计算物理A第九次作业

王铠泽 PB18020766

1 作业题目

- 自设若干个随机分布（相同或不同分布，它们有相同或不同的 μ 和 σ 通过 $Monte\ Carlo$ 模拟，验证中心极限定理成立(N=2,5,10)。

  本次实验通过若干个相同分布的离散、连续随机变量序列来验证中心极限定理。

2 实现方法和原理

- 大数定律和中心极限定理

  假设$X_1, ..., X_N$为服从同一分布的随机变量序列。设其期望为 μ，标准差为 σ，$\langle X\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$。大数定律指出:

$$\frac{1}{N}\left(X_1 + ... + X_N\right) \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu$$

  中心极限定理：

$$P\left(\frac{\langle X\rangle - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} < x\right) \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$$

  其中 $\Phi(x)$ 为标准正态概率分布函数:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

- 本实验采用三组不同的随机序列来验证中心极限定理。

  连续型分布:指数分布

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot I(x \le 0)$$

$$P(x) = [1 - exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)] \cdot I(x \le 0)$$

$$\mu = \lambda, \sigma = \lambda$$

  连续型分布:作业四中的自设分布

$$p(x) = 1.81915\frac{e^{-x}}{(x-2)^2} \cdot I(-1 \le x \le 1)$$

$$\mu \approx 0.021, \sigma \approx 0.60$$

  其中$I(E)$为示性函数，表示对x取值的限制。其取值为：

$$I(E) = \begin{cases} 1 & event\ P\ is\ true \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  后面将自动略去示性函数

离散型分布:$Poisson$ 分布

$$p(x=n)=\frac{\lambda^n}{n!}exp(-\lambda)\quad (n=0,1,2...)$$

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}exp(-\lambda)\quad (k=0,1,2...)$$

$$\mu=\lambda,\sigma=\sqrt{\lambda}$$

- 抽样方法

  直接抽样

  对于指数分布和$Poisson$分布，由于反函数简单采用直接抽样法。

  指数分布($\lambda=1$):

$$x=ln\xi$$

  $Poisson$分布:

$$P(n)<\xi\leq P(n+1)\Rightarrow x=n$$

  其中ξ是$[0,1]$上的随机数。

  舍选抽样法

  对于自设分布，其反函数比较复杂，不易求逆，采用舍选抽样。其比较函数如下:

  采用$F(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$作为覆盖$p(x)$的比较函数。$I=\int_{-1}^{1}F(x)dx=2sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$。该舍选效率为:

$$Area[p(x)]/Area[F(x)]\approx 0.812374$$

  更详细的说明参见压缩包中的文件$report04.pdf$。

3 程式说明

定义

$$Y=\frac{\langle X\rangle-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$$

其中$\langle x\rangle$=$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_i$

- exp.c

  该程式生成对应着指数分布时$N=2,5,10$的Y的分布，Y的抽样总点数记为M,取$M=10^4$。

- self.c

  该程式生成对应着自设分布时$N=2,5,10$的Y的分布，Y的抽样总点数记为M,取$M=10^4$。

- poisson.c

  该程式生成对应着$Poisson$分布时$N=2,5,10$的Y的分布，$\langle X\rangle$的抽样总点数记为M,取$M=10^4$。

- rdm.h

  这是一个包含了使用16807产生器生成指定长度的$[0,1]$上均匀分布随机数函数的头文件。

  void rdm(int N,double *x,int method)

  该函数将输入的指针x对应的长度为N的数组用$[0,1]$上的随机数填满。method是关于初始种子的选择。method=0:默认种子;method=1,时间种子。程式中故意采用$sleep$函数就是为了得到不同的时间种子。

- time_seed.txt

  16807产生器抽样时对应的时间种子数据(每次1个种子)。调用多少次16807生成器就生成多少个数据记录。每一个分布对应的种子已经手动加上分布的对应了。

- p_self.txt

  这是一类中间数据文件。在实现对自设函数抽样时，先把按自设密度函数$p(x)$抽取的随机数存入此文件，后续计算$\langle x\rangle$的时候再从此文件读入随机序列。

- exp/self/poisson(N=2/5/10/100/1000/10000).txt

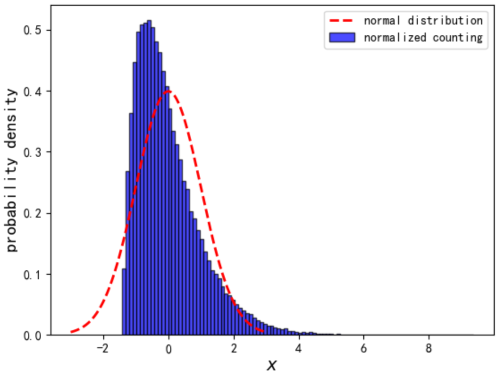
  不同分布下不同N值对应的数据文件。

4 计算结果

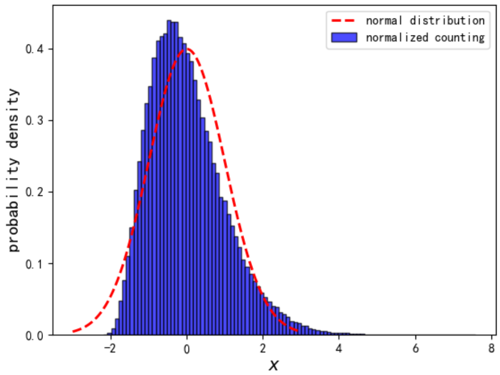
以下计算通过计算$Y=\frac{\langle X\rangle-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$,对$Y$抽样点数设为$M=10000$。下面红线是标准正态分布曲线。

