

# HM1-Zusammenfassung

## 1 Rechnerarithmetik

### 1.1 Definition 2.1: Maschinenzahlen

**Bias:** Fester Wert, der zum Exponenten addiert wird, um negative Exponenten darzustellen.

**B:** Basis des Zahlensystems

**n:** Anzahl der Mantissenstellen

**e\_min:** Minimaler Exponent

**e\_max:** Maximaler Exponent

Unter Normalisierung  $m_1 \neq 0$  (falls  $x \neq 0$ ):

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0.m_1m_2\dots m_n \cdot B^{e-\text{bias}}\} \cup \{0\}$$

$$\text{Wert: } x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$$

$$x_{\min} = B^{e_{\min}-\text{bias}}$$

$$x_{\max} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{\max}}$$

### Anzahl möglicher Zahlen

$|e|$ : Stellen Exponent

$$B^{n+|e|} + 1 \quad (+1 \text{ nur falls } 0 \text{ auch enthalten})$$

### 1.1.1 Vorgehen: Zahlensystem-Umwandlung

**Schritt 1:** Mantisse normalisieren ( $0.m_1m_2\dots$  mit  $m_1 \neq 0$ )

**Schritt 2:** Exponent bestimmen (Verschiebungen zählen)

**Schritt 3:** Wert berechnen:  $\sum m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

### 1.1.2 Beispiel : Binärzahl

**Gegeben:**  $x_2 = 0.111 \times 2^3$

**Schritt 1:** Mantisse normalisiert:  $0.111_2$

**Schritt 2:** Exponent:  $e = 3$

**Schritt 3:** Wert berechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}) \cdot 2^3 \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

### 1.1.3 Beispiel : Hexadezimalzahl

**Gegeben:**  $x_5 = 0.AB3C9F \times 16^4$ , mit  $A = 10, B = 11$

**Schritt 1:** Mantisse normalisiert:  $0.AB3C9F_{16}$

**Schritt 2:** Exponent:  $e = 4$

**Schritt 3:** Wert berechnen (Auszug):

$$\begin{aligned} x_5 &= (10 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + \dots) \cdot 16^4 \\ &= 10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + \dots \\ &= 40960 + 2816 + 48 + \dots = 43836.62\dots \end{aligned}$$

## 1.2 Definition 2.2: Fehler

**Absoluter Fehler:**  $|\tilde{x} - x|$

**Relativer Fehler:**  $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$  (falls  $x \neq 0$ )

### 1.2.1 Vorgehen: Fehlerberechnung

**Schritt 1:** Zahl auf  $n$  Stellen runden

**Schritt 2:** Absoluter Fehler:  $|\tilde{x} - x|$

**Schritt 3:** Relativer Fehler:  $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

**Schritt 4:** Prüfen:  $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)}$

### 1.2.2 Beispiel 2.2: Rundungsfehler

**Gegeben:**  $x = 180.1234567 = 0.1801234567 \times 10^3$

Auf  $n = 7$  Stellen runden.

**Schritt 1:** Rundung auf 7 Stellen:

$$\text{rd}(x) = 0.1801235 \times 10^3$$

(8. Stelle ist  $6 \geq 5 \rightarrow$  aufrunden)

**Schritt 2:** Absoluter Fehler:

$$\begin{aligned} |\text{rd}(x) - x| &= |0.1801235 - 0.1801234567| \times 10^3 \\ &= 0.0000000433 \times 10^3 \\ &= 0.433 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Relativer Fehler:

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} = \frac{0.433 \times 10^{-4}}{180.1234567} \approx 2.4 \times 10^{-7}$$

**Schritt 4:** Prüfung ( $B = 10, e = 3, n = 7$ ):

$$\frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)} = 5 \times 10^{3-8} = 0.5 \times 10^{-4}$$

$$0.433 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$$

## 1.3 Definition 2.3: Maschinengenauigkeit

$$\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$$

Maximaler relativer Rundungsfehler.

Merkmal	Single Precision	Double Precision
Gesamtlänge	32 Bit	64 Bit
Mantisse	23 Bit (+1)	52 Bit (+1)
Exponent	8 Bit (Bias 127)	11 Bit (Bias 1023)
Genauigkeit (ca.)	7 Dezimalstellen	16 Dezimalstellen
Speicherbedarf	klein	doppelt so groß

**Hidden Bit:** Das “+1” bei der Mantisse bezeichnet das sogenannte Hidden Bit da durch IEEE-754 Normierung die erste Stelle der Mantisse immer 1 ist und somit nicht gespeichert werden muss.

