In [118…

```
%load_ext autoreload
%autoreload 2

import tme9
```

TME 9 : méthodes discriminatives

Le but de ce TME est d'implémenter des méthodes discriminatives en classification. On s'intéressera en particulier au modèle de régression logistique.

Rappel sur les approches discriminantes :
Nous notons les observations $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ et nous allons mettre en place des modèles de classification binaire dans un premier temps. Dans ce contexte, les étiquettes binaires associées sont $y_i \in \mathcal{Y} = \{0; 1\}$. Nous faisons l'hypothèse que les couples $(\mathbf{x}_i, y_i)$ sont tirés de manière i.i.d. et suivent une loi inconnue $P(X, Y)$.

Dans les méthodes discriminatives, on s'intéresse à estimer la loi conditionnelle $p(y_i|\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$.

1. Choix d'un modèle pour $p(y_i|\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$. Le modèle le plus connu est la régression logistique qui, comme le nom ne l'indique pas est un modèle de classification. C'est ce modèle que nous allons étudier, qui utilise un modèle linéaire, de paramètres $\boldsymbol{\theta} := (\mathbf{w}, b)$:

$$p(y_i = 1|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, b) = \frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w} + b))} \tag{1}$$

2. Dans le cas à deux classes uniquement; après avoir remarqué que nous avons choisi un codage des classes de type Bernoulli... Utilisation de l'astuce de Bernoulli pour calculer la vraisemblance d'un échantillon:

$$p(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, b) = \left(\frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w} + b))}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w} + b))}\right)^{1-y_i}$$

3. Max de vraisemblance sur ***sur l'ensemble des données d'apprentissage*** $(\mathbf{x_i}, y_i)_{i\in\{1;N\}}$:

$$\mathbf{w}^\star, b^\star = \arg\max_{\mathbf{w},b} \prod_{i=1}^{N} p(\mathbf{y}_i|x_i\mathbf{w}, b)$$

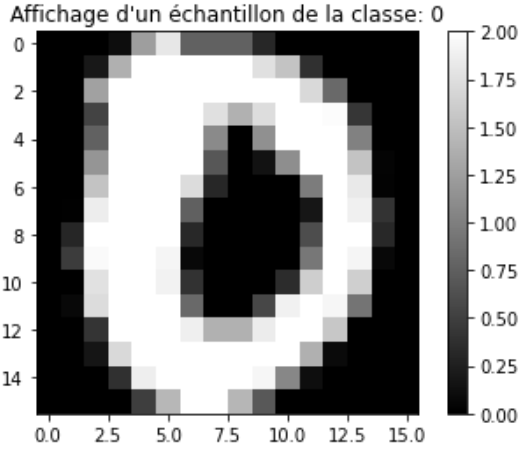
Chargement des librairies et des données USPS

In [94]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.cm as cm
import pickle as pkl

data = pkl.load(open("res/usps.pkl",'rb'))
# data est un dictionnaire contenant les champs explicites X_train, X_test, Y_train, Y_test
X = np.array(data["X_train"],dtype=float) # changement de type pour éviter les problèmes d'affichage
Xt = np.array(data["X_test"],dtype=float)
Y = data["Y_train"]
Yt = data["Y_test"]

print("Taille des données train=(",X.shape[0],",",X.shape[1],")")
print("Taille des données test=(",Xt.shape[0],",",Xt.shape[1],")")

# affichage d'un échantillon
index = 0
plt.figure()
plt.title('Affichage d\'un échantillon de la classe: '+str(Y[index]))
plt.imshow(X[index].reshape(16,16), interpolation=None, cmap='gray')
plt.colorbar()
```

