MAPSI

Modèles et **A**lgorithmes **P**robabilistes et **S**tatistiques pour l'**I**nformatique

Fascicule de TD

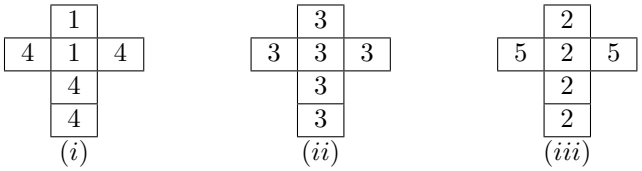
Année 2023-2024

Fascicule MAPSI

Semaine 1 - Notions élémentaires de probabilités

Exercice 1 – Dés de Gardner

Dans un numéro de la revue *Scientific American* de 1974, M. Gardner proposait un jeu consistant à choisir un dé parmi les trois dés à 6 faces non pipés ci-dessous, de manière à essayer d'obtenir le nombre le plus élevé en lançant le dé une seule fois.



(i) (ii) (iii)

Q 1.1 On vous propose de jouer au jeu à 2 joueurs suivant : chaque joueur mise M euros. Puis on vous demande de choisir un des dés ci-dessus, votre adversaire en choisit ensuite un autre et enfin chacun lance son dé. Celui qui obtient le nombre le plus élevé remporte la mise.

Q 1.1.1 Calculez, pour chaque couple (x, y) de dés la probabilité qu'en jouant avec le dé x on obtienne un résultat plus élevé qu'avec y.

Q 1.1.2 Sachant que la mise est de 30 euros, devez-vous accepter de jouer et, le cas échéant, quel dé devez-vous choisir ? Formellement, quel critère vous permet de statuer ?

Exercice 2 – Indépendence

Soit deux dés à six faces non pipés, un de couleur blanc et un de couleur noir. Les deux sont jetés une fois. On définit les événement suivants :

- le dé blanc donne 1, 2 ou 3.
- le dé blanc donne 2, 3 ou 6.
- la somme des deux dés est égal à 9.
- les deux dés donnent deux nombres égaux, dont la somme est inférieure à 9.

Q 2.1 Quel est la probabilité des ces événements ?

Q 2.2 Quels événements sont deux-à-deux indépendants ?

Q 2.3 Les 4 évènements sont-ils mutuellement indépendants ? Si non, trouvez les groupes de trois évènements qui sont mutuellement indépendants.

Exercice 3 – La roulette

Dans les casinos, la roulette contient 37 numéros : 18 rouges, 18 noirs et un vert. Quand la roulette tourne, la bille a autant de chances de tomber sur chacun des 37 numéros. Si l'on mise €1 sur une couleur (rouge ou noire) et que cette dernière sort, on gagne €1, sinon on perd la mise de €1. On ne mise pas sur le vert [1].

Q 3.1 La roulette vous sera t-elle profitable ?

1. C'est une version simplifiée de la roulette !

Q 3.1.1 Soit X la variable aléatoire représentant le résultat d'une mise de €1. Quelle est la distribution de probabilité de X ? Quelle est l'espérance de X ?

Q 3.1.2 En moyenne combien gagnerez-vous ou perdrez-vous par mise ?

Q 3.1.3 Combien gagnerez-vous ou perdrez-vous si vous jouez 100 fois en misant €1 à chaque fois ? 1000 fois ? Peut-on en déduire que la roulette n'est pas un jeu profitable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 – Paradoxe de Simpson

Le recensement des jugements prononcés dans l'état de Floride entre 1973 et 1978 a permis d'établir le tableau suivant, qui présente les sentences en fonction de la couleur de peau de l'accusé :

meurtrier	peine de mort	autre sentence
noir	59	2547
blanc	72	2185

Q 4.1 Calculez la probabilité d'obtenir la peine de mort sachant que l'on est noir, puis sachant que l'on est blanc. Qu'en concluez-vous ?

Q 4.2 En fait le tableau ci-dessus est une synthèse du tableau ci-dessous :

victime	meurtrier	peine de mort	autre sentence
blanche	noir	48	238
	blanc	72	2074
noire	noir	11	2309
	blanc	0	111

Calculez la probabilité d'obtenir la peine de mort conditionnellement à la couleur de peau de l'accusé et de la victime. La justice est-elle clémente envers les noirs dans l'état de Floride ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 – Sport et age

Dans un échantillon aléatoire de 240 personnes, on a recueilli l'information suivante sur l'âge et sur le type de sport le plus fréquemment pratiqué à Jussieu :

âge / activité sportive	moins de 20 ans	[20; 25[ans	[25; 30[ans	plus de 30 ans
jogging	15	20	15	30
natation	15	10	20	25
ping pong	20	10	30	30

Q 5.1 Quelles sont les deux variables aléatoires étudiables ?

Q 5.2 Estimer la loi jointe de ces deux variables.

Q 5.3 Calculer la probabilité qu'a un individu de faire de la natation (dans cet échantillon). Quelle est la probabilité qu'un individu de cet échantillon tiré au hasard ait entre 20 et 25 ans ?

Q 5.4 Calculer la probabilité qu'a un individu qui fait du jogging d'avoir plus de 30 ans (dans cet échantillon).

Q 5.5 Ces deux variables aléatoires semblent-elles indépendantes ?

Exercice 6 – Estimation de la variance d'une loi de probabilité

Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ l'échantillon i.i.d. empirique tiré de X_0, variable dont l'espérance $E(X_0) = m$ et la variance $V(X_0) = \sigma^2$ sont deux paramètres inconnus ; on note $\theta = (m, \sigma^2)$ le paramètre bi-dimensionnel.

Q 6.1 Quelle est l'espérance $E_\theta(\bar{X})$ de la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$?

Q 6.2 Quelle est sa variance $V_\theta(\bar{X})$?

Q 6.3 En déduire que $\bar{X}$ est un estimateur sans biais et convergent de m, c'est-à-dire que :

$$E_\theta(\bar{X}) = m \text{ et } \lim_{n \to \infty} E_\theta[(\bar{X}_n - m)^2] = 0.$$

[*rappel* : lorsque n varie, on écrit $\bar{X}_n$ au lieu de $\bar{X}$].

Q 6.4 Montrer que $\frac{1}{n} E_\theta[\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2] = \sigma^2$.

Q 6.5 Pourquoi ne peut-on pas prendre $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2$ comme estimateur de σ^2 ?

Q 6.6 On considère la statistique $Y = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$. En utilisant la décomposition $X_k - \bar{X} = (X_k - m) - (\bar{X} - m)$, montrer que $Y = \sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - n(\bar{X} - m)^2$ puis que $E_\theta(Y) = (n-1)\sigma^2$.

Q 6.7 En déduire que la *variance empirique corrigée* $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

Exercice 7 – Inégalités aux États-unis

Le Monde, 5/09/2014 - ***Les inégalités continuent de se creuser aux États-Unis***

Les inégalités se sont encore accrues aux États-Unis, selon une étude publiée jeudi 4 septembre par la Réserve Fédérale (Fed). Les revenus des 10% les plus riches ont augmenté de 10% entre 2010 et 2013 pour s'inscrire à 397 500 dollars par an (307 000 euros). Dans le même temps, ceux des 40% les moins aisés, ajustés de l'inflation, ont décliné, indique le rapport publié tous les trois ans. Pour les vingt premiers centiles situés au bas de l'échelle, la chute atteint 8% à 15 200 dollars annuels. Si le revenu moyen global a augmenté de 4% au cours des trois dernières années, le revenu médian [...], lui a chuté de 5%. Une tendance qui « correspond à un accroissement de la concentration des revenus durant cette période », indique la Fed.
Ainsi, les 3% les plus riches américains concentrent 30,5% du revenu total en 2013 contre 27,7% en 2010, tandis que la part des 90% les moins riches, elle, a reculé. Par ailleurs, cette catégorie des 3% les plus riches détient 54,4% de la richesse globale (revenu plus patrimoine) contre 44,8% en 1989. A l'autre bout de l'échelle, les 90% les moins riches ont vu leur part tomber à 24,7% contre 33,2% en 1989.
[...]
ORIGINES DES MÉNAGES
Lorsqu'on regarde l'origine des ménages, les inégalités sont encore plus criantes. Le revenu moyen de la population blanche, propriétaire et diplômée a augmenté entre 2010 et 2013, tandis que celui des noirs, des hispaniques, des locataires et des sans diplôme a baissé dans le même temps. De la même façon, le revenu médian des noirs et des hispaniques a chuté de 9% sur la période, quand il ne baissait que de 1% pour les blancs. Par ailleurs, le rapport indique que le taux de propriétaires de leur logement parmi les ménages américains est tombé à 65,2%. Il s'agit du plus bas niveau constaté depuis 1995. Quand aux familles propriétaires de leurs entreprises, le pourcentage est tombé à 11,7%. Du jamais vu depuis 25 ans.
La thèse de l'économiste français Thomas Piketty développée dans son livre Le capital au XXIe siècle sur l'accroissement des inégalités, a beau avoir été contestée par une partie de la doxa libérale, les chiffres semblent têtus.

Q 7.1 Notons, R_a la variable aléatoire du revenu des salariés américains, indexée par l'année concernée. Nous avons un tirage aléatoire uniforme sur les individus de la population américaine et que nous nous intéressons

au revenu de la personne tirée. Nous avons alors :

$$P(R_{2010} > \alpha_{10}^{2010}) = 0.1, \qquad P(R_{2013} > \alpha_{10}^{2013}) = 0.1$$

Que valent α_{10}^{2010} et α_{10}^{2013} ?

Q 7.2 Sans tenir compte de l'inflation, donner une traduction probabiliste de la phrase concernant les 4 premiers déciles des distributions de R_{2010} et R_{2013}. Vous exprimerez une inégalité entre les α_p^a puis donnerez la définition de ces grandeurs.

Q 7.3 Même question sur les 2 premiers déciles.

Q 7.4 En imaginant que nous disposons d'une formule analytique pour $P(R_a), a \in \{2010, 2013\}$ exprimer l'espérance de R_a.

Q 7.5 Donner une modélisation de la phrase suivante : *les 3% les plus riches américains concentrent 30,5% du revenu total en 2013*

Q 7.6 Introduire de nouvelles variables aléatoires (*Origine*, 3 modalités et *Diplome*, 2 modalités) et utiliser les probabilités conditionnelles pour modéliser le premier paragraphe de la seconde partie du texte.

Semaine 2 - Rappels de probabilités

Exercice 8 – Indépendence et conjonction

Soit trois variables aléatoires X, Y, Z. Montrer que si X est indépendante du couple (Y, Z), et Y est indépendante de Z, alors Z est indépendante du couple (X, Y).

Exercice 9 – Indépendances conditionnelles

La loi de probabilité jointe de 3 variables aléatoires X, Y et Z, est donnée par le tableau suivant dans lequel, par exemple, la case 1/12 représente la probabilité $P(X = x_2, Y = y_1, Z = z_1)$:

		$Y = y_1$	$Y = y_2$	$Y = y_3$
$Z = z_1$	$X = x_1$	1/24	1/15	1/8
	$X = x_2$	1/12	7/120	1/8
		$Y = y_1$	$Y = y_2$	$Y = y_3$
$Z = z_2$	$X = x_1$	3/40	1/20	13/120
	$X = x_2$	1/20	3/40	17/120

On note respectivement $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \perp\!\!\!\perp Y | Z$ l'indépendance probabiliste entre X et Y, et l'indépendance probabiliste entre X et Y conditionnellement à Z.

Q 9.1 D'un point de vue probabiliste, a-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \perp\!\!\!\perp Z$, $Z \perp\!\!\!\perp Y$? Rappel : si A et B sont indépendants, $P(A, B) = P(A) \times P(B)$.

Q 9.2 A-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y | Z$, $X \perp\!\!\!\perp Z | Y$, $Z \perp\!\!\!\perp Y | X$?

Exercice 10 – Indépendances conditionnelles (2)

Soit trois variables aléatoires X, Y, Z, ayant respectivement pour domaines $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ et $\{z_1, z_2\}$. On a pu déterminer la probabilité jointe $P(X, Y, Z)$ de ces 3 variables :

	y_1		y_2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
z_1	0,060	0,140	0,060	0,140
z_2	0,192	0,048	0,288	0,072

Montrez que X est indépendante de Y conditionnellement à Z.

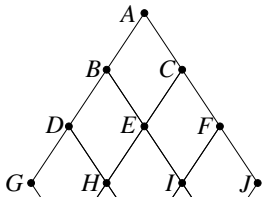
Exercice 11 – Aviation et loi normale

Un pilote de ligne assure régulièrement le trajet Paris-Montpellier. Il s'est amusé à calculer le temps qu'il passe entre le moment où il part de chez lui (à Paris, huit heures du matin) et le moment où il arrive à l'aéroport de Montpellier. Voici le résultat de ses observations : le temps passé dans le RER pour aller jusqu'à Orly suit une loi normale $\mathcal{N}(35 \text{ min}, 8 \text{ min}^2)$; le temps pour préparer le vol/inspecter l'appareil suit une loi $\mathcal{N}(1 \text{ heure}, 16 \text{ min}^2)$; enfin, le temps de vol suit une loi $\mathcal{N}(1 \text{ heure } 10 \text{ min}, 25 \text{ min}^2)$.
Le pilote a décidé de donner rendez-vous à l'aéroport de Montpellier à un de ses collègues. Il ne voudrait pas le fixer trop tôt pour ne pas être en retard, ni le fixer trop tard car cela l'obligerait à attendre. Pour l'aider à choisir l'heure du rendez-vous, calculez la probabilité que le pilote arrive :
1/ entre 10h31 et 10h52.
2/ après 11h.
3/ avant 10h40.
Vous détaillerez les calculs avant de les instancier numériquement.
Indication : lorsque des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivant des lois normales sont indépendantes, leur somme est une variable aléatoire d'espérance la somme des espérances des X_i et de variance la somme des variances des X_i.

Q 11.1 Pour atteindre l'aéroport, le pilote peut décider de prendre le taxi au lieu du RER pour ne pas avoir à porter ses valises durant le trajet. D'après ses observations précédentes, le temps passé dans le taxi suit une loi normale $\mathcal{N}(25 \text{ min}, 15 \text{ min}^2)$. Le pilote arrive finalement à Montpellier entre 10h30 et 10h52. D'après vous, quelle décision a pris le pilote ?

Exercice 12 – Robotique

Un robot doit se rendre du point A vers le bas en passant par les arêtes du graphe ci-dessous. Le robot est limité dans ses mouvements, aussi ne peut-il que descendre (par exemple, lorsqu'il est en E, il ne peut aller qu'en H ou en I, mais pas en B). Lorsqu'il est sur un nœud du graphe, il peut descendre soit sur l'arête de gauche, soit sur celle de droite. Son programme lui fait choisir 7 fois sur 10 l'arête de gauche et 3 fois sur 10 celle de droite.



Q 12.1 Calculez la probabilité que le robot passe en B. Faites de même avec C. Soit X_1 la variable aléatoire de modalités $\{B, C\}$ représentant le *point de passage du robot sur le niveau en dessous de A*. Quel est le type de distribution de probabilité suivie par X_1 (binomiale, Poisson, normale, etc) ? Quels sont les paramètres de cette loi ?

Q 12.2 Notez, pour chaque chemin menant à D, le nombre de fois où le robot a été à gauche ou à droite. Faites de même avec E et F. Déduisez-en la probabilité que le robot passe en D, E et F pour aller vers P.

Q 12.3 Calculez la probabilité que le robot passe en G. Faites de même avec H, I, et enfin J.

