $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0$
- Nim で「負けの状態」である条件は・・・？
  - $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_N = 0$
- 超単純！！！

なんでこんな単純な式になるの？
証明してみよう！

Nim の勝利条件 – 証明

＜証明のアウトライン＞

1. まず、$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = 0$ **(負けの状態)** からどのような手を打っても $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0$ **(勝ちの状態)** になってしまうことを示す
2. 次に、どのような $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0$ **(勝ちの状態)** からでも、$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = 0$ **(負けの状態)** にする方法がある
3. これでおしまい

Nim の勝利条件 – 証明

1. まず、$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = 0$ **(負けの状態)** からどのような手を打っても $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0$ **(勝ちの状態)** になってしまうことを示す

- どれかの A_i を「x」で置き換えても、$A_1 \oplus \cdots \oplus x \oplus \cdots \oplus A_N = 0$ の解は 1 つ (A_i) しかないので、「負けの状態」にできる操作方法はない

Nim の勝利条件 – 証明

2. 次に、どのような $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N \neq 0$ **(勝ちの状態)** からでも、$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = 0$ **(負けの状態)** にする方法がある

- $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_N = x$ とし、x の最高位が 2^k の位とする
- XOR の定義的に、$A_1, A_2, \ldots, A_N$ の中で 2^k の位が 1 のものがある
- これの 1 つを A_i として、$A_i > (A_i \oplus x)$ が確実に成り立つから、A_i を $A_i \oplus x$ に変える動きをすれば「負けの状態」にできる

Nim の勝利条件 – 証明

- 例えば、$A = (12, 7, 4)$ のとき、全部の XOR は 15 になる
- 一番上の位は 2^3 の位なので、これが 1 であるもの、A_1 を選ぶ
- $A_1 = 12$ を $A_1 \oplus 15 = 3$ で置き換える、つまり 1 番目の山から 9 個の石を取り除くのが、必勝法

3. これでおしまい

- 証明終わり！

数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1: 組み合わせゲーム理論入門
- Section #2: ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3: 物真似戦法
- Section #4: XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5: Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6: おわりに・ゲームの例題集

「Grundy 数」とは？

- ゲームの状態には、「勝ちの状態」・「負けの状態」 が計算できた
- 実は、ゲームの状態に対して「Grundy 数」という数も計算できる
  - Grundy 数が 0 以外のとき・・・「勝ちの状態」
  - Grundy 数が 0 のとき・・・「負けの状態」
  - なんか Nim に似てない？

「Grundy 数」とは？

- Grundy 数が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であるような n 個のゲームがあるとする
- ルールは、プレイヤーが交互に「どれか 1 つのゲームを選んでこれに対して操作」して、操作できなくなった方が負け
- その場合、勝利条件は $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$
  - それぞれのゲームの Grundy 数が Nim のそれぞれの山の石の数に対応！？
- **すべてのゲームを Nim に帰着！！！？**

問題 4

- 石の山が 4 個あり、それぞれ 11, 14, 17, 21 個の石がある
- 各プレイヤーは交互にターンを行い、それぞれのターンでは「石の山を 1 個だけ選び、そこから石を 1 ～ 3 個取り除く」
- 石の山を全部 0 個にした人が勝ち
  - つまり、操作を行えなくなった方が負け

解法 4 ???

- 1 つの山のときのゲームを考えてみる
- 石が n 個のときの Grundy 数は、次のようになる

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(n)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$g(n)$	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

解法 4 ???

- 石の数が 11, 14, 17, 21 の山の Grundy 数はそれぞれ 3, 2, 1, 1
- なので、石の個数が (3, 2, 1, 1) の Nim だと思っても良い

- $3 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \neq 0$ なので、**先手必勝 (勝ちの状態)**

必勝法について

- Nim の必勝法
  - 勝てる側は、石の数の XOR を 0 にする操作をする
  - 負ける側は、石の数の XOR を 0 にできないので、どうしようもない

- Grundy 数のゲームの必勝法
  - 勝てる側は、Grundy 数の XOR を 0 にする操作をする
  - 負ける側は、Grundy 数の XOR を 0 にできないので、どうしようもない

Grundy 数の求め方

- Grundy 数は、どのようにして求めるのか？

- あるゲームの状態からターンを行ったときに、k 個の「次の状態」に行けるとして、その Grundy 数を $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$ とする
- そのとき、このゲームの状態の Grundy 数は $mex(g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k)$

