

3) a)

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix} \quad \|\Delta b\|_{\infty} \leq 0.1 \cdot 10^6$$

$$A = \begin{pmatrix} 20'000 & 30'000 & 10'000 \\ 10'000 & 17'000 & 6'000 \\ 2'000 & 3'000 & 2'000 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 60'000$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,00075 & 0,00025 \\ -0,0002 & 0,0005 & -0,0005 \\ -0,0001 & 0 & 0,001 \end{pmatrix}$$

I: 0.0014  
 II: 0.0012  
 III: 0.0011

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 0.0014$$

$$b = \begin{pmatrix} 5'720'000 \\ 3'300'000 \\ 836'000 \end{pmatrix} \quad \|b\|_{\infty} = 5'720'000$$

Absolut:

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 0.0044 \cdot 100'000 = 140$$

Relativ:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 84 \cdot \frac{100'000}{872'000} = 1.46853$$

$$\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 84$$

b) f:  $\text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 0.42$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-f} \left( \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$$

$$\leq \frac{84}{1-0.42} \left( \frac{300}{60'000} + \frac{100'000}{872'000} \right) = 3.285$$

c)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 19'500 & 29'300 & 9900 \\ 9900 & 16'900 & 9900 \\ 1900 & 2900 & 1900 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820600 \\ 3400600 \\ 936000 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 7.383 \\ 58.766 \\ 395.553 \end{pmatrix}$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = 593.404$$

$$\|b - \tilde{b}\|_\infty = 100'000$$

$$\|A - \tilde{A}\|_\infty = 300$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 2.248$$

Man kann feststellen, dass der relative Fehler von  $x$  nicht gross von Aufgabe 3b abweicht. Die absoluten Fehler von  $A$  und  $b$  sind identisch.