```
Taille des données train=( 6229 , 256 )
Taille des données test=( 3069 , 256 )
```

Out[94]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x12639c610>



Exercice 1: régression logistique binaire

Rappel: régression logistique = système de classification

$$p(y_i|\mathbf{x}_i,\mathbf{w},b) = \left(\frac{1}{1+\exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w}+b))}\right)^{y_i}\left(1-\frac{1}{1+\exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w}+b))}\right)^{1-y_i}$$

Soit en agrégeant sur la base de données et notant: $exp = \exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w}+b))$

$$\mathcal{L}_{log} = CE(\mathbf{w},b) = \sum_i y_i \log(\frac{1}{1+exp}) + (1-y_i)\log(1-\frac{1}{1+exp})$$

$$CE(\mathbf{w},b) = \sum_{i=1}^{N} \log(1+exp)(-y_i-1+y_i) + \log(exp)(1-y_i)$$

Soit:

$$\frac{\partial}{\partial w_j}CE = \sum_{i=1}^{N} x_{ij}(y_i - \frac{1}{1+exp}) \in \mathbb{R}$$

On remarque qu'il est possible de passer à une écriture vectorielle:

$$\nabla_{\mathbf{w}}CE = X^T(Y - \frac{1}{1+\exp(-(\mathbf{X}\mathbf{w}+b))}) \in \mathbb{R}^d$$

$$\frac{\partial}{\partial b}CE = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \frac{1}{1+exp}) \in \mathbb{R}$$

Note: il est possible de manière **facultative**, comme dans le TME de la semaine dernière, de construire:

$$Xe = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_N & 1 \end{bmatrix}$$

On supprime alors les b pour obtenir:

$$\nabla_{\mathbf{w}_e}CE(\mathbf{w},b) = X_e^T(Y - \frac{1}{1+\exp(-(\mathbf{X}_e\mathbf{w}_e))}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Mise en place de la montée de gradient pour la régression logistique binaire

- Initialisation des paramètres : $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w}^0$, $b \leftarrow b^0$
- Pour $t = 1$ à T
  - $\mathbf{w}_{t+1} \leftarrow \mathbf{w}_t - \eta \nabla_w CeE(\mathbf{w}_t)$, $b_{t+1} \leftarrow b_t - \eta \frac{\partial}{\partial b} CE(b_t)$

Nous commençons par la tester sur les données de la classe 0. On transforme les labels de classes $\in \{1; K\}$ vers $\{0; 1\}$ pour la classe 0.

In [95]:
```
# 0 vs all
cl = 0
Y_c  = tme9.labels_tobinary(Y, cl)
Yt_c = tme9.labels_tobinary(Yt, cl)
#print("Taille des données :",X.shape,Y_c.shape)
```

Fonction de prédiction avec la régression logistique binaire

In [96]:
```
# Fonction de prédiction pour la régression logistique
Y_pred  = tme9.pred_lr(X, np.zeros(256),0)
print(Y_pred[0:10])
Yt_pred = tme9.pred_lr(Xt, np.zeros(256),0)
print(Yt_pred[0:10])
```

```
[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5]
[0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5]
```

In [97]:
```
Y_predb  = tme9.classify_binary(Y_pred)
Yt_predb = tme9.classify_binary(Yt_pred)
print(Yt_predb[0:10])
print(Yt_c[0:10])
```

```
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
[0. 1. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0.]
```

In [98]:
```
# Fonction pour calculer l'accuracy
acc  = tme9.accuracy(Y_predb, Y_c)
acct = tme9.accuracy(Yt_predb,Yt_c)
print("Tx de bonne classification en Apprentissage={0:.2f} %".format(acc*100))
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

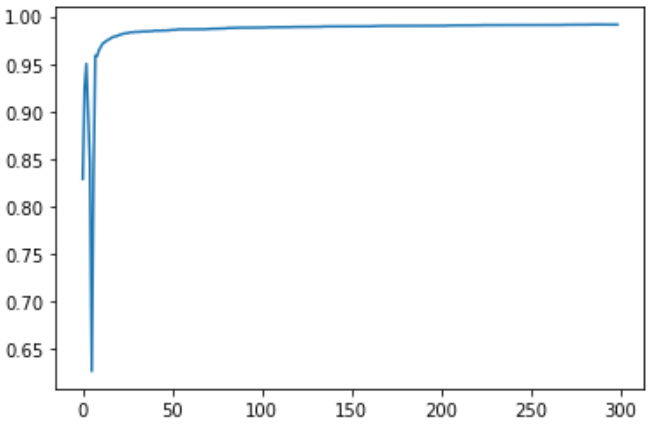
```
Tx de bonne classification en Apprentissage=82.90 %
Tx de bonne classification en Test=84.10 %
```

Mettre en place la méthde `rl_gradient` (X,Y,eta, nMax) pour apprendre la régression logistique par montée de gradient. Nous commençons par la tester sur les données de la classe 0

