

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Auf einem Stahlgerüst steht ein kugelförmiger Wassertank mit einem Innendurchmesser von $d = 10$ m. Aus statischen Gründen dürfen höchstens 471 m^3 Wasser eingefüllt werden. Berechnen Sie, bis zu welcher Höhe h über dem Tankgrund das Wasser also höchstens stehen darf. Allfällige Nullstellen bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-3} genau und dem Startwert $h_0 = 9$ m.

Tipp: Sie benötigen aus dem Formelbuch eine Formel für den Anteil des Kugelvolumens, welches mit Wasser gefüllt ist.

$$d = 10 \text{ m}$$
$$V = 471 \text{ m}^3$$

$$R = 5 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$$

$$f(h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) - V$$

$$f'(h) = -\pi \cdot h \cdot (h - 2r)$$

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$$

$$h_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$
$$= 7.65822$$

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)}$$
$$= 8.01488$$

$$h_3 = h_2 - \frac{f(h_2)}{f'(h_2)}$$
$$= 8.03078$$

$$h_4 = h_3 - \frac{f(h_3)}{f'(h_3)}$$
$$= 8.0371$$

$$|h_4 - h_3| < 10^{-3}$$

