Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix: Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, ..., 1$$

Schritt 1 - Vorwärtselimination:
- Zeile 2: — Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 2

Schritt 2: Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:
- x_n aus letzter Zeile
- x_{n-1} aus vorletzter (mit x_n)
- Weiter bis x_1

Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1 a: Eliminiere a_{21}

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1)$$

$$(\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1b: Eliminiere a_{31}

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2)$$

$$(\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1c: Eliminiere a_{32}

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2} z_2 = (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3)$$

$$(\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$

mit Permutationsmatrix P:

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

Vorgehen: LR-Zerlegung

Schritt 1: Gauss-Elimination durchführen

Schritt 2: Faktoren in $\boldsymbol{L}$ eintragen

Schritt 3: Resultat ist $\boldsymbol{R}$

Schritt 4 - Lösen:
- $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ (Vorwärts)
- $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (Rückwärts)

Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

Gegeben: System aus Beispiel 4.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

Schritt 2: Multiplikatoren sammeln:
- Zeile 2: Faktor war $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war $\frac{5}{-1} = -5$, dann $\frac{6}{-2} = -3$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Lösen (für $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$):

Vorwärts ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$):

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{L} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1: Eliminiere L_{21}:

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Eliminiere L_{31}:

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Eliminiere L_{32}:

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 18 \end{pmatrix}$$

Vereinfacht

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \to y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \to y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

Resultat:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rückwärts ($\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$): wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

QR Zerlegung

Eine Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I_n} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Darstellung:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j \quad \text{(orthogonal)}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} \quad \text{(normalisiert)}$$

Finden von $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$$

Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

Schritt 1: Spalten $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ von $\boldsymbol{A}$

Schritt 2: $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$

Schritt 3: Für $i = 2, \ldots, n$:
- $\boldsymbol{v}_i$ berechnen (orthogonalisieren)
- $\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|}$ berechnen

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u}_1 \mid \ldots \mid \boldsymbol{u}_n]$

Schritt 5: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$

Beispiel 4.3: QR für 2×2

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Spalten:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$\boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{u}_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{0.32^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

Schritt 5:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: Jacobi-Verfahren

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$

Schritt 2: Iterationsformel aufstellen

Schritt 3: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 4: Konvergenz prüfen.

Interationsformel:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Konvergenz Prüfen Formel

$$B = D^{-1}(L + R)$$

Falls $\|B\| < 1$ -> konvergiert für jeden Startvektor $x^{(0)}$. Falls $\|B\| \geq 1$ -> keine Konvergenz garantiert.

Diagonaldominanz:
Zeilenweise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Spaltenweise :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}|, \quad \forall i = 1, ..., n$$

Gegeben:

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Schritt 1 Zerlegung:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2 Iterationsformel:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}\big((\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{b}\big)$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0.4 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Schritt 3 Startwert:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5125 \\ 2.03 \\ 2.295 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.80125 \\ 2.059 \\ 2.282 \end{pmatrix}$

Gauß-Seidel

Das Gauß-Seidel Verfahren ist eine Modifikation des Jacobi-Verfahrens. Vorteile sind schnellere Konvergenz und weniger Speicherbedarf (da kein Zwischenspeicher für den alten Vektor benötigt wird).

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$ (wie Jacobi)

Schritt 2: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 3: Für jede Komponente i **sequentiell** von oben nach unten:
- Nutze **neue** $x_j^{(k+1)}$ für $j < i$ (bereits berechnet!)
- Nutze **alte** $x_j^{(k)}$ für $j > i$ (noch nicht berechnet)

Schritt 4: Alle Komponenten in dieser Iteration berechnen

Schritt 5: Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

Schritt 6: Abbruch: $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

Allgemein für Komponente i:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

Schritt 1: Zerlegung:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Startvektor:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3+4: Iteration 1 ($k = 0$) - für jede Komponente sequentiell:

Komponente 1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(5 - 0 - 0) = 1.25$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(1)} = 1.25$):

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.25 - 0) = \frac{1}{5}(13.5) = 2.7$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(1)} = 1.25, x_2^{(1)} = 2.7$):

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.25 - (-2) \cdot 2.7) = \frac{1}{5}(16.15) = 3.23$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.7 \\ 3.23 \end{pmatrix}$$

Iteration 2 ($k = 1$):

Komponente 1:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 2.7 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{4}(3.47) = 0.87$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(2)} = 0.87$):

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 0.87 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{5}(9.51) = 1.90$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$):

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 0.87 - (-2) \cdot 1.90) = \frac{1}{5}(13.93) = 2.79$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 1.90 \\ 2.79 \end{pmatrix}$$

Schritt 5: Diagonaldominanz: $|4| > |-1| + |1| = 2$ ✓, $|5| > |-2| + |1| = 3$ ✓, $|5| > |1| + |-2| = 3$ ✓

Schritt 6: Konvergiert schneller als Jacobi zum gleichen Vektor!

