

# 计算物理A第三次作业

王铠泽 PB18020766

## 1 作业题目

- 在球坐标系 $(r, \theta, \phi)$ 下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。

## 2 实现方法

- 直接抽样法

对于分布 $f(\theta, \phi)$ 进行抽样，则有：

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\theta, \phi) \sin\theta = \int_0^\pi \Theta(\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi = 1 \cdot 1 = 1$$

球面的均匀分布：

$$\int d\Omega f(\theta, \phi) = \int 2\pi d\theta d\phi = 1$$

其中 $\Omega$ 是立体角元

由上面可得：

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi}, \Theta = \frac{\sin\theta}{2}, \Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$$

直接抽样法：

设 $\xi_1, \xi_2$ 是 $[0, 1]$ 上生成的两组独立的伪随机数。则：

$$\xi_1 = \frac{\phi}{2\pi}, \xi_2 = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

即：

$$\phi = 2\pi\xi_1, \cos\theta = 1 - 2\xi_2$$

换算成直角坐标时：

$$\begin{cases} x = \sin\theta \cos\phi \\ y = \sin\theta \sin\phi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

- 算法思路

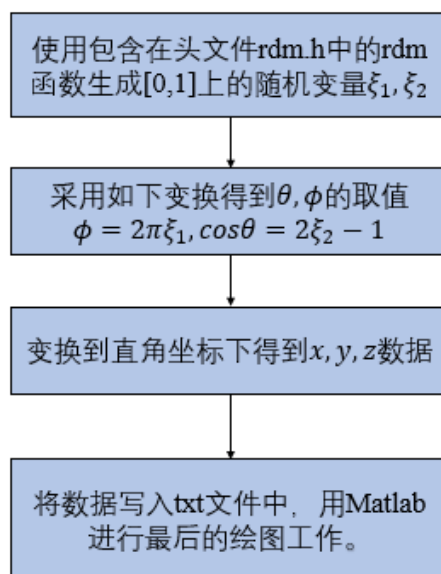


图 1: 算法框图

### 3 程式说明

- direct\_sample.c

该程式是用于生成球面上均匀分布的直接抽样程序。

包含以下内容：

rdm.h

这是一个包含了使用时间种子/默认种子的16807产生器生成随机数的头文件。

void rdm(int N, double\*x, int method)

$method = 0$  为默认种子,  $I_0 = 1$ ;  $method = 1$  为时间种子生成16807的首个数据  $I_0$ 。本程序中为了保证独立性,  $\xi_1, \xi_2$  两个数组各自分别用默认种子和时间种子生成。

int main()

main函数分为两个模块, 分别是生成 $[0, 1]$ 上随机序列 $\xi_1, \xi_2$ , 得到 $\cos\theta, \phi$ 序列, 得到直角坐标 $x, y, z$ 数据并写入文件。

- time\_seed.txt

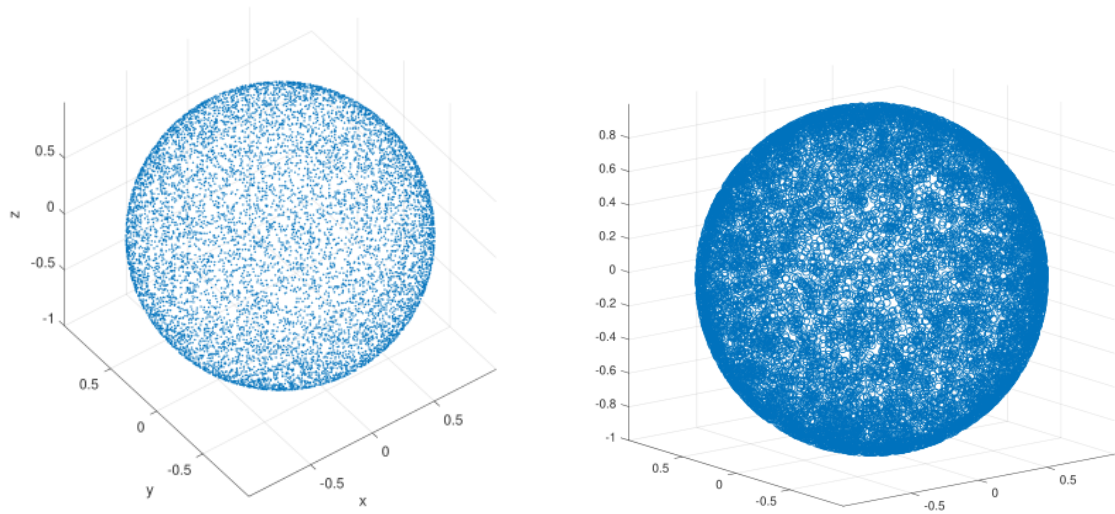
该文本文件显示的是调用时间种子时对应的原始数据。每调用一次便写入一次。检查时以最后一次生成的时间为准。