### 1.3.1 Vorgehen: Maschinengenauigkeit

**Schritt 1:** Mantissenlänge  $n$  bestimmen

**Schritt 2:** Basis  $B$  identifizieren

**Schritt 3:** Formel anwenden:  $\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$

**Schritt 4:** Bei IEEE: hidden bit beachten!

### 1.3.2 Beispiel 2.3a: IEEE Double Precision

**Gegeben:** IEEE-754 Double Precision

**Schritt 1:** Mantissenlänge bestimmen:

- 52 Bit gespeichert
- 1. hidden bit
- $\rightarrow n = 53$

**Schritt 2:** Basis:  $B = 2$  (binär)

**Schritt 3:** Formel anwenden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{mach}} &= \frac{1}{2} \cdot 2^{1-53} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-52} \\ &= 2^{-53}\end{aligned}$$

**Schritt 4:** Dezimal umrechnen:

$$\varepsilon_{\text{mach}} \approx 1.110223 \times 10^{-16}$$

### 1.4 Definition 2.4: Konditionszahl

Die Konditionszahl gibt an, wie stark sich der relative Fehler des Ergebnisses ändert, wenn sich der relative Fehler der Eingabe ändert.

**Wenn nur die Konditionszahl verlangt wird ist es immer die relative Konditionszahl**

**Absolute:**  $\kappa = |f'(x)|$

**Relative:**  $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

**Absoluter Fehler bei Funktionsauswertungen:**

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$$

### Relativer Fehler bei Funktionsauswertungen:

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx K(x) \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

$$K(x) \approx \frac{\text{relativer Fehler von } f(x)}{\text{relativer Fehler von } x}$$

Achtung: auch wenn relative Fehler mit mehreren Parametern angegeben werden muss man nichts rchenen! zB:

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

ist schon der relative Fehler von  $x$ !

### 1.4.1 Vorgehen: Konditionszahl berechnen

**Schritt 1:** Funktion  $f(x)$  und Ableitung  $f'(x)$  bestimmen

**Schritt 2:** Konditionszahl berechnen:

- Absolut:  $\kappa = |f'(x)|$
- Relativ:  $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

**Schritt 3:** Interpretation:

- $\kappa_{\text{rel}} \approx 1$ : gut konditioniert
- $\kappa_{\text{rel}} \gg 1$ : schlecht konditioniert

**Gegeben:**  $f(x) = \sqrt{x}$  bei  $x = 4$

**Schritt 1:** Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Schritt 2:** Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)|}{|\sqrt{4}|} \\ &= \frac{|4 \cdot (\frac{1}{4})|}{2} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5\end{aligned}$$

**Schritt 3:** Interpretation:  $\kappa_{\text{rel}} = 0.5 \approx 1 \rightarrow$  gut konditioniert

-> **Konditionszahl:** 1/n

$$f(x) = x^n \text{ bei } x = 0.1, n = 10$$

**Schritt 1:** Ableitung:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

**Schritt 2:** Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|0.1 \cdot (10 \cdot 0.1^{10-1})|}{|0.1^{10}|} \\ &= \frac{|1 \cdot 0.1^9|}{0.1^{10}} \\ &= 10\end{aligned}$$

**Schritt 3:** Interpretation:  $\kappa_{\text{rel}} = 10 \gg 1 \rightarrow$  schlecht konditioniert

-> **Konditionszahl:** n

### 1.5 Auslöschung

Auslöschung: Verlust signifikanter Stellen durch Subtraktion fast gleicher Zahlen. Tritt in Funktionen an Stellen auf an denen sie schlecht konditioniert sind.

## 2 Nullstellenprobleme

### 2.1 Definition: Fixpunkt

$\bar{x}$  heißt **Fixpunkt** von  $F$ , falls:

$$F(\bar{x}) = \bar{x}$$

#### 2.1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$  (d.h.  $F$  bildet  $[a, b]$  auf sich selbst ab) und existiere eine Konstante  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  und:

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b]$$

(d.h.  $F$  ist **Lipschitz-stetig** und **kontraktiv**,  $\alpha$  nennt man auch **Lipschitz-Konstante**).

