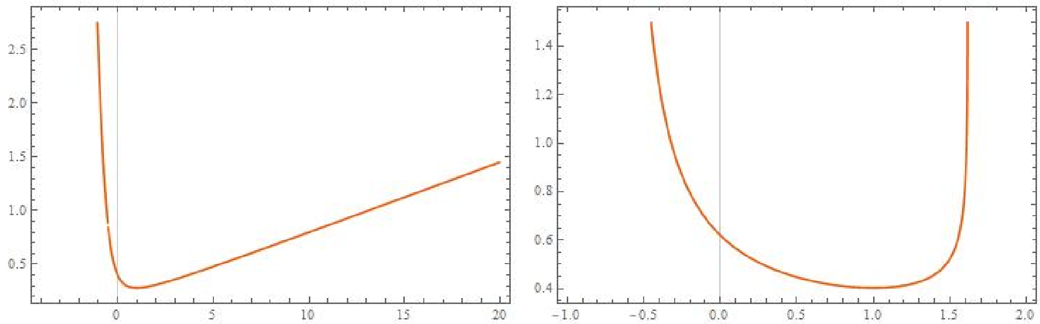
计算物理A第四次作业

王铠泽　　PB18020766

1　作业题目

- 设概率密度函数满足关系式:
$$p(x)=\frac{dp(x)}{dx}\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$
请找到其中的一种函数，讨论其性质，并给出抽样方法。

- 尝试两个不同组合$(a,b,c,d)=(1,1,1,1)/(-1,1,1,1)$，得到一般的图像大概如下:



(a) $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$　　(b) $(a,b,c,d)=(-1,1,1,1)$

图 1: 函数形态

2　实现方法

本实验着重讨论两种情况，分别提取出分母平方项和一次方项的特征，令

$$(a,b,c,d)=(-1,0,1,0),(a,b,c,d)=(0,-2,1,0)$$

即:

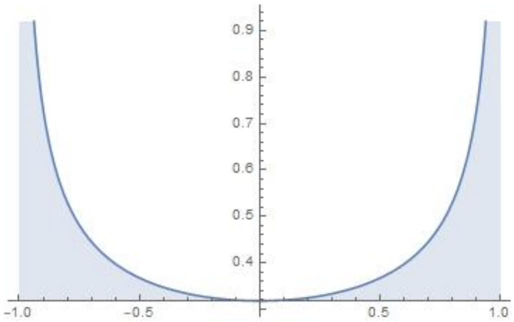
$$p_1(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot I(-1\leq x\leq 1)$$
$$p_2(x)=\frac{1}{A}\frac{e^{-x}}{(x-2)^2}\cdot I(-1\leq x\leq 1)$$

其中$I(-1\leq x\leq 1)$为示性函数，表示对x取值的限制。其取值为：

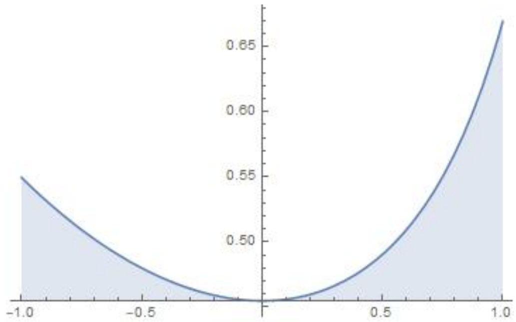
$$I(-1\leq x\leq 1)=\begin{cases}1 & -1\leq x\leq 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

后面将自动略去示性函数，默认$p(x)$定义在$[-1,1]$上。

使用$Mathematica$的数值积分功能得到$A=0.549707$，$\frac{1}{A}\approx 1.81915$。
函数图像如下：



(a) $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



(b) $\frac{1}{A}\frac{e^{-x}}{(x-2)^2}$

图 2: $p_1(x), p_2(x)$函数图像

在本次实验中，采用的是16807产生器(最低标准产生器)，即 $a = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1$。

- 直接抽样法

  对于$p_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$采用简单抽样。先求累计函数$F(x)$:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} p_1(\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}arcsin(x) + \frac{1}{2}$$

  采用16807产生器生成随机序列ξ,则目标抽样为

$$x = sin[\pi(\xi - \frac{1}{2})]$$

  这和$x = sin(2\pi\xi)$的抽样等价。

- 舍选抽样法

  由于对于$p_2(x) = \frac{1}{A}\frac{e^{-x}}{(x-2)^2}$没有解析的累计函数，另一方面若想采用变换抽样法比较难以找到合适的变换使得$|J| = p_2(x)$。所以只能舍弃一些效率选用舍选抽样法。

  采用$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$作为覆盖$p_2(x)$的比较函数。$I = \int_{-1}^{1} F(x)dx = 2sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$。该舍选效率为:

$$Area[p_2(x)]/Area[F(x)] \approx 0.812374$$

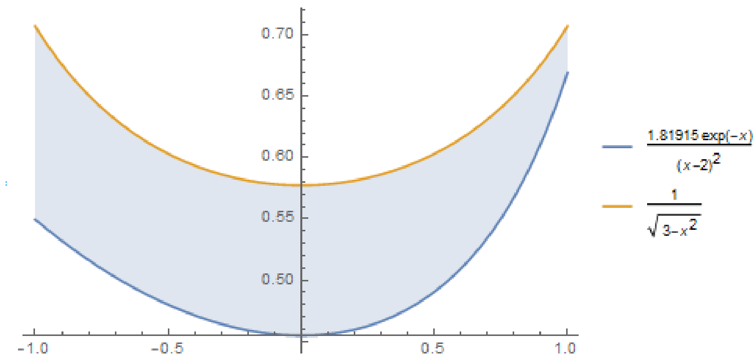


图 3: $F(x), p_2(x)$函数图像

抽样方法: 生成两个$[0,1]$上随机序列ξ_1,ξ_2。在x方向上，按$F(x)$分布抽样:

$$\xi_x=\sqrt{3}sin[2sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})(\xi_1-\frac{1}{2})]$$

