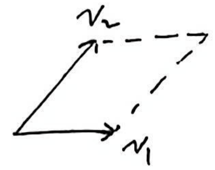
第二次习题课

Topic 1: 行列式的定义和性质

对二维: v_1, v_2 围成平行四边形面积 $S := f(v_1, v_2)$



满足: ① $f(v_1, v_1) = 0$

② $f(av_1, v_2) = af(v_1, v_2)$

③ $f(v_1, w_1 + w_2) = f(v_1, w_1) + f(v_1, w_2)$

三维: 亦满足同样性质

~~故~~希望将"体积"推广到 n 维: 需要他~~少~~至少满足这三个条件。

够不够? Yes!

Claim: ~~~~ 对 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

f 满足: ① $f(v_1, \cdots, v_n) = 0$ if $\exists\ v_i = v_j$

② $f(v_1, \cdots, av_i + bw_i, \cdots v_n)$

$= af(v_1, \cdots, v_i, \cdots v_n) + bf(v_1, \cdots, w_i, \cdots, v_n)$

则 f 在相差常数倍意义下唯一.

Pf: Step 1: ① + ② $\Rightarrow$ 反对称性

$$f(v_1, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-th}}}{v_i}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-th}}}{v_j}, \cdots, v_n) + f(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_n)$$

$$+ \underbrace{f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_n)}_{0} + \underbrace{f(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_j, \cdots, v_n)}_{0}$$

$$= f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_n) + f(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_n)$$

$$= f(v_1, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_n) = 0$$

Step 2: 取 $\mathbb{R}^n$ 标准基 $e_1, \cdots, e_n$, 设 $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$

则 $f(v_1, \cdots, v_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\, f(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$$

当 $j_1,\dots,j_n$ 中有相同时 $f(e_{j_1},\dots,e_{j_n})=0$

$$\Rightarrow f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{\{j_1,\dots,j_n\}\in S_n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\, f(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$$

$\{j_1,\dots,j_n\}$ 为一~~些~~个 $\{1,\dots,n\}$ 的~~置~~置换，

可经过有限次对换（每次均产生一个负号）将其换为 $(1,2,\dots,n)$

并且对换次数奇偶性只~~为一个~~不依赖于具体变换的次数，与逆序数同奇偶。

从而 $f(e_{j_1},\dots,e_{j_n}) = (-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)} f(e_1,\dots,e_n)$

$$\Rightarrow f(v_1,\dots,v_n) = \sum_{j_1\cdots j_n\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\, f(e_1,\dots,e_n)$$

#

只须~~再确定~~ $f(e_1,\dots,e_n)$ 就能完全确定 f.

$n=2,3$ 时我们分别有 $f(e_1,e_2)=1$ $\quad f(e_1,e_2,e_3)=1$

从而我们再要求 $f(e_1,\dots,e_n)=1$ （规范性）

这样定义出的 f 就叫作行列式. (determinant)

记 $f(v_1,\dots,v_n) = \det(v_1,\dots,v_n)$

定理 1： $\det(v_1,\dots,v_n)=0 \iff v_1,\dots,v_n$ 线性相关

（对 n 个向量 $v_1,\dots,v_n$，称 $v_1,\dots,v_n$ 线性相关是指存在不全为 0 的 $a_1,\dots,a_n$ 使 $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$）

证 ($\Leftarrow$) 不妨设 $a_1\neq 0 \Rightarrow v_1 = b_2v_2+\cdots+b_nv_n \qquad b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \det(v_1,\dots,v_n) = \det(b_2v_2+\cdots+b_nv_n,\, v_2,\dots,v_n)$$
$$= \sum_{j=2}^{n} b_j \det(v_j, v_2,\dots,v_n) = 0.$$

($\Rightarrow$) 设 $v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni}\end{pmatrix}$ 则 $\det(v_1,\dots,v_n) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

注意到初等列变换不改变 det 的是否为 0

从而可对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 作初等列变换化为下阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & b_{nn} \end{pmatrix}$$ ~~若 $b_{ii}=0$ 则~~

$\det A=0 \Leftrightarrow \exists\, i,\ b_{ii}=0 \Rightarrow \exists$ 一系列初等列变换

将~~每~~某一列变成 0. $\Rightarrow \exists\, c_1,\dots,c_n$ 使

$c_1v_1+\cdots+c_nv_n=0$

因为是初等列变换 $\Rightarrow c_i$ 不全为零 $\Rightarrow v_1,\dots,v_n$ 线性相关

#

(Cramer 法则) 定理 2:

设有
$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
, 方~~程组有唯一解当且仅当~~

当 $\det(a_{ij})_{n\times n}\neq 0$ 时

方程组有唯一解

且对应解为 $\left(\frac{|B_1|}{|A|},\frac{|B_2|}{|A|},\cdots\frac{|B_n|}{|A|}\right)^T$

证: ① 几何观点, 设 $v_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni}\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$

则方程 $\Leftrightarrow$ $x_1v_1+\cdots+x_nv_n=b$ 即 b 是 $v_1,\dots,v_n$ 的线性组合

当 $\det(v_1,\dots,v_n)\neq 0$ 时, $v_1,\dots,v_n$ 线性无关 且 $v_i\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow v_1,\dots,v_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 一组基, $\forall\, b\in\mathbb{R}^n$, $\exists\, x_i$, 使 $b=x_1v_1+\cdots+x_nv_n$

② 考虑 A 的伴随矩阵 A^*, 当 A 可

$A^*=(A_{ji})$ A_{ji} 为 a_{ji} 的代数余子式

则 $A^*A=\det A\cdot I$

$$\Rightarrow \det A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=A^*\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}b_1+\cdots+A_{n1}b_n \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow = \begin{pmatrix} |B_1| \\ \vdots \\ |B_n| \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} |B_1| \\ \vdots \\ |B_n| \end{pmatrix} \quad \text{#}$$

Q: 用~~语言 的 想法~~几何观点思考

$Ax=b$ 的充要条件是什么呢? 存在解

存在唯一解充要条件是什么?

定理3: ~~Laplace 多行展开定理 行列式~~

$|A| = |A^T|$

证: 考虑展开: $|A| = \sum_{i_1 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$

$$|A^T| = \sum_{i_1 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} b_{1i_1} \cdots b_{ni_n}$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n}$$

$$(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} \det(e_1, \cdots, e_n)$$

$$= a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} \det(e_{i_1} \cdots e_{i_n}) = \det(a_{1i_1} e_{i_1} \cdots a_{ni_n} e_{i_n})$$

$$\cancel{= a_{k_1 l_1} \cdots a_{k_n l_n} \det}$$

设经过 s 次对换 将 $\cancel{(i_1 \cdots i_n)}$ 换到 $\cancel{(k_1 \cdots k_n)}$ $(l_1 \cdots l_n)$

此时对应的 $\cancel{(i_1 \cdots i_n)} \longrightarrow \cancel{(l_1 \cdots l_n)}$ $(1, 2, \cdots, n) \longrightarrow (k_1 \cdots k_n)$

$$= (-1)^s \det(a_{k_1 l_1} e_{l_1} + \cdots + a_{k_n l_n} e_{l_n})$$

$$\Rightarrow (-1)^s = (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_n)}$$

$$(-1)^s \cdot (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(l_1 \cdots l_n)}$$

$$\Rightarrow (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_n) + \tau(l_1 \cdots l_n)}$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{k_1 \cdots k_n \in S_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_n) + \tau(l_1 \cdots l_n)} a_{k_1 l_1} \cdots a_{k_n l_n}$$

$l_1 \cdots l_n$ 固定

$$= \sum_{k_1 \cdots k_n \in S_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_n)} a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} = |A^T|$$

定理4：（行列式中的 Laplace 展开定理）

$A=(a_{ij})_{n\times n}$，取定 $i_1,\cdots,i_k$ $1\le k\le n$，其中 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$

则 $$|A|=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}\cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} A\begin{pmatrix} i_1'\cdots i_{n-k}' \\ j_1'\cdots j_{n-k}'\end{pmatrix}$$

即 $|A|$ 等于这 k 行所有 k 阶子式与各自代数余子式的乘积之和。

Rmk：$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$ 为 A 取定 $i_1\cdots i_k$ 行 $j_1\cdots j_k$ 列得到的 k 阶行列式

剩下 $n-k$ 行，列组成 $n-k$ 阶行列式为其余子式，

前乘 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}$ 则为其代数余子式

证明
$$|A|=\sum_{\mu_1,\cdots,\mu_k,\nu_1\cdots\nu_{n-k}\in S_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k,i_1'\cdots i_{n-k}')+\tau(\mu_1\cdots\mu_k,\nu_1,\cdots,\nu_{n-k})} a_{i_1\mu_1}\cdots a_{i_k\mu_k}\, a_{i_1'\nu_1}\cdots a_{i_{n-k}'\nu_{n-k}}$$

