Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = 4[\cos(-40°) + i \cdot \sin(-40°)] + 2e^{i\,30°} - 3 + 1.5i$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30° + i \cdot \sin 30°)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

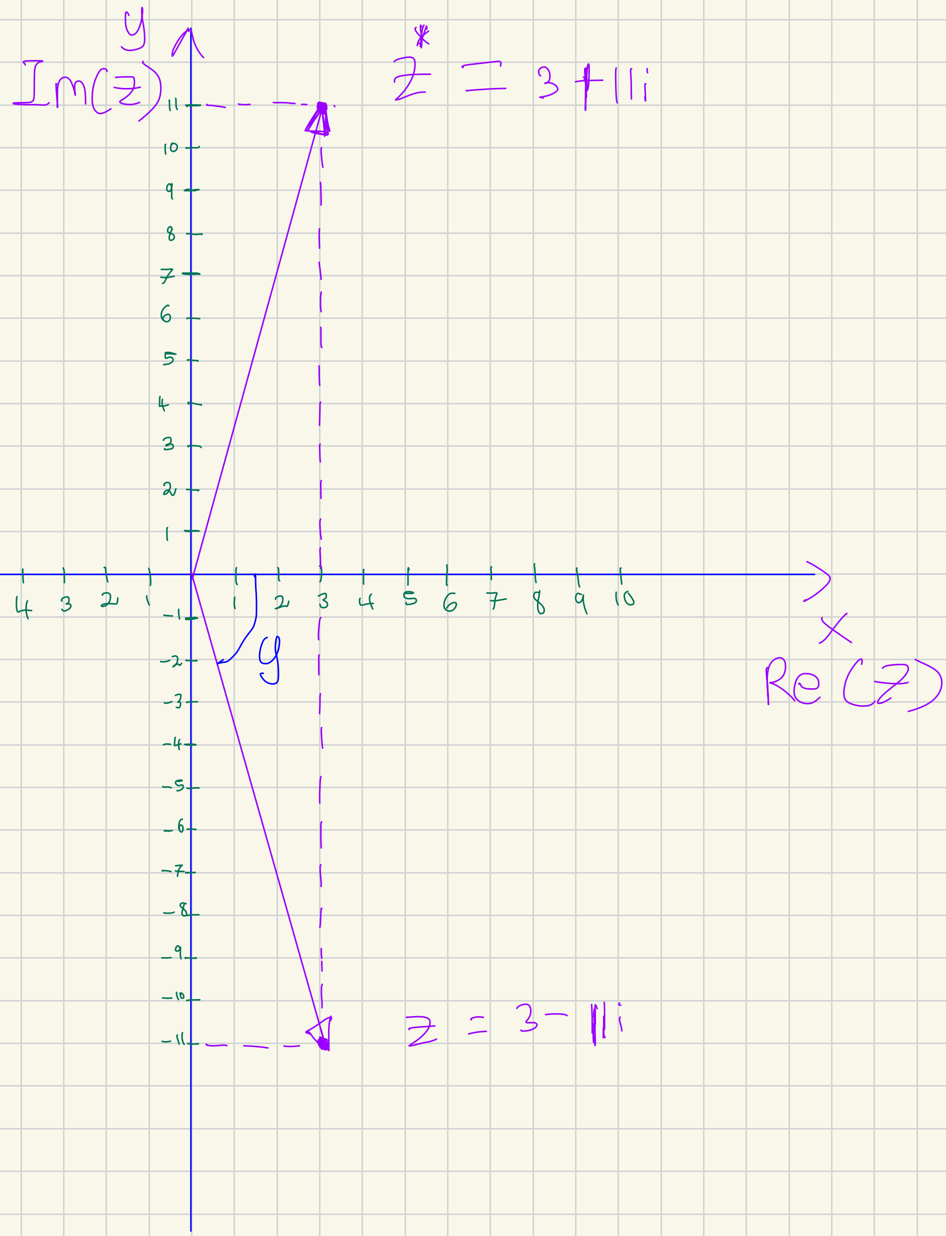
d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\, i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

a) $z = 3 - 11i$

$(z = x - yi)$



Trigonometrische Form / Polarform

$$z = \overbrace{r\cdot\cos(\varphi)}^{x} + i\,\overbrace{r\cdot\sin(\varphi)}^{y}$$

$$= r\left(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)\right)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{AK}{HU}\right)\right) + i\cdot\sin\left(\arccos\left(\frac{AK}{HU}\right)\right)\right)$$

$$= \sqrt{3^2+11^2}\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{3}{11.40}\right)\right) + i\cdot\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{11.40}\right)\right)\right)$$

$$= 11.40\left(\cos(74.74) + i\cdot\sin(74.74)\right)$$

Exponentialform

$$z = re^{i\varphi}$$

$$z = 11.40\cdot e^{i\cdot 74.74}$$

Konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = 3+11i$$

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = 4[\cos(-40°) + i \cdot \sin(-40°)] + 2e^{i\,30°} - 3 + 1.5i$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

$$z_1 = 4(\cos(-40) + i \cdot \sin(-40))$$
$$= 3.0642 - 2.57i$$

$$z_2 = 2e^{i30°}$$
$$= 1.732 + i$$

$$z_3 = -3 + 1.5i$$

$$z = 3.0642 - 2.57i + 1.732 + i - 3 + 1.5i$$
$$= 1.78 - 0.07 \cdot i$$

$$z^* = 1.78 + 0.07i$$

Sie auch z^* an.

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30° + i \cdot \sin 30°)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$= 2 - 0.037i$$

$$z_3 = 4(\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$$
$$= 3.46 + 2i$$

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}$$

$$= \frac{(2+i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}$$

$$= \frac{2+4i+i+2i^2}{1+2i-2i-4i^2}$$

$$= \frac{2+5i+2\cdot(-1)}{1-4(-1)}$$

$$= \frac{5i}{5}$$

$$= i$$

$$z_1^* = -i$$

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5\cdot z_2} = \frac{-i\cdot(3.46+2i)}{0.5\cdot(2-0.037i)}$$

$$= \frac{3.46i+2i^2}{1-0.0185i}$$

$$= \frac{3.46i-2}{1-0.0185i}$$

$$= -2.063 + 3.42$$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\,i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

$(1 - \sqrt{2}\,i)^3$

$z = 1 - \sqrt{2}\,i$

$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$

$x = 1$

$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.955$

$\Rightarrow z = 1 - \sqrt{2}\,i = \sqrt{3} \cdot e^{0.555 i}$

$\Rightarrow z^3 = (\sqrt{3} \cdot e^{0.955 \cdot i})^3 = \sqrt{3}^3 \cdot e^{0.955 \cdot i \cdot 3} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot e^{3 \cdot 0.955 i}$

$= 3^{\frac{3}{2}} [\cos(3 \cdot 0.955) + i \cdot \sin(3 \cdot 0.955)]$

$= 3^{\frac{3}{2}} [-0.962 + i \cdot 0.272]$

$= -5 + \sqrt{2} \cdot i$