Dann gilt:

**Kontraktionsbedingung:**  $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$  besagt, dass  $F$  eine **Kontraktion** ist.

**Lipschitz-Konstante:**  $\alpha < 1$  garantiert, dass Abstände verkleinert werden.

**Ableitung:** Für differenzierbar  $F$  gilt:  $|F'(x)| \leq \alpha < 1$  für alle  $x \in [a, b]$ .

**Existenz und Eindeutigkeit:** Genau ein Fixpunkt existiert.

**Globale Konvergenz:** Jeder Startwert führt zur Konvergenz.

#### 2.1.2 Interpretationen der Abschätzungen

#### 2.1.3 Abschätzungen der Fixpunktiteration

**A-priori Abschätzung** (vor Iteration bekannt):

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_0 - x_1|$$

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \alpha)) / |x_1 - x_0|}{\ln(\alpha)}$$

**A-posteriori Abschätzung** (während Iteration berechenbar):

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1 - \alpha} |x_n - x_{n-1}|$$

**Schritt 1:** Banachscher Fixpunktsatz: Bedingungen prüfen

- Abbildung  $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$  verifizieren

**Schritt 2:** Lipschitz-Konstante finden

- Lipschitz-Konstante  $\alpha < 1$  finden:  $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$

**Schritt 2.1:** Ableitung  $F'(x)$  berechnen

**Schritt 2.2:** Maximum von  $|F'(x)|$  im Intervall bestimmen

**Schritt 3:** Konklusion

- Eindeutiger Fixpunkt  $\bar{x}$  existiert (erfüllt  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ )

- Jeder Startwert in  $[a, b]$  konvergiert gegen  $\bar{x}$

**Fixpunkt genau:**

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{wobei} \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

#### 2.1.4 Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz für $x^3 + 0.3 = 0$

**Gesucht:** Intervall  $[a, b]$  und Konstante  $\alpha < 1$ , so dass der Banachsche Fixpunktsatz auf die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$  anwendbar ist.

**Lösungsansatz:** Die Fixpunktiteration konvergiert in der Nähe von  $\bar{x} = 0.3389$ . Wir suchen ein geeignetes Intervall und versuchen es mit  $[a, b] = [0, 0.5]$ .

**Schritt 1:** Überprüfen, ob  $F : [0, 0.5] \rightarrow [0, 0.5]$ :

- Für alle  $x \in [0, 0.5]$ :  $F(x) = x^3 + 0.3 \geq 0.3$
- $F(0) = 0.3 \in [0, 0.5]$
- $F(0.5) = 0.125 + 0.3 = 0.425 \in [0, 0.5]$

**Schritt 2:** Finden einer Konstanten  $\alpha < 1$ :

Aus dem Satz wissen wir:  $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$

**Schritt 2.1:** Ableitung berechnen:

$$F'(x) = 3x^2$$

**Schritt 2.2:** Die Ableitung ist monoton steigend, daher Maximum bei  $x = 0.5$ :

$$|F'(0.5)| = 3 \cdot 0.5^2 = 0.75 < 1$$

**Schritt 3:** Konklusion:

Mit  $\alpha = 0.75 < 1$  sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = x_n^3 + 0.3$  konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt  $\bar{x} \approx 0.3389$  für jeden Startwert in  $[0, 0.5]$ .