Q 12.4 Soit X une variable aléatoire valant 0 si le robot est passé en G, 1 s'il est passé en H, 2 en I et 3 en J. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifiez votre réponse.

Exercice 13 – Modélisation

Nous nous intéressons à la modélisation de phénomène réels par des lois de probabilités standard.

Q 13.1 Soit une base d'images $X = \{\mathbf{x}^{(i)}\}$. Dans une image $\mathbf{x}$, nous avons 256 pixels x_j noirs ou blancs.

Q 13.1.1 Quelle loi utiliser pour modéliser un pixel j ? Que signifient le (ou les) paramètre(s) de cette loi ?

Q 13.1.2 Nous voulons calculer $p(x_j)$ en fonction de la valeur de x_j (0 ou 1) et du (ou des) paramètre(s) de la loi précédente. Comment factoriser l'écriture du calcul pour tenir compte des deux possibilités de valeur du pixel ?

Q 13.2 Imaginons que nous sommes dans un problème bi-classe, impliquant des chiens et des chats et que nous disposons de 2 modèles optimisés pour chaque classe. Ces modèles font l'hypothèse que tous les pixels sont indépendants dans une image.

Q 13.2.1 Pour fournir ces modèles optimisés, combien de valeurs numériques faut-il donner ? A quoi correspondent-elles ?

Q 13.2.2 Une nouvelle image arrive dont le seul pixel visible exploitable, x_{18}, est allumé : comment déterminer s'il s'agit d'un chien ou d'un chat ?

Q 13.2.3 Pour une image entière $\mathbf{x} \in \{0,1\}^{256}$, comment déterminer la classe associée au sens de la vraisemblance ?

Q 13.3 Un expert nous indique l'importance des profils dans les images en noir et blanc : c'est à dire l'indice sur chaque ligne où se trouve le premier pixel allumé. Comment modéliser une ligne de l'image ? En imaginant que chaque ligne de l'image est indépendante, exprimer la probabilité d'observation de l'image $\mathbf{x}$ contenant 16 lignes de 16 pixels $\{x_1, \ldots, x_{16}\}$.

Q 13.4 Nous disposons de 10 images de chats. Comment vérifier l'hypothèse d'indépendance précédente pour les deux premières lignes ? Indiquer les dimensions des tableaux de probabilités à calculer.

Q 13.5 Nous modélisation maintenant une image $\mathbf{x}$ dont les pixels x_j peuvent prendre 16 niveaux de gris différents. Quelle loi utiliser pour modéliser un pixel ? Que signifient le ou les paramètres de cette loi ?
Note : en fonction de la nature des images considérées, plusieurs lois de probabilités différentes peuvent se justifier.

Q 13.6 Nous cherchons à modéliser une station Vélib en introduisant la variable aléatoire X décrivant le nombre de vélos décrochés toutes les 15 minutes. Quelle loi choisir pour X ? Pour raffiner le modèle, nous voulons caractériser chaque station indépendamment en distinguant 4 périodes dans la journée et en séparant les jours de semaine et les week-end. Formaliser les probabilités que nous cherchons à calculer. Combien faut-il de paramètres ?

Q 13.7 Nous nous intéressons à la durée de vie d'ampoules basse consommation. Nous avons obtenu d'un fabricant le tableau suivant :

durée (dizaines d'années)	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35
nb ampoules	200	100	300	100	200	100

En considérant les lampes modernes comme des objets sans mémoire (pouvant claquer n'importe quand...), quelle loi utiliser pour modéliser cette durée de vie ? Comment estimer le ou les paramètres de cette loi en utilisant ses propriétés ?

Exercice 14 – Petits jeux autour de la loi normale

La distribution des tailles d'un échantillon de personnes suit une loi normale de paramètres μ, σ^2. L'échantillon est le suivant (en cm) : $173, 185, 160, 191, 208, 180, 192, 169, 158, 176, 194, 194, 186, 200, 176$

Q 14.1 Comment estimer les paramètres correspondant au maximum de vraisemblance pour l'échantillon observé ?

Q 14.2 Selon les paramètres estimés, quel est le plus grand individu possible ? Quel est le plus grand individu que l'on ait une chance de croiser (à 99.9%) ?

Q 14.3 Quelle est la probabilité de croiser un individu de 2m ? Quelle est la probabilité de croiser un individu de plus de 2m ?

Q 14.4 Quelle est la vraisemblance de l'observation d'un individu de 2m ?

Semaine 3 - Max de vraisemblance et max *a posteriori*

Exercice 15 – MAP

Soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble des nombres entiers positifs. X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ si $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$. On a observé 5 réalisations (obtenues indépendamment les unes des autres) d'une variable X suivant la loi géométrique :

4	2	6	5	8

.

Q 15.1 Estimez par maximum de vraisemblance la valeur du paramètre $\theta = p$ de la loi.

Q 15.2 Avant le tirage de l'échantillon, nous avions une connaissance a priori sur le paramètre θ : ce dernier suivait a priori une loi Beta de paramètres 4 et 5, autrement dit $\pi(\theta) \propto \theta^3(1 - \theta)^4$. Estimez la valeur du paramètre $\theta = p$ par maximum a posteriori.

Exercice 16 – MAP 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(K, \theta)$, où K est une constante supposée connue. On observe un échantillon $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de taille n d'instanciations de cette variable aléatoire.

Q 16.1 Calculez la valeur de θ par maximum de vraisemblance. Bien entendu, vous démontrerez mathématiquement votre résultat.

Q 16.2 Des études statistiques nous indiquent que θ suit une loi Beta *a priori* $\pi(\theta) = \text{Beta}(\theta, a, b)$. Quelle est la valeur a posteriori de θ ? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Exercice 17 – Max de vraisemblance

Dans une urne se trouvent des boules de 4 couleurs différentes : rouge (R), bleues (B), vert (V) et jaune (J). On ne connaît pas la quantité de boules dans l'urne ni la proportion des différentes couleurs. Soit la variable aléatoire $X =$ Â« couleur d'une boule tirée au hasard dans l'urne Â». On se propose de représenter la distribution de probabilité de X par une distribution catégorielle de paramètres $\theta = \{p_R, p_B, p_V, p_J\}$, c'est-à-dire :

$$P(X = R) = p_R \quad P(X = B) = p_B \quad P(X = V) = p_V \quad P(X = J) = p_J$$

avec, bien entendu, $p_R, p_B, p_V, p_J \geq 0$ et $p_R + p_B + p_V + p_J = 1$.
Afin d'estimer les paramètres de la distribution, on a tiré avec remise un échantillon des boules de l'urne et on a observé leurs couleurs, que l'on a retranscrites dans le tableau suivant :

R	R	R	R	B	B	V	V	V	J

Q 17.1 Estimez par maximum de vraisemblance les paramètres de la distribution $P(X)$. Vous justifierez votre réponse.

Q 17.2 Un expert, qui a pu observer brièvement l'urne, propose une information *a priori* sur la distribution des couleurs sous la forme d'un *a priori* de Dirichlet d'hyperparamètres $\alpha = \{\alpha_R = 3, \alpha_B = 2, \alpha_V = 4, \alpha_J = 3\}$. Une distribution de Dirichlet d'hyperparamètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ est définie de la manière suivante : pour tout K-uplet $(x_1, \ldots, x_K)$ tel que $x_i \in]0, 1[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$ et tel que $\sum_{i=1}^{K} x_i = 1$, on a :

$$Dir(x_1, \ldots, x_K) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{K} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{K} x_i^{\alpha_i - 1},$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma usuelle.
Estimez par maximum a posteriori les paramètres de la distribution $P(X)$ sur les couleurs des boules de l'urne. Vous justifierez votre réponse.

Exercice 18 – Maximum a posteriori, maximum de vraisemblance

Une pièce de monnaie peut être plus ou moins biaisée en faveur de *Pile* ou de *Face*.
On prend pour paramètre θ la probabilité de *Pile* :

$$P_\theta(Pile) = \theta.$$

L'ensemble des valeurs possibles pour θ est $\Theta = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$; les probabilités a priori $\pi(\theta)$ de la v.a. $\tilde{\theta}$ sont :

θ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\pi(\theta)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

On effectue 5 lancers indépendants de la pièce et on observe le nombre x de résultats *Pile* obtenus ; la v.a. X a donc pour valeurs possibles $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Q 18.1 Quelle est la loi suivie par X conditionnellement à l'hypothèse $\tilde{\theta} = \theta$? Calculer tous les éléments du tableau des probabilités conditionnelles $P(x|\theta),\ (x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta$. (on pourra se servir d'une table et mettre à profit les symétries des données)

Q 18.2 Déduire de la question précédente les valeurs des éléments du tableau des probabilités jointes $\pi(x, \theta),\ (x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta$. À partir de ce tableau, comment peut-on retrouver la loi a priori $\{\pi(\theta)\}$ de la v.a. $\tilde{\theta}$? comment trouve-t-on la loi a priori de X ? Calculez-la.

Q 18.3 Déduire de ce qui précède les valeurs des éléments du tableau des probabilités a posteriori $\pi(\theta|x),\ (x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta$.

Q 18.4 Donner les valeurs d'acceptation des diverses hypothèses sur la valeur du paramètre :

Q 18.4.1 quand la règle de décision est celle de la *probabilité d'erreur minimum* ; Cette règle équivaut à une règle de la probabilité maximum d'une décision juste : dans chaque ligne du tableau des $\pi(\theta|x)$ il faut choisir

$$d(x) = \operatorname*{Argmax}_\theta \pi(\theta|x).$$

Q 18.4.2 quand la règle de décision est celle du *maximum de vraisemblance*.

Q 18.4.3 Quand ces deux règles donnent-elles le même résultat ?

Exercice 19 – Loi exponentielle et MAP

La loi exponentielle est une loi continue dont la fonction de densité est : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour tout $x > 0$. Elle sert, entre autres, pour caractériser la durée de vie des composants électroniques. Le tableau suivant recense les durées de vie (en années) observées pour un échantillon de 10 composants électroniques :

2	7	3	4	1	2	6	5	1	9

Q 19.1 On suppose que la distribution des durées de vie est effectivement une loi exponentielle. Estimez par maximum de vraisemblance la valeur de λ.

Q 19.2 Après discussion avec un expert en électronique, on a un *a priori* sous la forme d'une loi Gamma de densité $g(x) = \frac{1}{\Gamma(5)} x^4 e^{-x}$. Estimez par maximum a posteriori la valeur de λ.

Exercice 20 – Loi géométrique et maximum de vraisemblance

Un robot effectue des actions et, afin de déterminer son efficacité, un observateur a noté les temps d'exécution (en secondes) de 100 tâches qu'il a effectuées. Ces temps sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

temps (en secondes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nb observations	31	22	15	11	7	5	4	2	3

Q 20.1 L'observateur pense que la variable aléatoire X="temps d'exécution" suit une loi géométrique. On rappelle que la loi géométrique de paramètre p est telle que $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout entier $k \geq 0$. Déterminez la valeur du paramètre p par maximum de vraisemblance.

Exercice 21 – Codage de textes et approche *Naive Bayes*

Soit un corpus, c'est à dire un ensemble des documents $C = \{d_i\}_{i=1,\ldots,N}$, chacun de ces documents étant composé d'une suite de $|d_i|$ mots w_j^i : $d_i = \{w_1^i, \ldots, w_{|d_i|}^i\}$. Par exemple, d_i =`le chat est dans le jardin`, $|d_i| = 6$.
Nous souhaitons classer ces documents dans des classes bien identifiées (par exemple, la classe des documents relatifs aux automobiles ou bien celle relative à la biologie). Pour cela, nous allons construire un modèle multinomial Θ_c pour chaque classe de documents. Nous nous appuierons ensuite sur ces modèles pour construire un classifieur de documents.

Q 21.1 Nous allons construire un modèle Θ_c basé sur la probabilité d'apparition des mots : une classe de document sera donc caractérisée par des mots ayant une forte probabilité d'apparition et des mots ayant une faible probabilité d'apparition.
Calculez la probabilité $P(d_i|\Theta_c)$ d'observer un document d_i en fonction des $P(w_j^i|\Theta_c)$ (probabilité d'observation d'un mot w_j^i) en faisant l'hypothèse que les tirages des w_j sont indépendants. Expliquez pourquoi cette hypothèse est (très) forte.

> Introduisons la variable x_i^j qui décrit le nombre d'apparitions du mot j dans le document i. Introduisons également l'ensemble $D = \{w_1, \ldots, w_{|D|}\}$ contenant tout le vocabulaire utilisé dans un corpus.
> **Exemple :** document i = `le chat est dans le jardin`.
> Dictionnaire D = `chat, dans, est, forêt, jardin, le` et $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 0, 1, 2]$.
> **Intérêt de la transformation :** le corpus documentaire tient dans une matrice (de taille fixe) alors qu'avant chaque document avait une taille différente.

Q 21.2 Ecrire $P(d_i|\Theta_c)$ comme une fonction des x_i^j et des $P(w_j|\Theta_c)$.

Dans une loi multinomiale, chaque évènement discret est directement associé à une probabilité à estimer. Θ_c est donc un vecteur de taille $|D|$ contenant les probabilités d'apparition des mots $P(w_j|\Theta_c)$ telles que $\sum_j P(w_j|\Theta_c) = 1$. Pour simplifier les notations, nous noterons à partir d'ici $p_j = P(w_j|\Theta_c)$ et $\Theta_c = \{p_1, \ldots, p_{|D|}\}$.

Q 21.3 Pour trouver les paramètres Θ_c, nous allons maximiser la log-vraisemblance de ces paramètres sur l'ensemble de la classe c du corpus. Formuler ce problème d'optimisation en fonction des observations x_i^j et des paramètres p_j.

L'optimisation sous contrainte en quelques lignes peu formelles, par la technique des coefficients de Lagrange. Maximiser $f(\mathbf{w})$ par rapport aux paramètres $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ sous la contrainte d'égalité (arbitraire) $\sum_j w_j = \alpha$ peut être équivalent à considérer :

$$\underset{\mathbf{w}}{\text{Argmax}} \min_{\lambda} f(\mathbf{w}) - \lambda \left(\sum_j w_j - \alpha \right)$$

L'idée : pour tout $\mathbf{w}$ violant la contrainte, la quantité $\left(\sum_j w_j - \alpha\right) \neq 0$ et donc il existe un valeur de λ qui fait tendre l'ensemble vers $-\infty$. Cette valeur pour $\mathbf{w}$ ne peut donc plus correspondre au max recherché.
L'optimisation se joue en deux phases : **(1)** dériver par rapport à w_j, annuler la dérivée et en déduire une expression de w_j en fonction de λ. ⇒ Il ne reste plus que des λ comme paramètres. **(2)** Dériver par rapport à λ, annuler la dériver et trouver une expression de λ. Remplacer cette expression dans (1) pour trouver l'expression finale de w_j.
Note : ça marche avec plusieurs contraintes, il suffit d'introduire plusieurs coefficients de Lagrange. Par contre, on devine plein de contraintes sur la forme de la fonction f pour qu'il soit possible d'isoler les w_j dans la phase (1)... Ici, par exemple, la fonction est convexe et dérivable : ça marche bien.

Q 21.4 Montrer que l'optimisation des p_j mène à $p_j = \frac{\sum_{d_i \in C} x_i^j}{\sum_{d_i \in C} \sum_{j \in D} x_i^j}$. Ce résultat vous semble-t-il intuitif ?