Fehlerabschätzung

Von Jacobi: $B = D^{-1}(L + R)$
Von Gauss-Seidel: $B = -(D + L)^{-1} R$

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(n)} + \boldsymbol{c} =: \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right)$$

A-priori Abschätzung:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|^n}{1 - \|\boldsymbol{B}\|} \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|$$

$$n \geq \frac{\log\left(\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\|\right) + \log(1 - \|\boldsymbol{B}\|) - \log\left(\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|\right)}{\log(\|\boldsymbol{B}\|)}$$

A-posteriori Abschätzung:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|}{1 - \|\boldsymbol{B}\|} \|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}\|$$

Fehler für gestörte LGS

$\tilde{A} = \Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}$

Konditionszahl

$\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$

Nur b gestört: absoluter Fehler:

$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \, \|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty$

relativer Fehler:

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \, \|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

$$\text{oder:} \quad \kappa_\infty(\boldsymbol{A}) \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}.$$

- Nur $\boldsymbol{A}$ gestört:

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}}{1 - \kappa_\infty(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}}.$$

- $\boldsymbol{A}$ und b gestört:

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa_\infty(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}} \left(\frac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} \right).$$

- Direkter Weg:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \text{Fehler} = \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}.$$

Definition 4.6: Eigenwert

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ = Eigenwert, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ = Eigenvektor

Vorgehen: Eigenwerte

Schritt 1: bilde $A - \lambda I$

Schritt 2: finde Charakteristisches Polynom (char).

Schritt 3: löse $\text{char} = 0$ (finde λ)

Schritt 4: Für jeden λ: $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Beispiel 4.7: Eigenwerte 2×2

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Bilde $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom (Determinante):

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Schritt 3: Löse $p(\lambda) = 0$ (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Schritt 4: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$:

$$(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Zeile 2 ist -2 mal Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zur Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der (einzigen unabhängigen) Gleichung: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 5\ )$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Gleichung: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2\ )$$

Vorgehen: Potenzmethode

Schritt 1: Startvektor $\boldsymbol{v}^{(0)}$ wählen (zufällig)

Schritt 2: Iteration:

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}$$

Schritt 3: Normieren:

$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{w}^{(k)}}{\|}\boldsymbol{w}^{(k)}\|$$

Schritt 4: Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx \left(\boldsymbol{v}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}$$

Konvergiert zum betragsmäßig größten EW.

Beispiel 4.8: Potenzmethode

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, Start: $\boldsymbol{v}^{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Iteration 1:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(1)}\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}{4.47} \approx \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Iteration 2:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4.01 \\ 3.13 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(2)}\| \approx 5.08$

$$\boldsymbol{v}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.62 \end{pmatrix}$$

Iteration 3: $\boldsymbol{v}^{(3)} \approx \left(\begin{smallmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 4: Eigenwert (nach Konvergenz):

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v} \\
&= \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\
&\approx 5
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Größter EW $\lambda_1 = 5$ (vgl. 4.7)

komplexe Zahlen

Darstellungen

Normalform (kartesisch):

$$z = x + iy$$

Trigonometrische Form (polar):

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Exponentialform:

$$z = re^{i\varphi}$$

Dabei gilt: $r \geq 0$ und φ ist der Winkel.

Umrechnen: Normalform -> Polar/Expo

Gegeben $z = x + iy$:

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkel:

$$\varphi = \arg(z)$$

Praktisch rechnet man zuerst

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und korrigiert dann den Quadranten:

- falls $x > 0$:
  $$\varphi = \varphi_0$$
- falls $x < 0$ und $y \geq 0$:
  $$\varphi = \varphi_0 + \pi$$
- falls $x < 0$ und $y < 0$:
  $$\varphi = \varphi_0 - \pi$$
- falls $x = 0$ und $y > 0$:
  $$\varphi = \frac{\pi}{2}$$
- falls $x = 0$ und $y < 0$:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Hinweis: Viele Taschenrechner/Programmiersprachen haben `atan2(y, x)`, das liefert direkt den richtigen Winkel:

$$\varphi = atan2(y, x)$$

.

Dann:

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

.

Umrechnen: Polar/Expo -> Normalform

Gegeben $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder $z = re^{i\varphi}$:

Realteil und Imaginärteil:

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

Also:

$$z = x + iy = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$$

.

algebraische Operationen
Konjugation: $z^* = x - iy$
Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Grundrechenarten komplexer Zahlen
Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in der Normalform:
$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2.$

Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Differenz

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Produkt

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ benutzen:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Division

Für $z_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Mit dem konjugiert Komplexen $z_2^* = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

Nenner:

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

Zähler:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

Damit:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

In Exponentialform:
Für $z_2 \neq 0$ (also $r_2 > 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Wurzel

Die n-ten Wurzeln von $z = re^{i\varphi}$ sind:

$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ für k = 0,1, … , n-1

Gegeben: $z = 4$ (reelle Zahl), gesucht: kubische Wurzeln ($n = 3$)

Schritt 1: In Exponentialform umwandeln:

$$r = |4| = 4, \quad \varphi = 0$$

$$z = 4e^{i \cdot 0}$$

Schritt 2: Wurzeln berechnen mit Formel:

$$z_k = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{0 + 2k\pi}{3}} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2$$

Schritt 3: Die drei Wurzeln:

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot 0} = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$$

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}} (-0.5 + i0.866)$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}} (-0.5 - i0.866)$$

Geometrisch: Die drei Wurzeln liegen gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius $4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$, verteilt um 120° auseinander.