计算物理A第三次作业

王铠泽　　PB18020766

作业题目

- 在球坐标系(r,θ,ϕ)下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。

实现方法

- 直接抽样法

  对于分布$f(\theta,\phi)$进行抽样，则有：

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\theta,\phi) sin\theta = \int_0^\pi \Theta(\theta) sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi = 1 \cdot 1 = 1$$

  球面的均匀分布：

$$\int d\Omega f(\theta,\phi) = \int 2\pi d\theta d\phi = 1$$

  其中Ω是立体角元

  由上面可得：

$$f(\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi}, \Theta = \frac{sin\theta}{2}, \Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$$

  直接抽样法：

  设ξ_1,ξ_2是$[0,1]$上生成的两组独立的伪随机数。则:

$$\xi_1 = \frac{\phi}{2\pi}, \xi_2 = \frac{1-cos\theta}{2}$$

  即：

$$\phi = 2\pi\xi_1, cos\theta = 1-2\xi_2$$

  换算成直角坐标时：

$$\begin{cases} x = sin\theta cos\phi \\ y = sin\theta sin\phi \\ z = cos\theta \end{cases}$$

- 算法思路

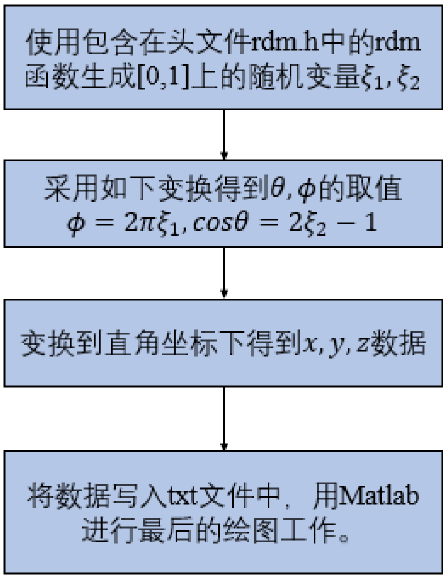


图 1: 算法框图

程式说明

- direct_sample.c

  该程式是用于生成球面上均匀分布的直接抽样程序。

  包含以下内容：

  rdm.h

  这是一个包含了使用时间种子/默认种子的16807产生器生成随机数的头文件。

  void rdm(int N, double*x, int method)

  $method = 0$ 为默认种子，$I_0 = 1$; $method = 1$ 为时间种子生成16807的首个数据 I_0。本程序中为了保证独立性，ξ_1, ξ_2两个数组各自分别用默认种子和时间种子生成。

  int main()

  main函数分为两个模块，分别是生成$[0, 1]$上随机序列ξ_1, ξ_2，得到$cos\theta, \phi$序列，得到直角坐标x, y, z数据并写入文件。

- time_seed.txt

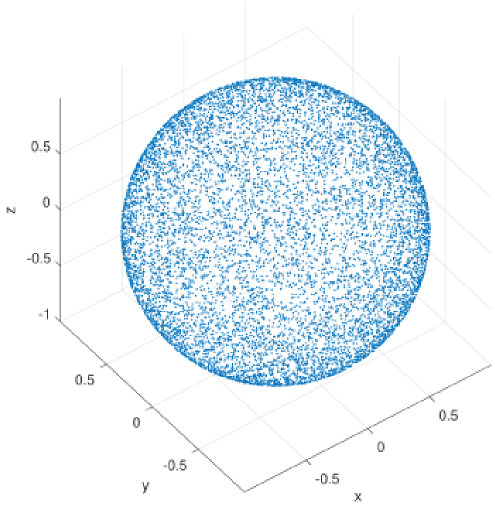
  该文本文件显示的是调用时间种子时对应的原始数据。每调用一次便写入一次。检查时以最后一次生成的时间为准。

- coordinate.txt

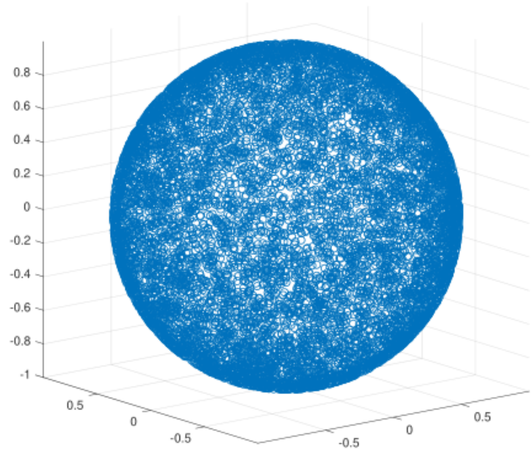
  该文本文件包括了球面上均匀抽样的(x, y, z)数据。

计算结果

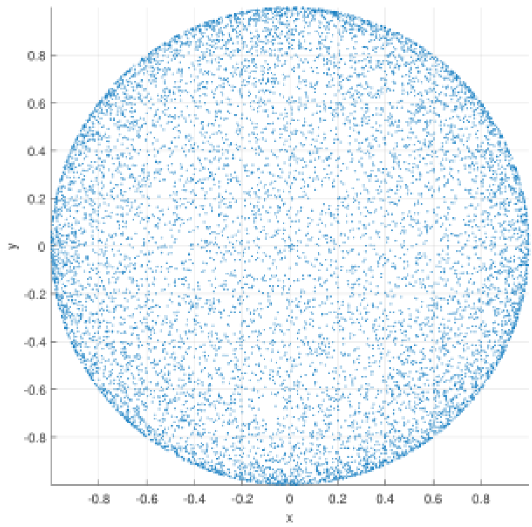
总点数$N = 10000$,计算结果如下:



(a) 散点size=0.3 角度1



(b) 散点size=0.5 角度2



(c) 散点size=0.3 x-y平面分布情况

图 2: 不同角度下的散点分布情况

可以看出，球面上的均匀分布投影到二维平面上体现出外围密集(边缘发散)，中间稀疏的特征。这是因为在二维平面上，有:

$$g(x,y)dxdy = f(\theta,\phi)d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi}sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{4\pi}|\frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(x,y)}| = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

所以在二维平面上的外围会出现发散的特征。密度随着r增大而逐渐增大。

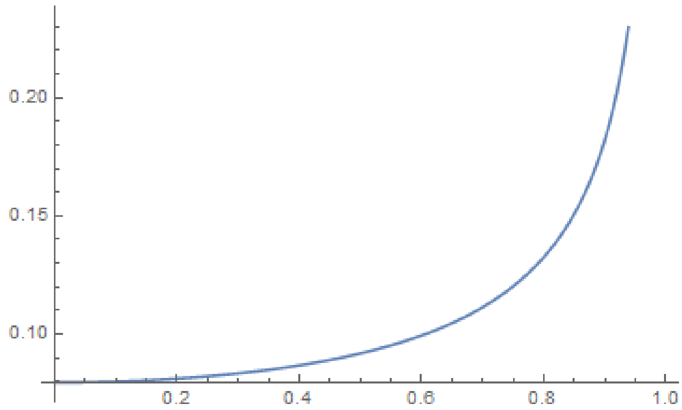


图 3: $g(r)$函数图像

总结

- 直接抽样法简单直观，对于简单的密度分布函数是行之有效的方法。
- 不同空间的"均匀"差别很大，根本原因在于度量不一样，体现在$Jacobi$行列式带来的变换因子。因此球面上的均匀嵌入到三维空间看起来不像是"均匀的"。