Semaine 4 - l'algorithme EM

Rappels sur la loi Normale multivariée. Fonction de densité :

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}, x \in \mathbb{R}^N, \mu \in \mathbb{R}^N$$

Exercice 22 – Algorithme des K-moyennes

L'algorithme des K-moyennes procède selon les étapes suivantes pour partitionner un ensemble de données en K clusters :

- Initialiser aléatoiremet les K prototypes.
- Répéter jusqu'à stabilité des clusters :
  - Partitionner les exemples en les affectant aux prototypes dont ils sont le plus proche en terme de distance euclidienne
  - Redéfinir les prototypes de manière à ce qu'ils correspondent aux centres de gravité des partitions

Q 22.1 Soit l'ensemble d'exemples en dimension 2 :
$D = \{(0,-4), (0,-3), (1,-3), (1,-2), (0,4), (-1,1), (-1,2), (0,3)\}$
Faire tourner l'algorithme des K-moyennes en prenant comme point de départ les prototypes $(0,-6)$ et $(-1,1)$. On sait maintenant que les données sont issues d'une mixture de 2 Gaussiennes multivariées de paramètres respectifs (μ_1, Σ_1) et (μ_2, Σ_2).

Q 22.2 Par quoi pourrait-on remplacer la distance euclidienne de l'algorithme donné ci-dessus pour que les données soient toutes affectées à la gaussienne qui les a le plus probablement générées ?

Q 22.3 Comment doit-on modifier l'étape de mise à jour des prototypes dans ce cas ?

Q 22.4 Quelles différences alors avec l'algorithme EM vu en cours ? En quoi un algorithme EM pourrait-il être supérieur à celui-ci ?

Exercice 23 – EM et mixture de gaussiennes

Les prix fonciers d'un quartier suivent une mixture de 2 gaussiennes, de paramètres respectifs (μ_1, σ_1^2) et (μ_2, σ_2^2). Le tableau ci-dessous recense les prix en 100K€ de quelques transactions immobilières :

8	1	4	3	3	5	7	5	4	5

On appellera π_1 et π_2 les coefficients des 2 gaussiennes dans la mixture.

Q 23.1 Formaliser le problème d'optimisation des paramètres $\theta = (\pi_1, \pi_2, \mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2)$

Q 23.2 Pourquoi ce problème est difficile à résoudre ? Quelles informations supplémentaires pourraient nous aider à résoudre le problème beaucoup plus simplement ?

Q 23.3 En quoi l'algorithme EM peut nous aider à résoudre le problème ? De quelles étapes a-t-on besoin pour le mettre en oeuvre ?

Q 23.4 Afin d'initialiser les paramètres θ^0, on propose de trier les éléments de l'échantillon par ordre croissant, puis de se servir des 5 plus petites valeurs pour estimer par maximum de vraisemblance (μ_1, σ_1^2) et des 5 plus grandes pour estimer (μ_2, σ_2^2). Dans ces conditions, quelles valeurs faudrait-il logiquement affecter aux poids π_1 et π_2 ? On rappelle que la fonction de densité de la loi normale est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Q 23.5 En partant du $\Theta^0 = \{\mu_1, \sigma_1^2, \pi_1, \mu_2, \sigma_2^2, \pi_2\}$ obtenu à la question précédente, estimez la valeur de Q_i^1 selon l'algorithme EM.

Q 23.6 Estimez la valeur du paramètre Θ^1.

Exercice 24 – EM et loi jointe de deux variables

Soit deux variables aléatoires discrètes A et B dont les domaines respectifs sont $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$. On cherche à estimer la distribution jointe de A et B en utilisant l'algorithme EM sur l'échantillon suivant dont certaines valeurs sont manquantes (<<? >>) :

(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	$(?, b_2)$	$(a_2, ?)$	(a_2, b_2)	(a_1, b_2)	$(?, b_1)$	$(a_1, ?)$	(a_1, b_2)	(a_2, b_1)

Q 24.1 Que représente, dans ce cas, le paramètre Θ^t de l'algorithme EM ?

Q 24.2 Supposons que l'on démarre l'algorithme EM avec une loi jointe $P(A, B)$ estimée uniforme. Quelles sont les valeurs des $Q_i^{t+1}(x_i^h)$, $i = 1, \ldots, 10$, si l'on applique une étape E de l'algorithme EM ?

Q 24.3 En utilisant les valeurs des $Q_i^{t+1}(x_i^h)$ de la question précédente, donnez l'expression $\log L^{t+1}(\mathbf{x}^o, \Theta)$ en fonction des paramètres de Θ.

Q 24.4 Calculez Θ^1, c'est-à-dire appliquez l'étape M de EM.

Q 24.5 Quelles sont les nouvelles valeurs des $Q_i^{t+1}(x_i^h)$, $i = 1, \ldots, 10$, si l'on applique à nouveau une étape E de l'algorithme EM ?

Q 24.6 En utilisant les valeurs des $Q_i^{t+1}(x_i^h)$ de la question précédente, donnez l'expression $\log L^{t+1}(\mathbf{x}^o, \Theta)$ en fonction des paramètres de Θ.

Exercice 25 – EM et loi exponentielle

Une entreprise s'intéresse à la durée de vie d'un composant informatique. Pour cela, elle a fait fonctionné 10 composants et a noté les temps (en mois) au bout desquels lesdits composants ont cessé de fonctionner. Les résultats sont répertoriés dans le tableau ci-dessous. Pour ces tests, l'entreprise a imposé un timeout de 20 mois et, lorsque les composants continuaient à fonctionner après ce délai, elle a noté dans le tableau un Â« ? Â».

1	2	2	3	3	7	10	?	?	?

La loi classiquement utilisée en statistiques pour modéliser la durée de vie de composants est la loi exponentielle (de paramètre λ) dont la fonction de densité est $f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour tout $x \geq 0$.

Q 25.1 En ne prenant en compte que les données numériques du tableau (c'est-à-dire sans tenir compte des Â« ? Â»), estimez la valeur du paramètre λ par maximum de vraisemblance.

Q 25.2 La troncature de la loi exponentielle sur l'intervalle $[20, +\infty[$ est la loi $g(x|\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ \mu e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 20 \end{cases}$

Donnez une expression du paramètre μ en fonction de λ (suggestion : l'intégrale d'une fonction de densité sur tout son domaine de définition est égale à 1). On rappelle que la dérivée de $e^{\alpha x}$ par rapport à x est égale à $\alpha e^{\alpha x}$.

Q 25.3 On va maintenant exécuter l'algorithme EM afin de déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle $f(x|\lambda)$ en tenant compte des Â« ? Â». Donnez une expression de $Q_i^1(x_i^h) = p(x_i^h|x_i^o, \lambda)$, $i = 8, 9, 10$, en fonction d'une valeur λ_0 (qui sera, par la suite égale au λ estimé à la question 25.1). On comprendra le conditionnement par x_i^o comme Â« étant donné que l'on n'a pas observé l'arrêt du composant Â».

Q 25.4 Que vaut $p(x_i^o|\lambda)$ pour $i = 8, 9, 10$, c'est-à-dire la probabilité de ne pas observer l'arrêt du composant. Sachant que $p(x_i^o, x_i^h|\lambda) = p(x_i^o|\lambda) \times p(x_i^h|x_i^o, \lambda)$, donnez l'expression de $p(x_i^o, x_i^h|\lambda)$.

Q 25.5 Donnez une expression de $Q_i^1(x_i^h) \log\left(\frac{p(x_i^o, x_i^h|\lambda)}{Q_i^1(x_i^h)}\right)$, $i = 8, 9, 10$, en fonction de λ et de l'expression obtenue dans la question précédente.

Q 25.6 Donnez une expression de $\int Q_i^1(x_i^h) \log\left(\frac{p(x_i^o, x_i^h|\lambda)}{Q_i^1(x_i^h)}\right) dx_i^h$, pour $i = 8, 9, 10$.

On rappelle que, pour $\alpha > 0$, $\int_{20}^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\left(20 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-20\alpha}$ (on le démontre aisément par intégration par parties).

Q 25.7 En déduire une expression pour $\log L^{t+1}(\mathbf{x}^o, \lambda)$

Q 25.8 On peut maintenant appliquer EM. En supposant que $\Theta^0 = \lambda_{ML}$, le lambda estimé par maximum de vraisemblance à la question 25.1, estimez Θ^1.

Q 25.9 En utilisant l'expression obtenue à la question précédente, pour quelle valeur de λ aura-t-on convergence ?

Semaine 5 - Tests d'hypothèses, d'ajustement et d'indépendance

Exercice 26 – Test entre hypothèses simples

Parmi les personnes atteintes d'une certaine maladie, que l'on ne sait pas traiter, 36% guérissent spontanément, les 64% restant devenant des malades chroniques.
Un laboratoire pharmaceutique propose un remède très coûteux avec lequel, affirme-t-il, le pourcentage de guérison passe à 50%.
Un service hospitalier doute de l'efficacité de ce remède ; pour le tester, il l'administre à un échantillon de 100 patients atteints de la maladie ; les patients sont numérotés de $k = 1$ à $k = 100$.

Q 26.1 – Mise en place du test d'hypothèse :

Q 26.1.1 Quelles sont les hypothèses simples en présence ? (on appellera θ le paramètre). Laquelle doit-on prendre comme hypothèse H_0 ?

Q 26.1.2 Au patient k est associée la variable X_k qui prend la valeur 1 si ce patient guérit et la valeur 0 sinon. Quel est le type de loi suivie par X_k dans les deux hypothèses H_0 et H_1 ?
Vérifier que les probabilités élémentaires des deux lois peuvent se mettre sous la forme :

$$P_\theta(X_k = x_k) = \theta^{x_k}(1-\theta)^{1-x_k},\ x_k \in \{0,1\}$$

avec $\theta = \theta_0$ pour l'une, $\theta = \theta_1$ pour l'autre.

Q 26.1.3 En déduire l'expression de la vraisemblance [= la probabilité d'obtenir l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ conditionnellement à θ],

$$L(\mathbf{x},\, \theta) = L(x_1, \ldots,\, x_k,\, \ldots,\, x_n,\, \theta) = \prod_{k=1}^{n} P_\theta(X_k = x_k).$$

Montrer qu'elle s'exprime comme une fonction de la moyenne empirique $\bar{x}$ et de θ.

Q 26.1.4 En déduire que, pour tout test du rapport de vraisemblance $L(\mathbf{x},\, \theta_0)/L(\mathbf{x},\, \theta_1)$, il existera un nombre positif λ tel que :

$$\bar{x} < \lambda \ \Rightarrow \text{accepter } H_0$$
$$\bar{x} > \lambda \ \Rightarrow \text{rejeter } H_0.$$

Q 26.2 – Réalisation effective du test :

Q 26.2.1 Que représente la variable $Y = n\bar{X}$? Quelle est la loi de Y dans l'hypothèse H_0 ?

Q 26.2.2 La table ci-dessous donne les probabilités exactes d'observer k guérisons au moins parmi les 100 malades sous l'hypothèse H_0 (de $k = 42$ à $k = 50$) ; les valeurs obtenues par l'approximation normale sont données au-dessous.

k	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$P_{\theta_0}(Y \geq k)$	0.126	0.089	0.060	0.040	0.025	0.015	0.009	0.0052	0.0029
val. appr.	0.125	0.089	0.059	0.038	0.023	0.014	0.008	0.0047	0.0025

Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on doit : accepter l'hypothèse H_0 ? rejeter H_0 ?

Q 26.2.3 Sous l'hypothèse H_1,

$$P_{\theta_1}(Y \leq 43) = 0.0967 \text{ et } P_{\theta_1}(Y = 44) = 0.039$$
$$P_{\theta_1}(Y \leq 46) = 0.242 \text{ et } P_{\theta_1}(Y = 47) = 0.066$$

En déduire la puissance du test de niveau de signification $\alpha = 0.05$.

Q 26.2.4 Mêmes questions que précédemment mais cette fois au niveau de signification $\alpha = 0.01$.

Q 26.2.5 L'approximation normale est-elle bonne ici ? Quel est le théorème de convergence qui laisse prévoir ce fait ?

Q 26.3 On suppose que le chef du service hospitalier est capable :
— d'attribuer des probabilités *a priori* aux deux hypothèses

$$\pi_0 = P(H_0)\,;\, \pi_1 = P(H_1) = 1 - \pi_0\,;$$

— et d'estimer le coût d'une erreur de $1^{\text{ère}}$ espèce, C_0 et de 2^{eme} espèce C_1, ce qui permet de se placer dans le cadre de la statistique bayésienne.

Soit un test T_W, caractérisable par sa région critique W, c'est-à-dire tel que :

$$H_0 \text{ rejeté} \Leftrightarrow x \in W$$
$$H_0 \text{ accepté} \Leftrightarrow x \notin W$$

Q 26.3.1 Montrer que l'espérance mathématique du coût de ce test est :

$$\pi_0 C_0 \sum_{x \in W} L(\mathbf{x},\, \theta_0) + \pi_1 C_1 \sum_{x \notin W} L(\mathbf{x},\, \theta_1).$$

Q 26.3.2 En déduire que, s'il existe $x \in W$ tel que :

$$L(\mathbf{x},\, \theta_0) > \frac{\pi_1 C_1}{\pi_0 C_0} L(\mathbf{x},\, \theta_1),$$

alors il existe un autre test d'espérance de coût strictement inférieure à celle du test T_W.

Q 26.3.3 Montrer de même que s'il existe $x \notin W$ tel que

$$L(\mathbf{x},\, \theta_0) < \frac{\pi_1 C_1}{\pi_0 C_0} L(\mathbf{x},\, \theta_1),$$

alors il existe un autre test d'espérance de coût strictement inférieure à celle du test T_W.

Q 26.3.4 En déduire qu'un test optimal bayésien est nécessairement un test du rapport de vraisemblance. Comment λ varie-t-il avec π_0 et π_1 d'une part et C_0 et C_1 d'autre part ?
Donner un test optimal bayésien lorsque $\pi_0 = 0.95$, $C_0 = 1$ et $C_1 = 10$ (unités monétaires).

Exercice 27 – Investissement à la bourse

Vous voulez investir à la bourse. Afin d'optimiser vos profits, vous relevez pendant 16 jours le cours du CAC40. Au début de ces deux semaines, celui-ci vaut 5715 points. Dans l'échantillon de 16 jours, le CAC40 vaut en moyenne 5726,025 points, avec un écart-type de 6 points. Vous ne voulez investir que si le CAC40 est à la hausse.

Q 27.1 Sachant que la variable $X =$ *valeur du CAC40* suit une loi normale de variance 36, effectuez un test d'hypothèse de niveau de confiance 99% pour savoir si le CAC40 a augmenté. Vous préciserez bien les hypothèses H_0 et H_1.

Q 27.2 D'après le test précédent, peut-on conclure que le CAC40 a augmenté ?

Q 27.3 Calculez la puissance du test pour $\mu = 5726,025$. Pour vous aider, vous pourrez supposer que si une variable $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors :

$$P(Y > -1) = 0,8413 \qquad P(Y > -2) = 0,9772 \qquad P(Y > -3) = 0,9986 \qquad P(Y > -4) \approx 1.$$

Exercice 28 – Test d'ajustement du χ^2

Dans un supermarché, on maintient 8 caisses de plus de 10 articles en opération durant les nocturnes du jeudi. Normalement, la clientèle devrait se répartir uniformément entre les caisses. Afin de vérifier cela, on a recensé le nombre de clients passés à chacune des caisses un jeudi soir. Les résultats observés ont été les suivants :

Numéro de la caisse	Nombre de clients
1	72
2	70
3	71
4	52
5	45
6	59
7	67
8	48
Total	484

Hypothèse H_0 à tester : *la clientèle se répartit uniformément entre les 8 caisses.*

Q 28.1 Sous l'hypothèse H_0, quels sont les effectifs théoriques ν_i dans chaque classe ?