#### 2.1.5 Vorgehen: Fixpunktform

**Schritt 1:** Nullstellenproblem  $f(x) = 0$  gegeben

**Schritt 2:** Nach  $x$  auflösen:  $F(x) = x$

**Schritt 3:** Mehrere Formen möglich!

**Schritt 4:** Konvergenz prüfen:  $|F'(\bar{x})| < 1$

#### 2.1.6 Beispiel 3.3: Fixpunktform

**Gegeben:**  $p(x) = x^3 - x + 0.3 = 0$

**Schritt 1:** Nullstellenproblem identifiziert

**Schritt 2:** Umformen nach  $x$ :

**Variante A:**  $x^3 - x + 0.3 = 0$

$$\rightarrow x = x^3 + 0.3$$

$$\rightarrow F(x) = x^3 + 0.3$$

**Variante B:**  $x^3 = x - 0.3$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

$$\rightarrow F(x) = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

**Schritt 3:** Beide Formen sind gültig

**Schritt 4:** Konvergenz prüfen (Variante A):

$$F'(x) = 3x^2$$

Bei  $\bar{x} \approx 0.339$ :  $|F'(0.339)| = 3 \cdot 0.339^2 \approx 0.34 < 1$

### 2.1.7 Vorgehen: Fixpunktiteration

**Schritt 1:** Fixpunktform  $x = F(x)$  aufstellen

**Schritt 2:** Startwert  $x_0$  wählen

**Schritt 3:** Iterieren:  $x_{n+1} = F(x_n)$

**Schritt 4:** Konvergenz prüfen:  $|F'(\bar{x})| < 1$

**Schritt 5:** Abbruch bei  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

### 2.1.8 Beispiel 3.4: Fixpunktiteration

**Gegeben:**  $F(x) = x^3 + 0.3$ , Startwert  $x_0 = 0$

**Schritt 1:** Fixpunktform bereits gegeben

**Schritt 2:** Startwert:  $x_0 = 0$

**Schritt 3:** Iteration durchführen:

$$x_1 = F(x_0) = 0^3 + 0.3 = 0.3$$

$$x_2 = F(x_1) = 0.3^3 + 0.3 = 0.027 + 0.3 = 0.327$$

$$x_3 = F(x_2) = 0.327^3 + 0.3 \approx 0.335$$

$$x_4 = F(x_3) = 0.335^3 + 0.3 \approx 0.338$$

$$x_5 = F(x_4) \approx 0.339$$

**Schritt 4:** Konvergenz (siehe Beispiel 3.3):

**Schritt 5:**  $|x_5 - x_4| \approx 0.001 \rightarrow$  Abbruch bei  $\varepsilon = 0.01$

**Fixpunkt:**  $\bar{x} \approx 0.339$

### 2.2 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### Vereinfachtes Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}$$

mit konstanter Ableitung  $c = f'(x_0)$

### 2.2.1 Vorgehen: Newton-Verfahren

**Schritt 1:** Funktion  $f(x)$  und Ableitung  $f'(x)$  bestimmen

**Schritt 2:** Startwert  $x_0$  wählen (nahe Nullstelle)

**Schritt 3:** Iterieren:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Schritt 4:** Konvergenz prüfen:  $\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} < 1$

**Schritt 5:** Abbruch bei  $|f(x_n)| < \varepsilon$  oder  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

**Schritt 6:** Quadratische Konvergenz bei einfachen Nullstellen

### 2.2.2 Beispiel 3.5: Newton für $x^2 = 2$

**Gegeben:**  $f(x) = x^2 - 2$ , Startwert  $x_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$

**Schritt 1:** Funktionen bestimmen:

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

**Schritt 2:** Startwert:  $x_0 = 1$

**Schritt 3:** Iteration:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1 - 2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \approx 1.4167$$

$$x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142$$

**Schritt 4:** Konvergenzprüfung bei  $x \approx 1.414$ :

$$\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} = \frac{|(x^2 - 2) \cdot 2|}{|2x|^2} \approx \frac{0}{8} < 1$$

**Schritt 5:** Abbruchkriterium prüfen bei  $\varepsilon = 10^{-4}$ :

$$|f(x_3)| = |1.4142^2 - 2| \approx 0.00005 < 10^{-4}$$

**Schritt 6:**  $\sqrt{2} \approx 1.4142$  (quadratische Konvergenz!)

### 2.3 Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

### 2.3.1 Vorgehen: Sekantenverfahren

**Schritt 1:** Funktion  $f(x)$  bestimmen (keine Ableitung nötig)

**Schritt 2:** Zwei Startwerte  $x_0$  und  $x_1$  wählen (nahe Nullstelle)

**Schritt 3:** Iterieren:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

**Schritt 4:** Konvergenz: Superlinear (Ordnung  $\approx 1.618$ , besser als linear, schlechter als quadratisch)

**Schritt 5:** Abbruch bei  $|f(x_n)| < \varepsilon$  oder  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

### 2.3.2 Beispiel 3.6: Sekantenverfahren für $x^2 = 2$

**Gegeben:**  $f(x) = x^2 - 2$ , Startwerte  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$

**Schritt 1:** Funktion bestimmt:  $f(x) = x^2 - 2$

**Schritt 2:** Startwerte:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.5$

**Schritt 3:** Iteration:

$$f(x_0) = 1^2 - 2 = -1$$

$$f(x_1) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot (1.5 - 1)}{0.25 - (-1)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot 0.5}{1.25}$$