选出具体排列 $\mu_1,\cdots,\mu_k,\nu_1,\cdots,\nu_{n-k}$ 可按以下步骤：

① 排出与 $\mu_1,\cdots,\mu_k$ 行组合的 k 列

即从 $\{1,\cdots,n\}$ 中选出 k 个数 $j_1,\cdots,j_k$

满足 $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$，剩下为 $1\le j_1'<\cdots<j_{n-k}'\le n$

② ~~将 $j_1,\cdots,j_k$ 排成~~

让 $\mu_1\cdots\mu_k$ 取遍 $j_1,\cdots,j_k$ 排列

③ 让 $\nu_1,\cdots,\nu_{n-k}$ 取遍 $j_1',\cdots,j_{n-k}'$ 排列

此时 $$|A|=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\ \sum_{\substack{\mu_1,\cdots,\mu_k\\ 为j_1\cdots j_k置换}}\ \sum_{\substack{\nu_1\cdots\nu_{n-k}\\ 为j_1'\cdots j_{n-k}'置换}}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k,i_1'\cdots i_{n-k}')}$$

$$(-1)^{\tau(\mu_1,\cdots,\mu_k\ \nu_1,\cdots,\nu_{n-k})}a_{i_1\mu_1}\cdots a_{i_k\mu_k}\,a_{i_1'\nu_1}\cdots a_{i_{n-k}'\nu_{n-k}}$$

~~希望用 $\tau(j_1$~~

$$\tau(\mu_1,\cdots,\mu_k,\nu_1,\cdots,\nu_{n-k}) \equiv \tau(\mu_1,\cdots,\mu_k) + \cancel{\tau} \ \tau(\nu_1,\cdots,\nu_{n-k})$$
$$+ (j_1-1) + (j_2-2) + \cdots + (j_k-k) \quad \bmod 2$$
$$\equiv (j_1+\cdots+j_k) - \frac{k(k+1)}{2} + \tau(\mu_1,\cdots,\mu_k) + \cancel{\tau(\mu_1} + \tau(\nu_1,\cdots,\nu_{n-k}) \quad \bmod 2$$

先分部排序，再整体排

$$\tau(i_1,\cdots,i_k,i_1',\cdots,i_{n-k}') \equiv \cancel{(-1)}\ i_1-1+i_2-2+\cdots+(i_k-k)$$
$$\equiv \cancel{(-1)}\ (i_1+\cdots+i_k) - \frac{1}{2}k(k+1) \quad \bmod 2$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_k} \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_{n-k}}$$
$$(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-\frac{1}{2}k(k+1)} \cdot (-1)^{j_1+\cdots+j_k-\frac{1}{2}k(k+1)+\tau(\mu_1,\cdots,\mu_k)+\tau(\nu_1,\cdots}$$
$$a_{i_1\mu_1}\cdots a_{i_k\mu_k}\, a_{i_1'\nu_1}\cdots a_{i_{n-k}'\nu_{n-k}}$$

$$= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} (-1)^{i_1+\cdots+i_k} (-1)^{j_1+\cdots+j_k}$$
$$\Big[\sum_{\substack{\mu_1,\cdots,\mu_k \\ \text{为 } j_1,\cdots,j_k \text{ 排列}}} (-1)^{\tau(\mu_1,\cdots,\mu_k)} a_{i_1\mu_1}\cdots a_{i_k\mu_k}\Big]$$
$$\Big[\sum_{\substack{\nu_1,\cdots,\nu_{n-k} \text{ 为 } j_1',\cdots,j_{n-k}' \text{ 排列}}} (-1)^{\tau(\nu_1,\cdots,\nu_{n-k})} a_{i_1'\nu_1}\cdots a_{i_{n-k}'\nu_{n-k}}\Big]$$

$$= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1' & \cdots & i_{n-k}' \\ j_1' & \cdots & j_{n-k}'\end{pmatrix}$$

毕

一些例题

一、计

① (化可化为三角行列式或降阶的行列式)

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0)$$

$$\xlongequal[\text{加到其它行}]{\text{第一行乘}(-1)} \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_1 & 0 & & \ddots & \\ & & & & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a_1}-1 & \frac{x_2}{a_2} & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \\ 1 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_2\cdots a_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1\right)(-1)^{n-1}$$

② $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ \vdots & C_1^1 & & & \vdots \\ 0 & C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix}$ X $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & & & \\ & C_{n-1}^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} = \cdots =$

解：$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

$|A| \xlongequal[\text{前一列}]{\text{每列减}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix}$ $\xlongequal[\text{再做}]{\text{从第二列开始}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & & & \end{vmatrix}$