In [99]:
```
# application de la montée de gradient & evaluation des performances
w,b, accs, it = tme9.rl_gradient_ascent(X,Y_c,eta = 1e-4, niter_max=300)
#w,b, acc, acct, it = rl_gradient(X,Y_c, Xt, Yt_c, epsilon = 1e-4)

Y_predb  = tme9.classify_binary(tme9.pred_lr(X, w,b))
Yt_predb = tme9.classify_binary(tme9.pred_lr(Xt, w,b))

# affichage des 20 premières étiquettes
print(Yt_c[:20],"\n",Yt_predb[:20]) # vérifier que les données sont dasn le même univers

# perf:
acc  = tme9.accuracy(Y_predb,Y_c)
acct = tme9.accuracy(Yt_predb,Yt_c)

#pc_good   = np.where(Y_pred == Y_c , 1., 0.).mean()
#pc_good_t = np.where(Yt_pred==Yt_c , 1., 0.).mean()

print("Tx de bonne classification en Apprentissage=",acc)
print("Tx de bonne classification en Test=",acct)
#it = 8
plt.figure()
plt.plot(np.arange(it), accs[0:it])
#plt.figure()
#plt.plot(np.arange(it), acct[0:it])
```

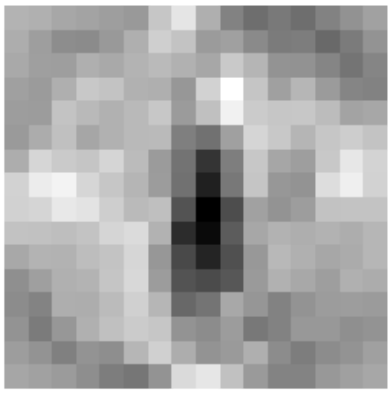
```
[0. 1. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 1. 1. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 1. 1. 0. 0. 0.]
Tx de bonne classification en Apprentissage= 0.9911703323165837
Tx de bonne classification en Test= 0.9869664385793419
```

Out[99]: `[<matplotlib.lines.Line2D at 0x12643c3a0>]`



In [100…

```
# Visualisation du vecteur de poids w
tme9.visualization(w)
```



Exercice 2 : passage au multiclasse (1 contre tous)

Nous allons utiliser le paradigme *un-contre-tous* mais nous allons le coder proprement dans une fonction. Dans la fonction `rl_multi(X,Y, epsilon = 1e-3, niter_max=1000)` effectuer les opérations suivantes:

1. Extraire toutes les classes de Y
2. Pour chaque classe
3. Construire Ycl telle que:

$$Y_{cl} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y == cl \\ 0 & \text{sinon (pour toutes les autres classes)} \end{cases}$$

4. Lancer un apprentissage
5. Empiler tous les $\mathbf{w}$ & b comme suit:

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{cl=0} & \mathbf{w}_{cl=1} & \dots & \mathbf{w}_{cl=9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [\, \mathbf{b}_{cl=0} \quad \mathbf{b}_{cl=1} \quad \dots \quad \mathbf{b}_{cl=9} \,]$$

On peut alors montrer que:

$$\frac{1}{1+\exp(-\mathbf{X}W-\mathbf{b})} = \begin{bmatrix} p(Y=1|X=\mathbf{x}_1) & p(Y=2|X=\mathbf{x}_1) & \dots & p(Y=9|X=\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p(Y=1|X=\mathbf{x}_N) & p(Y=2|X=\mathbf{x}_N) & \dots & p(Y=9|X=\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times C}$$

Avec N points et C classes

1. Utiliser un `argmax` pour extraire le numéro de classe

In [101…

```
# duree execution = 30 secondes à une minute
# n'hésitez pas à mettre un niter_max à 10 durant la phase de debug pour gagner du temps !
W,B = tme9.rl_gradient_ascent_one_against_all(X,Y,epsilon = 1e-4, niter_max=1000)
#print(B)
```

```
Classe :  0  acc train=99.42 %
Classe :  1  acc train=99.78 %
Classe :  2  acc train=98.81 %
Classe :  3  acc train=98.89 %
Classe :  4  acc train=98.75 %
Classe :  5  acc train=98.81 %
Classe :  6  acc train=99.41 %
Classe :  7  acc train=99.61 %
Classe :  8  acc train=97.98 %
Classe :  9  acc train=98.47 %
```

Evaluation des performances

In [102…

```
# perf:
Y_pred  = tme9.pred_lr(X, W,B)
Y_predt = tme9.pred_lr(Xt, W,B)
# print(Yt[:20],"\n",Yt_pred[:20])
Y_pred_mc  = tme9.classif_multi_class(Y_pred)
Yt_pred_mc = tme9.classif_multi_class(Y_predt)

acc  = tme9.accuracy(Y_pred_mc,Y)
acct = tme9.accuracy(Yt_pred_mc,Yt)

print("Tx de bonne classification en Apprentissage={0:.2f} %".format(acc*100))
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