Grundy 数の求め方

- Grundy 数は、どのようにして求めるのか？

- あるゲームの状態からターンを行ったときに、k 個の「次の状態」に行けるとして、その Grundy 数を $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$ とする
- そのとき、このゲームの状態の Grundy 数は $mex(g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k)$

$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$ に登場しない最小の 0 以上の整数

解法 4

- 先ほどの問題の Grundy 数を求めてみよう

＜Grundy 数を求めるべき問題＞

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 ～ 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 ～ 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0								
$g(n)$	0								

何も操作を行えないので、$n = 0$ のときの Grundy 数は 0

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 ～ 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1							
$g(n)$	0	1							

$n = 0$ の状態のみに行けるので、$n = 1$ のときの Grundy 数は $mex(0) = 1$

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 ～ 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1	2						
$g(n)$	0	1	2						

$n = 0, 1$ の状態に行けるので、$n = 2$ のときの Grundy 数は $mex(0, 1) = 2$

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 〜 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1	2	3					
$g(n)$	0	1	2	3					

$n = 0, 1, 2$ の状態に行けるので、$n = 3$ のときの Grundy 数は $mex(0, 1, 2) = 3$

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 ～ 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1	2	3	4				
$g(n)$	0	1	2	3	0				

$n = 1, 2, 3$ の状態に行けるので、$n = 4$ のときの Grundy 数は $mex(1, 2, 3) = 0$

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 〜 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1	2	3	4	5			
$g(n)$	0	1	2	3	0	1			

$n = 2, 3, 1$ の状態に行けるので、$n = 5$ のときの Grundy 数は $mex(2, 3, 0) = 1$

解法 4

- n 個の石があります。先手と後手は交互に、各ターンで 1 〜 3 個の石を取り除きます。石の個数を 0 個にした人が勝ちです
- Grundy 数を求めてみよう！

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Grundy 数にも周期性があることがある！！！

Grundy-Sprague の定理

- Grundy 数を使うと、なぜ Nim に帰着することができるのか？

- Grundy 数が x のとき、ターンを行った後：
  - Grundy 数が $0, 1, 2, \dots, x-1$ のゲームの状態にできる
  - Grundy 数が x のゲームの状態にはできない
  - なので、"ある 1 つの山を選んでその Grundy 数を減らす" Nim と同じゲームになる？

Grundy-Sprague の定理

- Grundy 数を使うと、なぜ Nim に帰着することができるのか？

- Grundy 数が x のとき、ターンを行った後 :
  - Grundy 数が $0, 1, 2, \dots, x-1$ のゲームの状態にできる
  - Grundy 数が x のゲームの状態にはできない
  - **Grundy 数が $x+1, x+2, x+3, \dots$ にはできるかもしれない**

Nim は石が増やせないのに対して、Grundy 数のゲームだと「Nim の石」が増やされるかもしれない！

Grundy-Sprague の定理

- Grundy 数が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のゲームがあるとする

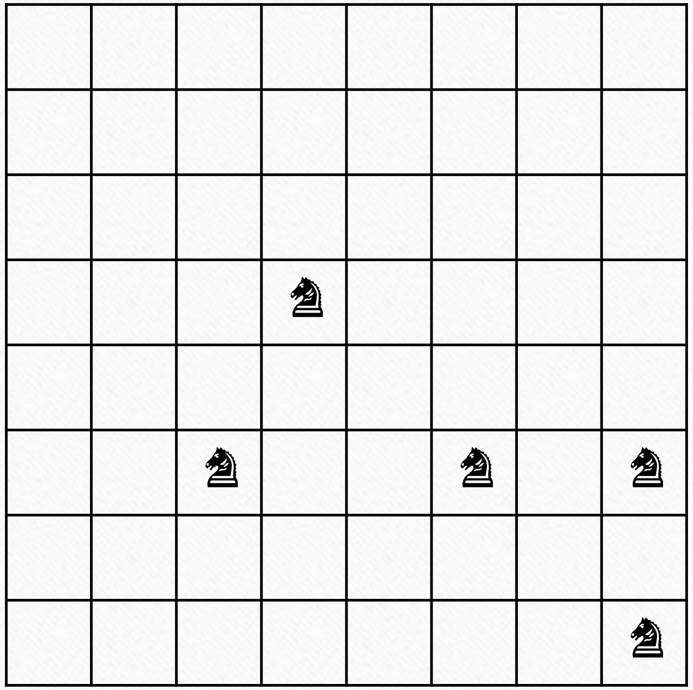
- $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$ のとき
  - 先ほどの Nim のゲームと同じように、x_i は減らすならいくつにでも減らせる
  - だから、Nim の証明と同じように、$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = s$ の一番上の桁と同じ桁が 1 になっているものを選び、この Grundy 数を x_i から $x_i \oplus s$ にすればよい

