Suken GRAND PRIX 2016

$\boxed{1}$ 次の虫食い算を解け。

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & & \times & 2 & \square & \square \\
\hline
 & & \square & 0 & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \\
\square & 6 & \square & \square & & \\
\hline
\square & 1 & \square & \square & \square & 3
\end{array}
$$

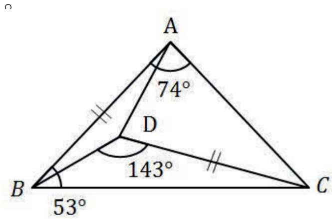
$\boxed{2}$ 以下の小問に答えよ。

(1) 各位の桁の和が 33 である 8 桁以下の正整数で 11 の倍数の個数を求めよ。

(2) 1〜6 の目が等確率で出るサイコロを 4 回振り、出た目を順に a, b, c, d とする。$OA = a, OB = b, \angle AOB = \{15(c+d)\}^\circ$ となる 3 点 O, A, B に対して AB の長さが整数となる確率を求めよ。

(3) 円 C の外部の一点 O から引いた 2 接線の接点をそれぞれ A, B とする。さらに、円 C 上で $\triangle OAB$ の内部にある点 S をとり、直線 OS と円 C の交点の内 S でない方を T とし、AT, BT の中点をそれぞれ M, N とする。$\triangle OAB$ が正三角形のとき、$\frac{\triangle OMN}{\triangle OAB}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ $\angle A = 74^\circ, \angle B = 53^\circ$ なる $\triangle ABC$ の内部に $\angle BDC = 143^\circ, AB = CD$ なる D をとる。$\angle BDA$ を求めよ。



$\boxed{4}$ $a_i = 3^i + 1$ として数列 $a_0, a_1, \cdots$ を定め、数列 $\{a_i\}$ の相異なる要素の和で表せる数を**良い数**とする。例えば、$6 = 2 + 4$ より、6 は良い数である。

(1) 9000 が良い数であることを示せ。

(2) 2016145 及び 2016 が良い数でないことを示せ。

$\boxed{5}$ 鋭角三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 P, Q をとる。さらに、$\triangle APQ$ の外心を O、$\triangle ABC$ の垂心を H とする。$\triangle APQ$ の外接円と $\triangle BCH$ の外接円が互いに接するとき、$\triangle OPQ$ の外接円が辺 BC と接することを示せ。

$\boxed{6}$ 有理数に対して定義され有理数値をとる関数 f であって、任意の有理数 x, y に対して

$$f(x+f(y))+f(x)=2f(x+y)-y$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

$\boxed{7}$ n $(n \geq 3)$ 頂点の無向グラフに対して、

(1) どの 3 頂点に対しても端点がどちらもその 3 点に含まれるような辺の数が 1 本以下であるようなグラフの辺数の最大値を求めよ。

(2) どの 3 頂点に対しても端点がどちらもその 3 点に含まれるような辺の数が 1 本以上であるようなグラフの辺数の最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ 二等辺三角形ではない鋭角三角形 ABC に対して、垂心を H、内心を I としたとき $\angle AIH = \angle R$ が成立している。

(1) $AB = 1, AC = 2$ のとき、BC の長さを求めよ。

(2) AB, BC, CA の長さがすべて整数となることがないことを示せ。

$\boxed{9}$ $AB \neq AC$ である鋭角三角形 ABC の外接円を Ω として、Ω の A における接線を l とする。さらに、AB, AC の中点をそれぞれ M, N として、直線 MN と l の交点を X とする。また、直線 AH が Ω と再び交わる点を D とし、H を通り D で Ω に接する円を ω とする。このとき、直線 XH が ω と再び交わる点を Y とすると、$GH = GY$ となることを示せ。