每列减前一列，再每行减前一行 $= 1$

2. 按某行(列)展开

③(1) 设有 Fibonacci 数列: $F_1=1$　$F_2=2$ $\cdots$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

证: $F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}$

解 $F_1 = |1| = 1$　　$F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

按第一列展开, ~~$F_n = F_{n-1} +$~~

$$F_n = F_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \\ & -1 & 1 & \ddots \\ & & -1 & \ddots \end{vmatrix} = F_{n-1} + F_{n-2}$$ 得

④(2) n阶行列式 $|A|$ 元素为 1或-1, 证: 当 $n>2$ 时.

$abs(|A|) \le (n-1)!(n-1)$

证 $n=3$时: 可对 A 每行乘 1或-1 a, p 此时不改变 $abs(|A|)$

从而不妨设 A 每一列全 1

$$abs|A| = abs\left(\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & x & x \\ 1 & x & x \end{vmatrix}\right)$$

再把 用同样的方法可把第一行除第一个外 ~~第一列消去~~ a_{12} a_{13} 变成 -1

再把第一列加到二、三列

其中 $a,b,c,d \in$ ~~$\{0,-1,-2\}$~~ $\{0,2\}$

$$= abs\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}$$

$= abs(ad-bc) \le 4$ ✓

归纳:

假设 $n-1$ ✓

$\Rightarrow abs(|A|) \le A_{11} + \cdots + A_{1n} \le (n-2)!(n-2)\cdot n$

$\le (n-1)!(n-1)$

(3) ⑤ $|A| = a_{ij}$ A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式

证明：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix} = |A| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$$

解：先按最后一列展开：

第一项 $(-1)^{n+2} x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & \cdots & y_n \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{n+2} x_1 \sum y_j \cancel{A} M_{1j}$

$$= (-1)^{2n+1} (-1)^{j+1} \sum_{j=1}^{n} \cancel{A} M_{1j}\, x_1 y_j$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} A_{1j} x_1 y_j$$

第 i $(i \leq n)$ 项

$(-1)^{n+1+i} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1 & \cdots & y_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1+i} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j M_{ij} (-1)^{n+j}$

$$= (-1)^{2n+1} \cancel{(-1)^{i+j}} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}$$

第 $n+1$ 项，$|A|$

$$\Rightarrow 原式 = -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j + |A|$$

3、提公因子

⑥ (1) $|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

$|A|$ 为关于 a,b,c 的多元齐次多项式 且次数为6

当 $a=0$ 时 $|A| = \begin{vmatrix} b^2 & c^2 & c^2 \\ 0 & (b+c)^2 & 0 \\ b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ a 为 $|A|$ 的因子

同理 b, c 亦是.

$\cancel{又\ |A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ (b-a)(b+a) & (-c)(2b+c), & c(c+2a) \end{vmatrix}}$

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & (c+a+b)(c-a-b) & 0 \\ a^2 & (a+b+c)(b+c-a) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & 0 & (a+b+c)(a+c-b) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c-a-b & 0 \\ a^2 & b+c-a & a-b-c \\ b^2 & 0 & a+c-b \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ $|A| = abc\,(a+b+c)^2 f(a,b,c)$ f 一次齐次多项式

$\Rightarrow$ $f(a,b,c) = k_1 a + k_2 b + k_3 c$ 又 $|A|$ 关于 a,b,c 对称

$\Rightarrow$ $k_1 = k_2 = k_3$

$|A| = k\,abc\,(a+b+c)^3$ 取 $a,b,c=1$ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= \cancel{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 9 + 45 = 54$ $\Rightarrow$ $k = 2$

$\Rightarrow$ $|A| = 2abc\,(a+b+c)^3$

例7 Cauchy 行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$$

把每行的公分母提出

$$|A| = \prod_{i,j=1}^{n} (a_i+b_j)^{-1} \underbrace{\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}}_{B}$$

设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$

$$b_{ij} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (a_i+b_k)}{a_i+b_j}$$

例：$b_{11} = (a_1+b_2) \cdots (a_1+b_n)$ $\quad b_{12} = (a_1+b_1)(a_1+b_3)\cdots(a_1+b_n)$