$$= 1.5 - 0.1 = 1.4$$

$$f(x_2) = 1.4^2 - 2 = -0.04$$

$$x_3 = 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (1.4 - 1.5)}{-0.04 - 0.25}$$

$$= 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (-0.1)}{-0.29}$$

$$= 1.4 - \frac{0.004}{-0.29} \approx 1.414$$

**Schritt 4:** Konvergenz: Superlinear (besser als Fixpunktiteration, weniger Ableitungen als Newton)

**Schritt 5:**  $|f(x_3)| \approx |1.414^2 - 2| \approx 0 \rightarrow$  Konvergiert schnell

### 3 Lineare Gleichungssysteme

#### 3.1 Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

**Untere Dreiecksmatrix:** Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

**Obere Dreiecksmatrix:** Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

#### 3.2 Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

##### Schritt 1 - Vorwärtselimination:

- Zeile 2: – Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: – Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: – Vielfaches von Zeile 2

**Schritt 2:** Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

##### Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:

- $x_n$  aus letzter Zeile
- $x_{n-1}$  aus vorletzter (mit  $x_n$ )
- Weiter bis  $x_1$

##### 3.2.1 Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Erweiterte Matrix: } (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 1 & -3 & -2 & \mid & 5 \\ 5 & 1 & 4 & \mid & 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1 a: Eliminiere  $a_{21}$**

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1}z_1 = (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1)$$

$$(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -2 & -1 & \mid & 5 \\ 5 & 1 & 4 & \mid & 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1b: Eliminiere  $a_{31}$**

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1}z_1 = (\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{b}_2)$$

$$(\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -2 & -1 & \mid & 5 \\ 0 & 6 & 9 & \mid & 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1c: Eliminiere  $a_{32}$**

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2}z_2 = (\mathbf{A}_3 \mid \mathbf{b}_3)$$

$$(\mathbf{A}_3 \mid \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -2 & -1 & \mid & 5 \\ 0 & 0 & 6 & \mid & 18 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:**

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

**Lösung:**  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

### 3.3 LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$$

mit Permutationsmatrix  $P$ :

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

#### 3.3.1 Vorgehen: LR-Zerlegung

**Schritt 1:** Gauss-Elimination durchführen

**Schritt 2:** Faktoren in  $L$  eintragen

**Schritt 3:** Resultat ist  $R$

**Schritt 4 - Lösen:**

- $Ly = b$  (Vorwärts)
- $Rx = y$  (Rückwärts)

#### 3.3.2 Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

**Gegeben:** System aus Beispiel 4.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1:** Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

**Schritt 2:** Multiplikatoren sammeln:

- Zeile 2: Faktor war  $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war  $\frac{5}{-1} = -5$ , dann  $\frac{6}{-2} = -3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:** Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**Schritt 4:** Lösen (für  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ):

**Vorwärts ( $Ly = b$ ):**

$$\text{Erweiterte Matrix: } (L \mid b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

**Schritt 1:** Eliminiere  $L_{21}$ :

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

**Schritt 2:** Eliminiere  $L_{31}$ :

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

**Schritt 3:** Eliminiere  $L_{32}$ :

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

**Vereinfacht**

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \rightarrow y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \rightarrow y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

**Resultat:**

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

**Rückwärts ( $Rx = y$ ):** wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

**Lösung:**  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

### 3.4 QR Zerlegung

Eine Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$Q^T Q = I_n \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist die Darstellung:

$$A = QR$$

**Gram-Schmidt-Verfahren:**

$$v_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i^T u_j) u_j \quad (\text{orthogonal})$$

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad (\text{normalisiert})$$

Finden von  $R$ :

$$R = Q^T A$$

#### 3.4.1 Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

**Schritt 1:** Spalten  $a_1, a_2, \dots$  von  $A$

**Schritt 2:**  $u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

**Schritt 3:** Für  $i = 2, \dots, n$ :

- $v_i$  berechnen (orthogonalisieren)
  - $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$  berechnen
- Schritt 4:**  $Q = [u_1 | \dots | u_n]$
- Schritt 5:**  $R = Q^T A$

#### 3.4.2 Beispiel 4.3: QR für $2 \times 2$

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1:** Spalten:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|a_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:** Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$a_2^T u_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(-0.32)^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$u_2 = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

