Multiplicative Langevin Simulation

実行方法

```
make
./a.out
gnuplot additive.plt
gnuplot multiplicative.plt
```

Additive Noise

以下の Langevin 方程式を考える。

$$\dot{x} = -x + \hat{R}$$

ただし、$\hat{R}$ は

$$\left\langle \hat{R}(t_1)\hat{R}(t_2) \right\rangle = 2\delta(t_1 - t_2)$$

を満たす白色雑音である。

ノイズが加法的 (additive) な場合、対応する Focker-Planck 方程式は Ito、Stratonovich ともに同じ形になる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-xf - \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

定常状態は $\partial f_{eq}/\partial t = 0$ より、

$$-xf_{eq} - \frac{\partial f_{eq}}{\partial x} = 0$$

以上から、

$$f_{eq} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

実際にシミュレーションしてみると、定常状態の分布関数はガウス分布に一致する。数値解法は Euler-Maruyama 法を用いた。

Multiplicative Noise

以下の Langevin 方程式を考える。

$$\dot{x} = -x^3 + x\hat{R}_1 + \hat{R}_2$$

ただし、$\hat{R}_1, \hat{R}_2$ は

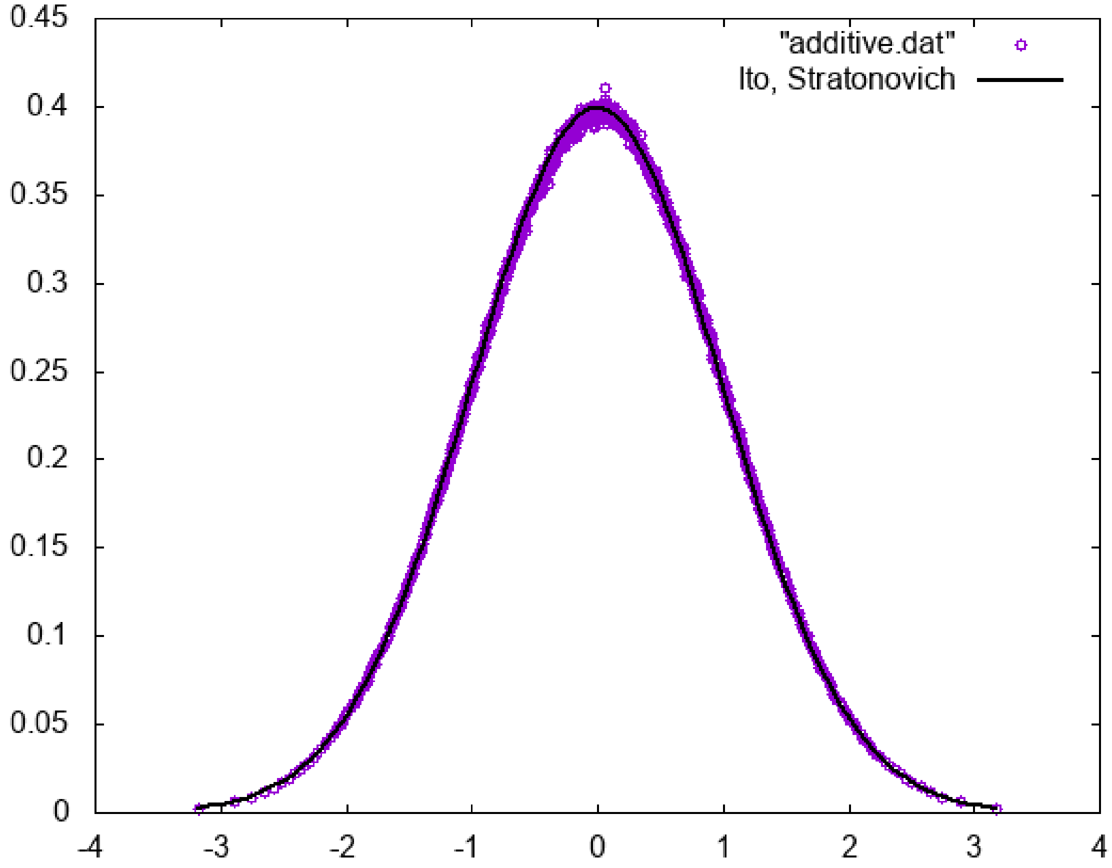

図 1: additive.png

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_1(t_2) \right\rangle &= 2\delta(t_1 - t_2) \\
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_1(t_2) \right\rangle &= 2\delta(t_1 - t_2) \\
\left\langle \hat{R}_1(t_1)\hat{R}_2(t_2) \right\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

を満たす白色雑音であり、$\hat{R}_2$ を加えたのは、$x = 0$ の時に $\dot{x} = 0$ となってしまうのを防ぐためである。

ノイズが乗法的 (multiplicative) な場合は、Ito と Stratonovich で Focker-Planck 方程式の形が変わる。

Stratonovich の場合

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3 f - x\frac{\partial}{\partial x}(xf) - \frac{\partial f}{\partial x}\right)
$$

