第四次作业

1.(1) 求秩及列向量组一个极大无关组

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -11 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -11 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$ $\Rightarrow$ 秩 $r \geq 3$ 又 秩 <4（存在行列式为0）

$\Rightarrow$ ~~秩~~ $r=3$，一二三列线性无关

$\Rightarrow$ $(3,-1,2,4)^T$，$(-2,-3,0,1)^T$，$(0,2,-4,-2)^T$ 为一个 极大无关组

2.(五) 求向量组秩及一个 极大无关组

(2) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ 作行变换

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩 2，α_1，~~α_2~~ α_3 为 一个 极大无关组

(3) $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -7 & -3 & -9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ 行变换

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩2；α_1，α_2 为一个极大无关组

可逆，下述矩阵秩等

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-21-3(\lambda-10)$

$9-3\lambda$

$\lambda-3$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3(\lambda-3) & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

秩 ≥ 2，当 $\lambda=3$ 时，秩 2

$\lambda\neq 3$ 时 秩 3

4、证明：一个矩阵任一子矩阵的秩不超过矩阵的秩

① 考虑非零子式：子矩阵非零子式仍为原矩阵非零子式

② 考虑子矩阵行极大线性无关组，其延伸组为原矩阵行线性无关组

5、求矩阵 A 的秩 及~~其~~ 列向量组 极大无关组

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i^{m} & i^{2m} & i^{3m} & i^{4m} \\ 1 & i^{m+1} & i^{2(m+1)} & i^{3(m+1)} & i^{4(m+1)} \\ 1 & i^{m+2} & i^{2(m+2)} & i^{3(m+2)} & i^{4(m+2)} \\ 1 & i^{m+3} & i^{2(m+3)} & i^{3(m+3)} & i^{4(m+3)} \end{bmatrix}$$

注意：A的 且 $i^{4k}=(i^4)^k=1$

$i^{m}, i^{m+1}, i^{m+2}, i^{m+3}$ 互异

$\Rightarrow$ ~~A~~

考虑 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 为一 Vandermonde 行列式，非零

$\Rightarrow \operatorname{rank} A \geq 4$，又 A 4 行 $\Rightarrow \operatorname{rank} A \leq 4$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = 4$，前 4 列为列向量组极大无关组

3.5/2 判断方程组有无解，有多少解

$$\begin{cases} x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a^2 x_2 + a^4 x_3 + \cdots + a^{2(n-1)} x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + a^s x_2 + a^{2s} x_3 + \cdots + a^{s(n-1)} x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $s<n$, $a \neq 0$

且 $\forall\ 0<r\leq s$, $a^r \neq 1$

对应系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^s & a^{2s} & \cdots & a^{s(n-1)} \end{pmatrix}_{s\times n}$

$\widetilde{A} = (A\ \ \beta)_{s\times(n+1)}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Pf: 由类似 3.4/T5 知 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = s < n$

(由 $a, \cdots, a^s$ 互异，否则 $\exists\ 0<r_1<r_2\leq s$ s.t. $a^{r_1} = a^{r_2}$

$\Rightarrow a^{r_2-r_1} = 1$ 矛盾!)

从而方程组有无穷解.

3.5/4 已知 $Ax=\beta$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, ~~$B=$~~ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

证明: 上述方程组有解

Pf: $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} (A\ \ \beta) \leq \operatorname{rank} B$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A\ \ \beta) \Rightarrow$ 方程组有解

3-6/14 求基础解系及解集

(1) 系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{7}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$x_2 = \frac{3}{14}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$-2 + \frac{21}{14}$

⇒ 基础解系 $\cancel{\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}}$ $\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}}$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解集 $W = \{ k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K \}$

(3) 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \\ 0 & 10 & -5 & 10 \\ 0 & 19 & -8 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

~~解得~~ $\begin{cases} ~~x_3=0~~ \\ ~~x_1=-x_4~~ \\ ~~x_1=-2x_2+x_3-3x_4~~ \end{cases}$ 解为 $\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=0 \end{cases}$

~~基础~~解系 $\eta=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 解集 $W=\{k\eta \mid k\in K\}$

1

3.6/T2. 设 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_t$ 为 n元齐次方程组 $Ax=0$ 一个基础解系，则与 $\eta_1\cdots\eta_t$ 等价的线性无关组也为 $Ax=0$ 一个基础解系

证：

设 $\{\delta_1,\cdots\delta_t\}\cong\{\eta_1,\cdots\eta_t\}$

$A\eta_i=0$ δ_j 可由 η_i 表示，从而 $A\delta_j=0$

$\Rightarrow\{\delta_1\cdots\delta_t\}$ 为 $Ax=0$ 的解且线性无关.

