

计算物理A第二次作业

王铠泽 PB18020766

1 作业题目

- 用16807产生器测试随机数序列中满足关系 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 的比重。讨论Fibonacci延迟产生器中出现这种关系的比重。

2 实现方法

- Lehmer线性同余随机数产生器

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \bmod m$$

$$x_n = I_n / m$$

在本次实验中，主要采用的是16807产生器(最低标准产生器)，即 $a = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1$

- Schrage方法

为了在计算过程中中间数据不溢出，使用Schrage方法来求取余数。

$$az \bmod m = \begin{cases} a(z \bmod q) - r[z/q] & a(z \bmod q) - r[z/q] \geq 0 \\ a(z \bmod q) - r[z/q] + m & otherwise \end{cases}$$

- Fibonacci产生器

这是一种延迟产生器，首先种下 $\max\{p, q\}$ 个种子，然后根据如下公式迭代产生随机序列：

$$I_n = I_{n-p} \otimes I_{n-q}$$

其中 \otimes 可以代表加法，减法或者XOR运算等。本次实验中，采用16807产生器和其默认种子 $I_0 = 1$ 产生Fibonacci产生器的前 $\max\{p, q\}$ 个数据，运算符采用加法运算符。

实验中， (p, q) 取如下建议的经验值：(24, 55), (38, 89), (37, 100), (30, 127)

3 程式说明

- Fibonacci.c

该程式分别通过16807产生器和不同 (p, q) 组合下Fibonacci产生器产生100000个随机数并且统计题目要求关系比例。

包含以下函数：

```
int shrage (int a, int m, int In)
```

返回值是 $aI_n \bmod m$

```
int initial (int n)
```

$n = 0$ 为16807产生器默认种子 $I_0 = 1$, $n = 1$ 为时间种子生成 I_0 。本实验中采用默认种子。

```
int main()
```

main函数分为三个模块，分别是用16807产生器生成随机数，用不同 (p, q) 组合的Fibonacci产生器生成随机数，计算比例。

- ratio.txt

该文本文件记录了16807产生器和不同的Fibonacci产生器对应的关系比例。

4 计算结果

在理想条件下，得到 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 等价于在 $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 区域上找到 $x < z < y$ 区域的概率。其体积为一个四棱锥，为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。如下图所示区域即为所求。

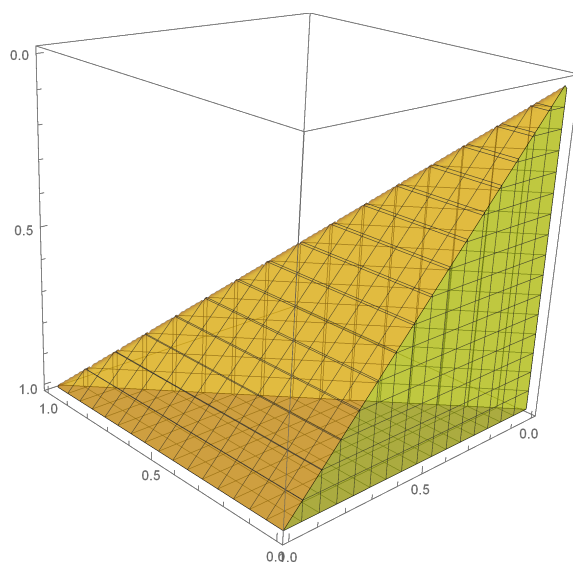


图 1: 理想期望值

4.1 比例关系比较

产生器	$X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 比例	和理想比例之差绝对值
16807	0.165300	0.001367
$Fibonacci, (p, q) = (55, 24)$	0.165980	0.000687
$Fibonacci, (p, q) = (89, 38)$	0.165700	0.000967
$Fibonacci, (p, q) = (100, 37)$	0.165840	0.000827
$Fibonacci, (p, q) = (127, 30)$	0.168300	0.001633
$Fibonacci, (p, q) = (250, 103)$	0.166190	0.000477
$Fibonacci, (p, q) = (31, 3)$	0.168060	0.001393

表 1: 不同产生器 $X_{n-1} < X_{n+1} < X_n$ 比例

5 总结

- *Fibonacci*产生器的质量一定程度上依赖于 (p, q) 的选择。本次实验中, $(250, 103)$ 的产生器效果最理想。而 $(127, 30)$ 效果一般。相比之下, 满足准则: $p^2 + q^2 + 1 = \text{prime number}$ 的 $(31, 3)$ 效果一般。很多建议的 (p, q) 数值都不满足该准则, 所以*Fibonacci*参数选择可能是一个比较复杂的经验依赖性工作。
- 总体上看, *Fibonacci*产生器比16807产生器效果略好。
- *Fibonacci*由于需要的种子数量较多, 其对随机数生成的质量有影响。本次实验采用16807产生种子。