定常状態は、

$$
-x^3 f_{eq} - x f_{eq} - (x^2+1) f'_{eq} = 0
$$

より、

$$
f_{eq} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}
$$

となる。

Ito の場合、

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3 f - \frac{\partial}{\partial x}(x^2 f) - \frac{\partial f}{\partial x}\right)
$$

定常状態は、

$$
f'_{eq} = -\frac{x^3+2x}{x^2+1} f_{eq}
$$

より、

$$
f_{eq} = C^{-1}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{1+x^2}}
$$

となる。ただし $C \sim 1.98$ である。実際に計算すると Ito に一致する。

Two-step 法

Two-step 法を用いると、もとの Langevin 方程式を Stratonovich に変換することができる。

元の Langevin 方程式が

$$
\dot{x} = -x^3 + x\hat{R}_1 + \hat{R}_2
$$

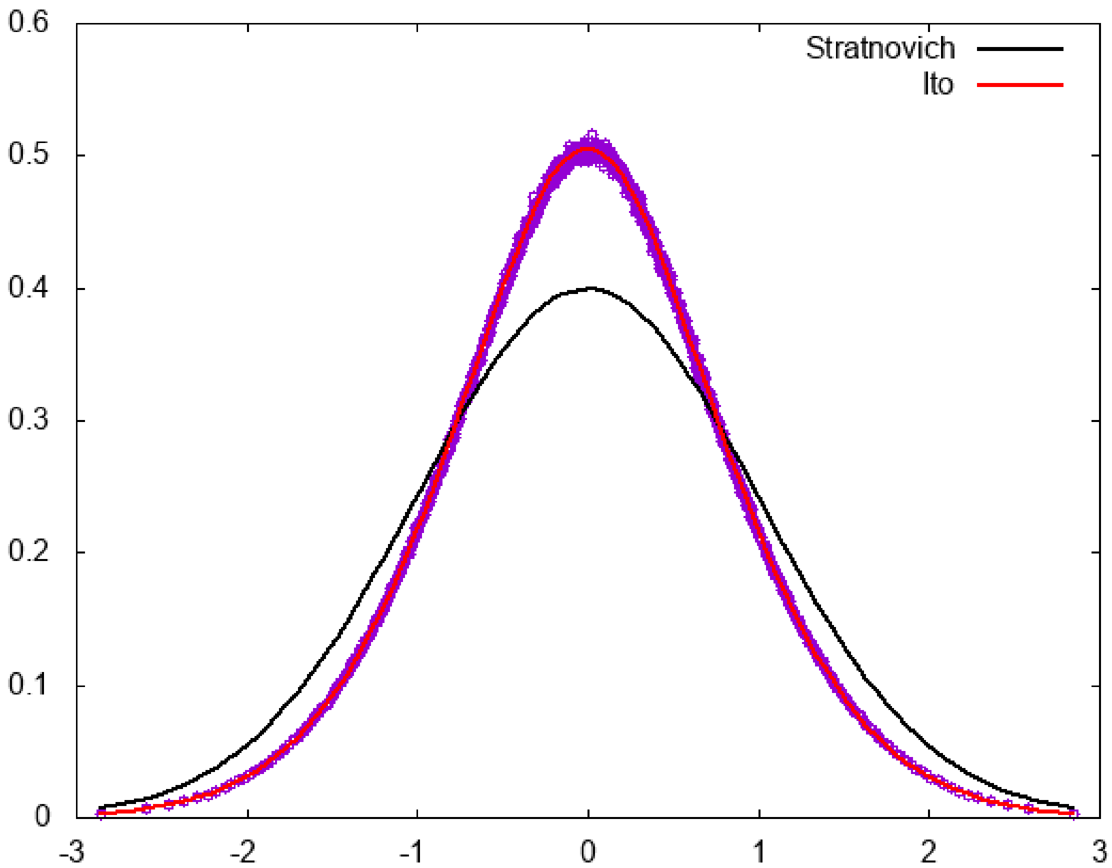

図 2: multiplicative.png

で与えられる時、Two-step 法を適用すると、

$$\dot{x} = -x^3 + x + x\hat{R}_1 + \hat{R}_2$$

に変形される。これをそのまま Euler-Maruyama 法で時間発展させた時の定常分布は、

- Two-step 法適用前の Langevin 方程式を Stratonovich だと思った場合の定常分布
- Two-step 法適用後の Langevin 方程式を Ito だと思った場合の定常分布

