Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten):

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie manuell die $QR-$Zerlegung der Matrix A unter Angabe der wichtigsten Zwischenschritte (dabei auftretende Matrix-Multiplikationen etc. führen Sie aber natürlich mit Python durch)

b) Benutzen Sie die Matrizen Q und R, um die Lösung x zu berechnen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_1 = a_1 + sign(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6.4772 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u_1 = \dfrac{1}{|V_1|} V_1$

$= \dfrac{1}{\sqrt{6.4772^2 + (-5)^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 6.4772 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0.7690 \\ -0.5936 \\ 0.2374 \end{pmatrix}$

$$H_1 = I_n - 2\, U_1 \cdot U^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.7690 \\ -0.5936 \\ 0.2374 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7690 & -0.5936 & 0.2374 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1827 & 0.9130 & -0.3651 \\ 0.9130 & 0.2953 & 0.2818 \\ -0.3651 & 0.2818 & 0.8873 \end{pmatrix} := Q_1$$

$$Q_1 \cdot A = \begin{pmatrix} -0.1827 & 0.9130 & -0.3651 \\ 0.9130 & 0.2953 & 0.2818 \\ -0.3651 & 0.2818 & 0.8873 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5.4779 & 4.3825 & -0.7304 \\ 0 & -0.9266 & 3.8797 \\ 0 & 0.9701 & 1.8484 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.9266 & 3.8797 \\ 0.9701 & 1.8484 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} -0.9266 \\ 0.9701 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \tilde{a}_1 + \text{sign}(\tilde{a}_{11}) \cdot |\tilde{a}_1| \cdot e_1$$

$$= \begin{pmatrix} -0.9266 \\ 0.9701 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \sqrt{(-0.9266)^2 + (0.9701)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2.2681 \\ 0.9701 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{|V_2|} \cdot V_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2.2681)^2 + (0.9701)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -2.2681 \\ 0.9701 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.9194 \\ 0.3933 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = I_2 - 2 U_2 U_2^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9194 \\ 0.3933 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.9194 & 0.3933 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.6906 & 0.7232 \\ 0.7232 & 0.6906 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6906 & 0.7232 \\ 0 & 0.7232 & 0.6906 \end{pmatrix}$$

$$Q = Q_1^T \cdot Q_2^T$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1827 & 0.9130 & -0.3651 \\ 0.9130 & 0.2953 & 0.2818 \\ -0.3651 & 0.2818 & 0.8873 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6906 & 0.7232 \\ 0 & 0.7232 & 0.6906 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1827 & -0.8946 & 0.4081 \\ 0.9130 & 0 & 0.4082 \\ -0.3651 & 0.4471 & 0.8166 \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 \cdot Q_1 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6906 & 0.7232 \\ 0 & 0.7232 & 0.6906 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.1827 & 0.9130 & -0.3651 \\ 0.9130 & 0.2953 & 0.2818 \\ -0.3651 & 0.2818 & 0.8873 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5.4779 & 4.3825 & -0.7304 \\ 0 & 1.3415 & -1.3426 \\ 0 & 0 & 4.0828 \end{pmatrix}$$

$$QR = \begin{pmatrix} -0.1827 & -0.8946 & 0.4081 \\ 0.9130 & -0.0001 & 0.4082 \\ -0.3651 & 0.4471 & 0.8166 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5.4779 & 4.3825 & -0.7304 \\ 0 & 1.3415 & -1.3426 \\ 0 & 0 & 4.0828 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0008 & -2.0008 & 3.0007 \\ -5.0013 & 4.0011 & 0.9999 \\ 2.0000 & -1.0003 & 3.0004 \end{pmatrix}$$

b)

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} -0.1827 & -0.8946 & 0.4081 \\ 0.9130 & -0.0001 & 0.4082 \\ -0.3651 & 0.4471 & 0.8166 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6.2088 \\ 1.3400 \\ 8.1649 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot x = \begin{pmatrix} 6.2088 \\ 1.3400 \\ 8.1649 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5.4779 & 4.3825 & -0.7304 \\ 0 & 1.3415 & -1.3426 \\ 0 & 0 & 4.0828 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 6.2088 \\ 1.3400 \\ 8.1649 \end{pmatrix}$$

$$x_3: \quad 4.0828 \cdot x_3 = 8.1649$$

$$x_3 = \frac{8.1649}{4.0828}$$

$$x_3 = 1.9998$$

$$x_2: \quad 1.3415 \cdot x_2 - 1.3426 \cdot 1.9998 = 1.3400$$

$$x_2 = 3.0003$$

$$x_1: \quad -5.4779 \cdot x_1 + 4.3825 \cdot 3.0003 - 0.7304 \cdot 1.9998 = 6.2088$$

$$x_1 = 1.5336$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.5336 \\ 3.0003 \\ 1.9998 \end{pmatrix}$$