$\forall\ \eta$ 为 $Ax=0$ 的解，η 可由 $\eta_1\cdots\eta_t$ 表示（基础解系定义）

从而 η 可由 $\delta_1\cdots\delta_t$ 表示

$\Rightarrow\{\delta_1\cdots\delta_t\}$ 为基础解系

3.6/T3. 证：n元齐次线性方程组(1)的秩为 $r\ (r<n)$，则任 $n-r$ 个线性无关解都是它的一个基础解系

由3.6，定理1知 每个基础解系所含解个数 $n-r$

设某个基础解系 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$

取任一向量组线性无关解 $\delta_1\cdots\delta_{n-r}$

则 $\delta_1\cdots\delta_{n-r}$ 可由 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 表示

又 $\mathrm{rank}\{\delta_1,\cdots\delta_{n-r}\}=\mathrm{rank}\{\eta_1,\cdots\eta_{n-r}\}$

由3.3命题4知 $\{\delta_1\cdots\delta_{n-r}\}$ 与 $\{\eta_1\cdots\eta_{n-r}\}$ 等价

从而 由3.6/T2知 $\delta_1\cdots\delta_{n-r}$ 为基础解系

下两

增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -54 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 1$

$x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - 2$

一个特解 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 　　齐次基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解集 $U = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \gamma \mid k_1, k_2 \in K\}$

3.7/4 证明：若 γ_0 为非齐次方程组(1)一特解，$\eta_1 \cdots \eta_t$ 为对应齐次……的基础解系

令 $\gamma_1 = \gamma_0 + \eta_1$　$\gamma_2 = \gamma_0 + \eta_2$　……　$\gamma_t = \gamma_0 + \eta_t$

则方程组(1)的任一解 γ 可表示成如下形式

$\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_t\gamma_t$

其中 $u_0, \cdots, u_t$ 满足 $u_0 + \cdots + u_t = 1$

证 $\exists!\ k_1 \ldots k_t$ 使

$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_t\eta_t$

$= \gamma_0 + k_1\gamma_1 + \cdots + k_t\gamma_t - k_1\gamma_0 - \cdots - k_t\gamma_0$

$= (1 - k_1 - \cdots - k_t)\gamma_0 + k_1\gamma_1 + \cdots + k_t\gamma_t$

令 $u_0 = 1 - k_1 - \cdots - k_t$　$u_1 = k_1$　……　$u_t = k_t$

3.8/11 $r<n$，设 $U=\{[a_1,\cdots,a_r,0,\cdots 0]^T \mid a_i\in K, i=1,2,\cdots r\}$

证明 U 为 K^n 一子空间，并求 U 一基和维数

解 $\forall\ [a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0]^T,\ [b_1\cdots b_r,0\cdots 0]^T \in U$

$[a_1,\cdots,a_r,0\cdots 0]^T+[b_1\cdots b_r,0\cdots 0]^T=[a_1+b_1,\cdots,a_r+b_r,0\cdots 0]^T$

$a_i\in K,\ b_i\in K \Rightarrow a_i+b_i\in K \Rightarrow [a_1+b_1,\cdots a_r+b_r,0\cdots 0]^T\in K$

$\forall k\in K\quad k[a_1,\cdots,a_r,0\cdots 0]^T=[ka_1,\cdots,ka_r,0\cdots 0]^T\in K$

$\Rightarrow U$ 为 K^n 子空间.

$e_1=[1,0\cdots 0]\quad e_2=[0,1,0,\cdots 0]\ \cdots\ e_r=[0,\cdots,0,1,0\cdots 0]$

$e_1\cdots e_r\in U$，线性无关，

$\forall\ [a_1,\cdots a_r,0\cdots 0]^T=a_1e_1+\cdots+a_re_r$

$\Rightarrow e_1\cdots e_r$ 为 U 基，$\dim U=r$

3.8/74 求下述矩阵列空间一个基和维数

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2&-7\\0&-1&-3&4\\5&2&0&1\\1&4&1&-11\end{bmatrix}$$

$10+51$

$13\times 4\quad 52$

解 作行变换不改变列线性相关性

$$A\to\begin{bmatrix}1&3&-2&-7\\0&-1&-3&4\\0&-13&10&36\\0&1&3&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-2&-7\\0&-1&-3&4\\0&0&49&-16\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~A前~~ $\operatorname{rank}A=3$，A 列向量空间维数为 3

$\begin{pmatrix}1\\0\\5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ 构成其一组基.