にそれぞれ一致する。

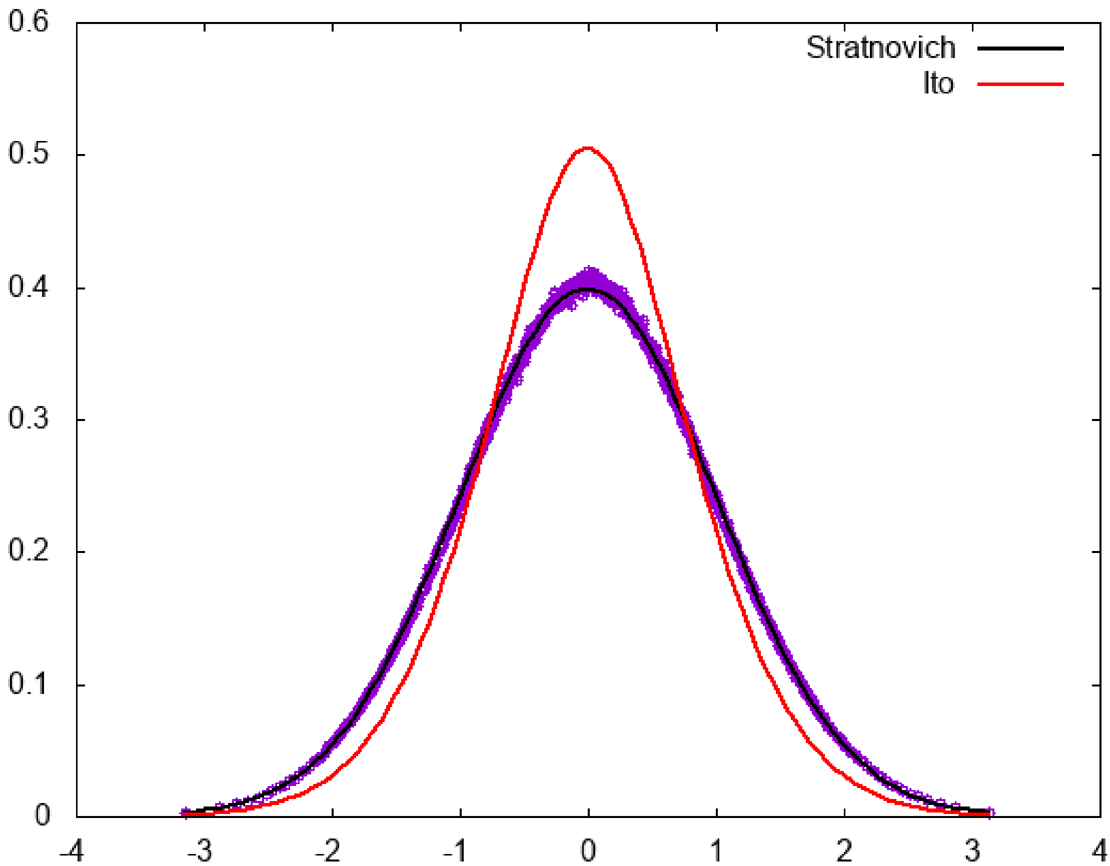

図 3: twostep.png

まとめ

確率微分方程式、特にノイズが変数依存性を持つような multiplicative noise 系に Euler-Maruyama 法を適用すると、分布関数の時間発展は元の Langevin 方程式を Ito だと思った場合の Focker-Planck 方程式に従う。 Two-step 法を適用すると、Ito 表記で記述された Langevin 方程式が Stratonovich 表記に変換される。

関係を図示すると以下の通り。

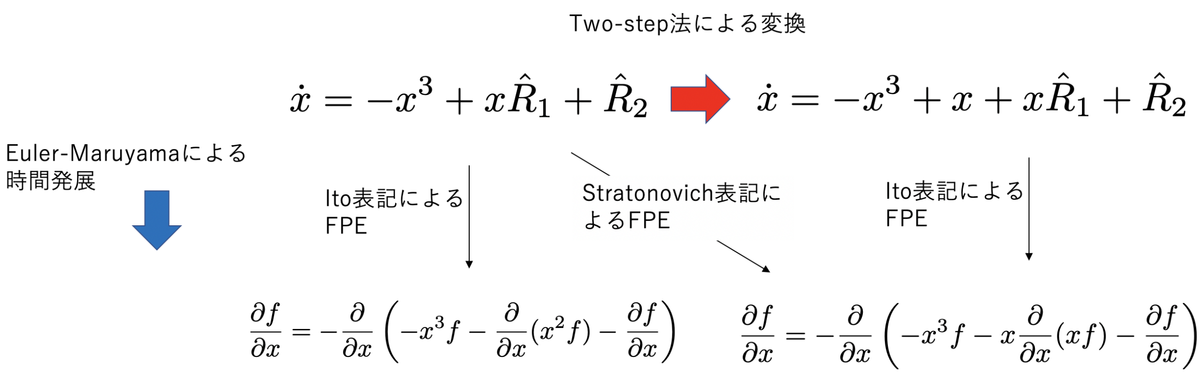

図 4: relation.png