

# 迭代 混沌 分形

## § 1 计算物理量的迭代方法

中学中我们经常遇到的等差序列

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots$$

和等比序列

$$a_0, a_0 q, a_0 q^2, \dots$$

这两个序列的共同之处是，自第二项开始，每一项都是对其前一项作同一种运算(或加 $d$ ， $x_{n+1} = x_n + d$ ；或乘以 $q$ ， $x_{n+1} = qx_n$ )而得来的。这种不断重复同一种运算的算法称为迭代法。

如果一个物理量的表达式中含有该物理量本身，即

$$x = f(x) \quad (1.1.1)$$

求解这个物理量时通常采用数学上的迭代法。

### 1.1 直接迭代法

先设一个初值 $x_0$ ，计算出 $f(x_0)=x_1$ ，再将 $x_1$ 代入计算，得到 $f(x_1)=x_2$ ， $f(x_2)=x_3$ ，于是每一步都是

$$f(x_n) = x_{n+1} \quad (1.1.2)$$

的形式，等等。一直到

$$x_{n+1} = x_n \quad (1.1.3)$$

实际计算中由于计算的步数是有限的，因此很难实现严格的相等，通常设定一个收敛系数 $\varepsilon$ ，当

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right| \leq \varepsilon \quad (1.1.4)$$

得到 $x_{n+1} \approx x_n$ 。 $\varepsilon$ 的数值可以是万分之一，或者千分之一或者百分之一，这由系统是否容易收敛而定。如果系统容易收敛，可把 $\varepsilon$ 的数值定小一些。

### 1.2 牛顿迭代法

求根的方程的更为一般的形式是，

$$g(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

(1.1.1)式是一个特例，形式为 $g(x) = f(x) - x = 0$ 。

设方程(1.2.1)的根为 $x_0$ ，将方程在 $x_0$ 的邻域内作Taylor展开，取其一阶近似，即

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad (1.2.2)$$

于是有

$$x = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \quad (1.2.3)$$

实际计算时同样先估计一个初值 $x_0$ ，计算出 $x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$ ，再将 $x_1$ 代入计算，得到

$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}$ ， $x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)}$ ，...每一项都是对其前一项作相同的运算：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \quad (1.2.4)$$

除相对误差精度 $\varepsilon$ 外，牛顿迭代法还有另一个收敛系数，即绝对误差精度 $\delta$ ，需同时满足

$$|g(x_{n+1})| < \delta \quad (1.2.5)$$

及(1.1.4)式，才能作为方程的根。

牛顿迭代法的收敛速度快，因为考虑到了函数的一阶导数，这是它的主要优点，因此应用较广。但牛顿迭代法在运算中每迭代一次，就必须计算一次函数值和函数的一阶导数值，这在求解一些比较复杂的方程的根时，会由于一些函数的一阶导数值难以计算而受到限制。

### 1.3 混合输入迭代法

对于复杂的物理系统，常常出现这样的情况：无论多少次迭代，都不能达到收敛的精度，也就是不收敛。但是从物理系统本身来说，应该是收敛的。不收敛是迭代过程太粗糙所造成的。要使迭代收敛的可保留 $x_{n-1}$ 和 $x_n$ ，构造新的输入为：

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1} \quad (1.3.1)$$

即把前两步计算的结果混合后作为新的输入，来计算 $f(x_{k+1})$ ：

$$f(x_{n+1}) = f(\alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1}) = x_{n+2} \quad (1.3.2)$$

系数 $\alpha$ 称为混合系数，介于0和1之间： $0 < \alpha < 1$ 。在有些复杂系统中，即使混合前两步，还不能使之收敛。要用到前三步、前四步、甚至前五步结果的混合才能达到收敛。例如，三

步混合： $f(x_{n+1}) = f(\alpha x_n + \beta x_{n-1} + (1 - \alpha - \beta)x_{n-2}) = x_{n+2}$ ，其中， $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$ 。

### 1.4 多元变量

在(1.1.1)式中，变量 $x$ 可能不是仅一个物理量，而可以是一组量 $\{x_i\}$ ：

$$\{x_i\} = f(\{x_i\}) \quad (1.4.1)$$

最简单的是两个量的情况：

$$\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

如果是采用直接迭代法，形式就是

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (1.4.3)$$

则收敛是指：要求其中每一个 $x_i$ 都满足收敛条件(1.1.4)式。如果采用混合输入迭代法，例如

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}, \alpha y_n + (1-\alpha)y_{n-1}) \\ y_{n+1} = g(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}, \alpha y_n + (1-\alpha)y_{n-1}) \end{cases} \quad (1.4.4)$$

更进一步，在许多情况下，待求的物理量 $\{x_i\}$ 本身是一组函数，例如 $\{\varphi_i(x)\}$ 。这时把一组函数 $\{\varphi_i(x)\}$ 输入(1.4.3)右边，在左边输出一组新的函数 $\{\varphi_i(x)\}$ ，如下式。对每一个变量 $x$ 的函数值 $\{\varphi_i(x)\}$ 都要做这种迭代

$$\{\varphi_i(x)\} = f(\{\varphi_i(x)\}) \quad (1.4.5)$$

(1.4.5)式这样的计算量是巨大的。但是在解决复杂系统的时候，人们经常不得不这么做，例如在计算多原子系统时，电子的密度就是要通过迭代法求解的。

## §2 混沌

迭代是许多实际事物的一个数学模型，例如上面所述的用来求方程的跟。线性函数的迭代，其轨道的性质是十分简单的，而非线性函数的迭代，哪怕迭代函数是一个二次式，其轨道行为也可能变得十分复杂，甚至导致出人意料之外的现象，如混沌和分形。混沌与分形的关系十分密切<sup>[1~5]</sup>，这里我们先介绍混沌。

混沌(chaos)是一种确定性系统中出现的（或决定论规律所产生的）类似随机(混乱、无序)的过程。它首先是由 Lorenz（洛伦兹）<sup>[6]</sup>在流体热对流的简化模型的计算中观察到的。他当初（20 世纪 50 年代末）使用的是电子管计算机，速度很慢。他发现在同样条件下重复计算的气候结果起始时还一致，但经过一段时间后就出现了显著的差异。这种情况表明，由于非线性的 Lorenz 方程在长时间迭代过程中的分岔，导致了结果的不确定性，所以长期天气预报必然失败。这就是说，一个决定论系统可以引起无规涨落，随机性不必由外界引入，而可由系统内在的简单的确定的规律产生。1975 年李天沿和约克（Yorke）<sup>[7]</sup>首次在数学文献中使用“混沌”这一名词，用它来表示某些非线性函数的一维迭代（或映射）的类似随机的输出。