Q 28.2 Calculer la statistique d'ajustement :

$$A = \sum_{i=1}^{I} \frac{(n_i - \nu_i)^2}{\nu_i}.$$

Q 28.3 Quel est le nombre de degrés de liberté ? Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, doit-on accepter H_0 ?

Exercice 29 – Boules de couleur

Soit une urne contenant des boules de 5 couleurs différentes : (R)ouges, (B)leues, (V)ertes, (J)aunes, (N)oires. On suspecte que la distribution de probabilité sur les couleurs des boules de l'urne est la suivante :

$$P(R) = 0,2 \quad P(B) = 0,4 \quad P(V) = 0,1 \quad P(J) = 0,2 \quad P(N) = 0,1.$$

Par ailleurs, on a tiré un échantillon i.i.d. de 20 boules et on a noté le nombre de boules de chaque couleur :

Couleur	R	B	V	J	N
Nb boules	2	9	4	5	0

Faites un test d'ajustement avec un niveau de confiance $1 - \alpha = 90\%$ pour déterminer si, oui ou non, la distribution de probabilité sur les couleurs des boules est celle indiquée ci-dessus.

Exercice 30 – Test d'indépendance du χ^2

Un échantillon de 200 contribuables est prélevé afin de vérifier si le revenu brut annuel d'un individu est un caractère dépendant du niveau de scolarité de l'individu. Les observations recueuillies sont données dans le tableau suivant :

scolarité (années) $\rightarrow$ revenu (kF) $\downarrow$	$[0;7[$	$[7;12[$	$[12;14[$	$[14;\rightarrow[$	*total*
$[0;75[$	17	14	9	5	45
$[75;120[$	12	37	11	5	65
$[120;200[$	7	20	20	8	55
$[200;\rightarrow[$	4	9	10	12	35
total	40	80	50	30	200

Q 30.1 On admet que les fréquences relatives déduites des marges du tableau donnent les vraies lois de probabilité, $p_{r.}$ et $p_{.s}$ des variables $R(evenu)$ et $S(colarité)$. Donner le tableau des fréquences théoriques, $200 \times p_{rs}$, correspondantes en cas d'indépendance des deux variables.

Q 30.2 Calculer le χ^2. Expliquez pourquoi il y a 9 degrés de liberté. Doit-on rejeter l'hypothèse d'indépendance au risque $\alpha = 5\%$?

Exercice 31 – Notation en MAPSI

On sait, par expérience, que les notes de partiel de MAPSI suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu; 6^2)$. On considère l'échantillon de notes i.i.d. suivant :

10	8	13	20	12	14	9	7	15

.

Q 31.1 Par expérience, les années précédentes, la moyenne au partiel de MAPSI était égale à 14. Dressez un test d'hypothèse de niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ pour confronter les hypothèses $H_0 =$ *la moyenne est égale à 14* et $H_1 =$ *la moyenne a baissé, i.e., elle est inférieure à 14.*

Q 31.2 Calculez la puissance du test pour une moyenne de 12 (H_1 : la moyenne est égale à 12).

Exercice 32 – Il faut assurer

La loi oblige tout automobiliste à contracter une assurance. La prime exigée annuellement d'un assuré dépend de plusieurs facteurs : la zone habitée, le type de véhicule, l'utilisation à des fins commerciales ou non, la distance estimée que parcourra l'assuré... Il est presque impossible d'estimer la distance parcourue par un automobiliste pour une année donnée. Voilà pourquoi tous les assurés d'un véhicule non utilisé à des fins commerciales se voient imposer le même montant sur ce point. Celui-ci est fonction de la distance moyenne parcourue annuellement par les automobilistes de cette catégorie. Des études ont montré par le passé que celle-ci était de 18000 km avec un écart-type de 5000 km. Le montant que l'on prévoit d'exiger est de 2 centimes du km, autrement dit $18000 \times 0,02 = 360$€. Le montant de cette prime a continuellement augmenté ces dernières années, de telle sorte que l'opinion publique commence à être très mécontente et à exercer de fortes pressions sur les compagnies d'assurances pour qu'elles baissent leurs tarifs.
C'est ainsi que la MAIF est priée de réévaluer tous les facteurs considérés dans le calcul de la prime. Le plus vulnérable de ces facteurs est précisément la distance parcourue annuellement. Un statisticien est donc chargé de réexaminer le bien-fondé de l'estimation à 18000 km de la moyenne contestée. La démarche qu'il compte suivre est de prélever rapidement un échantillon de 400 individus afin de tester si la moyenne a effectivement diminué. Si tel est le cas, une étude plus exhaustive, menée sur un grand nombre d'assurés, sera entreprise afin d'estimer très précisément la valeur de la moyenne. Sinon, ce facteur ne sera pas révisé.
La variable qu'étudie le statisticien est X : la distance parcourue en 2022 (dernière année complète sur laquelle on peut fonder l'étude), par un véhicule utilisé à des fins non commerciales. Il décide pour l'instant de ne pas remettre en cause l'estimation de l'écart-type σ de X (5000 km). En revanche, il veut réestimer la moyenne μ et vous demande donc de l'aider :

Q 32.1 Dans un test d'hypothèses, quelles hypothèses H_0, H_1 formuleriez-vous pour tester s'il faut revoir les tarifs de l'assurance à la baisse ? Quelle serait la forme de la région critique ?

Q 32.2 Le statisticien s'interroge sur les conséquences qu'auraient le fait de rejeter H_0 alors que celle-ci est vraie. Cela entrainerait la réalisation de l'étude exhaustive pour rien, donc une dépense inutile, et porterait atteinte à la réputation du statisticien. Il décide donc de ne pas prendre de risque et de fixer la probabilité de commettre une telle erreur à $\alpha = 0,01$. Exprimez α en fonction de la région critique.

Q 32.3 Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$ sous H_0 ?

Q 32.4 À partir de quelle valeur le test nous indique-t-il de rejeter H_0 ?

Q 32.5 Notre statisticien veut maintenant examiner la puissance de son test afin de voir si sa règle de décision est *solide*. Il réfléchit alors sur les conséquences de rejeter H_1 alors que H_1 est vraie. Si une telle erreur se produisait, les automobilistes n'obtiendraient pas une réduction du prix de la prime alors qu'il y auraient droit.

Si la diminution à laquelle ils avaient droit se chiffrait à 20 euros ou moins, on ne pourrait pas parler de conséquences sérieuses. à quel nombre moyen k de kilomètres parcourus correspond une baisse de 20 euros de l'assurance ?

Q 32.6 Calculez la puissance du test pour k. Cette puissance nous indique la probabilité que la règle de décision soit *fiable* pour une moyenne de k kilomètres, c'est-à-dire lorsque les assurés devraient commencer à percevoir une différence au niveau du prix de leur assurance. Est-ce que le statisticien peut procéder au recueil des données auprès des 400 personnes ou bien son test d'hypothèses n'est-il pas sûr ?

Exercice 33 – Sécurité sociale

On souhaite comparer l'efficacité de deux médicaments censés combattre la même maladie. Le premier médicament est générique et son prix est réduit, le deuxième est un médicament de marque de prix beaucoup plus élevé. La Sécurité Sociale a effectué une enquête sur les guérisons obtenues grâce à chacun de ces médicaments. Le nombre de guérisons et de non guérisons (sur les 250 personnes testées) sont consignés dans le tableau ci-dessous :

	générique	marque
guérisons	44	156
non guérisons	6	44

À un niveau de risque de 5%, peut-on estimer que le taux de guérison dépend du médicament (générique ou marque) ? Justifiez votre réponse mathématiquement.

Exercice 34 – À l'attaque !

L'autorité maritime d'un certain pays souhaite évaluer un logiciel qui analyse les données de navigation de vaisseaux (satellitaires, enregistrées dans les ports, etc.) pour détecter des attaques de piraterie. D'après son constructeur, une attaque est détectée dans 90% des cas. Malheureusement, il y a aussi 20% de chances que le logiciel identifie une attaque lorsqu'il n'y en a pas. Pour l'évaluation, l'autorité se concentre sur un trajet en particulier qui, dans la dernière année, a enregistré 200 attaques des pirates sur 4000 passages de vaisseaux. On note L la variable aléatoire pour la prédiction du logiciel et A pour l'attaque.

Q 34.1 Probabilité à posteriori Le logiciel signale une attaque en ce moment. En utilisant le nombre d'attaques observé dans la dernière année pour estimer la probabilité a priori, calculer la probabilité qu'il y ait effectivement une attaque. Écrire la formule correspondant à cette probabilité, puis calculer sa valeur.

Q 34.2 Information complémentaire L'autorité a à disposition des outils supplémentaires : depuis quelques années elle a mis en place un réseau d'observateurs permanents (choisi parmi des pécheurs et d'autres navires civils), dotés d'un appareil spécial pour notifier en temps réels l'occurrence de mouvements suspects. Selon une statistique interne, ce réseau a permis de reconnaitre 40% des attaques en avance. Malheureusement, cette méthode donne aussi 30% de faux positifs (mouvements suspects sans attaque). En supposant les deux notifications (logiciel et réseaux d'observateurs) indépendantes, calculer la probabilité qu'il y ait une attaque lorsque les deux notifications sont actives (utiliser R pour la variable aléatoire de prédiction venant du réseau).

Q 34.3 Recalibration ? Après une recherche qualitative, nous nous sommes aperçus que la statistique des attaques utilisée pour estimer la valeur des probabilités a priori était non optimale. En effet, les pirates n'attaquent pas tous les navires, mais principalement ceux qui ont un certain tonnage.
Supposons que les navires se distribuent en 3 classes (I, II, III). D'après les statistiques historiques, la probabilité d'attaque en fonction de la classe est la suivante : $P(\text{I}) = 0.1$, $P(\text{II}) = 0.5$ $P(\text{III}) = 0.4$. D'un autre coté, les données détaillées de l'année passée donne :

Classe de navire	I	II	III
Nombre d'attaques	40	120	40

Faire un test d'ajustement avec un niveau de confiance de 90% pour déterminer si les observations correspondent toujours à la distribution historique sur les classes de navires.

Exercice 35 – Significativité d'un résultat d'expérience

Rappel/complément de cours :
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi X, de moyenne μ. Lorsque la variance de D est inconnue, il faut passer du TCL au test de Student, qui dit que la variable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}, \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. σ_d correspond à l'estimation non biaisée de l'écart type de X.

Face à des données à classer, nous avons mis en place deux modèles A et B. Pour l'évaluation, nous avons opté pour la validation croisée en 10 parties et obtenu les taux de bonne classification suivants :

A	20.4	22.8	21.9	19.6	21.3	22.0	19.8	20.8	20.4	21.7
B	20.7	22.8	22.1	19.7	21.5	22.4	20.0	21.1	20.4	21.8

Q 35.1 Comparer les deux classifieurs instinctivement.

Q 35.2 Nous allons maintenant nous intéresser à l'hypothèse nulle correspondant au fait que les deux classifieurs ont les même performances. Si cette hypothèse est rejetée, nous conclurons que le second classifieur est bien supérieur, mais dans le cas contraire, aucune conclusion ne sera possible. Nous introduisons les variables D_i qui prennent les valeurs $d_1 = a_1 - b_1, \ldots$.

Q 35.2.1 Pour utiliser le théorème ci-dessus, nous allons faire une hypothèse manifestement fausse, laquelle ?

Q 35.2.2 Trouver les valeurs de μ et σ_x, appliquer le théorème ci-dessus –malgré tout– et calculer si le modèle B est significativement supérieur au modèle A avec 95% de confiance. Avec 99% de confiance.

Semaine 6 - Chaînes de Markov

On considère des chaînes de Markov permettant de modéliser la météo. Une chaîne permet de modéliser la météo dans une ville. Un état d'une chaîne correspond au climat observé pour un jour donné (Soleil, Nuage ou Pluie) dans la ville. Chaque jour, on change d'état suivant la loi de probabilités de transitions associée à l'état courant. On prendra comme convention que l'état 1 correspond à Soleil, l'état 2 à Nuage, l'état 3 à Pluie.

Exercice 36 – Probabilité d'une séquence, génération aléatoire d'une séquence

On suppose que les paramètres de la chaîne de Markov pour Paris sont les suivants (dans l'ordre les observations sont S N P) :

- probabilités initiales : $\Pi = [0.24, 0.36, 0.40]$
- probabilités de transitions : $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$

Q 36.1 Calculez la probabilité de la séquence d'états suivante : N, N, S, N, N, P, P, N, P, S, S, P. Généralisez au cas quelconque d'une séquence.

Q 36.2 On souhaite utiliser la chaîne de Markov précédente pour générer aléatoirement une séquence de climats journaliers.
Pour cela, on utilise la procédure suivante : on considère une distribution de probabilités sur un ensemble fini d'événements $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ possibles. Cette distribution est donc définie par des probabilités associées aux événements $p(e_1), \ldots p(e_N)$, avec $\sum p(e_i) = 1$.

Pour tirer un événement au hasard « informatiquement » avec une distribution de ce type (tirage type *roulette*), on découpe le segment [0,1] en autant de tranches qu'il y a d'événements, la tranche correspondant à e_i ayant une largeur égale à $p(e_i)$. Ensuite, on utilise un générateur aléatoire uniforme entre 0 et 1, et on regarde dans quelle tranche on tombe. L'événement tiré aléatoirement est celui correspondant à la tranche dans laquelle on « tombe ». On utilise cette procédure pour tirer au hasard le premier état, puis la transition à partir de cet état, etc ... Les nombres donnés par le générateur aléatoire (entre 0 et 1) sont : $0.31, 0.63, 0.92, 0.87, 0.01, 0.35, 0.01, 0.43, 0.55$. Quelle est la séquence de climats journaliers générée avec ces tirages ?

Q 36.3 Quelle est la longueur moyenne d'une séquence consécutive de nuage avec ce modèle ?
Indice : l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$.

Exercice 37 – Météo

On dispose d'une chaîne de Markov correspondant au climat de Paris dont les paramètres sont les suivants :

$$\Pi = [0.24, 0.36, 0.40]$$
$$\textsc{Paris} : \quad A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Q 37.1 Donner le graphe associé à cette chaîne de Markov.

Q 37.2 Cette chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ? Quelle est la nature des différents états de la CM ?

Q 37.3 Le carré de A vaut : $\begin{bmatrix} 0,24 & 0,36 & 0,4 \\ 0,24 & x & 0,39 \\ 0,23 & 0,35 & 0,42 \end{bmatrix}$

Q 37.3.1 Que représente A^2 concrètement ? Donner le coefficient x manquant.

Q 37.4 Déterminer les probabilités stationnaires des trois états possibles. Quelles sont, à (très) long terme, les proportions de jours ensoleillés, nuageux et pluvieux ?

Q 37.5 Quelle est la probabilité d'avoir un état du temps différent au bout de deux jours ?

Q 37.6 À Marseille, s'il fait soleil, alors le temps reste inchangé dans 50% des cas le lendemain. Lorsqu'il ne pleut pas, il ne pleut le lendemain que dans 20% des cas. Lorsque le temps est nuageux, le temps est ensoleillé ou nuageux le lendemain avec une égale probabilité. Lorsqu'il pleut, le temps le lendemain est ensoleillé, nuageux ou pluvieux dans respectivement 20%, 50% et 30% des cas.

Q 37.6.1 Pour Marseille, donner la matrice de transition A du modèle.

Q 37.6.2 On se place dans l'état initial *Soleil* : quelle est la distribution de probabilité des états au bout de 2 jours dans les deux villes ?

