Multiplicative Langevin Simulation

実行方法

```
make
./a.out
gnuplot additive.plt
gnuplot multiplicative.plt
```

Additive Noise

以下の Langevin 方程式を考える。

$$\dot{x} = -x + \hat{R}$$

ただし、$\hat{R}$ は

$$\left\langle \hat{R}(t_1)\hat{R}(t_2) \right\rangle = 2\delta(t_1 - t_2)$$

を満たす白色雑音である。

対応する Focker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-xf - \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

定常状態は $\partial f_{eq}/\partial t = 0$ より、

$$-xf_{eq} - \frac{\partial f_{eq}}{\partial x} = 0$$

以上から、

$$f_{eq} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

実際にシミュレーションしてみると、定常状態の分布関数はガウス分布に一致する。

Multiplicative Noise

以下の Langevin 方程式を考える。

$$\dot{x} = -x^3 + x\hat{R}_1 + \hat{R}_2$$

ただし、$\hat{R}_1, \hat{R}_2$ は

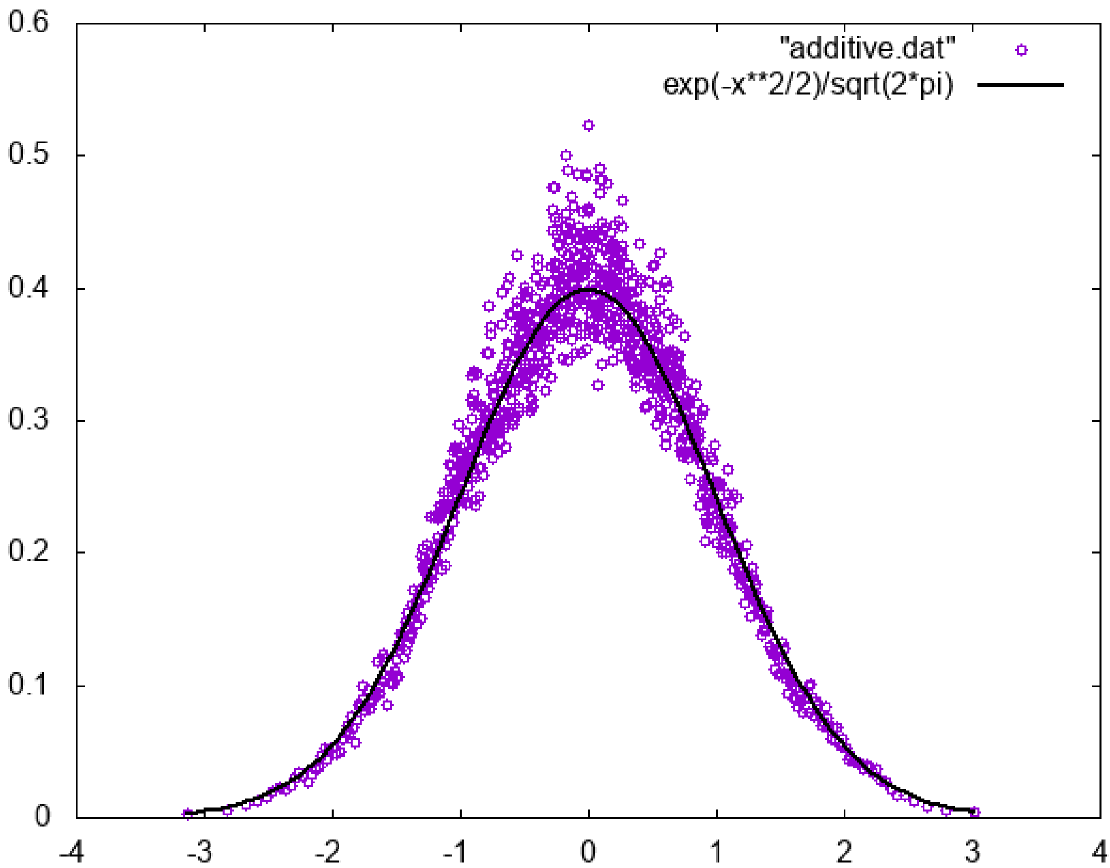

図 1: additive.png

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_1(t_2) \right\rangle &= 2\delta(t_1 - t_2) \\
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_1(t_2) \right\rangle &= 2\delta(t_1 - t_2) \\
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_2(t_2) \right\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