**Schritt 4:**  $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

**Schritt 5:**

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

#### 3.4.3 Vorgehen: Jacobi-Verfahren

**Schritt 1:** Zerlegung:  $A = L + D + R$

**Schritt 2:** Iterationsformel aufstellen

**Schritt 3:** Startvektor  $x^{(0)}$  wählen

**Schritt 4:** Konvergenz prüfen.

#### Iterationsformel:

$$A = D + L + R$$

$$Dx^{(k+1)} = -(L + R)x^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

#### Konvergenz Prüfen Formel

$$B = -D^{-1}(L + R)$$

$$c = D^{-1}b$$

Somit ist

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c =: F(x^{(n)})$$

Falls  $\|B\| < 1$  -> konvergiert für jeden Startvektor  $x^{(0)}$ . Falls  $\|B\| \geq 1$  -> keine Konvergenz garantiert.

#### Diagonaldominanz:

Zeilenweise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Spaltenweise :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

#### Gegeben:

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

#### Schritt 1 Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Schritt 2 Iterationsformel:

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}((L + R)x^{(n)} - b)$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0.4 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

#### Schritt 3 Startwert:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5125 \\ 2.03 \\ 2.295 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.80125 \\ 2.059 \\ 2.282 \end{pmatrix}$$

#### 3.5 Gauß-Seidel

Das Gauß-Seidel Verfahren ist eine Modifikation des Jacobi-Verfahrens. Vorteile sind schnellere Konvergenz und weniger Speicherbedarf (da kein Zwischenspeicher für den alten Vektor benötigt wird).

**Schritt 1:** Zerlegung:  $A = L + D + R$  (wie Jacobi)

**Schritt 2:** Startvektor  $x^{(0)}$  wählen

**Schritt 3:** Für jede Komponente  $i$  sequentiell von oben nach unten:

- Nutze neue  $x_j^{(k+1)}$  für  $j < i$  (bereits berechnet!)
- Nutze alte  $x_j^{(k)}$  für  $j > i$  (noch nicht berechnet)

**Schritt 4:** Alle Komponenten in dieser Iteration berechnen

**Schritt 5:** Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

**Schritt 6:** Abbruch:  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

Allgemein für Komponente  $i$ :

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

### 3.5.1 Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

**Schritt 1:** Zerlegung:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Startvektor:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3+4:** Iteration 1 ( $k = 0$ ) - für jede Komponente sequentiell:

**Komponente 1:**

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(5 - 0 - 0) = 1.25$$

**Komponente 2** (nutze neues  $x_1^{(1)} = 1.25$ ):

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.25 - 0) = \frac{1}{5}(13.5) = 2.7$$

**Komponente 3** (nutze neue  $x_1^{(1)} = 1.25, x_2^{(1)} = 2.7$ ):

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.25 - (-2) \cdot 2.7) = \frac{1}{5}(16.15) = 3.23$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.7 \\ 3.23 \end{pmatrix}$$

**Iteration 2** ( $k = 1$ ):

**Komponente 1:**

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 2.7 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{4}(3.47) = 0.87$$

**Komponente 2** (nutze neues  $x_1^{(2)} = 0.87$ ):

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 0.87 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{5}(9.51) = 1.90$$

**Komponente 3** (nutze neue  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ ):

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 0.87 - (-2) \cdot 1.90) = \frac{1}{5}(13.93) = 2.79$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 1.90 \\ 2.79 \end{pmatrix}$$

**Schritt 5:** Diagonaldominanz:  $|4| > |-1| + |1| = 2 \checkmark, |5| > |-2| + |1| = 3 \checkmark, |5| > |1| + |-2| = 3 \checkmark$

**Schritt 6:** Konvergiert schneller als Jacobi zum gleichen Vektor!

### 3.6 Fehlerabschätzung

Von Jacobi:  $B = D^{-1}(L + R)$

Von Gauss-Seidel:  $B = -(D + L)^{-1}R$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{c} =: \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

**A-priori Abschätzung:**

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|^n}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$n \geq \frac{\log(\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\|) + \log(1 - \|\mathbf{B}\|) - \log(\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|)}{\log(\|\mathbf{B}\|)}$$

**A-posteriori Abschätzung:**

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|$$

### 3.7 Fehler für gestörte LGS

Die Unedndlichnorm einer Matrix ist das Maximum der absoluten Zeilensummen einer Matrix.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Die Unedndlichnorm eines Vektors ist das Maximum der absoluten Einträge eines Vektors.

$$\|\mathbf{b}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{b}_i|$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A}$$

**Konditionszahl**

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$$

**Nur  $\mathbf{b}$  gestört:** absoluter Fehler:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty$$

relativer Fehler:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

oder:  $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$ .