```
Tx de bonne classification en Apprentissage=96.68 %
Tx de bonne classification en Test=93.58 %
```

Exercice 3 : Analyse qualitative des solutions

Quels sont les pixels qui jouent un role dans la décision?

1. Pour une classe de données, je peux déjà afficher l'ampleur des poids $\mathbf{w}$ associés à chaque classe. Cela indique si les pixels sont pondérés positivement ou négativement.
2. Pour une image donnée, je sais que la décision est de la forme:

$$p(y_i=1|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{1+\exp(-(\mathbf{x}_i\mathbf{w}+b))}$$

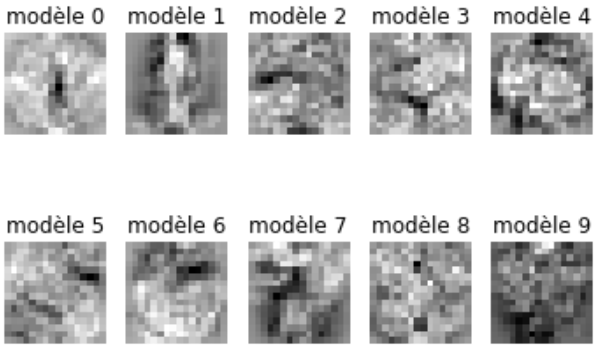
   Ainsi, la décision est formée d'une addition de $x_{ij}\cdot w_j$: les plus fortes composante en valeur absolue sont celles qui participent le plus à la décision.
   Cette approche est particulièrement intéressante pour analyser les erreurs de classification. Afficher l'image d'un chiffre mal classé et une carte de chaleur indiquant quelles parties de l'image influencent le plus la décision: pour la classe prédite d'une part et pour la classe réelle d'autre part.

In [103…

```
# affichage des poids des paramètres des 10 classes (PAS DE CODE A AJOUTER)
# prérequis: que les w soit en colonnes dans la matrice W
plt.figure()
plt.subplots(2, 5)
for i in range(10):
```

```
    plt.subplot(2, 5,i+1)
    plt.imshow(W[:,i].reshape(16,16), cmap="gray")
    plt.title("modèle "+str(i))
    plt.axis('off')
```

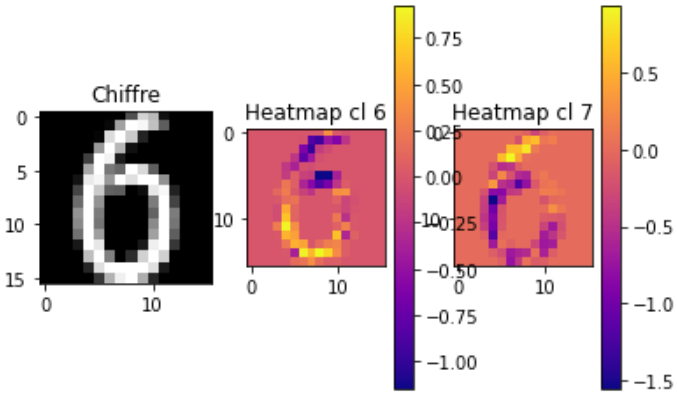
```
<Figure size 432x288 with 0 Axes>
```



In [104…

```
# trouver un échantillon mal classé (PAS DE CODE A AJOUTER):

index = np.where(Y != Y_pred_mc)[0][0] # parmi les points d'apprentissage
print(index)

plt.figure()
plt.subplots(1,3)
plt.subplot(1,3,1)
plt.imshow(X[index].reshape(16,16),cmap="gray")
plt.title("Chiffre")
plt.subplot(1,3,2)
plt.imshow((X[index]*W[:,int(Y[index])]).reshape(16,16),cmap="plasma")
plt.colorbar()
plt.title("Heatmap cl "+str(int(Y[index])))
plt.subplot(1,3,3)
plt.imshow((X[index]*W[:,int(Yt_pred_mc[index])]).reshape(16,16),cmap="plasma")
plt.title("Heatmap cl "+str(int(Yt_pred_mc[index])))
plt.colorbar()
plt.savefig("malclasse.png")
```