Q 37.6.3 En calculant les puissances successive de A^k, on trouve une valeur stable à partir de $k = 6$:

$$A^{k>5} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.38 & 0.22 \\ 0.40 & 0.38 & 0.22 \\ 0.40 & 0.38 & 0.22 \end{bmatrix}$$

En déduire la valeur de la distribution stationnaire μ

Q 37.6.4 On vous donne la séquence de climats journaliers suivante (S, S, P, P, N, S). En quelle ville (Paris ou Marseille) cette séquence a-t-elle été observée ?

Exercice 38 – Apprentissage des paramètres d'une chaîne de Markov

On observe une séquence d'observations et on souhaite apprendre les paramètres de la chaîne de Markov qui a généré cette séquence d'observations. Soit la séquence de symboles suivante : P N S P N S P.

Q 38.1 Déterminez les fréquences d'apparition des symboles et celle des bigrammes (suite de deux symboles). En déduire les paramètres de la chaîne de Markov permettant de modéliser le processus sous jacent qui a généré la séquence précédente. Dressez la matrice de transition d'ordre 1.

Exercice 39 – Apprentissage des paramètres d'un mélange de chaînes de Markov

L'algorithme des K-Moyennes est une version simplifiée de l'algorithme EM pour la classification de données qui fonctionne comme suit pour des données vectorielles :

1. Initialiser k prototypes (par exemple, des individus tirés dans la base ou des tirages aléatoires)
2. Tant que *critère de convergence* non atteint
   — Affecter à chaque point de la base la classe du prototype le plus proche ($\sim$E)
   — Re-estimer les prototypes comme la moyenne des points composants chaque classe ($\sim$M)

On travaille maintenant des séquences d'observations (eg 1 séquence = 1 mouvement ou 1 séquence = 1 série de lancers de dé pipé) et on souhaite apprendre les paramètres d'un mélange de chaîne de Markov (k mouvements distincts ou k dés différents) qui a généré cet ensemble de séquences d'observations.

Q 39.1 En vous inspirant de l'algorithme des K-Moyennes imaginer une stratégie pour réaliser un tel apprentissage.

Exercice 40 – Analyse du mental des joueurs de tennis

Nous proposons de modéliser un jeu de tennis comme un enchainement de points de l'un ou l'autre des joueurs. Nous voulons voir comment évolue la probabilité de remporter un point au cours d'un jeu. Proposer un modèle de Markov permettant d'analyser l'évolution des points dans un jeu.
Détailler les mécanismes d'apprentissage du modèle et expliquer la ou les approches qui vous semblent intéressantes : un modèle global, un modèle par joueur, plusieurs modèles par joueur...
Si le mental ne rentrait pas en ligne de compte, que devrait-on observer ?

Semaine 7 - Modèles de Markov Cachés

Rappel des notations utilisées pour les TD sur les Modèles de Markov Cachés

Modèle	
π_i	$p(s_1 = i\|\lambda)$
a_{ij}	$p(s_t = j\|s_{t-1} = i, \lambda)$
$b_i(x_t)$	$p(x_t\|s_t = i, \lambda)$

Forward	
$\alpha_t(i)$	$p(x_1^t, s_t = i\|\lambda)$
Backward	
$\delta_t(i)$	$\max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t\|\lambda)$
$\Psi_t(j)$	$\underset{i\in[1,\ N]}{\operatorname{argmax}}\, \delta_{t-1}(i)a_{ij}$

Exercice 41 – Modélisation avec des HMM crédit : F. Galisson

Dans un casino aux pratiques douteuses, les croupiers utilisent le plus souvent des dés normaux mais introduisent parfois des dés pipés (dont la probabilité de faire 6 vaut 0.5 et la probabilité d'obtenir un autre score vaut 0.1). La probabilité de passer à des dés pipés est de 0.2. Afin de ne pas trop attirer l'attention, la probabilité de revenir aux dés normaux est plus grande (une chance sur deux) et la probabilité d'utiliser le dé pipé initialement est de 0.1.

Q 41.1 Donner le HMM représentant ce processus.

Q 41.2 Est-il possible de modéliser ce système sans état caché ?

Q 41.3 Dans le cadre de la modélisation HMM, calculer les probabalités des évènements suivants :
- utiliser le dé non pipé puis deux fois le dé pipé,
- tirer la séquence 1, 2, 6 étant donnée la séquence d'états précédente,

Q 41.4 Un MMC est un modèle de génération aléatoire de séquences. On peut générer une séquence d'observations aléatoirement. On vous donne la séquence de nombres tirés aléatoirement avec un générateur aléatoire informatique (uniforme entre 0 et 1) : 0.1 0.55 0.45 0.3 0.95 0.23
Déterminez la séquence d'états et d'observations générées.
NB : En règle générale, on observe un phénomène (séquence de numéros de dés) mais on ne connaît pas la séquence d'états sous-jacente. C'est pourquoi on dit que ce sont des Modèles de Markov Cachés.

Q 41.5 Exploitation du modèle : calcul de la probabilité d'une séquence d'observations (méthode α, forward). Calculer la probabilité de la séquence 2, 6, 6, 6, 3.

Q 41.5.1 Définition : Rappeler l'interprétation des α
- *Définition* : $\alpha_t(j) = p(x_1^t, s_t = j|\lambda)$
  Rappeler l'interprétation des α

- *Initialisation* :
$$\alpha_{t=1}(j) = p(x_1^1, s_1 = j|\lambda) = \pi_j b_j(x_1), \quad b_j \text{ correspond au modèle d'émission dans l'état } j$$

- *Recursion* – Exprimer $\alpha_t(j)$ en fonction des $\alpha_{t-1}(i)$ et des paramètres du modèle.
  - Arriver de n'importe quel état en $t-1$
  - Faire la transition vers j
  - Observer x_t
- *Terminaison* :
  Exprimer $p(x_1^T|\lambda)$ en fonction des α_T

Q 41.6 Comment évolue les α_t en fonction de t ? Etudier les variations de $\sum_i \alpha_t(i)$ entre 2 pas de temps. Qu'en déduire sur l'évaluation du tableau des α ?

Q 41.7 Pourquoi le passage au log n'est pas une solution ?

Q 41.8 Afin de résoudre le problème des approximations numériques, définissons
- $\alpha_t^\dagger(j) = p(x_t, s_t = j|x_1^{t-1}, \lambda)$
- $\Omega_t = p(x_t|x_1^{t-1}, \lambda)$

Exprimez Ω en fonction de $\alpha^\dagger$, puis la récursion en fonction des $\alpha^\dagger$ et Ω. Montrez alors comment calculer $p(x_1^T)$ en évitant les problèmes d'approximation numérique.

Q 41.9 Exploitation du modèle : décodage.
On cherche maintenant à calculer la séquence d'états la plus probable pour la séquence d'observations :

2 6 6 6 3

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t|\lambda)$$

1. Initialisation
$$\begin{aligned} \delta_1(i) &= \pi_i b_i(x_1) \\ \Psi_1(i) &= 0 \end{aligned}$$

2. Récursion
$$\begin{aligned} \delta_t(j) &= \left[\max_i \delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(x_t) \\ \Psi_t(j) &= \operatorname*{Argmax}_{i \in [1,\ N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij} \end{aligned}$$

3. Terminaison
$$S^\star = \max_i \delta_T(i)$$

4. Chemin

$$\begin{aligned} s_T^\star &= \arg\max_i \delta_T(i) \\ s_t^\star &= \Psi_{t+1}(s_{t+1}^\star) \end{aligned}$$

Q 41.9.1 Est-il possible de passer cet algorithme au log facilement ?

Q 41.9.2 On suppose que Δ est une matrice $N \times T$ où chaque ligne correspond à un état et chaque colonne à un pas de temps avec

$$\Delta_{it} = \log \delta_t(i) = \log \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

On suppose que l'on a calculé les valeurs suivantes :

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1.9 & -3.9 & -5.9 & -7.9 & -9.5 \\ -4.6 & -4.2 & -5.6 & -7 & -10 \end{pmatrix}, \log A = \begin{pmatrix} -0.2 & -1.6 \\ -0.7 & -0.7 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & 2 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Compléter la matrice Ψ et donner la séquence d'états la plus probable

Q 41.10 Maximisation de la vraisemblance (connaissant les états). Etant donné un ensemble de séquences d'observations et l'ensemble associé des séquences d'états, proposer un algorithme de maximisation de la vraisemblance de $\lambda = \{\Pi, A, B\}$.

Q 41.11 Apprentissage (Baum-Welch simplifié). Vous disposez maintenant de deux méthodes :
- — Décodage (estimation des états et de la probabilité d'une séquence d'observation)
- — Maximisation de la vraisemblance connaissant les états

Proposer un algorithme simple (type k-means, avec affectation dure des états) pour apprendre itérativement un modèle de Markov caché. Comment définir un critère d'arrêt des itérations ?

Exercice 42 – Modélisation de séquences d'observations

On ne considère que des observations discrètes, i.e. appartenant à un ensemble fini Σ d'observations possibles. On considère un alphabet à 3 symboles $\Sigma = \{a, b, c\}$ et une base de données d'apprentissage constituée de 4 séquences $X = \{aaba, aabc, aaca, aacb\}$.

Q 42.1 Dessinez un modèle de Markov caché (en explicitant les probabilités de transition et les lois de probabilités d'émission) qui maximise la vraisemblance de X. Ce modèle est-il unique ? Que vaut la vraisemblance de chacune des séquences calculée par votre modèle ? Que vaut la vraisemblance de X calculée par votre modèle ?

Q 42.2 De manière générale, et en anticipant le prochain cours, donner des indications succinctes sur la façon de construire un MMC maximisant la vraisemblance sur un ensemble de séquences X quelconque.

Q 42.3 Expressivités et limites des MMC
On considère maintenant les ensembles de séquences $E_1 = \{a^*b\}$, $E_2 = \{(ab)^*\}$, $E_3 = \{(ab^*)^*\}$, $E_4 = \{a^n b a^n, n \in \mathbb{N}\}$, où x^* représente l'ensemble des séquences constituées d'un nombre quelconque de répétitions de x, et x^n représente la séquence constituée de n répétitions de x.
On dit qu'un MMC accepte une séquence s particulière si la probabilité de s calculée par le MMC est non nulle. Peut-on construire un modèle de Markov (chaîne de Markov ou MMC) acceptant l'ensemble de séquences E_1 ? Si la réponse est oui, explicitez le MMC, sinon expliquez succinctement pourquoi.

Q 42.4 Idem pour E_2 ? Idem pour E_3 ? Idem pour E_4 ?

Exercice 43 – Synthèse sur les MMC

Q 43.1 Formalisation de l'apprentissage d'un MMC.
Généralement on apprend un MMC à partir d'une base de données d'apprentissage non étiquetée, c'est-à-dire constituée d'un ensemble de séquences d'observations, mais sans les séquences d'états associées. On commence par se placer dans ce cadre.

Q 43.1.1 On suppose que l'on dispose d'une base d'apprentissage d'une seule séquence d'observations $X = \{\mathbf{x}^{(1)}\}$. Quelle propriété satisfait le modèle λ qui maximise la vraisemblance des données d'apprentissage ? Quel algorithme utiliser pour faire l'apprentissage ?

Q 43.1.2 On suppose que l'on dispose d'une base d'apprentissage de N séquences $X = \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} ..., \mathbf{x}^{(N)}\}$. Quelle propriété satisfait le modèle λ qui maximise la vraisemblance des données d'apprentissage ?

Q 43.1.3 On considère maintenant le cas d'une base de données d'apprentissage étiquetée, c'est-à-dire constituée d'un ensemble de couples (séquence d'observations, séquence d'états). On suppose que l'on dispose d'une base d'apprentissage étiquetée de N séquences $XS = \{(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{s}^{(1)}), (\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{s}^{(2)}), ..., (\mathbf{x}^{(N)}, \mathbf{s}^{(N)})\}$. Quelle propriété satisfait le modèle λ qui maximise la vraisemblance des données d'apprentissage ?

Q 43.2 Difficulté de l'apprentissage d'un MMC.
On considère le cas d'une base de données d'apprentissage non étiquetée. On vous fournit la séquence d'observations $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 1, 3, 2)$ produite par un modèle Markovien, mais on ne vous dit pas par quel type de modèle (nombre d'états etc) cette séquence a été produite, ni la séquence d'états correspondante.

Q 43.2.1 Quel modèle Markovien maximise la vraisemblance de la séquence $\mathbf{x}$ (nombre d'états, lois de probabilité de transitions et d'émission) ? Quel est son pouvoir de généralisation ?

Q 43.2.2 En supposant que la séquence a été générée par un modèle MMC à 1 état, quels sont les paramètres de ce modèle ?

Q 43.2.3 On suppose que cette séquence a été générée par un MMC à deux états. Proposez des paramètres pour ce modèle. Pouvez-vous prouver que votre modèle est localement optimal ? Vous commencerez par définir ce que signifie localement optimal.

Q 43.3 Apprentissage en présence de données étiquetées.
On change de cadre maintenant et on suppose que l'on vous fournit comme corpus d'apprentissage des données étiquetées, c'est-à-dire un ensemble de couples (séquence d'observations, séquence d'états). On considère une base d'apprentissage constituée d'une séquence $XS = \{(\mathbf{x} = (1, 2, 1, 1, 3, 2), \mathbf{s} = (1, 1, 2, 2, 1, 2))\}$ et on vous demande le MMC qui maximise la vraisemblance de cette base d'apprentissage.

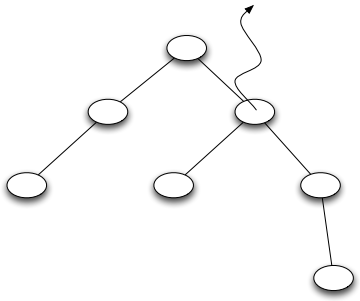
Q 43.3.1 Quel est le nombre d'états du MMC ?

Q 43.3.2 Quels sont les paramètres du modèle optimal ? Pouvez-vous démontrer son optimalité ?
On généralise maintenant en considérant une base d'apprentissage étiquetée $XS = \{(\mathbf{x}^1, \mathbf{s}^1), \ldots, (\mathbf{x}^N, \mathbf{s}^N)\}$.

Q 43.3.3 Comment trouve-t-on le nombre d'états du modèle optimal ?

Q 43.4 Dans les stratégies d'apprentissage des MMC, quelle est la différence entre l'algorithme Baum-Welch simplifié et la version complète ? Sur quel variable intermédiaire repose la version complète ?

Exercice 44 – Viterbi dans les arbres binaires



Dans cet exercice, nous allons ajouter une dimension à l'algorithme de Viterbi pour l'appliquer dans les arbres. L'idée est de caractériser une structure arborescente comme une page HTML, un document XML. En analyse linguistique, les phrases sont également transformées en arbres. L'idée est donc de concevoir un algorithme de type HMM capable de modéliser des états cachés au niveaux des noeuds de l'arbre, les observations étant des émissions depuis ces états. Les applications associées peuvent être la détection et le blocage de publicité dans les pages web, la classification des noeuds dans l'analyse d'une phrase. Ce type d'approche est également utilisé en image : en découpant un image en région puis en construisant un arbre entre ces régions. Dans tous ces exemples, le but est de caractériser les enchainements de noeuds (ie les transitions du processus markovien) pour améliorer la classification des noeuds.
Cependant l'approche *forward-backward* de Viterbi n'est pas applicable directement. En particulier, le backtracking dans le tableau ψ pose problème avec les embranchements [2].
Nous allons donc généraliser le forward et le backward (Viterbi) aux arbres en utilisant les notations suivantes :

- n est un nœud de l'arbre, son état est s_n et x_n est l'observation
- Ses enfants sont $\underline{n}$, leurs états sont $s_{\underline{n}} = \{s_c\}_{c\in\underline{n}}$ et les observations associées $x_{\underline{n}} = \{x_c\}_{c\in\underline{n}}$
- Ses descendants sont $\underline{\underline{n}}$, leurs états sont $s_{\underline{\underline{n}}}$ et les observations associées $x_{\underline{\underline{n}}}$
- r est la racine de l'arbre

Les probabilités de transition, d'état initial et d'observation sont les mêmes que pour les MMC : l'état d'un enfant ne dépend que de celui du parent et peut donc être décrit par la même matrice de transition A.