### 2.1 一维迭代 Logistic 方程

Logistic（逻辑斯谛）方程是一个很简单的非线性的抛物线函数，它可以表示为：

$$y = \lambda x(1-x), \quad (0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq \lambda \leq 4) \quad (2.1.1)$$

这个函数以 $x$ 的值代入得到 $y$ 后，可以用 $y$ 的值作为新的 $x$ 值得出新的 $y$ 值，这样的迭代可以不断地进行下去，因此这个函数可以采用以下的迭代形式：

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n), \quad (0 \leq x_n \leq 1 \quad 0 \leq \lambda \leq 4) \quad (2.1.2)$$

其中 $x_n$ 是 $n$ 次迭代时的值， $x_{n+1}$ 是 $n+1$ 次迭代时的值。这里迭代前后的值都是 $x$ 值， $n$ 次迭代得到的所有的值都可以在 $x$ 轴上表示出来，因此它是一维迭代。这个迭代过程是通过抛物线函数把 $x_n$ 变换（或映射）成 $x_{n+1}$ 的过程，所以它常被称为 Logistic 映射或抛物线映射。这里，logistics 一词的原意是后勤供应，因为方程中 $(1-x_n)$ 这一因子反映了供应状况对下一次迭代数量的影响。这里的基本假定是供应总量是固定的，第 $n$ 次迭代中 $x_n$ 增大，对资源

消耗就增大,  $(1-x_n)$  减小, 限制了  $x_{n+1}$  的增长速度。

这个公式可以变换成以下的更简单的形式:

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2, \quad (-1 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 2) \quad (2.1.3)$$

文献中这两个公式都在使用, 我们使用前一个公式。

(2.1.2)式中的  $\lambda$  是重要的决定系统迭代过程性质的参量,  $\lambda x$  为线性项,  $\lambda x^2$  为非线性项。这个迭代模型已被深入地研究, 并有着广泛的应用, 它很早就被 May (梅尔) 用于年度生物种群数量的模拟<sup>[8,9]</sup>。他发现非线性参数的改变, 不仅影响着平衡时群体的数值, 而且还影响群体是否能够实现平衡。

迭代过程可以通过作图来表现。首先作  $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$  曲线, 得到图 2.1 中的  $x_n$  值处于 0 和 1 之间的各个抛物线,  $\lambda$  愈大, 抛物线愈高。在我们限定的范围内, 抛物线的最高值是  $\lambda = 4$ ,  $x_n = 0.5$  时得到的  $x_{n+1}$  是 1.0。图 2.1 中的四张图的  $\lambda$  分别为 0.8, 2.5, 3.1 和 3.8, 均小于 4,  $x_n$  和  $x_{n+1}$  轴的最大值都取为 1.0。在  $\lambda = 0.8$  时, 沿  $x_n$  轴取一个起始点  $x_0$  (如 0.4), 向上画一条直线到与抛物线相交, 从  $x_{n+1}$  轴上得出结果值  $x_1$  (如 0.192), 用这个新值作为下一步的迭代值, 这相当于图上向左的水平线和  $45^\circ$  分角线相交。接着, 图中向下的垂直线和抛物线相交, 这相当于从  $x_{n+1}$  轴上得出  $x_2$  值进行新的迭代。由于每一个  $x_{n+1}$  值都要反馈给同一个函数作为新的输入实现迭代, 这样的水平线和垂直线就不断向左、向下延伸, 最后趋向于 0, 如图所示。由图可见, 在  $\lambda = 0.8$  时抛物线较矮, 除原点外曲线与  $45^\circ$  分角线不相交。此时, 经过多次迭代后, 系统绝灭为 0。

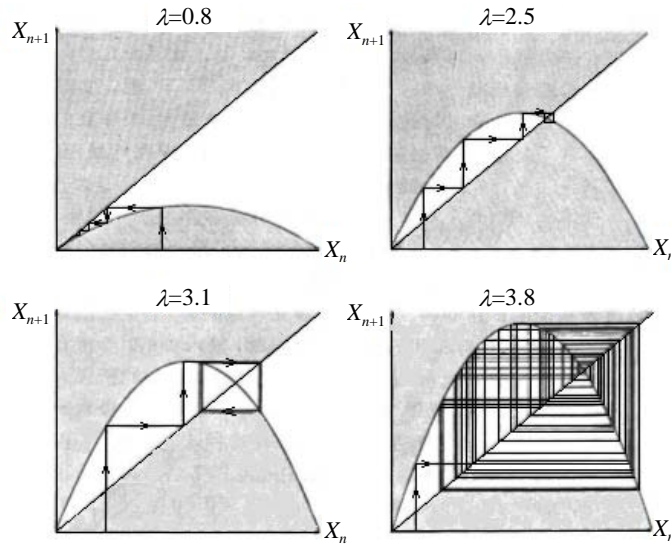


图 2.1 不同参数下的 Logistic 映射过程<sup>[3]</sup>

$\lambda$  参数增加到 2.5, 抛物线在相当范围内大于  $45^\circ$  分角线。迭代可以用水平线和垂直线不断向右、向上延伸表示 (如  $x_0 = 0.1$ ,  $x_1 = 0.225$ ), 当水平线超出抛物线后, 迭代过程不断趋向于一个固定的点, 系统有且只有一个非 0 的定态, 即多次迭代后所有的  $x_i$  实际上都不再变化:  $x_i = x^*$  (图为 0.6),  $x^*$  被称为不动点, 如图 2.1 所示。这里的不动点是非线性方程  $x = \lambda x(1-x)$  的解。作图求解时  $x^*$  是抛物线映射函数和分角线的交点。另一个不动点是 0, 但它是不稳定的,  $x_0$  稍大于 0 时, 迭代后就趋于 0.6。其实, 第一种  $\lambda = 0.8$  的情况也有一个稳定的不动点, 其  $x^* = 0$ 。

$\lambda$  参数增加到 3.1, 抛物线在更大范围内大于分角线, 迭代过程显示: 最终有两个交替出现的点:  $x_1^*$  和  $x_2^*$ , 如图 2.1 所示。这两个点是经过两次迭代后令迭代值相等时的解, 即式子  $x = \lambda x(1-x)[1-\lambda x(1-x)]$  的解, 或  $x_{n+2} = x_n$  的解。