Grundy-Sprague の定理

- Grundy 数が $x_1, x_2, \dots, x_n$ のゲームがあるとする
- $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$ のとき
  - 今回の場合、x_i は増やすこともできる
  - しかし、「全部の $\boldsymbol{x_i}$ を変えない」ということはできず、**1** つだけ変える必要があるので、次のターンの状態を $\boldsymbol{x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0}$ にすることはできない
- これで証明できた！

問題 5

- 8×8 のチェスボードがあり、その上に 5 個の駒が置かれている
- 各プレイヤーのターンでは、次の操作を行う
  - 駒を 1 つ選ぶ
  - 駒が (x, y) に置かれているとして、$(x-1, y-2), (x-2, y-1)$ のいずれかに移動する
- 操作を行えなくなった方が負け



解法 5

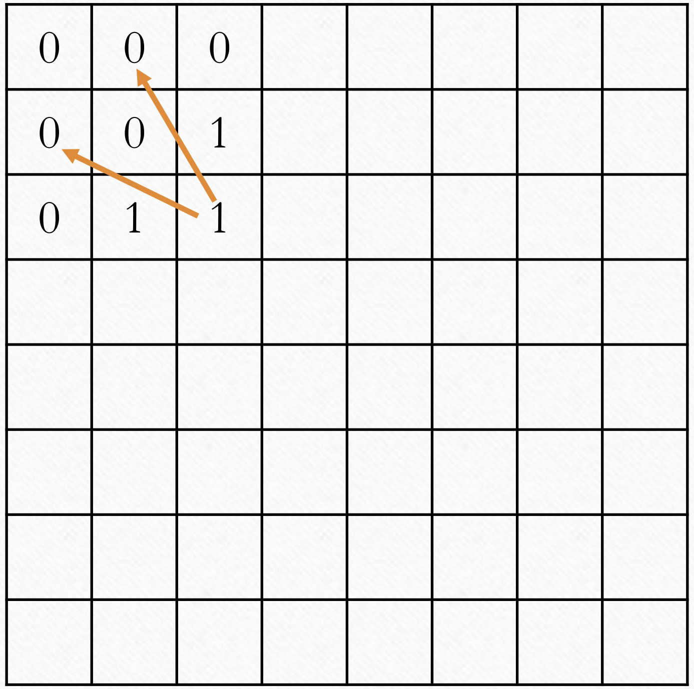
- 「5 つのゲームの中から 1 つを選び、これに対して操作をし、操作をできなくなった方が負け」というゲームなので、**Grundy 数が使える！**

- 駒が 1 つのときのゲームの Grundy 数を求めてみよう

解法 5

- 駒が 1 つのときのゲームの Grundy 数を求めてみよう

- 例えば、マス (3, 3) の Grundy 数は 1
  - (1, 2) と (2, 1) に行けて、Grundy 数は 0, 0 なので、(3, 3) の Grundy 数は $mex(0, 0) = 1$



解法 5

- 駒が 1 つのときのゲームの Grundy 数を求めてみよう

- マス (5, 3) の Grundy 数は $mex(0,1) = 2$
- マス (4, 4) の Grundy 数は $mex(1,1) = 0$

0	0	0	0	0			
0	0	1	1	1			
0	1	1	1	2			
0	1	1	0	0			
0	1	2	0	0			

解法 5

- 駒が 1 つのときのゲームの Grundy 数を求めてみよう

- マス (8, 5) の Grundy 数は $mex(2, 0) = 1$
- マス (4, 7) の Grundy 数は $mex(2, 1) = 0$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	2	2	2	2
0	1	1	**0**	0	0	0	0
0	1	2	0	0	1	1	1
0	1	**2**	0	1	**1**	1	**2**
0	1	2	0	1	1	0	0
0	1	2	0	1	2	0	**0**

解法 5

- 駒は (4, 4)、(6, 3)、(6, 6)、(6, 8)、(8, 8) に置かれている
- それぞれの Grundy 数は 0, 2, 1, 2, 0
- $0 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 0 = 1 \neq 0$ なので、先手必勝 (勝ちの状態)！！！

数研部員と勝負！2019 講習

- Section #1: 組み合わせゲーム理論入門
- Section #2: ゲームの勝敗の「計算」
- Section #3: 物真似戦法
- Section #4: XOR を使う有名なゲーム「ニム (Nim)」
- Section #5: Grundy 数 – すべてのゲームを Nim に帰着
- Section #6: おわりに・ゲームの例題集