• Nur  $\mathbf{A}$  gestört:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}}{1 - \kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}}.$$

•  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  gestört:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A})}{1 - \kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}} \left( \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} + \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \right).$$

- Direkter Weg:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \quad \text{Fehler} = \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}.$$

**Schritt 1:** Berechne  $\kappa_\infty(\mathbf{A})$

**Schritt 2:** Wähle die passende Formel (nur  $b$ , nur  $A$ , oder beides gestört)

**Schritt 3:** Setze die Werte ein und berechne den Fehler

**Gegeben:** Lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  mit gestörtem  $b$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $\varepsilon$  eine kleine Störung (z.B. Rundungsfehler).

**Schritt 1:** Berechne  $\kappa_\infty(\mathbf{A})$

Zeilensummen von  $A$ :

- Zeile 1:  $|2| + |0| + |3| = 5$
- Zeile 2:  $|1| + |-2| + |1| = 4$
- Zeile 3:  $|0| + |3| + |1| = 4$

$$\|A\|_\infty = \max(5, 4, 4) = 5$$

Zeilensummen von  $A^{-1}$ :

- Zeile 1:  $|5| + |-9| + |-6| = 5 + 9 + 6 = 20$
- Zeile 2:  $|1| + |-2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$
- Zeile 3:  $|-3| + |6| + |4| = 3 + 6 + 4 = 13$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(20, 4, 13) = 20$$

$$\kappa_{\infty}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 20 = 100$$

**Schritt 2:** Wähle die passende Formel

Da nur  $b$  gestört ist (mit Störung  $\varepsilon$ ), verwenden wir:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \kappa_{\infty}(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

**Schritt 3:** Setze die Werte ein und berechne den Fehler

- Originales  $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$  (eigentlich sollte dies  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  sein, Störung ist  $\varepsilon$ )
- Gestörtes  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
- $\|b\|_\infty = 4$

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \approx \kappa_{\infty}(A) \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

**Interpretation:**

- Wenn  $\kappa_{\infty}(A)$  klein ist: kleine Störungen führen zu kleinen Fehlern (gut konditioniert)
- Wenn  $\kappa_{\infty}(A)$  groß ist: kleine Störungen können zu großen Fehlern führen (schlecht konditioniert)

### 3.7.1 Definition 4.6: Eigenwert

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$  = Eigenwert,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  = Eigenvektor

### 3.7.2 Vorgehen: Eigenwerte

**Schritt 1:** bilde  $A - \lambda I$

**Schritt 2:** finde Charakteristisches Polynom (char.).

**Schritt 3:** löse  $\text{char} = 0$  (finde  $\lambda$ )

**Schritt 4:** Für jeden  $\lambda$ :  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

### 3.7.3 Beispiel 4.7: Eigenwerte $2 \times 2$

$$\text{Gegeben: } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 1:** Bilde  $A - \lambda I$ :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Charakteristisches Polynom (Determinante):

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

**Schritt 3:** Löse  $p(\lambda) = 0$  (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

**Schritt 4:** Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 5$ :

$$(A - 5I)\mathbf{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 5 & 1 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Beobachtung:** Zeile 2 ist  $-2$  mal Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zur Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der (einzigsten unabhängigen) Gleichung:  $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 5)$$

Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 2$ :

$$(A - 2I)\mathbf{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 2 & 1 \\ 2 & 3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Gleichung:  $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2)$$

### 3.7.4 Vorgehen: Potenzmethode

**Schritt 1:** Startvektor  $v^{(0)}$  wählen (zufällig)

**Schritt 2:** Iteration:

$$w^{(k)} = Av^{(k-1)}$$

**Schritt 3:** Normieren:

$$v^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|}$$

**Schritt 4:** Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx (v^{(k)})^T Av^{(k)}$$

Konvergiert zum betragsmäßig größten EW.