$\lambda$  参数增加到 3.8, 迭代过程显示: 最终有无数点无规地出现, 如图 2.1 所示。这就是

确定性系统中出现的类似随机的过程。也就是说，系统进入了混沌状态。

以上过程说明：迭代函数的行为十分敏感地依赖于非线性的程度，即 $\lambda$ 的大小。将参数 $\lambda$ 作为横坐标，纵坐标为系统多次迭代后达到的 $x$ 值，作出系统状态随参数 $\lambda$ 的变化图（图 2.2）。参数由小变大时系统经历如下几种状态：(1)绝灭：参数 $0 \leq \lambda \leq 1$  时，系统绝灭，即 $x^*$ 都趋于 0（图 1.1）；(2)定态：参数 $1 < \lambda \leq 3$  时，系统有一个定态， $x^*$ 的值等于 $1-1/\lambda$ ，随 $\lambda$ 的增大而增大；(3)倍周期分岔：参数 $\lambda > 3$  时，曲线一分为二，对应着

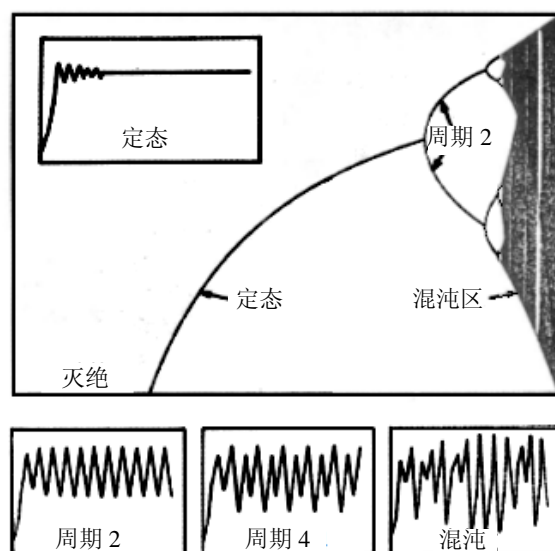


图 2.2 系统状态随参数 $\lambda$ 的变化<sup>[3]</sup>

周期为 2 的解的出现（图 2.2 左下小图），参数进一步增高时，周期数再次加倍（图 2.2 中下小图），然后一次次再加倍。即多次迭代后，进入有限个数值周而复始、无限重复的状态。它们称为周期  $P$  轨道。周期数加倍也就是分岔，每次分岔说明原有的重复模式进一步分裂了。从图可见，分岔出现得越来越快；(4)混沌： $\lambda > 3.57$  时，周期解让位于混沌，在图中用黑色混沌区表示，这是一种永不落入定态的涨落（图 2.2 右下小图），轨迹点永不重复、永不进入任何周期状态；(5)周期窗口：这是  $3.57 < \lambda \leq 4$  的总的混沌范围内出现的一个具有规则周期的小窗口（图 2.1.2 中的白色窗口），把图 2.2 的倍周期分岔到混沌的范围放大（ $\lambda$  方向比  $x$  方向放大得更多一些），得到图 2.3，从中可以看到周期数为 2, 4, 8, 16, ... 的变化愈来愈快。如进一步把图 2.3 不断放大，可以看到混沌之后的周期数为 3 或 7 等的窗口，然后倍周期很快经过 3, 6, 12, ... 或 7, 14, 28... 等，然后再次中断进入新的混沌。这种结构具有无穷的嵌套，一些细小部分被放大后看起来与整个混沌状态变化的图形相似。

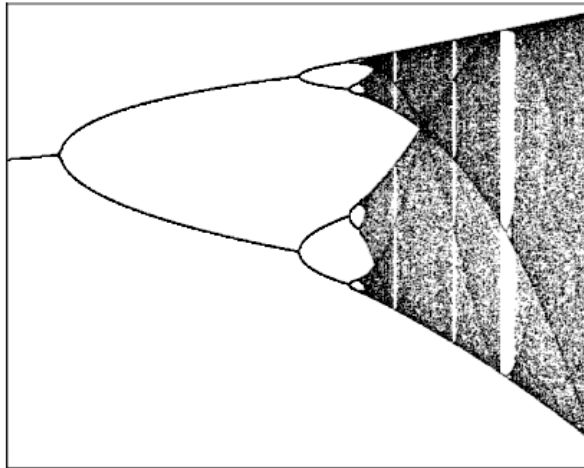


图 2.3 倍周期分岔到混沌范围的放大<sup>[3]</sup>

## 2.2 初值敏感性

从上面的非线性方程可以看到，其中的参数增大到一定值后，就进入了混沌状态。混沌的一个重要的特征就是初值敏感性。以 Logistic 方程参数  $\lambda = 4$  为例，表 2.1 中列出了三个差别很小的初始值 0.1，0.100 000 01 和 0.100 000 1 分别经 Logistic 方程 1、2、3 次，10 次和 50、51、52 次迭代后的值 ( $x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{50}, x_{51}, x_{52}$ )。很明显，最初的约十次迭代后的结果虽然跳来跳去，但相互间相差不大。经过几十次迭代后，原来十分接近的初值迭代得到的值变得相差很大、并且毫无关联。这表明 Logistic 方程代表的混沌系统对初值十分敏感。

表 2.1  $\lambda = 4$  的 Logistic 方程经 1、2、3 次，10 次和 50、51、52 次迭代后的值

$x_0$	0.1	0.100 000 01	0.100 000 1
$x_1$	0.36	0.360 000 032	0.360 000 32
$x_2$	0.921 6	0.921 600 035	0.921 600 358
$x_3$	0.289 013 76	0.289 013 639	0.289 012 551
...	...	...	...
$x_{10}$	0.147 836 56	0.147 824 45	0.147 715 43
...	...	...	...
$x_{50}$	0.277 569 08	0.435 057 40	0.973 249 59
$x_{51}$	0.802 034 39	0.983 129 84	0.104 139 31
$x_{52}$	0.634 955 93	0.066 342 25	0.373 177 25

...	...	...	...
-----	-----	-----	-----

初值敏感性是混沌中类似随机现象的根源，因为很难对初值确定得非常精确，于是近似相同的初值给出了很不相同的貌似随机的结果。初值敏感性又被通俗地称为“蝴蝶效应”，Lorenz 在一次演讲时戏称，在德克萨斯的一个蝴蝶扇动翅膀引起微弱的气流的变化，在大气传播中经过长时期的发展，到了纽约可能演变成一场暴风雨<sup>[10]</sup>。初值敏感性导致过程的不可预测性，例如长期的天气预报就很难报准。有报道说，为了提高长期天气预报的准确性，可以在同样的近似条件下数值计算几次，如果结果相近，预报就比较准确，否则预报就不准确。