4.1 指数分布

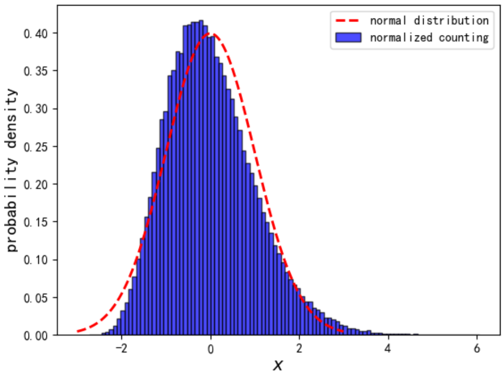
$$p(x)=e^{-x}\quad(x>0)$$



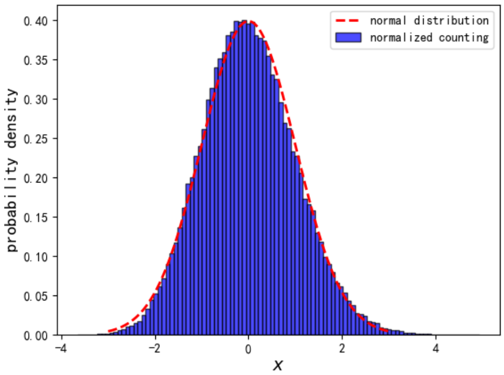
(a) N=2



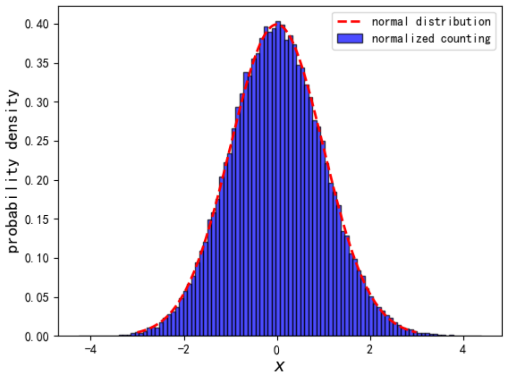
(b) N=5



(c) N=10



(d) N=100



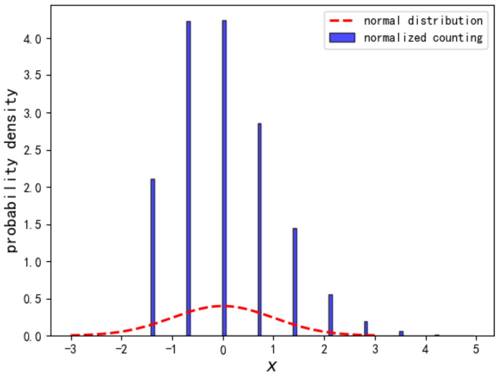
(e) N=1000

图 1: 不同N下面的Y分布情况

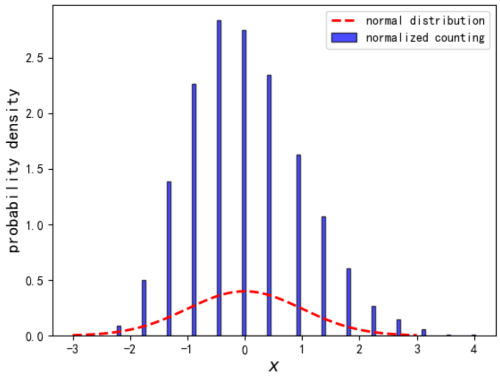
可见，当$N = 100$时已经和正态分布曲线非常吻合了。

4.2 Poisson分布

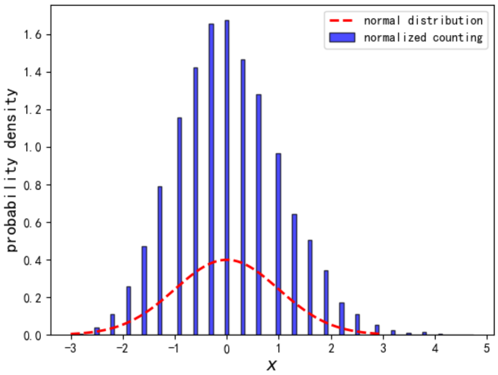
$$p(x=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$$