Q 44.1 Forward
Calculer la probabilité $\alpha'_n(i) = p(x_n, x_{\underline{\underline{n}}}|s_n = i)$ de l'ensemble des observations $x_{\underline{\underline{n}}}$ des descendants du nœud n ainsi que lui même, et en déduire la probabilité $p(x_{\underline{\underline{r}}})$ de l'ensemble des observations. Comparez avec les résultats obtenus pour le HMM. Dire pourquoi cela pose problème numériquement et proposer une solution.

Q 44.2 Viterbi dans les arbres binaires.
Calculer les états les plus probables $s^\star_{\underline{\underline{r}}}$ sachant les observations. Comparez à ce que vous aviez trouvé dans le cas du HMM.

Semaine 8 - Regression

Exercice 45 – Régression simple et indicateurs statistiques

Une entreprise veut analyser ses coûts de production de son produit principal et en particulier les décomposer en coûts fixes et coûts variables et vérifier si ceux-ci sont, ou non, proportionnels aux quantités produites.

Elle postule donc un modèle linéaire $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ où : X la quantité produite (en milliers d'unités) ; Y le coût de production total (en milliers d'euros) ; β est le coût marginal de production (= coût nécessaire pour produire une unité supplémentaire) ; α représente les coûts fixes ; et ε est le résidu aléatoire.

Il dispose de données sur les $n = 10$ derniers mois :

$mois_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	100	125	175	200	500	300	250	400	475	425
y_i	2 000	2 500	2 500	3 000	7 500	4 500	4 000	5 000	6 500	6 000

2. Rappel : dans l'algorithme sur les séquences, $\psi_t(i)$ contient la valeur de l'état $t-1$ si on était en i à l'instant t. Ce n'est pas applicable dans les arbres où il y a potentiellement plusieurs instants t pour un $t-1$.

Q 45.1 Calculer les moyennes empiriques $\bar{x}$ et $\bar{y}$, les écarts-types empiriques s_x et s_y, la covariance empirique $cov(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire r.

Q 45.2 Retrouver les expressions de α et β en calculant l'espérance de Y puis la covariance de X, Y.
Estimer a et b en fonction de ces expressions. Exprimer b en fonction de r.

Exercice 46 – Régression linéaire

Q 46.1 Régression linéaire 1D
Nous disposons d'un ensemble de N données $\{(x_i, y_i)_{i=1,...,N}\}$ à partir duquel nous souhaitons apprendre une droite de régression de Y sur X. Notre estimateur aura donc la forme suivante : $\hat{y}_i = f(x_i) = ax_i + b$. Notre but est de trouver les meilleurs coefficients a et b.
Pour une droite donnée l'erreur de régression cumulée au sens des moindres carrés est déterminée par $\sum_i e_i^2$ où $e_i = f(x_i) - y_i$, et $f(x_i)$ est l'ordonnée du point d'abscisse x_i.

Notons X la matrice $N \times 2$ des entrées avec ajout d'une colonne de termes constants : $X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \\ x_N & 1 \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$. Notons $D = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ le vecteur des paramètres de la droite de régression.

Q 46.1.1 Montrer que l'ensemble des estimations pour les entrées X peut être calculé matriciellement en utilisant la formule suivante : $\hat{Y} = XD$ (vérifier les dimensions et détailler le calcul d'une ligne).

Q 46.1.2 Montrer que l'erreur cumulée est calculée matriciellement en utilisant la formule suivante : $E = (XD - Y)^t(XD - Y)$
NB : dans un premier temps, détailler les dimensions de chaque matrice et calculer sur la dimension de E. Développer ensuite la formulation A^tA à l'aide d'une somme pour revenir à la formulation classique de l'erreur.

Q 46.1.3 Une fois le critère d'erreur E établi, quel problème d'optimisation devons nous résoudre pour trouver la droite de régression optimale ?
NB : nous sommes dans un cadre convexe : la fonction E de paramètres D admet un seul optimum global qui est un minimum. Rappeler la manière de trouver un optimum.

Q 46.1.4 Montrer que la dérivée de l'erreur, par rapport à D, s'écrit sous la forme matricielle suivante : $\nabla_D E = 2X^t(XD - Y)$
NB : détailler le calcul de chaque dérivée partielle et refactoriser pour obtenir la forme matricielle.

Q 46.1.5 Calculer les paramètres optimaux en résolvant analytiquement le problème sous forme matricielle.

Q 46.1.6 Simplifions temporairement le problème en considérant un biais nul. Quelle est la forme de la fonction $E(a)$? Tracer sommairement $E(a)$. Quelles sont les propriétés de $E(a)$ (combien de minimum...) ?

Q 46.2 Algorithme itératif pour la régression linéaire
Dans le cas général, on cherche à optimiser une fonction continue dérivable $C(W)$ d'un vecteur de paramètres W. Pour résoudre un tel problème, on peut utiliser un algorithme de gradient comme celui proposé ci-dessous :

Q 46.2.1 Quel est l'intérêt d'utiliser un algorithme itératif (dont la solution est une approximation du point optimal) alors que nous disposons d'une solution analytique ?

Q 46.2.2 Adapter l'algorithme de descente de gradient pour la régression linéaire.

Q 46.2.3 L'algorithme est initialisé avec les paramètres suivants : $D^0 = (b^0, a^0)$. Si a^0 est plus grand que le $a^\star$ optimal, le gradient $\frac{\partial E}{\partial a}$ est-il positif ou négatif ? Idem si a^0 est plus petit que le a optimal.
Ces résultats vous semblent-ils cohérents avec l'algorithme de descente de gradient ?

Initialisation des W;
$t = 1$;
repeat
  $W_{t+1} = W_t - \varepsilon \frac{\partial C}{\partial W}$;
  $t = t + 1$;
until *($C(W)$ n'évolue plus)*;

Algorithm 1: Descente de gradient

Q 46.2.4 Même question avec b^0.

Q 46.2.5 Imaginez ce qui se passe si l'on optimise uniquement par rapport à a, en supposant que la valeur optimale de b est connue, pour différentes valeurs d'ε (valeur très grande, valeur très petite) : l'algorithme précédent peut-il diverger ou converge-t-il toujours vers la bonne solution ?

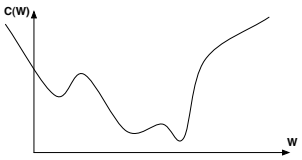


FIGURE 1 – Exemple de fonction coût $C(W)$ non-convexe

Q 46.2.6 Nous avons utilisé jusqu'ici des estimateurs linéaires. Donner un exemple d'estimateur non linéaire pour la régression 1D. Dans le cas non-linéaire, la fonction $C(W)$ est parfois non convexe (cf figure 1).

Q 46.2.7 Que pensez-vous de l'algorithme de gradient discuté précédemment dans ce cas ? L'algorithme de gradient converge-t-il toujours ? vers la solution optimale ?

Exercice 47 (20 pts) – Regression(s) [annale 2020]

Soit un ensemble de N couples de valeurs tirées dans $\mathbb{R}^2$ de manière i.i.d. : $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,N}$. L'enjeu de la régression est de prédire Y à partir de X.
Par rapport au nuage de points considéré (Fig. ci-contre), un statisticien vous recommande un modèle quadratique simple (représenté en ligne continue sur la figure). L'hypothèse est alors la suivante :

$$Y = \alpha X^2 + \beta + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Comme dans le cours, l'idée est que les données suivent une distribution Gaussienne autour de $\alpha X^2 + \beta$. Ainsi, la vraisemblance d'une observation est donnée par :

$$p(Y|X, \alpha, \beta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y - (\alpha X^2 + \beta)\right)^2\right)$$

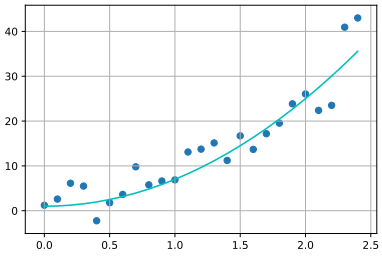


Fig. Données mesurées et modèle quadratique appris sur ces données.

Q 47.1 Dans l'optique d'estimer les paramètres du modèle quadratique, donner la formulation de la log-vraisemblance de cet échantillon.

Q 47.2 Montrer que l'optimisation de la vraisemblance par rapport à α et β mène à un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Q 47.3 Ce système s'écrit sous la forme matricielle : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, soit : $A \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = B$
Donner les valeurs de a, b, c, d, e, f.

Q 47.4 Donner le code de la fonction `maxvraisemblance` qui prend en argument les vecteurs `x` et `y` contenant les données et qui retourne α et β.
Note : on ne s'occupe pas des imports et la fonction qui résout le système est `numpy.linalg.solve(A, B)`

Q 47.5 Une fois les valeurs de α et β trouvées, estimer le niveau de bruit σ dans les données en annulant la dérivée de la vraisemblance par rapport à σ. Sur quelle formule retombez-vous ?

Un expert du domaine vous explique que ces données sont en réalité issues de deux systèmes opérant en parallèle : l'un des systèmes est linéaire $Y = \alpha_1 X + \beta_1 + \varepsilon$ et l'autre du troisième degré $Y = \alpha_2 X^3 + \beta_2 + \varepsilon$
L'expert ajoute que les deux systèmes sont équi-probables pour la génération des observations.
Note : les ε suivent toujours une loi normale et le niveau de bruit est le même pour les deux modèles.

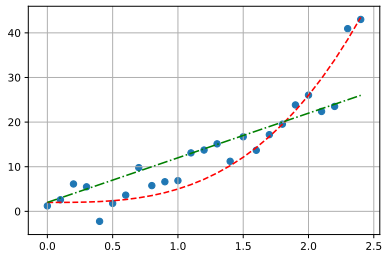


Fig. Données mesurées et mixture de modèles (linéaire & polynome d'ordre 3) appris sur ces données.

Q 47.6 Quelle approche peut vous permettre d'estimer tous les paramètres des deux modèles ? Décrire en quelques lignes les principales étapes et les pré-requis pour cette approche.

Q 47.7 Soit des paramètres initiaux $\theta_1 = \{\alpha_1^0, \beta_1^0\}, \theta_2 = \{\alpha_2^0, \beta_2^0\}$, donner l'expression des $Q_i^0(\theta)$. Rappeler la taille de cette matrice.

Q 47.8 On rappelle que la log-vraisemblance s'écrit ensuite : $\log \mathcal{L} = \sum_i \sum_j Q_i^0(\theta_j) \log \left(\frac{p(y_i, \theta_j)}{Q_i^0(\theta_j)} \right)$

Dériver la log-vraisemblance prédéfinie par rapport à α_1 à Q^0 constants et simplifier l'équation. Comment interpréter le résultat ?

Q 47.9 Pour l'implémentation, on envisage une simplification de l'approche en affectant en dur chaque point au modèle le plus probable. Donner le code de la fonction `maxvraisemblance_2` qui prend en argument les `x` et `y` contenant les données et qui retourne α_1, α_2, β_1 et β_2. L'ensemble de la procédure sera codé dans la fonction.
Note : pour simplifier, on considèrera arbitrairement $\sigma = 1$ [ça ne change rien pour l'affectation des points aux modèles].
Note : il est nécessaire de calculer les deux systèmes d'équations linéaires correspondant aux deux modèles... Mais leur forme est quasi identique à celle de la question Q47.3 et on ne sera pas très sévère sur cet aspect.

Q 47.10 Ces données jouets ont été tirées aléatoirement... Néanmoins, imaginez un problème réel qui airait pu mener à ce tirage : expliquer simplement à quoi correspondent les axes des absisses et ordonnées dans ce cas.

Semaine 9 - Méthodes discriminantes

Exercice 48 – Approche discriminante : régression logistique

Jusqu'ici, nous avons toujours travaillé sur le critère de la vraisemblance selon le schéma :

1. Modélisation probabiliste d'une situation = 1 classe de données (chiffres manuscrits, mouvements du stylo sur des lettres...), paramètre θ
2. Optimisation des θ = trouver $\theta^\star$ maximisant la vraisemblance

Pourtant, ce type d'approche présente une faiblesse évidente dans les problèmes de classification : les classes sont apprises de manière isolées et on ne peut pas se focaliser sur l'information discriminante (ce qui distingue une classe d'une autre). Une autre classe de modèles permet de palier cette faiblesse : sur les données multi-variées, il s'agit de la régression logistique (ou classifieur de maximum d'entropie).

Nous notons les observations $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ et les étiquettes binaires associées $y_i \in \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Nous faisons l'hypothèse que les couples $(\mathbf{x}_i, y_i)$ sont tirés de manière i.i.d. et suivent une loi inconnue $P(X, Y)$.

Q 48.1 Formulation discriminante : afin de se focaliser sur ce qui distingue une classe de données d'une autre, nous modélisons directement $p(Y = 1|X = \mathbf{x})$.

Q 48.1.1 Est-il possible d'utiliser la fonction paramétrique f définie ci-dessous pour modéliser cette probabilité a posteriori ?

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{x}\mathbf{w} + b))}, \quad \mathbf{x},\ \mathbf{w} \text{ respectivement en ligne et colonne}$$

Q 48.1.2 Identifier les paramètres à apprendre et leurs dimensions respectives.

Q 48.1.3 En déduire une règle d'affectation à une classe pour un exemple $\mathbf{x}$.

Q 48.1.4 Quelle est la forme de la frontière de séparation des classes ?

Q 48.1.5 Par exemple, dans le cas où $d = 2$, $\mathbf{w} = [-2\ 1]$ et $b = 1$, représenter graphiquement la frontière de décision.

Q 48.2 Soit un ensemble d'apprentissage étiqueté $S = (\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_N, y_N)$. Après avoir identifié la loi suivie par Y, exprimer la vraisemblance jointe d'un couple $(\mathbf{x}_i, y_i)$ en fonction de $p(X = \mathbf{x}_i)$, $f(\mathbf{x}_i)$ et y_i.

Q 48.3 Rappeler l'hypothèse faite sur le tirage des couples et exprimer la vraisemblance jointe de l'ensemble de l'échantillon.
Passer au log. et simplifier la formulation du maximum de vraisemblance en expliquant comment supprimer le terme en $P(X = \mathbf{x}_i)$.

Q 48.4 Donner l'expression de $\frac{\partial L_{\log}}{\partial w_j}$, pour $j = 1, \ldots, d$ ainsi que l'expression de $\frac{\partial L}{\partial b}$.

Q 48.5 Le gradient de $L_{\log}$ peut-il s'annuler directement ? Proposer une équation de mise à jour (type gradient) permettant de produire une suite de paramètres menant à un maximum de vraisemblance.

Exercice 49 – Perceptron linéaire à seuil

Q 49.1 Un classifieur à deux classes, $C1$,$C2$, opère sur des objets de dimension $d = 2 : X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \mathbf{x}_i & \\ x_{N1} & x_{N2} \end{bmatrix}$,
avec $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ et utilise la fonction discriminante $g : \mathbf{x}_i \mapsto g(\mathbf{x}_i) = w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} - \theta$,
$\mathbf{x}_i$ est mis dans la classe C_1 si $g(\mathbf{x}_i) > 0$ et dans la classe C_2 si $g(\mathbf{x}_i) < 0$.