```
60
<Figure size 432x288 with 0 Axes>
```



Quelle limitation sur l'encodage des pixels noirs (à 0) cette visualisation met-elle en évidence ? Expliquer.

Exercice 4 : Normalisation des données X

On va effectuer la normalisation suivante : $X_n = X - 1$ (les valeurs de pixels étant entre 0 et 2). Expliquer en quoi cette normalisation résoud le problème précédent.

Ecrire la fonction pour `normalize(X)` .

In [105…

```
Xn  = tme9.normalize(X)
Xtn = tme9.normalize(Xt)
```

On peut ensuite appliquer sans modification la fonction précédente :

In [106…

```
# il n'y a pas de méthode à redéfinir...
# juste apprendre un nouveau modèle sur des données modifiées... Et ne pas faire d'erreur en inférence.
Wn,Bn = tme9.rl_gradient_ascent_one_against_all(Xn,Y,epsilon = 1e-4, niter_max=1000)

# perf:
Y_pred  = tme9.pred_lr(Xn, Wn,Bn)
Y_predt = tme9.pred_lr(Xtn, Wn,Bn)
# print(Yt[:20],"\n",Yt_pred[:20])
Y_pred_mc  = tme9.classif_multi_class(Y_pred)
Yt_pred_mc = tme9.classif_multi_class(Y_predt)

acc  = tme9.accuracy(Y_pred_mc,Y)
acct = tme9.accuracy(Yt_pred_mc,Yt)

print("Tx de bonne classification en Apprentissage={0:.2f} %".format(acc*100))
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

```
Classe :  0  acc train=99.47 %
Classe :  1  acc train=99.73 %
Classe :  2  acc train=98.76 %
Classe :  3  acc train=98.88 %
Classe :  4  acc train=98.67 %
Classe :  5  acc train=98.70 %
Classe :  6  acc train=99.53 %
Classe :  7  acc train=99.61 %
Classe :  8  acc train=98.27 %
Classe :  9  acc train=98.44 %
Tx de bonne classification en Apprentissage=96.56 %
Tx de bonne classification en Test=93.71 %
```

In [108…

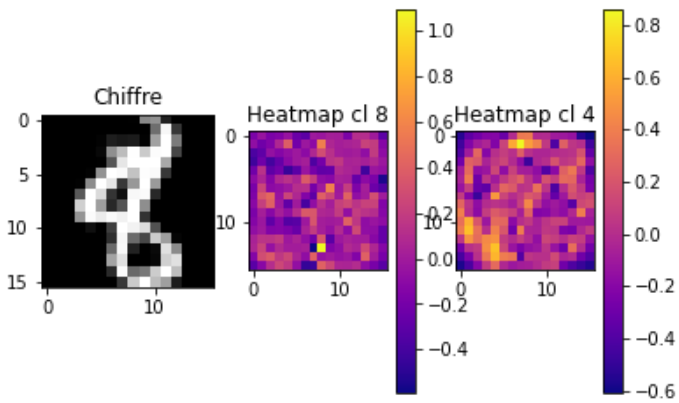
```
# trouver un échantillon mal classé (PAS DE CODE A AJOUTER):

index = np.where(Y != Y_pred_mc)[0][0] # parmi les points d'apprentissage
print(index)

plt.figure()
plt.subplots(1,3)
plt.subplot(1,3,1)
plt.imshow(X[index].reshape(16,16),cmap="gray")
plt.title("Chiffre")
plt.subplot(1,3,2)
plt.imshow(((X[index]-1)*Wn[:,int(Y[index])]).reshape(16,16),cmap="plasma")
plt.colorbar()
plt.title("Heatmap cl "+str(int(Y[index])))
plt.subplot(1,3,3)
plt.imshow(((X[index]-1)*Wn[:,int(Y_pred_mc[index])]).reshape(16,16),cmap="plasma")
plt.title("Heatmap cl "+str(int(Y_pred_mc[index])))
plt.colorbar()
```

```
91
```

Out[108…

```
<matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x1267a05e0>
```

```
<Figure size 432x288 with 0 Axes>
```



