Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das obige System bzgl. dem Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) Berechnen Sie auf vier Stellen nach dem Komma die Näherung $x^{(3)}$ mit dem Jacobi-Verfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie alle benötigten Matrizen sowie die verwendete Iterationsgleichung explizit auf. Die Iterationen selber führen Sie aber natürlich mit Python durch.

c) Wie gross ist gemäss der a-posteriori Abschätzung der absolute Fehler von $x^{(3)}$?

d) Schätzen Sie a-priori die Anzahl Iterationsschritte ab, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Kompnente maximal um 10^{-4} von der exakten Lösung $x = (2, -1, 4)^T$ abweicht.

e) Wiviele Iterationsschritte würden Sie a-priori benötigen, wenn Sie als Startvektor nicht $x^{(0)}$ sondern $x^{(2)}$ aus b) verwenden würden?

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten):

Wiederholen Sie die obige Aufgabe, diesmal für das Gauss-Seidel Verfahren. Sie dürfen (ausnahmsweise) die Inverse von $D + L$ benutzen (müssen aber nicht, wenn Sie nicht wollen).

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} R x^{(k)} + (D+L)^{-1} b$

i	0	1	2	3
$x^{(i)}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.0278 \\ 3.8651 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.0511 \\ -1.0134 \\ 3.9746 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0054 \\ 3.9931 \end{pmatrix}$

c) $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0054 \\ 3.9931 \end{pmatrix}$

$$B = -(D+L)^{-1} \cdot R$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{25}{72} & -\frac{1}{36} \\ 0 & -\frac{65}{252} & -\frac{17}{126} \end{pmatrix}$$

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty$$

$$\leq \frac{0.875}{0.125} \cdot \left\| \left(\begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0054 \\ 3.9931 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.0511 \\ -1.0134 \\ 3.9746 \end{pmatrix} \right) \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{0.875}{0.125} \cdot 0.0364$$

$$\leq \underline{\underline{0.2548}}$$

d) $\|x^{(n)}-\bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = 10^{-4}$

$$\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.0278 \\ 3.8651 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= 1.25$$

$$\frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty} = \frac{0.875^n}{0.125}$$

$$\|x^{(n)}-\bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-4}$$

$$\leq \frac{0.875^n}{0.125} \cdot 1.25 \leq 10^{-4}$$

$$0.875^n \leq \frac{10^{-4} \cdot 0.125}{1.25}$$

$$n \cdot \ln(0.875) \leq \ln\left(\frac{10^{-4} \cdot 0.125}{1.25}\right)$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot 0.125}{1.25}\right)}{\ln(0.875)}$$

$$n \geq 86.2189$$

$\hookrightarrow \underline{\underline{n = 87}}$

e) $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left(\begin{pmatrix} 2.0147 \\ -1.0054 \\ 3.9931 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.0511 \\ -1.0134 \\ 3.9746 \end{pmatrix}\right)$

$= 0.0364$

$$\frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-4}$$

$$\frac{0.875^n}{0.125} \cdot 0.0364 \leq 10^{-4}$$

$$0.875^n \leq \frac{10^{-4} \cdot 0.125}{0.0364}$$

$$n \cdot \ln(0.875) \leq \ln\left(\frac{10^{-4} \cdot 0.125}{0.0364}\right)$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot 0.125}{0.0364}\right)}{\ln(0.875)}$$

$n \geq 59.7357 \quad \Rightarrow n = 60$