## 2.3 Feigenbaum 常数

从图 2.2 和图 2.3 可以看到周期 2、4、8、16、…等的分岔过程以越来越窄的参量间隔不断重复，最终在所谓的“累积点” $\lambda_\infty = 3.570$  处周期数达到无穷。Feigenbaum<sup>[11,12]</sup>（费根鲍姆）精密地定量研究了这一个倍周期分岔序列。表 2.2 给出了分岔的编号  $m$ 、分岔情况、分岔值  $\lambda_m$  和前后分岔间距的比值  $(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$ 。从表可以看出分岔间距  $\lambda_m - \lambda_{m-1}$  愈来愈小，但前后分岔间距的比值趋向于一个常数  $\delta = 4.669\ 201$ 。借助于相变理论中的重正化群方法，可以计算这个常数到任意的精度，如

$$\delta = 4.669\ 201\ 609\ 102\ 990\ 671\ 853\ 203\ 8\cdots \quad (2.3.1)$$

表 2.2 分岔编号  $m$ 、分岔情况、分岔值  $\lambda_m$  和前后分岔间距的比值  $(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$

$m$	分岔情况	分岔值 $\lambda_m$	$(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$
1	$1 \rightarrow 2$	3	
2	$2 \rightarrow 4$	3.449 489 743	4.751 466
3	$4 \rightarrow 8$	3.544 090 743	4.656 251
4	$8 \rightarrow 16$	3.564 407 266	4.668 242
5	$16 \rightarrow 32$	3.568 759 420	4.668 74
6	$32 \rightarrow 64$	3.569 691 610	4.669 1
$\infty$	$\rightarrow$ 混沌	3.569 945 672	4.669 201

Feigenbaum 发现：倍周期分岔中的标度行为，即  $\lambda_m$  按以下的几何级数（幂函数）收敛到  $\lambda_\infty$ ： $\lambda_\infty - \lambda_m = A\delta^{-m} (m \gg 1)$ ，这里的  $A$  是依赖于迭代函数的常数。倍周期分岔可以通过不同的迭代函数获得。他还发现： $\delta$  是不依赖于迭代函数的普适常数，如  $x_{n+1} = \lambda \sin \pi x_n$ ， $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$  等迭代方程的  $\delta$  值相同。

以上是图 2.2 中横轴方向倍周期分岔中的标度行为，从图 2.2 和下面的图 2.4 可以看到，纵轴方向倍周期分岔也有标度行为，即后面的分岔比前面的分岔在纵向上愈来愈小。在图 2.4 上作  $x = 1/2$  的直线和放大的分岔曲线相交，得到  $R_1, R_2, R_3$  等处分岔纵向间距  $d_1, d_2, d_3$  等值。Feigenbaum 发现：

$$d_m / d_{m+1} \rightarrow \alpha \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.3.2)$$

这里的  $\alpha$  也是一个普适常数。它的数值是：

$$\alpha = 2.502\ 907\ 875\ 095\ 892\ 822\ 283\ 902\ 87 \quad (2.3.3)$$

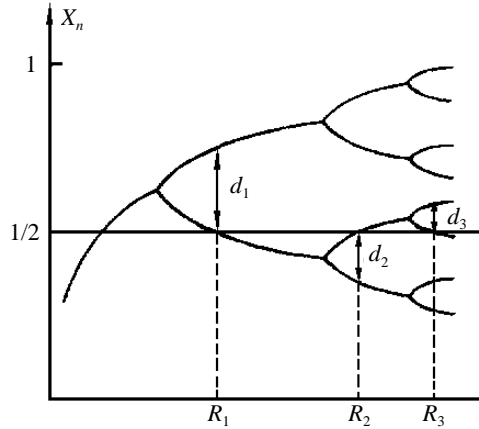


图 2.4 纵轴方向倍周期分岔的标度行为

$\delta$  和  $\alpha$  这两个普适常数后来被称为 Feigenbaum 常数。这是一个重要的贡献，因为  $\delta$  和  $\alpha$  是与  $\pi$ 、 $e$  等类似的普适常数。Feigenbaum 常数是混沌现象深层规律性的一种体现。周期 3 倍分岔等也具有标度律和 Feigenbaum 常数（数值不同，如周期 3 倍分岔的  $\delta = 55.247$ ）。

一般认为混沌具备三个主要的定性特征：(1)内随机性：这种随机性不是由外在因素引起的，而是由确定性系统内部产生的。内随机性的另一方面是局部不稳定性，它指系统运动的某些方面(如某些维度上)的行为强烈地依赖于初始条件。(2)分维性质：混沌态具有分维性质，但其非整数维不是用来描述系统的几何外形，而是用来描述系统运动轨道在相空间的行为特征。混沌运动在相空间的某个区域内无限次的折叠，构成一个有无穷层次的自相似结构——奇怪吸引子。(3)普适性和 Feigenbaum 常数：普适性指在趋向混沌时所表现出来的共同特征，它不依具体的系数及系统的运动方程而变。普适性有两种，即结构的普适性和测度的普适性。前者指趋向混沌过程中轨线的分叉情况与定量特征不依赖于该过程的具体内容，而只与它的数学结构有关；后者指同一映射或迭代在不同测度层次之间嵌套结构的相同，结构的性态只依赖于非线性函数幂级数展开式的幂次。

## 2.4 二维迭代 Hénon 方程

这是一个著名而又十分简单的二维迭代方程<sup>[13]</sup>，它是 Logistic 方程的推广，其方程为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

这里的  $(x_n, y_n)$  表示平面上一个点的坐标，所以上式是一个二维迭代方程。这里的非线性项只有一个平方项，当其中平方项前的参数  $a$  为 1.4，另一参数  $b$  为 0.3 时，系统进入混沌态。在此情形下 Hénon（埃农）进行了 5 000 000 次迭代，起始迭代的点分布得很零散，但很快就得到轮廓像香蕉的图形，并显现出越来越多的细节，如图 2.5 (a) 所示，图 2.5 (b)，(c)，(d) 是由前图中白的小方块所指的区域的放大图。从放大的三幅图可以看出：轮廓的一部分看起来由具有某种宽度的六根线组成，最上面的一根最宽，靠近它的两根相距很近，下面相距较远的分别又有两根和一根。图 (b) 中上面的三根放大后又分解为 (c) 中的六条不同宽度的线，然后 (c) 中上面的三根放大成 (d) 中的六条线，如此这般，直至无穷，体现出了分形的无穷嵌套的自相似结构。