### 3.7.5 Beispiel 4.8: Potenzmethode

**Gegeben:**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , Start:  $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Iteration 1:**

**Schritt 2:**  $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Schritt 3:**  $\|w^{(1)}\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$$v^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{4.47} \approx \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

**Iteration 2:**

**Schritt 2:**  $w^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.01 \\ 3.13 \end{pmatrix}$

**Schritt 3:**  $\|w^{(2)}\| \approx 5.08$

$$v^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.62 \end{pmatrix}$$

**Iteration 3:**  $v^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$

**Schritt 4:** Eigenwert (nach Konvergenz):

$$\begin{aligned} \lambda &= v^T A v \\ &= \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

**Ergebnis:** Größter EW  $\lambda_1 = 5$  (vgl. 4.7)

## 3.8 komplexe Zahlen

### 3.8.1 Darstellungen

**Normalform (kartesisch):**

$$z = x + iy$$

**Trigonometrische Form (polar):**

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

**Exponentialform:**

$$z = re^{i\varphi}$$

Dabei gilt:  $r \geq 0$  und  $\varphi$  ist der Winkel.

### 3.8.2 Umrechnen: Normalform -> Polar/Expo

Gegeben  $z = x + iy$ :

**Betrag:**

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Winkel:**

$$\varphi = \arg(z)$$

Praktisch rechnet man zuerst

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und korrigiert dann den Quadranten:

- falls  $x > 0$ :  $\varphi = \varphi_0$
- falls  $x < 0$  und  $y \geq 0$ :  $\varphi = \varphi_0 + \pi$
- falls  $x < 0$  und  $y < 0$ :  $\varphi = \varphi_0 - \pi$
- falls  $x = 0$  und  $y > 0$ :  $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- falls  $x = 0$  und  $y < 0$ :  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Hinweis: Viele Taschenrechner/Programmiersprachen haben `atan2(y, x)`, das liefert direkt den richtigen Winkel:

$$\varphi = \text{atan2}(y, x)$$

Dann:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

### 3.8.3 Umrechnen: Polar/Expo -> Normalform

Gegeben  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  oder  $z = re^{i\varphi}$ :

**Realteil und Imaginärteil:**

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Also:

$$z = x + iy = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)$$

### 3.8.4 algebraische Operationen

**Konjugation:**  $z^* = x - iy$

**Betrag:**  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### 3.8.5 Grundrechenarten komplexer Zahlen

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in der Normalform:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

#### Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

#### Differenz

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

#### Produkt

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

Ausmultiplizieren und  $i^2 = -1$  benutzen:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

#### Division

Für  $z_2 \neq 0$  gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Mit dem konjugiert Komplexen  $z_2^* = x_2 - iy_2$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

Nenner:

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

Zähler:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

Damit:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

In Exponentialform:

Für  $z_2 \neq 0$  (also  $r_2 > 0$ ):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

#### Wurzel

Die  $n$ -ten Wurzeln von  $z = re^{i\varphi}$  sind:

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

**Gegeben:**  $z = 4$  (reelle Zahl), gesucht: kubische Wurzeln ( $n = 3$ )

**Schritt 1:** In Exponentialform umwandeln:

$$r = |4| = 4, \quad \varphi = 0$$

$$z = 4e^{i0}$$

**Schritt 2:** Wurzeln berechnen mit Formel:

$$z_k = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{0+2k\pi}{3}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2$$

**Schritt 3:** Die drei Wurzeln:

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}} e^{i0} = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$$

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}}(-0.5 + i0.866)$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(-0.5 - i0.866)$$

**Geometrisch:** Die drei Wurzeln liegen gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius  $4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$ , verteilt um  $120^\circ$  auseinander.

## 4 Ergänzung & Formeln

### 4.1 Ableitungen & Integrale

**Grundlegende Ableitungsregeln:**

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) \quad \text{Linearität}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

**Ableitungen elementarer Funktionen:**

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq 0$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a), \quad a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_{a(x)})' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

### 4.2 Logarithmus Gesetze

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a), \quad a > 0, n \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad x > 0$$

$$\log_{b(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{Basiswechsel}$$

### 4.3 Polynome

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

$$P(x) = \int p(x) \, dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C$$

### 4.4 Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

### 4.5 Geometrie

$$V_{\text{kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad A_{\text{kreis}} = \pi r^2$$

$$V_{\text{zyl}} = \pi r^2 l$$

$$V_{\text{kugelsegment}} = \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right)$$

### 4.6 Lineare Algebra Basics

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \quad \text{für } 2 \times 2$$