1. Quelle est l'équation de la frontière de décision ?
2. Il existe une bijection entre les points $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$. Construire un classifieur g' de paramètres $w = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ pour traiter les points de $\mathbb{R}^3$: $g'(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'w$. Quelle valeur faut-il donner à w pour que ce classifeur soit équivalent à celui proposé ci-dessus ?
3. Les objets attribués à la classe C_1 sont codés $+1$ et les objets attribués à la classe C_2, -1 ; Par défaut, la fonction g pré-définie donne un score dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction F faut-il utiliser pour que la composée $F \circ g$ propose une sortie dans $\{+1, -1\}$?

Q 49.2 On veut utiliser le perceptron précédent pour implémenter le ET logique à deux arguments ; pour cela : on identifie $Vrai : +1$ et $Faux : -1$; une entrée est un couple $(x1, x2) \in \{-1, +1\}^2$ et une sortie un élément de $\{-1, +1\}$.

1. Que vaut ici $\mathcal{X}$? Montrer qu'un perceptron implémente le ET logique si et seulement si $w = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ vérifie un certain système d'inéquations.
2. Trouver une solution du système précédent. Est-elle unique ? Démontrer votre résultat à l'aide d'un schéma en 2D. Si on n'utilise plus la fonction de seuillage, une solution existe-t-elle ? Est elle unique ?
3. Mêmes questions pour le OU logique.
4. Montrer que le OU Exclusif ne peut pas être implémenté par un perceptron linéaire à seuil.

Exercice 50 – Apprentissage du perceptron

On dispose d'une base de N exemples (observations), $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,N}$, dont les classes sont connues ; la classe de $\mathbf{x}_i$ est notée y_i. On utilise l'algorithme du perceptron (cf ci-dessous) pour apprendre automatiquement la valeur des paramètres, c-à-d du vecteur w :

Entrées : $\{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}$, $\varepsilon > 0$;
Initialisation de w : $w(1)$;
$t = 1$;
repeat
  Tirer aléatoirement un exemple : $\mathbf{x}_i$;
  if $y_i \mathbf{x}_i w(t) > 0$ **then**
    $w(t+1) \leftarrow w(t)$
  end
  else
    $w(t+1) \leftarrow w(t) + \varepsilon y_i \mathbf{x}_i^T$
  end
  $t = t + 1$;
until *(critère d'arrêt satisfait)*;

Algorithm 2: Algorithme d'apprentissage du perceptron

Le critère d'arrêt peut être, par exemple qu'il n'y a pas eu d'erreur de classification pendant un certain nombre d'itérations successives.

Q 50.1 A quoi correspond la condition $y_i \times \mathbf{x}_i w(t) > 0$? Expliquez le principe de l'algorithme.

Q 50.2 On suppose qu'il existe $w^\star$ classant parfaitement tous les exemples (séparabilité linéaire). On considère une itération de l'algorithme où l'exemple courant, $x[= x(t)]$, vérifie $x \in C_1$ mais est mal classé par le vecteur $w[= w(t)]$ courant, qui est alors modifié pour devenir $w^\dagger[= w(t+1)]$.

1. Vérifier qu'alors : $w^\star \cdot \mathbf{x} > 0; w \cdot \mathbf{x} < 0; w^\dagger = w + \varepsilon \mathbf{x}$
2. Montrer que : $\|w^\dagger - w^\star\|^2 \leq \|w - w^\star\|^2 + \varepsilon[\varepsilon\|\mathbf{x}\|^2 - 2w^\star \cdot \mathbf{x}]$
3. On pose $m = \min_{\mathbf{x}_i \in C_1}(w^\star \cdot \mathbf{x}_i)$ et $M = \max_{\mathbf{x}_i \in C_1} \|\mathbf{x}_i\|^2$. Montrer qu'en prenant $\varepsilon = \frac{m}{M}$, on obtient l'inégalité $\|w^\dagger - w^\star\|^2 \leq \|w - w^\star\|^2 - \frac{m^2}{M}$.
4. Admettant que l'inégalité précédente est aussi valable dans le cas symétrique ($\mathbf{x} \in C_2$ et mal classé), montrer qu'il y a un nombre fini d'itérations où w est modifié ; en déduire que l'algorithme peut être arrêté au bout d'un nombre fini d'itérations.

Exercice 51 – Évaluation(s) de l'erreur

Notations : Nous disposons d'un ensemble $\mathcal{D}$ de N données étiquetées (en dimension d) : $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1,\dots,N}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$. On se place dans le cadre d'un problème de classification bi-classe : $y_i \in \{-1, 1\}$.

On cherche ensuite à contruire un modèle f capable d'estimer y_i à partir de $\mathbf{x}_i$: $\begin{array}{rccc} & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ f: & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}) \end{array}$

Q 51.1 Exprimer la fonction coût au sens des moindres carrés sur ce problème d'apprentissage.

Q 51.2 En faisant appel à vos connaissances sur le perceptron, proposer une nouvelle fonction coût ne pénalisant que les points mals classés.

Q 51.3 En imaginant une fonction f de complexité infinie (capable de modéliser n'importe quelle frontière de décision), tracer à la main la frontière de décision optimale au sens des coûts définis précédemment pour le deux problèmes jouets de la figure 2.

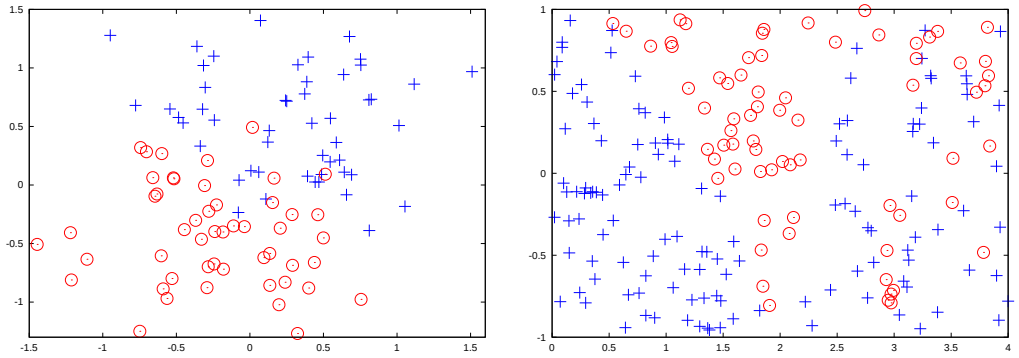


FIGURE 2 – Gaussiennes non séparables linéairement

Q 51.4 Ces frontières sont-elles *intéressantes* ? Quels problèmes se posent ?
NB : rappelons que notre but est de construire un système capable de déterminer la classe des futurs points $\mathbf{x}$ avec un minimum d'erreurs.

Exercice 52 – Expressivité des séparateurs linéaires

Reprenons les notations de l'exercice précédent et plaçons nous dans l'espace des séparateurs linéaires : $f(\mathbf{x}_i) = \sum_j x_{ij} w_j$.

Q 52.1 Quelle est la dimension du vecteur $\mathbf{w}$? Donner l'écriture matricielle de $f(\mathbf{x}_i)$.

Q 52.2 Tracer approximativement les frontières optimales en utilisant un modèle linéaire basique sur la figure précédente.

Q 52.3 Nous allons augmenter l'expressivité du modèle en étendant l'espace de représentation initial dans le cas 2D : $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$. Soit la transformation ϕ suivante : $\phi(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2]$, considérons le modèle linéaire $f(\mathbf{x}_i) = \sum_j \phi_j(\mathbf{x}_i) w_j$.

- Quelle est la dimension du vecteur $\mathbf{w}$ dans ce cas ?
- Retracer les frontières de décision optimales sur la figure en utilisant cette nouvelle représentation.
- Pouvons nous retrouver les frontières linéaires de la question précédente dans ce nouvel espace ? Dans l'affirmative, donner les coefficients w_j associés.

Q 52.4 Les frontières sont-elles plus *intéressantes* en utilisant la première ou la seconde représentation des données ?

- Pouvez vous comparer grossièrement l'amplitude de la fonction coût (au sens des moindres carrés par exemple) dans les cas linéaires et quadratiques ? Qu'en déduire ?
- Sur quel élément vous basez vous pour mesurer la qualité du modèle créé ?

Q 52.5 Soient les matrices X et Y regroupant les données. Donner la formulation matricielle du système d'équation linéaire correspondant à l'optimisation de la fonction coût au sens des moindres carrés dans le nouvel espace de description.

NB : vous donnerez toutes les dimensions des matrices qui entrent en jeu dans cette formulation.

Q 52.6 Afin d'augmenter l'expressivité de notre classe de séparateur, nous nous tournons vers les représentations gaussiennes cf Fig. 3. Comme le montre la figure, nous créons une grille de point (ici 10x10) puis nous mesurons la similarité gaussienne du point $\mathbf{x}$ par rapport aux points de la grille.

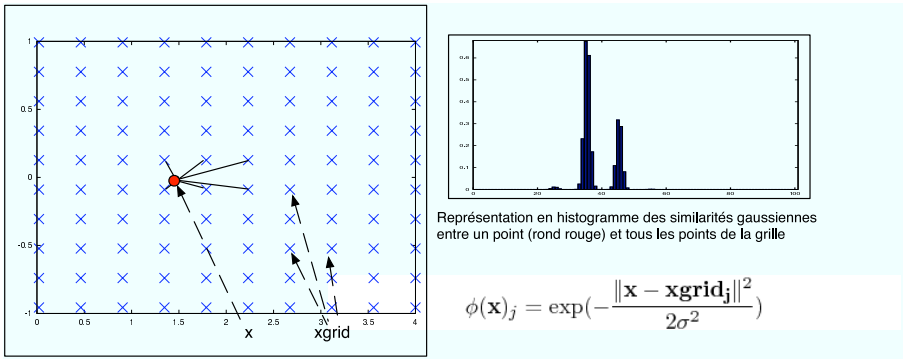


FIGURE 3 – Représentation gaussienne d'un point par rapport à une grille de référence

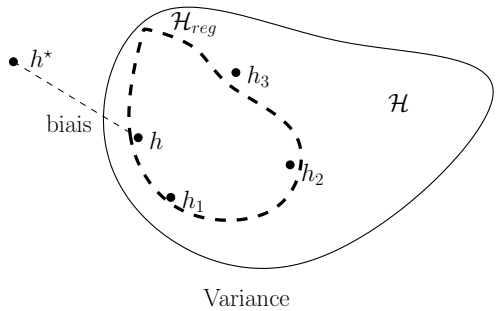
— Quelle est la dimension du vecteur $\mathbf{w}$ dans le problème illustré Fig. 3 ?
— Donner l'expression littérale de la fonction de décision.
— Quel rôle joue le paramètre σ ?

Q 52.7 Introduction (très) pragmatique aux noyaux
L'approche précédente est pratique et efficace en 2D mais présente des limites lorsque la dimension du problème augmente :
— que se passe-t-il en dimension 3 si nous souhaitons conserver la résolution spatiale du maillage ?
— Afin de palier ce problème, nous proposons d'utiliser les points de la base d'apprentissage à la place du maillage :
  — Exprimer la forme littérale de la fonction de décision dans ce nouveau cadre
  — Quelle est la nouvelle dimension du paramètre $\mathbf{w}$?

NB : dans le cas où la similarité est un produit scalaire (ce qui est le cas avec une similarité gaussienne), nous utilisons souvent les notations suivantes : $K_\gamma(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_{\mathcal{H}} = \exp(-\gamma ||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^2)$ et K est appelé noyau de l'espace des fonctions de décision $\mathcal{H}$.
— Soit K la matrice regroupant l'ensemble des produits scalaires, donner les dimensions de K.
— Exprimer la fonction de décision en fonction de K.

Exercice 53 – Régularisation

Lorsque nous augmentons la taille de l'espace de représentation des données, l'espace de fonction $\mathcal{H}$ est très (trop) vaste. Afin de le réduire, nous allons utiliser la technique de la régularisation.



Après avoir augmenté la taille de $\mathcal{H}$, on le réduit maintenant... L'idée est bien entendu de trouver une manière de réduire la variance sans perdre le bénéfice du gain.
Nous allons chercher à minimiser :

$$\arg\min_{\mathbf{w},\lambda} \sum_i (f(\mathbf{x}_i) - y_i)^2 + \lambda \|\mathbf{w}\|^2, \quad \hat{f(\mathbf{x})} = \mathbf{xw}$$

Q 53.1 Examiner les solutions du problème pour les valeurs extrêmes de λ

Q 53.2 Résoudre analytiquement le problème de minimisation du coût régularisé.

Q 53.3 Comment trouver la valeur optimale de λ ? Quels sont les pièges à éviter ?

Q 53.4 En considérant l'ensemble d'apprentissage $S = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right) \right\}$ les valeurs initiales $w^0 = [0\ 1]^T$ et $b^0 = -1$ et un pas d'apprentissage fixe $\varepsilon = 0.3$, faire deux itérations des algorithmes d'apprentissage proposés.

Semaine 10 - Échantillonnage

Exercice 54 – Échantillonnage préférentiel

Nous nous intéressons à la simulation de variables aléatoires, distribuées selon une certaine fonction de densité d'intérêt p. L'objectif général est d'estimer efficacement :

$$\mathbb{E}_p[h(X)] = \int p(x)h(x)dx \tag{1}$$

pour toute variable aléatoire X suivant une fonction de densité p et pour toute fonction réelle h, dans les cas où l'intégrale ne peut être calculée de manière analytique, notamment en grandes dimensions. On suppose que l'on ne sait pas échantillonner de p, ce qui rend impossible une intégration de Monte-Carlo classique.

Une possibilité pour l'évaluation de l'équation 1 lorsque sa résolution analytique est impossible est de recourir à de l'échantillonnage préférentiel (*importance sampling* en anglais), qui consiste à utiliser une distribution annexe q plus simple (telle que $q(x) > 0$ partout où $p(x)h(x) \neq 0$), en utilisant le fait que :

$$\mathbb{E}_p[h(X)] = \int q(x)\frac{p(x)}{q(x)}h(x)dx \tag{2}$$

Q 54.1 Proposer une procédure basée sur l'échantillonnage pour l'estimation de l'équation 1, en utilisant l'équation 2 et la loi forte des grands nombres.

Q 54.2 Considérons (de manière irréaliste car il existe une solution analytique) que l'on souhaite estimer par échantillonage la quantité $\mathbb{E}_p[h(X)]$ avec p une normale standard et h la fonction exponentielle. En étudiant la variance de l'estimateur, montrer qu'il est plus efficace d'utiliser l'échantillonnage préférentiel avec q une gaussienne $\mathcal{N}(1, 1)$ que d'échantillonner directement à partir de p.
Indication : $\int e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$ pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 55 – Inverse transform sampling

Malheureusement, il n'est pas toujours évident de sampler de la distribution choisie pour nos estimateurs de Monte-Carlo. Lorsqu'il est possible d'inverser la fonction de repartition de la distribution choisie F, il est possible d'obtenir un échantillon x de F en calculant $x = F^{-1}(u)$, avec u un échantillon uniforme sur $]0; 1[$.

Q 55.1 Soit la fonction de répartition de la distribution exponentielle : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Donner $x = F^{-1}(u)$

Q 55.2 Représenter graphiquement la fonction de répartition de la distribution exponentielle (approximativement) et observer que la procédure d'Inverse Transform Sampling semble intuitivement bien permettre d'obtenir des échantillons de la distribution exponentielle.

Q 55.3 Prouver que la procédure d'Inverse Transform Sampling permet bien d'obtenir des échantillons de la distribution voulue de fonction de répartition F

Q 55.4 Comment pourrait-on procéder dans le cadre d'une distribution exponentielle tronquée sur $]1; 2]$?