上述精细结构和起始点的坐标无关，起始点的不同仅仅使最初的若干点离散，但后面的许多点都趋向于这个精细结构，好像这个精细结构对后来的点具有吸引作用，所以它被称为奇异吸引子（见下节）。奇异吸引子有着许多奇异的几何特性，如结构上的自相似性、维数上的非整数性等，这些我们将在后面的章节中进行详细的介绍。



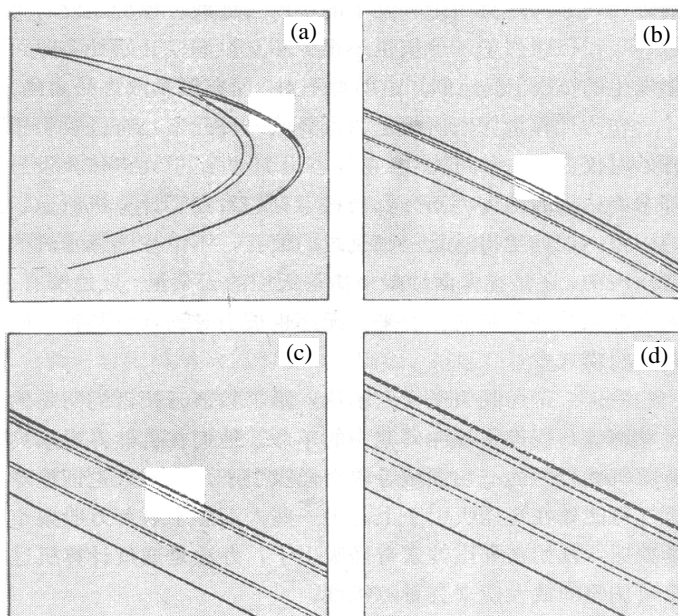


图 2.5 (a)表示 Hénon 方程许多次迭代后代点的分布，  
(b)，(c)，(d) 是前图中白的小方块区域的放大

## 2.5 吸引子和奇异吸引子

一个动力学过程可以在相空间中用一定的轨迹表示。以单摆为例，在相空间中可用单摆的位置  $\theta$  为横坐标、速度  $v$  为纵坐标表示它的运动。如空气摩擦力对摆的作用可以忽略，摆将作无限的周期摆动，此时相空间中的轨迹就是一次又一次重复的圆，如图 2.6 (a) 所示。如摩擦力作用不可以忽略，摆的振幅将不断减小，最终将趋于位置为 0、速度为 0 的中心不动点上，在相空间中的轨迹将是一圈圈不断缩小的螺旋，直到旋进到中心为止，如图 2.6 (b) 所示。

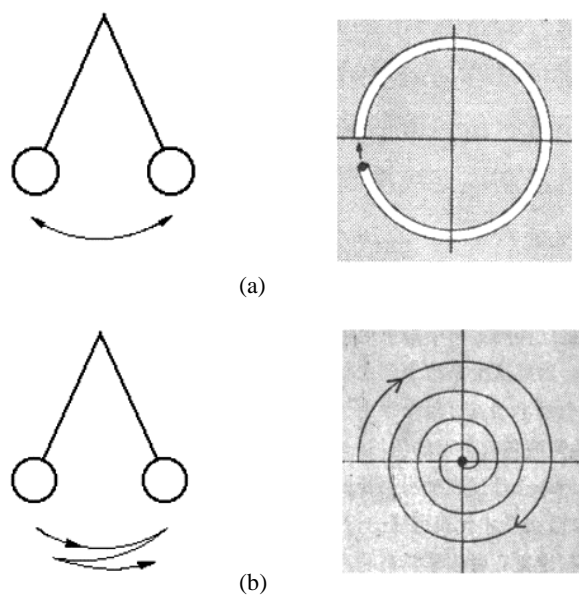


图 2.6 单摆在相空间中轨迹  
(a)无阻尼时为圆环，(b)有阻尼时为螺旋

上述角为 0、速度为 0 的中心不动点是一个最简单的或平庸的吸引子（attractor）。因为单摆的起始位置和空气摩擦力的不同都不影响单摆最后被吸引到这个中心不动点。一个动力学过程的吸引子是它的轨迹在充分长时间之后将渐近地收敛到的极限的状态或状态的集合。作为吸引子它本身是不可分解的，吸引子在相空间的体积为 0。

奇异吸引子（strange attractor）首先具有吸引子的性质，而它之所以被称为奇异的原因有三点。一是它对初始条件具有敏感的依赖性；二是奇异吸引子具有无限嵌套的自相似几何结构，即具有分数维；三是它的几何结构完全不随迭代方程的参数变化而连续地变化。由 Hénon 方程得到的图 2.5 就是一个奇异吸引子。

利用 Hénon 方程进行具体迭代时，从迭代过程可以看出：奇异吸引子并不是在所有方向上都发生收缩，在某些方向上它有拉伸，它还有折叠。反复拉伸、折叠的共同作用导致初始两个任意接近的起始点随时间在吸引子上变得宏观分离，即表现出初值敏感性。

## 2.6 三维常微分 Lorenz 方程

除了迭代方程，常微分方程也可以在一定参数下得到混沌状态。1963 年 Lorenz 在其“决定性的非周期流”一文<sup>[6]</sup>中提出了一组三维常微分方程，这是他在研究大气对流时给出的一组决定论方程，然而他在用电子管计算机进行重复计算时偶然地发现：同样的条件（精确到 0.1%）给出了很不相同的结果（图 2.7），由图可见，在起始的不长的时间内两条曲线还相当接近，但不久就显示出巨大的差异，时间进一步延伸，差异愈来愈大，从而发现了混沌。

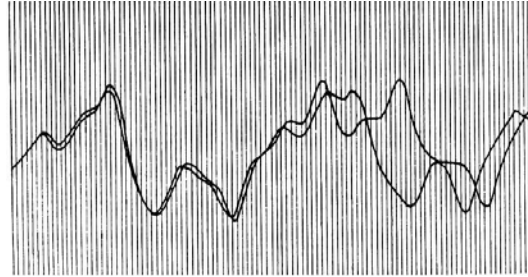


图 2.7 同样初始条件下 Lorenz 方程给出了很不相同的计算结果<sup>[6]</sup>

这在混沌动力学历史上起过重要作用，并给出了第一个奇异吸引子的实例，这组方程被称为 Lorenz 方程。它由下面的不显含时间  $t$  的常微分方程组成：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - xz - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