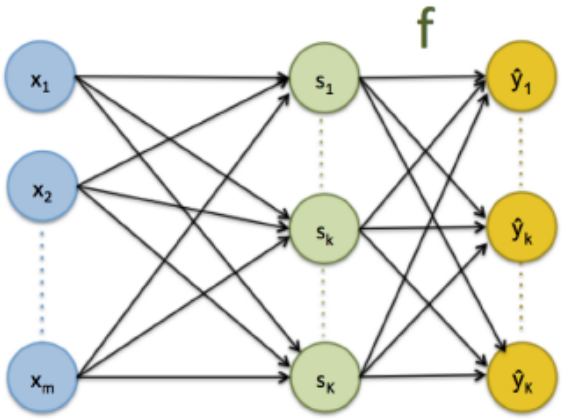
Exercice 5 : Régression logistique multi-classe

Le modèle de régression logistique correspond à un réseau de neurones à une seule couche, qui va projeter le vecteur

d'entrée $\mathbf{x_i} \in \mathbb{R}^d$ vers un vecteur $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^K$ (K est le nombre de classes), consistant en une projection affine puis l'application de la fonction softmax :

- Projection affine : $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{b}$, où $\boldsymbol{W}$ est de taille $d \times K$ et $\boldsymbol{b}$ de taille $1 \times K$.
- Softmax pour avoir un vecteur de probabilité pour la sortie $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^K$, dont la prédiction pour la $k^{ème}$ classe s'écrit : $\hat{y}_k = \frac{e^{s_k}}{\sum_{j=0}^{K} e^{s_j}}$

Le schéma ci-dessous illustre le modèle de régression logistique avec un réseau de neurones.



Ecrire la fonction `pred_lr_multi_class` pour effectuer la prédiction multi-classe

In [109…

```
# Prédiction pour la régression logistique multi-classe
Y_pred  = tme9.pred_lr_multi_class(X, np.zeros((256,10)), np.zeros(10))
print(Y_pred[0])
Yt_pred = tme9.pred_lr_multi_class(Xt, np.zeros((256,10)), np.zeros(10))
print(Yt_pred[0])
```

```
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
```

Les labels prédits utiliseront la même fonction que dans le cas un contre tous, ainsi que l'accuracy :

In [110…

```
# Prédiction de classe par le modèle
Y_predc  = tme9.classif_multi_class(Y_pred)
Yt_predc = tme9.classif_multi_class(Yt_pred)
print(Yt_predc[0:10])
print(Yt[0:10])

acc  = tme9.accuracy(Y_predc, Y)
acct = tme9.accuracy(Yt_predc,Yt)
print("Tx de bonne classification en Apprentissage={0:.2f} %".format(acc*100))
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

```
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[2 0 0 2 7 6 0 6 1 9]
Tx de bonne classification en Apprentissage=17.10 %
Tx de bonne classification en Test=15.90 %
```

5.2 Entraînement de la régression logistique multi-classe

Pour entraîner le modèle, la première étape consiste à transformer labels Y (taille N) en une matrice Y_c de taille $N \times K$ correspondant au "one-hot-encoding" de la classe, *i.e.* chaque ligne de Y_c est un vecteur binaire avec des 0 partout sauf pour l'indice de la classe donnée par la supervision, par laquelle la valeur est à 1.

Ecrire la fonction `to_categorical(Y,K)` qui va effectuer cette transformation

In [111…

```
K=10
Yc = tme9.to_categorical(Y, K)
Yct = tme9.to_categorical(Yc, K)
```

```
print(Y[0:2])
print(Yc[0:2])
```

```
[0 9]
[[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]]
```

Pour entraîner le modèle on va, pour chaque exemple d'entraînement x_i, maximiser la log probabilité de la prédiction du modèle pour la classe donnée par la supervision, *i.e.* $\hat{y}_i^{k_*}$. La log propabilité pour le dataset complet va donc s'écrire :

$$\mathcal{L}_{CEx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} log(\hat{y}_i^{k_*})$$

On va ensuite entraîner le modèle de prédiction multi-classe en utilisant une montée de gradient. On rappelle les équations du gradient vues en cours :

- $\frac{\partial \mathcal{L}_{CEx}}{\partial \boldsymbol{W}} = \frac{1}{N}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{Y}_c - \hat{\boldsymbol{Y}})$, avec $\boldsymbol{X}$ la matrice des données (taille $N \times d$), $\hat{\boldsymbol{Y}}$ la matrice des prédiction du modèle (taille $N \times K$), et $\boldsymbol{Y}_c$ l'encodage one-hot des classes de la supervision (taille $N \times K$). -$\frac{\partial \mathcal{L}_{CEx}}{\partial \boldsymbol{b}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{Y}_c - \hat{\boldsymbol{Y}})$

Ecrire la fonction `rl_gradient_ascent_multi_class` qui effectue l'entraînement de la régression logistique par montée de gradient. On passera à la fonction les classes originales Y, qu'on transformera dans la fonction en encode one-hot, et qu'on utilisera pour calculer l'accuracy.

In [112…