~~$b_{22}=$~~

$b_{21} = (a_2+b_2) \cdots (a_2+b_n)$

若 $\exists\ a_i = a_j$ 则 B i 行, j 行 相同

$\Rightarrow$ $a_i - a_j$ 为 B 因子，同理 $b_i - b_j$ 为 B 因子

$\prod_{1\le i<j\le n} (a_i-a_j)(b_i-b_j)$ 为 B 的因子，次数为 $2C_n^2 = n(n-1)$

B 每项次数为 $n-1$ $\Rightarrow$ B 为 $n(n-1)$ 次齐次多项式

从而 $|B| = k \prod_{1\le i<j\le n} (a_i-a_j)(b_i-b_j)$

在 B 中

取 $a_i = -b_i$，在 $i\neq j$ 有 $b_{ij}=0$

此时 B 对角阵 $\quad b_{ii} = \prod_{j\neq i} a_i - a_j \Rightarrow |B| = \prod_{i\neq j} (a_i-a_j)$

$$|B| = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_i - a_j) \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} (a_i - a_j) \prod_{1\le i<j\le n} -(b_j - b_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

$\Rightarrow k = 1$

$$\Rightarrow |B| = \prod_{1\le i<j\le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

4. 递推与归纳

⑧ (1) Cauchy 行列式另解:

令 $D_n = |A|$

$1 \sim n-1$ 列减去 n 列

每列可提出（除了除 n 列）

$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_i+b_n} = \frac{b_n - b_j}{(a_i+b_j)\underbrace{(a_i+b_n)}_{\text{每行可提出}}}$$

$\Rightarrow$ ~~$D_n =$~~

$$D_n = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

每行减第 n 行

$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_n+b_j} = \frac{a_n - a_i}{(a_i+b_j)(a_n+b_j)}$$

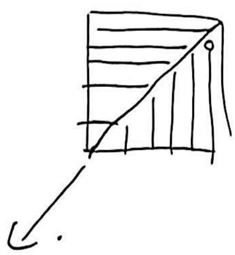
~~可提出，因为~~ 每行最后一个 0

其它均相同

每列可提出

$$\Rightarrow D_n = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_n)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & & 0 \\ \cdots & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)} D_{n-1}$$



递推下去得

$$D_n = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i) \Big/ \prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)$$

⑨

(2) 计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & \cdots & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y \\ \vdots & \ddots & x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1} & y \\ z & \cdots & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & 0 \\ z & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_{n-1} & 0 \\ z & \cdots & z & x_n-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & y \\ z & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_{n-1} & y \\ z & \cdots & z & y \end{vmatrix} \quad (拆分)$$

$$= (x_n-y)D_{n-1} + y\begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & y & 1 \\ z & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y & \vdots \\ \vdots & & & x_{n-1} & 1 \\ z & \cdots & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_n-y)D_{n-1} + y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-z)$$

由对称性

$$D_n = (x_n-z)D_{n-1} + z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)$$

$y\neq z$ 时解得 $D_n = \dfrac{1}{z-y}\left[z\prod_{i=1}^{n}(x_i-y) - y\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)\right]$

若 $y=z$ $\quad D_n = (x_n-y)D_{n-1} + y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)$

$$\Rightarrow D_n = \prod_{i=1}^{n}(x_i-y) + y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y). \quad \#.$$

廿

拆分: ~~例~~

(1) $$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

证明: $|A(t)| = |A(0)| + t\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \left|\qquad\qquad\right| + t\left(A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1}\right)$$

$= \cdots$

$$= |A| + t\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

升阶:

(1) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vandermonde 行列式 很像，升阶

考虑 $$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix}$$

由 Vander Monde 行列式

$$|B| = (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

y^{n-1} 系数为 $-(x_1+\cdots+x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

o 按最后一行展开知 y^{n-1} 系数为 $(-1)^{n+1+n}|A| = -|A|$

$$\Rightarrow |A| = (x_1+\cdots+x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

(Laplace 多行展开) ⑩

证明：

$$(ab'-a'b)(cd'-c'd') - (ac'-a'c)(bd'-b'd)$$

$$+ (ad'-a'd)(bc'-b'c) = 0$$

Pf：

$$LHS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a' & a & a' \\ b & b' & b & b' \\ c & c' & c & c' \\ d & d' & d & d' \end{vmatrix} = 0$$

⑪

设 n阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$，A_{ij} 为 a_{ij} 代数余子式，

求证：
$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

证: 依次将 i列 加到 $i-1$列 $(i = n-1, \cdots, 2)$

$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{1n} & a_{12}-a_{1n} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{2n} & a_{22}-a_{2n} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{nn} & a_{n2}-a_{nn} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ a_{11}-a_{1n} & a_{12}-a_{1n} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{nn} & a_{n2}-a_{nn} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{拆分}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$