这里  $x$  正比于对流运动的强度， $y$  正比于水平方向温度的变化， $z$  正比于竖直方向温度的变化。Lorenz 方程的得出过程在文献<sup>[2]</sup>中有详细的介绍。式中有两个非线性项（ $xz$  和  $xy$ ）， $\sigma$ 、 $r$ 、 $b$  是大于 0 的参量。它在  $\sigma=10$ ， $r=28$ ， $b=8/3$  时显示为混沌状态。此时得到的连续的轨迹如图 1.8 所示（左上插图是一个变量随时间的变化，右上插图是轨迹随时间的变化）。它是在三维空间里的一种双螺旋的结构，由围绕两个环旋转并在两个环之间来回跳跃的轨迹构成，轨迹相互间永不相交（因为一旦相交，此后的运动就会周期地循环重复），相互靠近后又突然跳开。每一个螺旋形成的曲面放大后实际上是一对曲面，在它们即将汇合的地方放大、得到四层曲面，如此下去将不断呈现新的曲面。螺旋线永远被限制在有限的空间内，却

永不相交，永无止境。

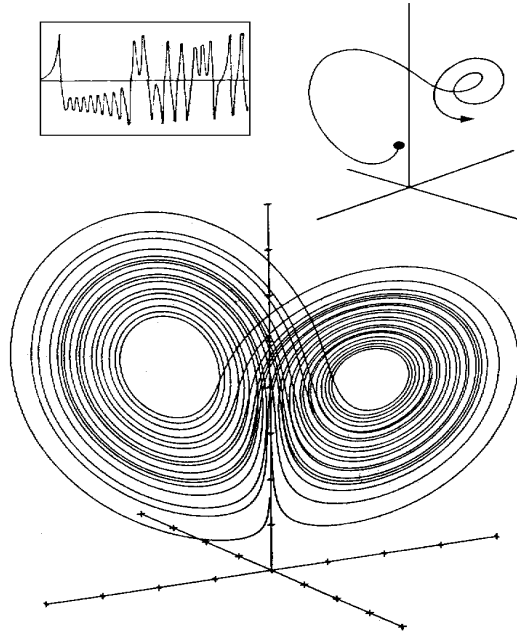


图 2.8 Lorenz 方程引起的轨迹

## 2.7 Rössler 吸引子

这一模型是 Rössler<sup>[14]</sup>（勒斯勒尔）在 1976 年提出的，它是一个更简单的三维常微分方程系统，只有一个非线性交叉项  $zx$ 。该系统可以认为是围绕 Lorenz 吸引子的一个环建立的模型，因此它是模型的模型。Rössler 方程是：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{2.7.1}$$

这里  $a, b, c$  都是正的参数。式中只有一个非线性项  $zx$ 。当  $a = b = 0.2$ ，令  $c$  从 2.4 增至 5.0 时可以看到 Rössler 方程得到的轨迹如图 2.9 所示，随着参数  $c$  的值的增大，图形从简单的单环曲线转化为复杂的奇异吸引子。这些轨道都是三维的，图中给出的是轨道在  $xy$  面上的投影，但从中可以清楚地看出，(a) 是  $c = 2.4$  时得到的一个单一周期的环，(b) 是  $c = 3.5$  时得到的周期为 2 的解，(c) 是  $c = 4.0$  时得到的周期为 4 的解，(d) 是  $c = 4.23$  时得到的混沌态并且被称为四带混沌，(e) 和 (f) 分别是  $c = 4.3$  和 5.0 时得到的更复杂的混沌态的奇异吸引子。 $a = b = 0.2$  时倍周期分岔和混沌的分界点的  $c$  是 4.20。这一走向混沌态的过程常被称为倍周期累积。

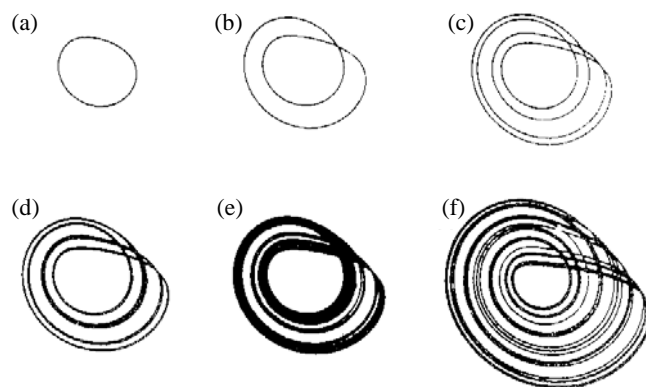


图 2.9  $a = b = 0.2$  时  $c$  的增大引起的 Rössler 吸引子

## 2.8 Lyapunov 指数

Lyapunov (李雅普诺夫) 指数可以用来表示初值敏感性是否出现以及敏感的程度, 定量刻画混沌运动。图 2.10 是参数为 4 的 Logistic 方程得出的抛物线, 图中有两个相差很小的起始点, 设它们分别为  $x_0$  和  $x_0 + dx$ , 经过图中的迭代, 两个状态之间的差别愈来愈大 (即  $dx_0, dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n, \dots$  愈来愈大), 因为参数为 4 的方程已经进入了混沌态。为了定量描述这种快速发散的过程, 可以把  $dx_n$  和  $dx_0$  的关系表示为:

$$dx_n = dx_0 e^{n\lambda'} \quad (2.8.1)$$

并且在取对数和取极限后得到 Lyapunov 指数  $\lambda'$ :

$$\lambda' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(dx_n / dx_0)}{n} \quad (2.8.2)$$