を満たす白色雑音であり、$\hat{R}_2$ を加えたのは、$x = 0$ の時に $\dot{x} = 0$ となってしまうのを防ぐためである。

対応する Focker-Planck 方程式は、Stratonovich の場合

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3 f - x\frac{\partial}{\partial x}(xf) - \frac{\partial f}{\partial x}\right)
$$

定常状態は、

$$
-x^3 f_{eq} - x f_{eq} - (x^2+1) f'_{eq} = 0
$$

より、

$$
f_{eq} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}
$$

となる。

Ito の場合、

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3 f - x^2 f' - f'\right)
$$

定常状態は、

$$
f'_{eq} = -\frac{x^3}{x^2+1} f_{eq}
$$

より、

$$
f_{eq} = C^{-1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{-x^2/2}
$$

となる。ただし $C \sim 3.4$ である。

実際にシミュレーションして定常状態を確認すると、上記の 2 つの分布のどちらにも一致しなかった。

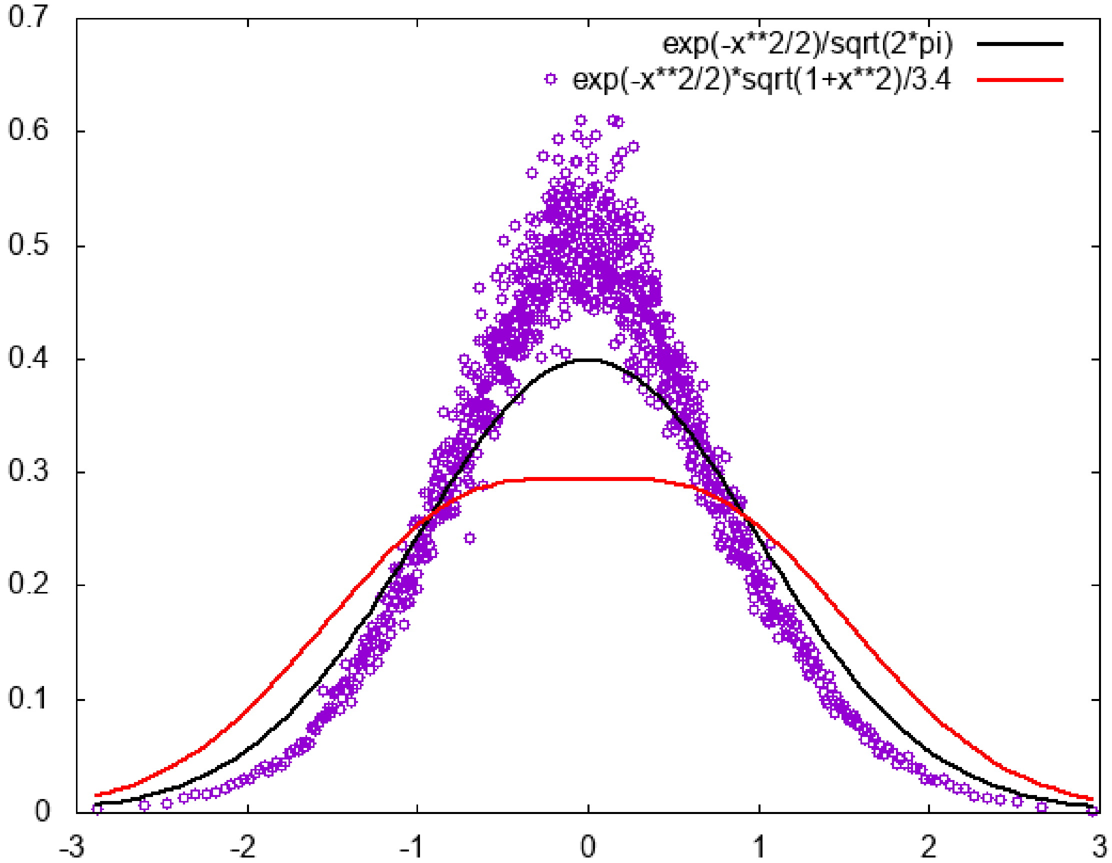

図 2: multiplicative.png