第五次习题课

一、作业讲解

ex2-1 / T1(1) 315462 逆序数

逆序对 (3,1) (3,2) (5,4) (5,1) (4,2) (6,2)

故逆序数为 6

注意：逆序数与换为顺序需要的对换次数不相等！！（只同奇偶）

不唯一，有

ex2-3 / T2(2)

法一：

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ b & -b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & & & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2+\cdots+a_n-b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -b \end{vmatrix}$$

$$= (-b)^{n-1}(a_1+\cdots+a_n-b)$$

法二：（加边）

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2-b & & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & -b & & & \\ 1 & & -b & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & -b \end{vmatrix}$$

$$\overset{b\neq 0 时}{=\!=} \begin{vmatrix} 1-\sum \frac{a_i}{b} & -a_1 & \cdots & -a_n \\ 0 & -b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -b \end{vmatrix} = (-b)^n\left(1-\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b}\right) = (-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i - b\right)$$

当 $b=0$ 时 原式 $=0$ 符合此结果，故值为 $(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i - b\right)$

注意：尽量避免除以未知数，如果这样做了，需细致讨论！

（检查作业本）

ex 1.1 Van...

$\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$

注意!! 非常多同学出现

1°) 下标错了，应为 $1\le j<i\le n$，答案无差别

2°) a_j-a_i，记忆：指标大减指标小

与结果差 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

ex 1.4/T7

原式 $=\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x)\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)$

$\{a_i\}$ 互异 $\Rightarrow \prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\ne 0$ 故解集 $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$

错误解法：此行列式关于 x 多项式，最高次 $n-1$

易观察 $n-1$ 个根 $a_1,\dots,a_{n-1}$ 故解集 $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$

错误原因：由有 $n-1$ 个根 $a_1,\dots,a_{n-1}$ 说明

行列式 $= c(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})$ c 为一待定与 x 无关常数

$c\ne 0$ √，若 $c=0$，解集为 $\mathbb{R}$

故要算 x^{n-1} 系数，即其对应的代数余子式.

n元 n个线性方程对应方程组解性质：$Ax=b$

唯一解 $\Longleftrightarrow$ 系数方阵行列式非零

无解或无穷解 要分析. Gauss 消元

(后面，则 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,b)\Longleftrightarrow$ 有解)

注意：不能朴素用方程组方程个数与变量个数说明

可能无效，一样的方程

"有效方程个数" ~ 秩

ex1.5/ ~~T4~~/T5, T6

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \end{cases}$$

系数行列式： $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=(1-a)b$

当 $a\neq1$ 且 $b\neq0$ 时 行列式非零 $\xrightarrow{\text{Cramer法则}}$ 唯一解

Else,

$b=0$, $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 无解

$a=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{-1-2(b-1)}_{2b+1} \end{pmatrix}$

$a=1$, $b=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 无穷解

$a=1$, $b\neq-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 无解.

二、课堂回顾：

Ch3, §1 - §3

· 快速回顾： K 数域，

向量空间 K^n 八条运算法则 加法群 4条 / 数乘 4条 线性性

线性组合； 线性相关； 线性无关

$b=\sum \lambda_i a_i$ $\exists \lambda_i\neq0$ $\sum\lambda_i a_i=0$ ~~$\Rightarrow \lambda_i=0$~~ $\sum\lambda_i a_i=0 \Rightarrow \lambda_i=0$

极大线性无关组： 线性无关，再添就线性相关

~~为等价关系~~

两向量组的等价： 互相表出 （为等价关系）

向量组的秩： 极大线性无关组元素个数 （良好定义）

性质：设 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ 设 $\{\beta_1,\dots\beta_s\}$

1) $\{\beta_i\}$ 由 $\{\alpha_i\}$ 表出 且 $\{\alpha_i\}$ 线性无关 $\Rightarrow S\geq r$

2) $\{\beta_i\}$ 由 $\{\alpha_i\}$ 表出，且 $S>r$ $\Rightarrow$ $\{\beta_i\}$ 线性相关

3) ~~等价向量组~~ $\{\alpha_i\}\simeq\{\beta_i\}$ 且均线性无关 $\Rightarrow r=S$

(且说明秩良好定义)