```
W,b = tme9.rl_gradient_ascent_multi_class(X,Y, eta=0.2, numEp = 1000, verbose=1)
acct = tme9.accuracy(tme9.classif_multi_class(tme9.pred_lr_multi_class(Xt, W,b)),Yt)
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

```
epoch  0 accuracy train=30.68 %
epoch  100 accuracy train=93.84 %
epoch  200 accuracy train=94.80 %
epoch  300 accuracy train=95.28 %
epoch  400 accuracy train=95.52 %
epoch  500 accuracy train=95.76 %
epoch  600 accuracy train=95.99 %
epoch  700 accuracy train=96.16 %
epoch  800 accuracy train=96.32 %
epoch  900 accuracy train=96.48 %
epoch  999 accuracy train=96.64 %
Tx de bonne classification en Test=94.04 %
```

On va maintenant passer à une descente de gradient stochastique, qui va calculer le gradient sous un sous-ensemble d'exemples. Par exemple, pour un batch de taille 500, on va avoir 13 mises à jour par époque au lieu d'une avec la descente standard. Ceci va permettre de faire converger l'algorithme avec moins d'époques. **Adapter la fonction précédente dans la fonction `rl_gradient_ascent_multi_class_batch` pour effectuer la descente de gradient stochastique.**

In [113…

```
W,b = tme9.rl_gradient_ascent_multi_class_batch(X,Y, tbatch = 500, eta=0.2, numEp = 200, verbose=1)
acct = tme9.accuracy(tme9.classif_multi_class(tme9.pred_lr_multi_class(Xt, W,b)),Yt)
print("Tx de bonne classification en Test={0:.2f} %".format(acct*100))
```

```
epoch  0 accuracy train=88.49 %
epoch  20 accuracy train=95.04 %
epoch  40 accuracy train=95.73 %
epoch  60 accuracy train=96.37 %
epoch  80 accuracy train=96.55 %
epoch  100 accuracy train=96.82 %
epoch  120 accuracy train=97.05 %
epoch  140 accuracy train=97.19 %
epoch  160 accuracy train=97.34 %
epoch  180 accuracy train=97.43 %
epoch  199 accuracy train=97.56 %
Tx de bonne classification en Test=94.04 %
```

Exercice 6 : régularisation (bonus)

6.1 Malédiction de la dimensionnalité

Nous vous proposons ici de modifier les données pour ajouter des colonnes de bruit. Montrer que la performances se réduit lorsque l'on augmente le nombre de dimensions fantomes.

- La fonction d'ajout des données fantomes `add_random_column` est fournie ci-dessous.
- faites la boucle avec des ajouts de $[0, 100, 200, 400, 1000]$ colonnes et tracer l'évolution des performances en apprentissage et en test.
  - Attention: il faut donc modifier X et Xt avec le même nombre de colonne fantome

Note : C'est dans ce cas de figure -qui correspond à beaucoup d'applications réelles- que la régularisation va aider.

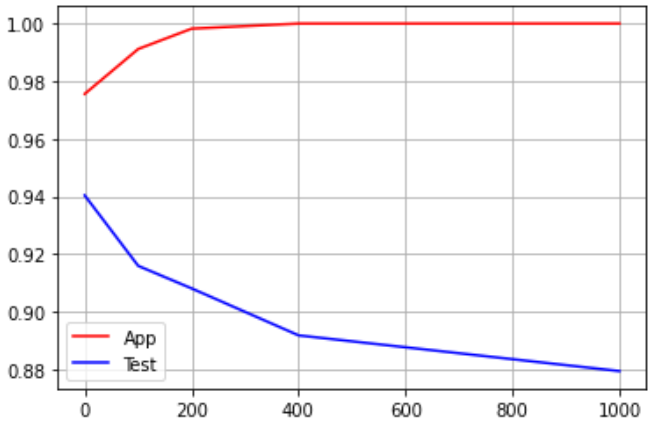
In [114…

```
# On ajoute du bruit (et on enlève 1)
# ATTENTION : ne pas enlever une seconde fois 1 ensuite !
def add_random_column(X,d, sig = 1.):
    return np.hstack((X, np.random.randn(len(X),d)*sig))
```