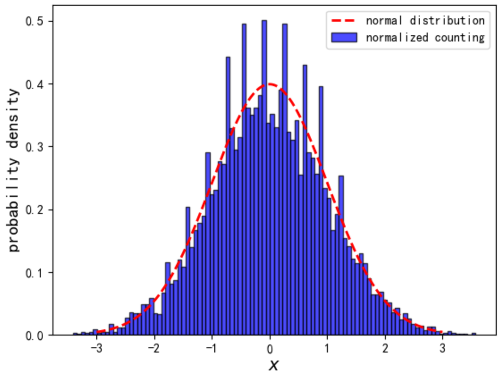
(a) N=2



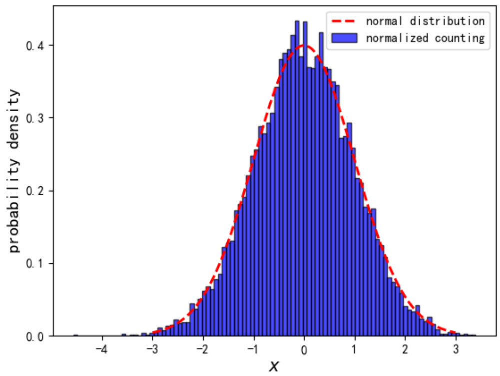
(b) N=5



(c) N=10



(d) N=1000



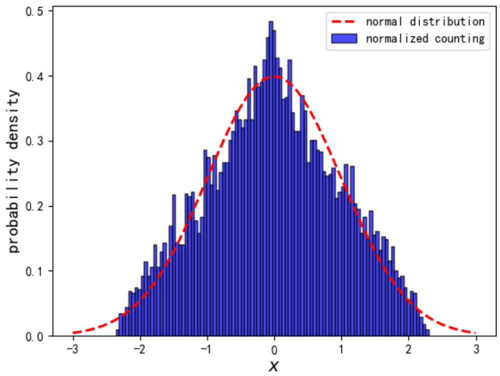
(e) N=10000

图 2: 不同N下面的Y分布情况

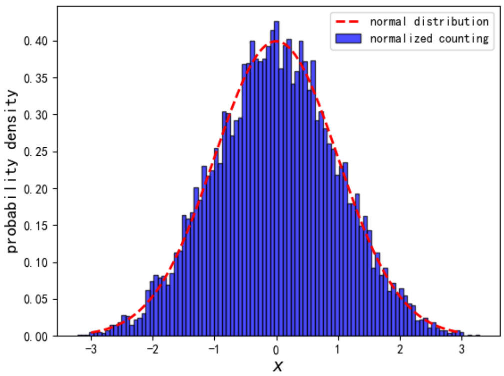
对于离散型的$poisson$分布，可见Y收敛到正态分布的速度要比连续性的指数分布慢得多，直到$N=10000$时在中心处仍有少许“毛刺”。

4.3 自设分布

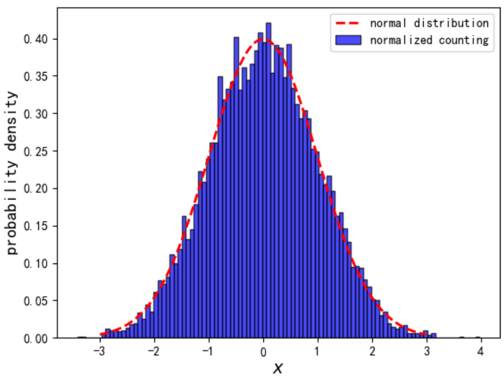
$$p(x)=1.81915\frac{e^{-x}}{(x-2)^2}\quad(-1\leq x\leq 1)$$



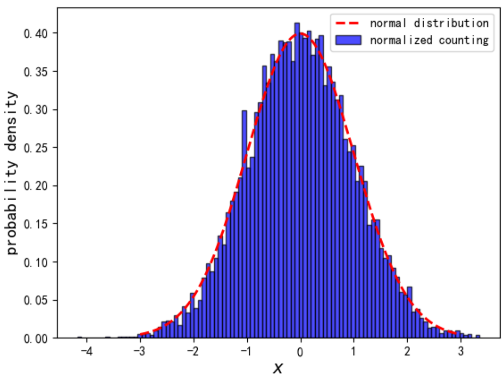
(a) N=2



(b) N=5



(c) N=10



(d) N=1000

图 3: 不同N下面的Y分布情况

对于这个自设分布，当$N=1000$时有比较好的拟合效果，但是相比指数分布的还是收敛略慢。不过相比之下，当$N=5$时也已经比较靠近正态分布函数了，其原因可能是本来的分布函数在$(-1,1)$上的对称性比指数分布的要高。

5 总结

- 本次实验通过不同分布下的随机序列验证了中心极限定理成立。
- 中心极限定理给出了计算物理中估计误差非常重要的一个公式:

$$\langle x\rangle \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\right)$$

这表示当N足够大时，误差$\sigma \sim \sigma_x/\sqrt{N}$