这个大于 0 的指数给出  $n$  次迭代中每一次迭代的平均的发散速率, 它是对混沌态的初值敏感性的定量判据。

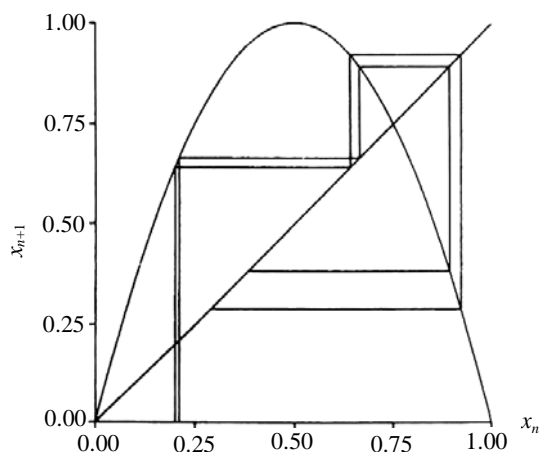


图 2.10 Logistic 方程经过三次迭代, 很接近的状态之间的差别愈来愈大

不同的状态下, Lyapunov 指数可能大于、等于或小于 0。Lyapunov 指数大于 0 表明运动轨道在每个局部都不稳定, 相邻轨道指数分离, 形成混沌吸引子。指数愈大, 相邻轨道指

数分离愈快，长期的预测性愈不可能。因此正的 Lyapunov 指数可作为混沌行为的判据。指数小于 0 表明每次迭代后轨道的差距愈来愈小，对应于各个周期的运动状态。指数由负变正，表明周期轨道向混沌的转变。Lyapunov 指数等于零时迭代过程产生的各个  $x$  值形成的一个不规则的点集，它类似于下一章将要介绍的规则的 Cantor（康托尔）集。从这个点集计算出来的分数维可以用来区别不同的状态（如分数维为 0.666 的倍周期分岔点、分数维为 0.538 的倍周期分岔极限点或分数维为 0.5 的混沌态）<sup>[1]</sup>。

从一维的 Logistic 方程得出的 Lyapunov 指数只有一个，从三维的 Lorenz 方程可以得出三个 Lyapunov 指数（一般指数的数目和相空间的维数相同），每一个指数表征某一特定方向上轨迹的发散性或收敛性。

## 2.9 在复平面上迭代得到的 Julia 集与 Mandelbrot 集

上面介绍的一些二维迭代是在实平面上进行的。现在我们介绍在复平面上通过解析迭代产生的分形集，这类分形集很多来自于  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $Z$  是一个复变数,  $C$  是一个给定的复数) 的迭代, 其中相当重要的是 Julia (儒略) 集 (以下简称 J 集) 与 Mandelbrot (芒德布罗) 集 (以下简称 M 集)。J 集是法国数学家 Julia 得到的<sup>[15]</sup>。令  $Z_n = x_n + iy_n$ ,  $C = a + ib$ , 通常实部表示为  $x$  坐标, 虚部表示为  $y$  坐标,  $Z_n^2$  的值代入得:

$$Z_{n+1} = (x_n^2 - y_n^2) + a + i(2x_n y_n + b) \quad (2.9.1)$$

即迭代时分别利用以下两个方程:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (x_n^2 - y_n^2) + a \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + b \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

而  $Z$  的绝对值为:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.9.3)$$

它表示从原点到  $Z$  的距离。

首先取  $C$  为 0, 此时  $Z_{n+1} = Z_n^2$ 。设初始点是  $Z_0 = x_0 + iy_0$ , 且  $|Z_0| < 1$ , 对此点开始进行迭代, 必然有

$$\begin{aligned} |Z_1| &= |x_0^2 - y_0^2 + i2x_0 y_0| \\ &= \sqrt{x_0^4 + y_0^4 - 2x_0^2 y_0^2 + 4x_0^2 y_0^2} \\ &= \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ &= |Z_0|^2 \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

由此可见, 在  $0 < |Z_0| < 1$  中,  $|Z_1| < |Z_0|$ , 这意味着每进行一次迭代就会使  $Z$  向原点靠近, 多次迭代后就会使  $|Z_0| < 1$  的任一  $Z$  点的轨迹趋于 0 且是稳定的, 因此 0 是  $Z_{n+1} = Z_n^2$  的吸引子。相反如果  $|Z_0| > 1$ , 则多次迭代后  $Z$  的轨迹将趋于  $\infty$ , 这说明  $\infty$  也是  $Z_{n+1} = Z_n^2$  的吸引子。这样在复平面上所有  $|Z_0| \neq 1$  的点都有一个稳定的轨迹。对于复平面上单位圆周 ( $|Z_0| = 1$ ) 上的点, 它们有  $|Z^2| = 1$ , 即迭代后仍然保持于单位圆周上。上述分析说明复平面将分解为两个区域, 一是由轨迹趋于 0 和  $\infty$  的点所组成的稳定集, 另一是单位圆周上的点组成的 J 集, 见图 2.11 (a)。

迭代函数  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  中  $C \neq 0$  时, 例如  $C = -0.12375 + 0.56508i$ , 仍按上述方法迭代。为了观察逃离速度, 可以规定一个距离函数

$$D = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad (2.9.5)$$

计算例如  $D > 20$  所需迭代的次数, 如果某点经过 300 次迭代仍未逃离, 就可以认为它属于 J 集, 对于趋于内部的点也可以类似处理。还可以将逃离所需迭代的次数对起始迭代点进行分

类，按逃离所需迭代的次数分别给以不同的灰度或颜色，就可以得到许多美丽的图案。

图 2.11 (b) 是用上述  $C$  值迭代后得到  $J$  集，这是一条不光滑的闭合曲线。同时它的内部吸引子不再是 0，而是图上所标记的黑点。将  $J$  集的图形放大，它就会出现更精细的结构，原来似乎是光滑的部分又会出现与原来相似的曲折，也就是说当我们观察任何一段边界时，总能发现相类似的图形但以不同的尺寸在不同的地区出现，整个边界具有自相似性。这说明它是自相似的分形曲线。改变  $C$  值为  $C=1$  时，得到的  $J$  集是由大小不等的闭合曲线组成的图案。

图 2.11 (c) 是  $C=i$  给出的典型的  $J$  集图案。它由曲折的多枝杈的处处连通但处处不可微的曲线组成，图中不形成闭合的环。

图 2.11 (d) 是  $C=0.11+0.66i$  给出的典型的  $J$  集图案。它看来像许多树叶碎片，实际上它们都由离散点组成。

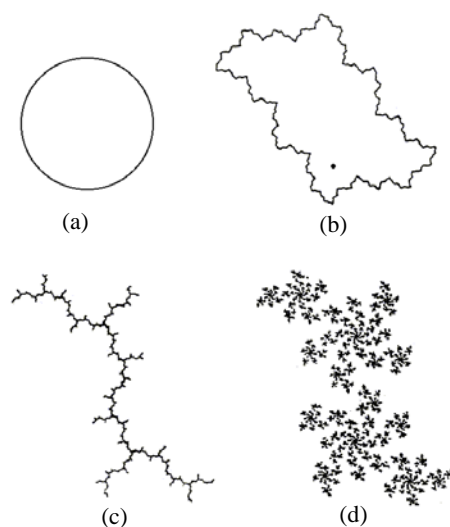


图 2.11 几种典型的 Julia 集

以上的  $J$  集是一类决定论得到的奇异的分形。改变  $C$  值时还可以得到更复杂的  $J$  集图案。从上述例子中可看出对于一个确定的  $C$  值，有一个与此对应的所有不逃逸点组成的该  $C$  值下的  $J$  集。由此可见，这种非线性的二次复函数的解析迭代可以给出无穷多个  $J$  集。