- coordinate.txt

该文本文件包括了球面上均匀抽样的 $(x, y, z)$ 数据。

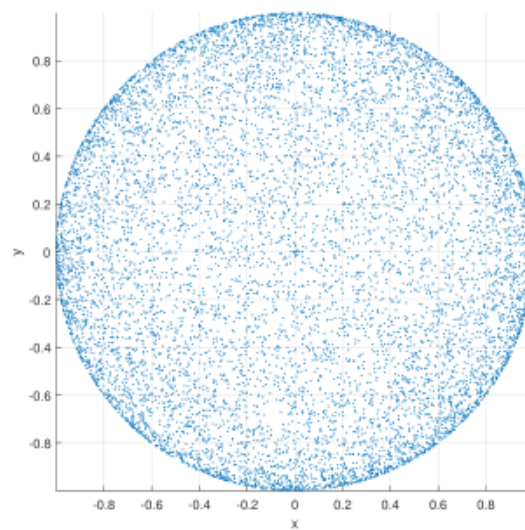
## 4 计算结果

总点数 $N = 10000$ , 计算结果如下:



(a) 散点size=0.3 角度1

(b) 散点size=0.5 角度2



(c) 散点size=0.3 x-y平面分布情况

图 2: 不同角度下的散点分布情况

可以看出, 球面上的均匀分布投影到二维平面上体现出外围密集(边缘发散), 中间稀疏的特征。这是因为在二维平面上, 考虑到上下球面投影一致, 有:

$$g(x, y) dx dy = f(\theta, \phi) d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

所以在二维平面上的外围会出现发散的特征。密度随着 $r$ 增大而逐渐增大。

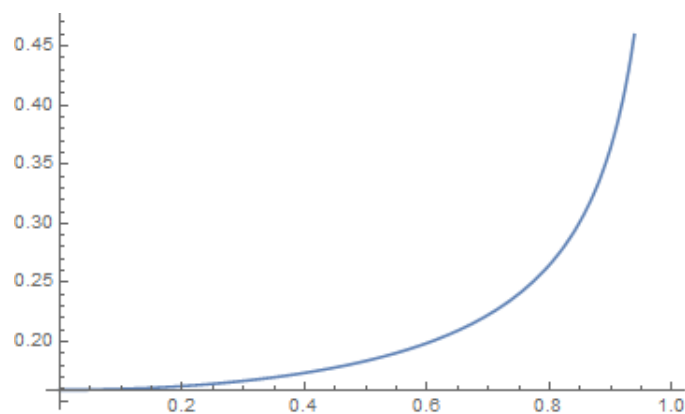


图 3:  $g(r)$  函数图像

## 5 总结

- 直接抽样法简单直观，对于简单的密度分布函数是行之有效的方法。
- 不同空间的“均匀”差别很大，根本原因在于度量不一样，体现在 *Jacobi* 行列式带来的变换因子。因此球面上的均匀嵌入到三维空间看起来不像是“均匀的”。