在y方向上，按$\frac{1}{F(\xi_x)}$的均匀分布抽样:

$$\xi_y=F(\xi_x)\xi_2$$

比较关系:

$$\begin{cases}\xi_y<p_2(\xi_x) & accept\\ \xi_y\geq p_2(\xi_x) & reject\end{cases}$$

3 程式说明

- rdm.h

  这是一个包含了使用16807产生器生成指定长度的$[0,1]$上均匀分布随机数函数的头文件。

  void rdm(int N,double *x,int method)

  该函数将输入的指针x对应的长度为N的数组用$[0,1]$上的随机数填满。method是关于初始种子的选择。method=0:默认种子;method=1,时间种子。

  本次实验中，在生成ξ_1,ξ_2时，为了保证独立性，分别采用默认种子和时间种子。

- pdf_sampling_1.c

  该程式产生按$p_1(x)$分布进行抽样的一组指定个数(N)的随机数。

- pdf_sampling_2.c

  该程式产生按$p_2(x)$分布进行抽样的一组指定个数(N)的随机数。

- time_seed.txt

  该文本文件显示的是调用时间种子时对应的原始数据。

- p_1(x).txt p_2(x).txt

  分别记录根据$p_1(x),p_2(x)$为密度函数生成的随机序列。

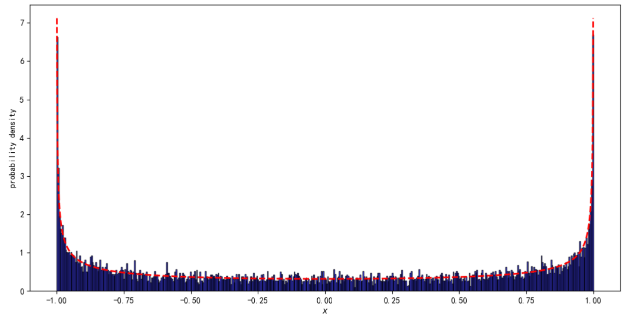
4 计算结果

下面根据数据使用$Python$程序做出频数分布直方图，检验生成随机序列。预设$bin=500$，$p_1(x)$总点数$N=10000$；$p_2(x)$未舍选之前总点数为$N=10000$,$N=100000$,$N=1000000$。

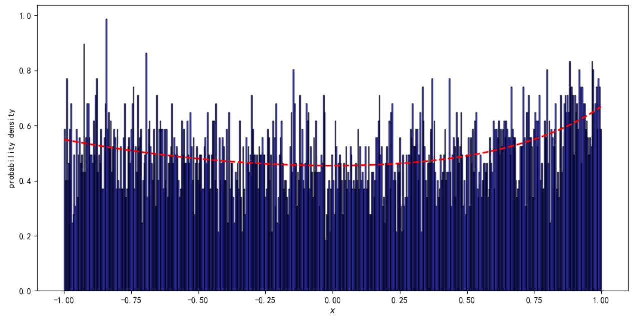
实际效率为：0.809300,0.811870,0.812796。

4.1 直方图检验

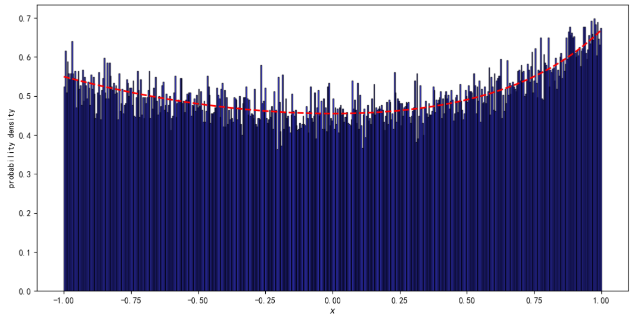
可见，$p_1(x)$序列采用直接抽样法，在点数较少的情况下收敛情况良好。而$p_2(x)$序列由于采用的是舍选法，需要更多的点数来得到良好收敛的概率密度函数。



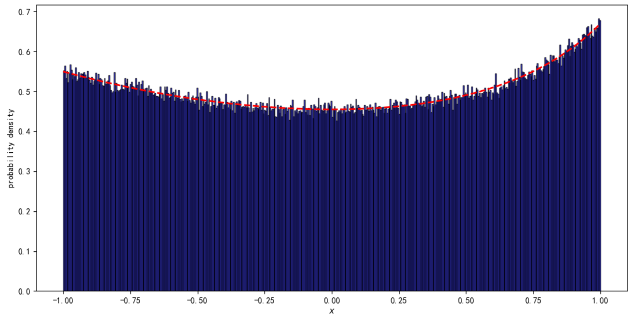
(a) $p_1(x)$序列，$N = 10000$



(b) $p_2(x)$序列，$N = 10000$



(c) $p_2(x)$序列，$N = 10000$



(d) $p_2(x)$序列，$N = 1000000$

图 4: 直方图检验(红色虚线为理想分布)

5 总结

- 当累计函数难以求得反函数时，舍选法是一个有效得到抽样的方法，但是其效率会降低，需要仔细地选择合适的比较函数。选择比较函数，一方面要尽可能和抽样函数形状，趋势一致，另一方面，还要容易求得反函数。本题中的比较函数$F(x)$其实和$p_1(x)$是同一类型函数，因而满足上述要求。
- 满足微分方程$p(x) = \frac{dp(x)}{dx}\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$的函数往往在某点会发散，因而只能将其定义在某个区间上，甚至密度函数出现不连续点。