Exercice 56 – Rejection sampling

Il n'est malheureusement pas toujours possible d'appliquer la procédure Inverse Cumulative Transform pour obtenir des échantillons, car pour de nombreuses lois le calcul de l'inverse de la fonction de répartition est difficile voire impossible. La procédure d'acceptation-rejet (rejection sampling en anglais) est une alternative efficace (surtout pour des variables de faible dimension).
Supposons qu'un phénomène réel peut être modélisé par une variable aléatoire $X \in [0,1]$ qui suit une loi normale tronquée proportionnelle à $\mathcal{N}(\frac{3}{4}, 1)$. La fonction de densité d'une loi normale tronquée proportionnelle à $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ définie sur $[a,b]$ peut être écrite comme :

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} & \text{pour } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{pour } x < a \text{ et } x > b \end{cases}$$

où C est un facteur de normalisation.

Q 56.1 Déterminer la fonction de densité $f(x)$ de X en calculant C.
Note : utiliser la table de la loi normale.

Q 56.2 Imaginons que la fonction $f(x)$ est difficile à échantillonner. Nous allons donc utiliser la méthode Monte Carlo appelée *rejection sampling*.
Rappel de cours : Choisir une distribution $q(\cdot)$, facile à échantillonner, telle qu'il existe un facteur k satisfaisant $\forall x, k \cdot q(x) \geq f(x)$. L'algorithme d'échantillonnage est constitué de quatre étapes : (1) tirer un nombre z selon $q(\cdot)$ (*pre-échantillonnage*) ; (2) calculer $m_q = k \cdot q(z)$; (3) tirer un nombre u selon la distribution uniforme sur $[0, m_q]$; (4) accepter z comme échantillon si $u \leq f(x)$.

Calculez le *taux d'acceptation* (la proportion de pre-échantillons acceptés) lorsque $q(\cdot)$ est une loi uniforme sur $[0,1]$, et $k \cdot q(\cdot) = \max_{x\in[0,1]} f(x)$.

Q 56.3 Supposons que le calcul de $f(x)$ est relativement coûteux. Une méthode pour augmenter l'efficacité (appelée *compression*) est de proposer une fonction $r(x)$ simple—e.g. une droite—qui est une limite inférieure de $f(x)$. L'algorithme modifié prend en compte un *pré-filtrage* des éléments qui sont certainement acceptés, quand $u \leq r(z)$. Calculez le taux des préfiltrage si on prend $r(x) = \min_{x\in[0,1]} f(x)$.

Exercice 57 – Metropolis-Hasting

La procédure d'acceptation-rejet est efficace dans certains cas mais échoue en grande dimension car le taux de rejet devient trop élevé. Les MCMC, qui construisent les échantillons par déplacements locaux dans l'espace des possibles, sont une alternative à cette procédure. MCMC désigne toute méthode qui, dans le but de simuler des variables d'une distribution p, produit une chaîne de Markov irréductible et apériodique dont la distribution stationnaire est p. Un avantage de la méthode Metropolis-Hasting est qu'elle ne requiert pas la connaissance exacte de p, seulement d'une fonction f proportionnelle à p. La méthode MCMC la plus populaire est la méthode de Metropolis-Hasting que nous étudions dans cet exercice.

Dans cet exercice, nous allons appliquer l'algorithme de Métropolis-Hastings au problème de décodage d'un texte codé par substitution. Nous supposons la langue du texte connue. Nous supposons également que nous avons à notre disposition une modélisation de cette langue sous forme de bigramme : plus formellement, cette langue s'écrit avec l'alphabet fini Λ. Par exemple, en français, Λ contient les lettres minuscules et majuscules, les lettres accentuées, les signes de ponctuation, les chiffres, etc... Le modèle bigramme est donné par μ et M où μ est une distribution de probabilité sur Λ et M est une matrice stochastique qui donne pour chaque lettre de Λ la probabilité de la lettre suivante. Ce modèle peut facilement être estimé à partir d'un grand corpus de texte. Une fonction d'encodage (ou de décodage) par substitution est une fonction bijective τ de Λ dans Λ. Si T' est un texte, le texte encodée $T = \tau(T')$ est obtenu en remplaçant chaque lettre c de T' par $\tau(c)$.
Le problème que nous souhaitons résoudre ici est, étant donné un texte encodé $T = (c_1, c_2, \ldots, c_{|T|})$ (où $c_i \in \Lambda$, $\forall i$), de retrouver le texte initial décodé.

Q 57.1 Comment peut-on mesurer la vraisemblance d'un texte T en utilisant le modèle bigramme ?
Dans la suite on note $L(\tau) = L(\tau(T), \mu, M)$. Connaissant un texte T, la probabilité d'un décodeur $\mathcal{P}(\tau)$ est définie selon la vraisemblance du texte qu'il décode de T : $\mathcal{P}(\tau) = L(\tau)/(\sum_{\tau'} L(\tau'))$. On suppose qu'en échantillonnant selon $\mathcal{P}(\tau)$, on a de bonnes chances de trouver le décodeur permettant de décrypter le code secret. Problème : on ne sait pas échantillonner de cette distribution.

Q 57.2 Combien y-a-t-il de fonctions d'encodage ? Est-ce qu'une méthode de Monte Carlo par acceptation-rejet (où on échantillonne par exemple selon une distribution uniforme) est envisageable ?

Comme il n'est pas possible d'échantillonner directement une fonction d'encodage selon la loi $\mathcal{P}$, on souhaite recourir à un échantillonnage par chaîne de Markov. Cette méthode ne nécessite de connaître les probabilités de tirage qu'à un facteur de normalisation près, ce qui est le cas ici.

Q 57.3 Définir une distribution de mouvement $q(\tau'|\tau)$ permettant de passer d'une fonction de décodage courante τ à une nouvelle fonction τ'.

La méthode MCMC de Métropolis-Hastings est définié comme suit :
Répéter N fois les étapes suivantes à partir d'un état initial τ choisi de manière quelconque :

1. $\tau' \sim q(\tau'|\tau)$;
2. $\alpha(\tau, \tau') = \min(1, \frac{\mathcal{P}(\tau')q(\tau|\tau')}{\mathcal{P}(\tau)q(\tau'|\tau)})$
3. $x \sim Bernouilli(\alpha(\tau, \tau')$
4. Si $x = 1$, $\tau \leftarrow \tau'$ (acceptation de la transition), sinon τ reste inchangé

Q 57.4 Décrire la chaîne de Markov associée à cette procédure. Est-elle irréductible ? apériodique ?
Après avoir itéré un nombre suffisamment grand de fois, la fonction de décodage τ correspond à un tirage aléatoire selon $\mathcal{P}$. Pour obtenir d'autres tirages selon $\mathcal{P}$, on répète ces opérations en gardant les τ toutes les kh itérations comme échantillons, pour un entier $k > 0$ fixé et $h \in \mathbb{N}^*$. Le paramètre k permet d'espacer les tirages pour éviter les auto-corrélations dans l'échantillonnage.

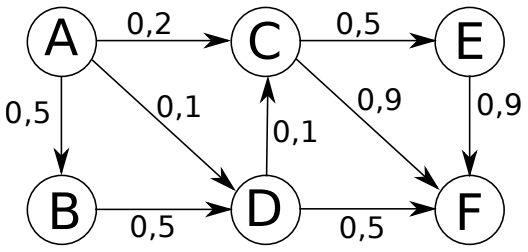
Q 57.5 Montrer que le log de la probabilité d'acceptation s'écrit finalement :

$$\log \alpha(\tau, \tau') = \min(0, \log \mu(\tau'(c_1)) + \sum_{i=1}^{|T|} \log M(\tau'(c_{i-1}), \tau'(c_i)) - \log \mu(\tau(c_1)) - \sum_{i=1}^{|T|} \log M(\tau(c_{i-1}), \tau(c_i)))$$

Q 57.6 Montrer que la distribution de probabilité $\mathcal{P}$ est bien la distribution stationnaire de la chaîne de Markov.

Exercice 58 – Gibbs Sampling

Soit le réseau de dépendances bayésiennes entre 6 variables binaires A,B,C,D,E,F suivant :



La probabilité qu'une variable soit activée (=1) dépend de l'activation de ses parents dans le graphe de dépendances : $P(X = 1|Par(X)) = 1 - \prod_{Y \in Par(X)}(1 - I(Y = 1)\theta_{Y,X})$ pour toute variable du réseau X, avec $Par(X)$ l'ensemble des parents de X dans le graphe de dépendances bayésiennes, I la fonction indicatrice retournant 1 si son argument est vrai (0 sinon) et $\theta_{X,Y}$ la probabilité d'activation de Y par une parente activée

X (données sur les arcs du graphe). Selon ce modèle génératif, chaque nœud X s'active alors si au moins un de ses parents $Y \in Par(X)$ est activé (i.e., $I(Y = 1)$) et l'active (selon $\theta_{X,Y}$).

Supposons que l'on ait observé que F est activé (i.e., F=1). Nous souhaitons obtenir des échantillons de A, B, C, D, E suivant $P(A, B, C, D, E|F)$. Il est très difficile de sampler directement de $P(A, B, C, D, E|F)$. Par contre, il est bien plus aisé d'échantillonner des postérieures de chacune des variables connaissant toute les autres. Dans ce cas, l'échantillonneur de Gibbs propose une procédure efficace pour l'échantillonnage selon $P(A, B, C, D, E|F)$.

Pour une variable multivariée $x = (x_1, ..., x_n)$, on a pour chaque indice j la relation de proportionnalité suivante :

$$p(x_j \mid x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{p(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)} \propto p(x_1, \ldots, x_n)$$

Cela indique que pour échantillonner une nouvelle valeur pour x_j, il suffit de sampler sa valeur proportionnellement à la loi jointe. L'échantilloneur de Gibbs procède de la manière suivante :

1. Sélection aléatoire d'un indice $j \in \{1, ..., n\}$;
2. Calcul des probabilités jointes $p(x_1, \ldots, x_n)$ avec les différentes valeurs possibles pour x_j ;
3. Echantillonage de x_j proportionnellement à la valeur de probabilité jointe associée.

Ce processus est répété un grand nombre de fois. Il est prouvé qu'elle mène à la probabilité stationnaire souhaitée.

Q 58.1 Donner la décomposition de la vraisemblance $P(A, B, C, D, E, F)$ en facteurs indépendants

Q 58.2 Donner la loi $P(X = x|Z \setminus X)$ d'une variable X connaissant toutes les autres variables $Z \setminus X$. En déduire les lois conditionnelles $P(A = 1|B, C, D, E, F)$, $P(B = 1|A, C, D, E, F)$, $P(C = 1|A, B, D, E, F)$, $P(D = 1|A, B, C, E, F)$ et $P(E = 1|A, B, C, D, F)$.

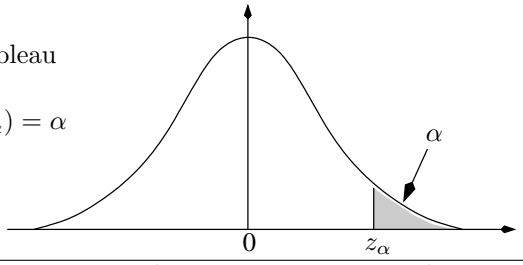
Q 58.3 Soit l'instantiation initiale $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ pour les variables A,B,C,D,E,F. Faire 5 étapes de Gibbs Sampling en choisissant successivement les variables A,B,C,D puis E (F étant observée, on ne reconsidère pas sa valeur), selon un générateur produisant les 5 premières valeurs pseudo-aléatoires v successives suivantes $0.9, 0.8, 0.3, 0.8, 0.7$ (si v_i supérieur à la probabilité conditionnelle d'activation de la i-ième variable X_i, on la désactive : $X_i \leftarrow 0$, sinon on l'active : $X_i \leftarrow 1$).

Q 58.4 Montrer que la distribution de probabilité $P(A, B, C, D, E|F = 1)$ est bien la distribution stationnaire de la chaîne de Markov formée par la procédure de Gibbs Sampling.

Tables des lois usuelles

Table de la loi normale centrée réduite

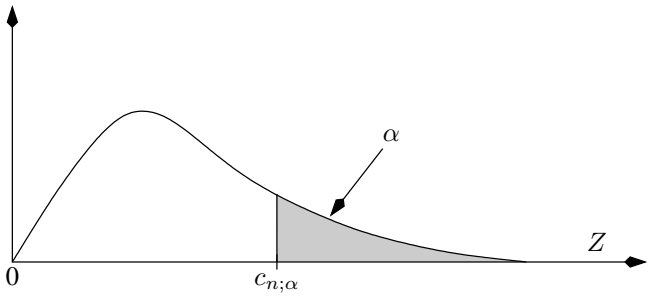
valeurs dans le tableau ci-dessous : les α tels que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0859	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0466	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0063
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0047
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Table de la loi du χ^2

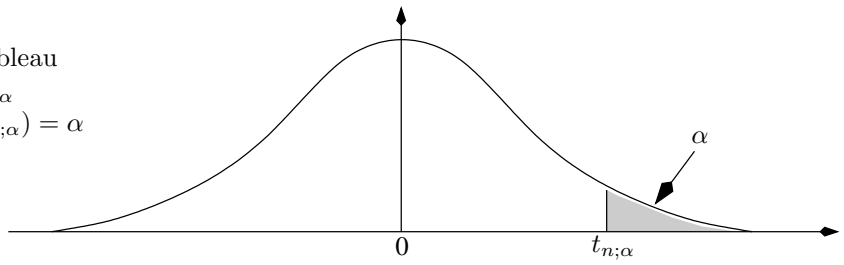
valeurs dans le tableau ci-dessous : les $c_{n;\alpha}$ tels que $P(Z > c_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7

Table de la loi de Student

valeurs dans le tableau ci-dessous : les $t_{n;\alpha}$ tels que $P(Z > t_{n;\alpha}) = \alpha$



$n \setminus \alpha$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
31	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365
33	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348
35	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333
37	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319
39	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307

$n \setminus \alpha$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
41	1,303	1,683	2,020	2,421	2,701	3,301
42	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	3,296
43	1,302	1,681	2,017	2,416	2,695	3,291
44	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	3,286
45	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281
46	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	3,277
47	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685	3,273
48	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	3,269
49	1,299	1,677	2,010	2,405	2,680	3,265
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
51	1,298	1,675	2,008	2,402	2,676	3,258
52	1,298	1,675	2,007	2,400	2,674	3,255
53	1,298	1,674	2,006	2,399	2,672	3,251
54	1,297	1,674	2,005	2,397	2,670	3,248
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245
56	1,297	1,673	2,003	2,395	2,667	3,242
57	1,297	1,672	2,002	2,394	2,665	3,239
58	1,296	1,672	2,002	2,392	2,663	3,237
59	1,296	1,671	2,001	2,391	2,662	3,234
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
61	1,296	1,670	2,000	2,389	2,659	3,229
62	1,295	1,670	1,999	2,388	2,657	3,227
63	1,295	1,669	1,998	2,387	2,656	3,225
64	1,295	1,669	1,998	2,386	2,655	3,223
65	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	3,220
66	1,295	1,668	1,997	2,384	2,652	3,218
67	1,294	1,668	1,996	2,383	2,651	3,216
68	1,294	1,668	1,995	2,382	2,650	3,214
69	1,294	1,667	1,995	2,382	2,649	3,213
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
71	1,294	1,667	1,994	2,380	2,647	3,209
72	1,293	1,666	1,993	2,379	2,646	3,207
73	1,293	1,666	1,993	2,379	2,645	3,206
74	1,293	1,666	1,993	2,378	2,644	3,204
75	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643	3,202
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090