1980 年 Mandelbrot 利用计算机绘制出的、现在以他的名字命名的  $M$  集，激起了人们极大的兴趣。 $M$  集被认为是把自相似的外形与无限变化的性质结合起来的一个分形。上述  $J$  集中是给定  $C$  后对复变量  $Z$  进行分类；而  $M$  集则是在复参数  $C$  填充的平面上对参数  $C$  进行分类得到的图形。

$M$  集的初始值  $Z_0$  通常取为 0，然后进行迭代。对每一个  $C$  连续计算  $Z_n(0)$ ，如果在  $n \rightarrow \infty$  时， $|Z_n(0)| \rightarrow \infty$ ，则认为该  $C$  点在  $M$  集以外，否则就认为  $C$  点在  $M$  集内。由于取远离原点的  $C$  时，迭代后都会逃离，所以  $C$  应在原点附近取值。对每一个  $C$  值重复这一过程就可以在计算机上画出  $M$  集的图形。类似地，可以规定一个距离函数  $D = x^2 + y^2$ ，计算  $D > 20$  所需的迭代次数，如迭代次数超过 10 的点标为白色，迭代次数超过 35、110 的点分别标为红色、蓝色（或不同的灰度）等等，就可以得到彩色的（或不同灰度）的 Mandelbrot 集。

图 1.12 (a) 就是用不同灰度表示的著名的  $M$  集。 $M$  集的外形躯体矮胖，头部滚圆。我们还可以从灰度图看到，此图案的外缘变化平缓，愈到内部，边缘愈来愈曲折，细节的层次愈来愈多。

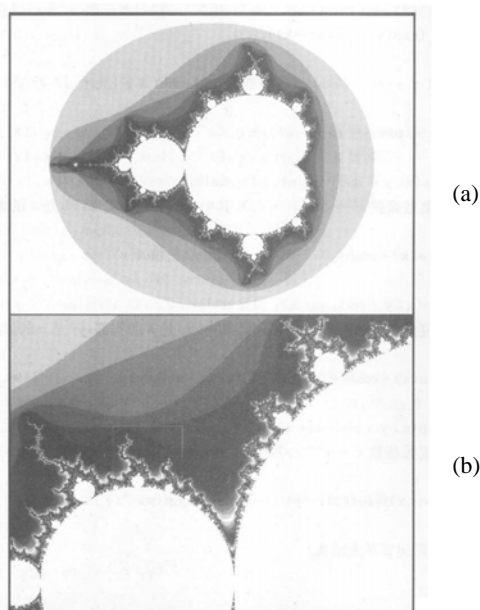


图 2.12 Mandelbrot 集

在它的边界处附着数不清的芽孢，而芽孢又被更细小的芽丝所环绕。图 2.12 (b) 是 (a) 的局部放大图。不断放大后对这些芽孢进行观察时，可以发现它们呈现出各种细微的结构，彼此相互嵌套。M 集的内部放大达到百万倍时又会找到一个新的与原 M 集相似的图形，这种自相似性是 M 集的第一特性。

M 集的另一个特性是在 M 集内任选一点  $C$ ，通过把在它附近愈来愈小的片断放大，就会找到对应于这个  $C$  值的 J 集。换句话说，M 集概括了所有的 J 集，它是无穷数量的 J 集的直观的图像目录表。因此常常把 M 集称为是 J 集的缩微字典。

除了二次函数外，还可以利用三次函数。四次函数以至  $m$  次函数 ( $Z_{n+1} = Z_n^m + C$ ) 进行迭代，得到广义 J 集和广义 M 集，它们都能在计算机上产生非常奇妙的美丽图形。这类图形现已成为计算机图形学与计算机艺术的探讨对象。

有关 J 集与 M 集的迭代程序与数学特性的详细讨论读者可参阅文献<sup>[5]</sup>。由于 M 集和 J 集有密切的关系，文献<sup>[5]</sup>中已经给出了它们的用 PASCAL 语言编写的统一的源程序，只需改变两处语句就可以分别计算 M 集和 J 集。

从以上的介绍中可以看到：混沌动力学得出的许多轨迹形成复杂的图形。这些图形由无限嵌套、疏密不等的奇异点集或奇异曲线族组成，它们的特点是具有自相似性，因此它们可以利用后面要介绍的分形和分数维、多重分形和广义分数维<sup>[2]</sup>进行定量的描述<sup>[1]</sup>。有文献把分形称为混沌的几何学，以表示两者的密切关系。

## 参 考 文 献

- [1] 郝柏林，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海科技出版社(1993)
- [2] 赵凯华，朱照宣，黄珣，非线性物理导论，北京大学非线性科学中心(1992)
- [3] 格莱克著，张淑誉译，郝柏林校，混沌开创新科学，上海译文出版社(1990)
- [4] 王东生，曹磊，混沌、分形及其应用，中国科学技术大学出版社(1995)
- [5] 刘华杰，分形艺术，湖南科技出版社(1998)
- [6] E.N.Lorenz, Journal of the Atmospheric Sciences, 20(1963)130
- [7] T.Y.Li and J.A.Yorke, American Mathematical Monthly, 82(1975)985
- [8] R.May, Nature 261(1976)459
- [9] R.May, Science 186(1974)645

- [10] E.N.Lorenz, Lecture Notes in Mathematics, 755(1979)53
- [11] M.J.Feigenbaum, Journal of Statistical Physics, 19(1978)25
- [12] M.J.Feigenbaum, Journal of Statistical Physics, 21(1979)669
- [13] M.Hénon, Communications in Mathematical Physics, 50(1976)69
- [14] O.E.Rössler, Physics Letters A 57(1976)397
- [15] G.Julia, Journal de Math. Pure et Appl. 8 (1918) 47~245