4) $\{\alpha_i\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩 $=r$

5) $\{\beta_i\}$ 由 $\{\alpha_i\}$ 表出，则 $\{\beta_i\}$ 秩不超过 $\{\alpha_i\}$

6) 秩相等，且 $\{\beta_i\}$ 由 $\{\alpha_i\}$ 表出 $\Rightarrow$ 等价

证：6) 设 $\{\beta_i\}$ 极大无关组 $\{\beta_1,\dots\beta_k\}$ $\Rightarrow k\leq S$

$\{\alpha_i\}$ 极大无关组 $\{\alpha_1,\dots\alpha_k\}$ $\Rightarrow k\leq r$

则 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\simeq\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$

$\{\beta_1,\dots,\beta_k\}\simeq\{\beta_1,\dots,\beta_s\}$

由 $\beta_1,\dots,\beta_k$ 由 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 表出 $\Rightarrow$ $\beta_1,\dots,\beta_k$ 由 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 表出

$\{\beta_1,\dots\beta_k,\alpha_j\}$ 由 ~~$\beta_1,\dots,\beta_k$~~ $\{\alpha_1,\dots\alpha_k\}$ 表出

$\Rightarrow$ $\beta_1,\dots,\beta_k,\alpha_j$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{k}a_i\beta_i+b\alpha_j=0$ 且 a_i,b 不全 0

又 $\beta_1,\dots,\beta_k$ 极大 $\Rightarrow$ $b\neq 0$ (否则 $\{\beta_i\}$ 线性相关)

$\Rightarrow$ α_j 由 $\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$ 表出

$\Rightarrow$ $\{\alpha_1,\dots\alpha_k\}\simeq\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$

$$\begin{array}{ccc}\{\alpha_1,\dots\alpha_k\} & \simeq & \{\beta_1,\dots,\beta_k\}\\ \wr\!\!\wr & & \wr\!\!\wr\\ \{\alpha_1,\dots,\alpha_r\} & & \{\beta_1,\dots\beta_s\}\end{array}$$

#

补充：

1、设向量 β 可用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但不能由任意一个个数小于 m 的部分向量线性表示．　　证：$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关

Pf：设 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关，

由定义 $\Rightarrow$ $\exists$ λ_i 不全为0，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i=0$

不妨 $\lambda_1\neq0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1=\sum_{i=2}^{n}\frac{-\lambda_i}{\lambda_1}\alpha_i$

β 可用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Rightarrow$ β 可用 $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示，矛盾！

2、设向量空间 V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

$\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性相关

证：最多有一个 α_i 可表为前面向量线性组合．

Pf：否则，$\exists$ $1\leq i<j\leq r$，s.t.

$$\alpha_i=b\beta+a_1\alpha_1+\cdots+a_{i-1}\alpha_{i-1}$$

$$\alpha_j=d\beta+c_1\alpha_1+\cdots+c_{j-1}\alpha_{j-1}$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\Rightarrow$ $b,d\neq0$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{b}\alpha_i-\frac{1}{d}\alpha_j=k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}$$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_j$ 线性相关，矛盾！

3. K^n 中任 $n+1$ 个向量一定线性相关

Pf：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}\in K^n$，$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}$

考虑齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n+x_{n+1}\alpha_{n+1}=0$$

n 个方程，$n+1$ 个未知数 $\Rightarrow$ 一定有非零解

4. 证：若向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，则表出方式唯一的充分必要条件为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

证 $(\Rightarrow)$ 假设线性相关

$\exists$ 不全为0 的 a_i s.t. ~~a_i不~~ $a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s=0$

β 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出　　设 $a_i\neq 0$

$\Rightarrow \exists b_i$，$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$

则 $\beta=(a_1+b_1)\alpha_1+\cdots+(a_s+b_s)\alpha_s$

$\Rightarrow$ $a_i+b_i\neq b_i$ $\Rightarrow$ 表示不唯一，矛盾！

$(\Leftarrow)$ 假设表出方式不唯一

$\beta=a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$

$\Rightarrow (a_1-b_1)\alpha_1+\cdots+(a_s-b_s)\alpha_s=0$ 且 $(a_i-b_i)\neq 0$ ($\exists i$)