In [115…

```
tme9.dimensionality_curse(X,Y, Xt, Yt)
```

```
Noise 0 - Tx de bonne classification en App  = 97.56 %
Noise 0 - Tx de bonne classification en Test = 94.04 %
Noise 100 - Tx de bonne classification en App  = 99.12 %
Noise 100 - Tx de bonne classification en Test = 91.59 %
Noise 200 - Tx de bonne classification en App  = 99.82 %
Noise 200 - Tx de bonne classification en Test = 90.81 %
Noise 400 - Tx de bonne classification en App  = 100.00 %
Noise 400 - Tx de bonne classification en Test = 89.18 %
Noise 1000 - Tx de bonne classification en App  = 100.00 %
Noise 1000 - Tx de bonne classification en Test = 87.94 %
```



6.2: Régularisation, performance & interprétation

Lorsque la dimension augmente, nous voyons appraître le phénomène de sur-apprentissage.

On fait souvent l'hypothèse que ce phénomène est lié à un estimateur trop complexe. Afin de simplifier la fonction de coût, on proposer de régulariser le problème d'apprentissage qui devient:

$$\arg\max_{\theta} \mathcal{L} - \lambda\Omega(\theta), \qquad \text{avec: } \Omega(\theta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{d} \theta_j^2 & \text{régularisation } L_2 \\ \sum_{j=1}^{d} |\theta_j| & \text{régularisation } L_1 \end{cases}$$

La régularisation L_2 est plus générale est facile à exploiter. La régularisation L_1 permet d'obtenir des solutions parcimonieuses, *i.e.* d'annuler complètement les poids attribués à certaines dimensions d'entrée. **Expliquer quelle régularisation est la plus adaptée ici**. \ λ est l'hyper-paramètre qui contrôle le compromis entre simplicité et bonnes predictions. Le gradient du terme de régularisation est le suivant :

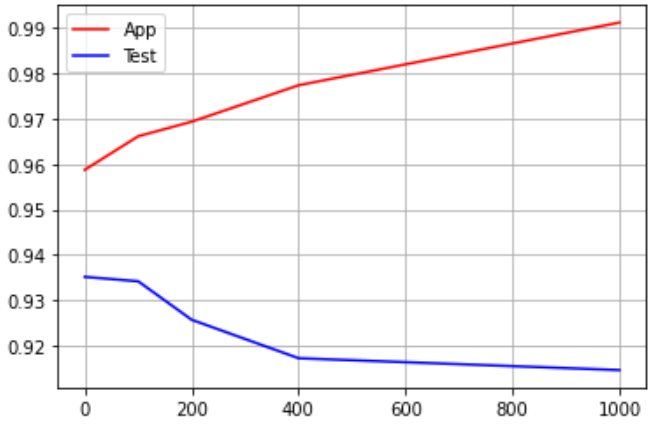
- Régularisation L_2 : $\nabla_{\mathbf{w}}\Omega(\mathbf{w}) = 2\mathbf{w}$
- Régularisation L_1 : $\nabla_{\mathbf{w}}\Omega(\mathbf{w}) = sign(\mathbf{w})$

Mettre en place la régularisation dans la fonction `dimensionality_curse_regul` suivante

In [116…

```
tme9.dimensionality_curse_regul(X,Y, Xt, Yt, type='l1', llamdba=0.001)
```

```
Noise 0 - Tx de bonne classification en App  = 95.87 %
Noise 0 - Tx de bonne classification en Test = 93.52 %
Noise 100 - Tx de bonne classification en App  = 96.61 %
Noise 100 - Tx de bonne classification en Test = 93.42 %
Noise 200 - Tx de bonne classification en App  = 96.93 %
Noise 200 - Tx de bonne classification en Test = 92.57 %
Noise 400 - Tx de bonne classification en App  = 97.74 %
Noise 400 - Tx de bonne classification en Test = 91.72 %
Noise 1000 - Tx de bonne classification en App  = 99.12 %
Noise 1000 - Tx de bonne classification en Test = 91.46 %
```



Exercice 7: et par rapport aux méthodes discriminantes à base de fonctions de cout?

Tester l'algorithme du perceptron vu en cours, avec l'astuce du un-contre-tous pour le passage au multi-classes.
Attention, pour le perceptron, le codage des deux classes est en $\{-1, 1\}$