おわりに

- 今回の講義はどうでしたか？
- 分かりやすかったですか？

- 楽しめたならうれしいです！

おわりに

- みなさんも「数研部員と勝負！」の問題を作ってみましょう！募集中です！
- 問題を作るのは本当に良い人生経験になるし、楽しいです

おわりに

- みなさんも文化祭で「数研部員と勝負！」の対戦者になりましょう！

- 外部からの参加者がどのような手を使ってくるのか分からないので、これに応じて打たなければならない点で頭を使います

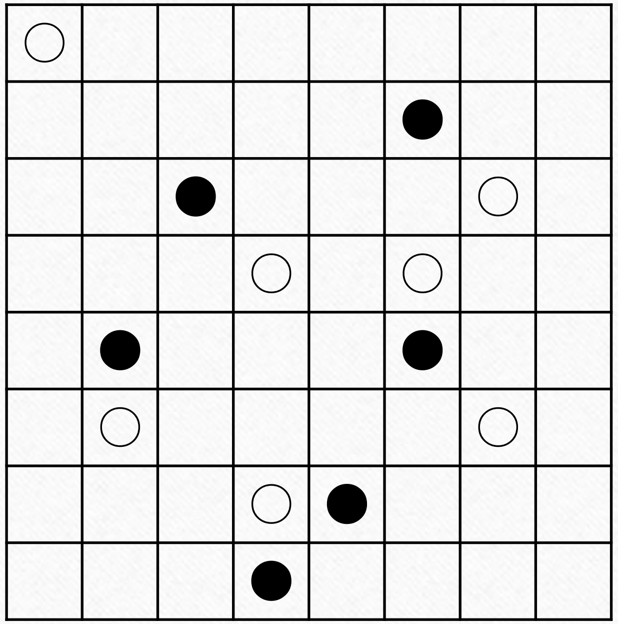
- 他のどの数研のシフトよりも、参加者との交流が一番できます

おわりに

- というわけで、本日の講義はこれにて終了です。
- 最後まで聞いてくださり、本当にありがとうございました！
- この後のスライドで4問くらいゲームの問題を投げておきます。ゲームの問題を作る際とかに参考にしても良いでしょう。(解答はあえて載せません)

問題 6

- 8×8 のマス目を使ってゲームをする
- 先手は白の駒、後手は黒の駒をたくさん持っている
- 各プレイヤーは交互に「駒の置かれていないマスを 1 つ選び、このマスに自分の持っている色の駒を置く」
- 上下左右に隣り合うマスに同じ色の駒が並んでいる状態を作った人が負け。最後まで続いたら引き分け
- 先手必勝、後手必勝、引き分けのどれか？



13 ターン終了時の盤面の例

問題 7

- 最初、140 個の石がある
- 各プレイヤーは交互に「1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … (フィボナッチ数列) のいずれかの個数の石を取り除く」
- 石を 0 個にした方が勝ち、操作できなくなった方が負け
- このゲームは先手必勝か、後手必勝か？

(「数研部員と勝負！2018」問題 2 より)

問題 8

- 5 つの数 245, 420, 660, 864, 1001 が黒板に書かれている
- 各プレイヤーは交互に「黒板に書かれている 2 以上の数を 1 つ選び、これを 2 以上の約数で割る」
- 全部 1 にした方が勝ち、操作できなくなった方が負け
- このゲームは先手必勝か、後手必勝か？

問題 9

- 円周上に $N = 15$ 個の点がある
- 各プレイヤーは、交互に「円周上の 2 点を選び、これを結ぶ線分を描く」
- そのとき、**両端も含めて**他の線分と交わってはならない
- 操作できなくなった方が負け
- このゲームは先手必勝か、後手必勝か？

(SRM 624 DIV2 Hard： GameOfSegments を少し変えた)

問題 10

- 先手と後手は交互に、左から順に 1～13 の数を、同じ数が 2 回登場しないように書いていく
- 13 個の数を書き終わったら、ゲームを終了し、その時点での「最長増加部分列」の長さが奇数ならば先手の勝ち、偶数ならば後手の勝ち
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の最長増加部分列は、「n 個のうちいくつかを順番に選んで、それが増加列になっているもの」 のサイズの最大値
- 先手必勝か、それとも後手必勝か？？？

(「数研部員と勝負！2018」 問題 3 より)