从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，矛盾！ #

5. 域 K 上 $m\times n$ 矩阵 H 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

证：H 的任 s 列都线性无关当且仅当：齐次方程组

$s\leq \min\{m,n\}$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$

的任一非零解的非零分量数目大于 s

证 $(\Rightarrow)$ 设 H 任 s 列线性无关

设 $\eta=(0,\cdots0,c_{i_1},0,\cdots0,c_{i_l},0,\cdots0)^T$

$c_{i_1},\cdots,c_{i_l}$ 为非零分量，下标为任意

则 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_l}\alpha_{i_l}=0$ $\Rightarrow$ $l>s$

l 为非零元个数

$(\Leftarrow)$ 若 H 有 s 个列向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$

满足 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_s}\alpha_{i_s}=0$

这说明 η 为 H 对应齐次方程组的解

但 η 至多 s 个非零分量 $\Rightarrow$ η 为零解

$\Rightarrow c_{i_1}=\cdots=c_{i_s}=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$ 线性无关. #

6、证明：K^n 中，n 个向量 $\alpha_1, \dots \alpha_n$ 线性无关当且仅当 K^n 中任一向量可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示

解：($\Rightarrow$) $\forall \beta \in K^n$

$\{\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta\}$ 线性相关（T3）

所以 $\exists$ $b, a_1, \dots, a_n$ 不全为 0

$$b\beta + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = 0$$

若 $b=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 \dots \alpha_n$ 线性相关，矛盾！

$\Rightarrow b \neq 0$ $\quad \beta = -\frac{a_1}{b}\alpha_1 - \dots - \frac{a_n}{b}\alpha_n \Rightarrow b$ 由 $\alpha_1, \dots \alpha_n$ 线性表示

($\Leftarrow$) $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ 由 $a_1, \dots a_n$ 线性表出

$\Rightarrow$ ~~$\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n\}$~~

$$\underset{\substack{\| \\ n}}{\operatorname{rank}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}} \leq \operatorname{rank}\{a_1, \dots, a_n\} \leq n$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rank}\{a_1, \dots, a_n\} = n$

7、证：一个向量组任何一个线性无关组可扩充成一个极大线性无关组

证：设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 一个线性无关组 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$

当 $s = m$，$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$ 为一个极大线性无关组，不用扩充

当 $m < S$ 若 $\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_m}$ 非极大线性无关组

则存在向量 $\alpha_{i_{m+1}}$ 使 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}, \alpha_{i_{m+1}}$ 线性无关

若 $\{\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{m+1}}\}$ 非极大线性无关组

则继续添加

有限次内可终止，因为总共 s 个向量

最后得到的就是由 $\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_m}$ 扩充得到的一个线性无关组。

8. K上 n阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

满足 $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$（严格行对角优）

证明：A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩等于 n

pf：只须证 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关

假设 ∃ $k_1 \cdots k_n$ 不全为 0 使

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nn}k_n = 0 \end{cases}$$

（思考：a_{11} 比 $a_{12}, \cdots a_{1n}$ 大得多，需要 k_1 比 $k_2, \cdots k_n$ 小）

a_{22} 比 a_{21} ... a_{2n} 大　　k_2 比 —— 小

⋮

希望用以导矛盾

令 $|k_l| = \max\{|k_1|, |k_2|, \cdots |k_n|\}$　由此 $|k_l|>0$

有 $k_l a_{ll} + \sum\limits_{i\neq l} k_i a_{li} = 0$

$|k_l a_{ll}| = \left|-\sum\limits_{i\neq l} k_i a_{li}\right|$ ~~$\leq |k_l| \sum$~~

$\leq \sum\limits_{i\neq l} |k_i||a_{li}| \leq \sum\limits_{i\neq l} |k_l||a_{li}| < |k_l||a_{ll}|$

$\Rightarrow$ 矛盾!

从而 $k_1 = \cdots = k_n = 0 \Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.