STS - Zusammenfassung

Stochastik & Statistik · Zusammenfassung

1 Grundbegriffe

Häufig gebrauchte Variablen:

x: Merkmal / Beobachtung
a_i: Merkmalsausprägung (Wertklasse)
h_i: absolute Häufigkeit von a_i
f_i: relative Häufigkeit von a_i
H_i: kumulierte absolute Häufigkeit
F_i: kumulierte relative Häufigkeit
$\overline{x}$: arithmetisches Mittel
x_{med}: Median (2. Quantil)
x_{mod}: Modalwert (häufigster Wert)
s^2: Varianz, s_x: Standardabweichung
s_{korr}: korrigierte Standardabweichung
$f(x)$: PMF/PDF, $F(x)$: CMF/CDF

PMF: $f(x)$ Relative Häufigkeit (Stabdiagramm)

CMF: $F(x)$ Kumulative relative Häufigkeit (Treppendiagramm)

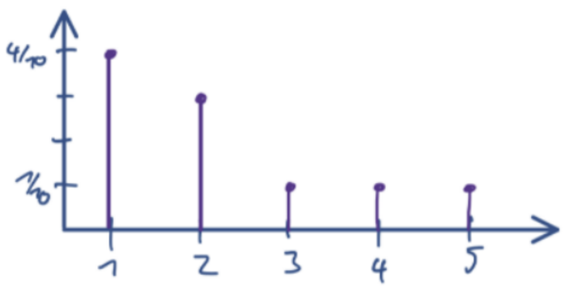
PDF: $f(x)$ Höhe Balken Histogramm

CDF: $F(x)$ Kulutative Fläche Balken Histogramm

2 Diagramtypen

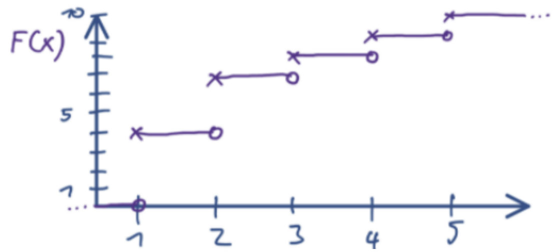
2.1 PMF

$f(x)$ Relative Häufigkeit (Stabdiagramm)



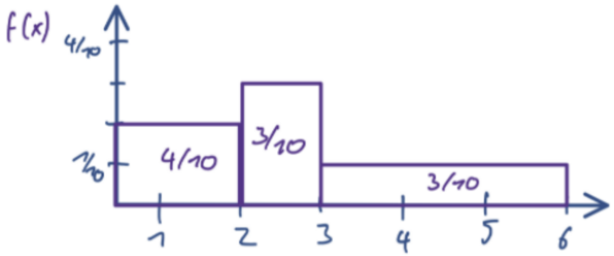
2.2 CMF

$F(x)$ Kumulative relative Häufigkeit (Treppendiagramm)



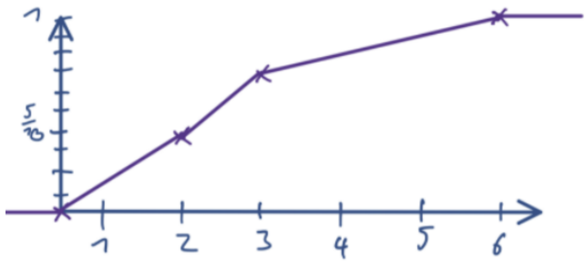
2.3 PDF

$f(x)$ Höhe Balken Histogramm



2.4 CDF

$F(x)$ Kulutative Fläche Balken Histogramm



3 Häufigkeiten und Verteilungen

Neue Variablen in diesem Abschnitt:

n: Stichprobengröße (Anzahl Beobachtungen)

1. Urliste sortieren
2. Verschiedene Werte a_i bestimmen
3. Absolute Häufigkeit: h_i = Anzahl von a_i
4. Relative Häufigkeit: $f_i = \frac{h_i}{n}$
5. Kumulative Häufigkeit:
   - $H_i = \sum_{k \le i} h_k$
   - $F_i = \sum_{k \le i} f_k$

Würfeln (20 Würfe):

a_i	1	2	3	4	5	6
h_i	4	3	4	0	6	3
f_i	0.2	0.15	0.2	0	0.3	0.15
F_i	0.2	0.35	0.55	0.55	0.85	1.0
H_i	4	7	11	11	17	20

PMF: $\frac{h_i}{20}$, PDF: $\frac{h_i}{20}$, CDF: F_i, CMF: H_i

4 Median und Quantile

Neue Variablen:

q: Quantilsniveau (z.B. 0.25, 0.5, 0.75)
Q_q: zugehöriges q-Quantil
p: Positionsindex in der sortierten Liste

q-Quantil Q_q:

Position: $p = n \cdot q$

Falls p ganzzahlig:

$$Q_q = \frac{1}{2}\left(x_{(p)} + x_{(p+1)}\right)$$

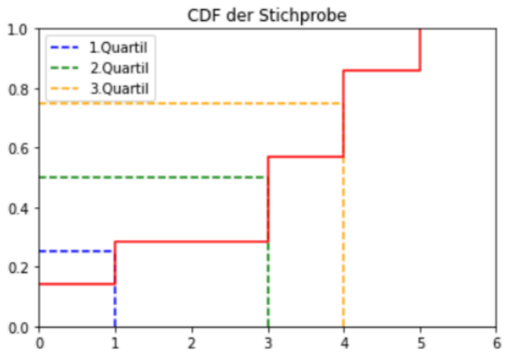
Falls p nicht ganzzahlig:

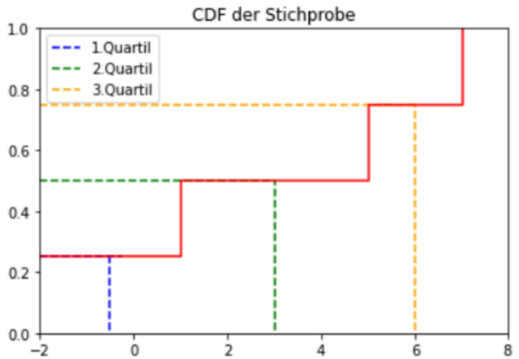
$$Q_q = x_{(\lceil p \rceil)}$$

Spezialfälle:

- Median: $q = 0.5$
- 1. Quartil (Q1): $q = 0.25$
- 3. Quartil (Q3): $q = 0.75$

4.0.1 Quartil aus CDF ablesen





1. Daten sortieren: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
2. Position berechnen: $p = n \cdot q$
3. Falls p ganzzahlig $\longrightarrow Q_q = \frac{1}{2}\left(x_{(p)} + x_{(p+1)}\right)$
4. Falls nicht $\longrightarrow k = \lceil p \rceil$, dann $Q_q = x_{(k)}$

Stichprobe: 4, 4, 0, 3, 5, 3, 1

Sortiert: 0, 1, 3, 3, 4, 4, 5 ($n = 7$)

Q1: $p = 7 \cdot 0.25 = 1.75 \longrightarrow k = 2 \longrightarrow Q_1 = 1$

Median: $p = 7 \cdot 0.5 = 3.5 \longrightarrow k = 4 \longrightarrow Q_2 = 3$

Q3: $p = 7 \cdot 0.75 = 5.25 \longrightarrow k = 6 \longrightarrow Q_3 = 4$

5 Quantile bei klassierten Daten

Neue Variablen:

a_{k-1}, a_k: Klassenunter-/obergrenze
$F(a_k)$: CDF an rechter Klassengrenze

Gegeben: Klasse $[a_{k-1}, a_k]$ mit $F(a_{k-1}) < q \leq F(a_k)$

Lineare Interpolation:

$$Q_q = a_{k-1} + \frac{a_k - a_{k-1}}{F(a_k) - F(a_{k-1})} \cdot (q - F(a_{k-1}))$$

1. Kumulierte Verteilung $F(a_k)$ aus Tabelle ablesen
2. Klasse finden, in der $F(a_{k-1}) < q \leq F(a_k)$
3. Formel anwenden (lineare Interpolation)

Mieten (0.7351-Quantil):

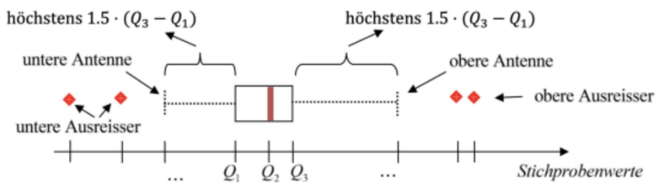
Klasse 1000–1500: $F(1000) = 0.47$, $F(1500) = 0.775$

$$\begin{aligned} Q_{0.7351} &= 1000 + \frac{1500 - 1000}{0.775 - 0.47} \cdot (0.7351 - 0.47) \\ &= 1000 + \frac{500}{0.305} \cdot 0.2651 \\ &\approx 1434.78 \end{aligned}$$

6 Boxplot-Kennwerte

Neue Variablen:

IQR: Interquartilsabstand
Untere/obere Antenne: Bereich ohne Ausreißer



Interquartilsabstand (IQR):

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1$$

Antennen (Whisker):

- Untere: Minimum in $[Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR}, Q_1]$
- Obere: Maximum in $[Q_3, Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}]$

Ausreißer: Werte außerhalb $[Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR}, Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}]$

Daten: 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 22

$$Q_1 = 8, \quad \text{Median} = 10, \quad Q_3 = 15$$

$$\text{IQR} = 15 - 8 = 7$$

Whisker:

- Untere: $Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR} = 8 - 10.5 = -2.5 \longrightarrow$ Min(Daten) = 5
- Obere: $Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR} = 15 + 10.5 = 25.5 \longrightarrow$ Max(Daten) = 22

Ergebnis: Alle Werte in $[5, 22] \longrightarrow$ keine Ausreißer

7 Mittelwert und Varianz

Neue Variablen:

s: Standardabweichung
s_{korr}: korrigierte Standardabweichung

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Empirische Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Korrigierte Varianz:

$$s_{\text{korr}}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

1. Mittelwert $\overline{x}$ berechnen

2. Varianz entweder direkt oder mit Verschiebungssatz
3. Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2}$
4. Für Schätzungen: korrigierte Varianz verwenden

Gewinnspiel (100 Spiele):

Gewinn	−1	0	4	8	10	20
h_i	74	13	3	5	4	1

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(-1 \cdot 74 + 0 \cdot 13 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1) = -0.38 \text{ CHF}$$

$$s^2 = \frac{1}{100}(1 \cdot 74 + 0 + 16 \cdot 3 + 64 \cdot 5 + 100 \cdot 4 + 400 \cdot 1) - 0.38^2 = 12.28\text{CHF}^2$$

$$s = \sqrt{12.28} \approx 3.5 \text{ CHF}$$

8 Lineare Regression (KQM)

Neue Variablen:

a: Achsenabschnitt
b: Steigung der Regressionsgeraden
R^2: Bestimmtheitsmaß

Regressionsgerade: $y = a + bx$

Steigung:

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Achsenabschnitt:

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$$

Residualvarianz:

$$s_{\text{Res}}^2 = s_y^2(1 - r^2)$$

Bestimmtheitsmaß:

$$R^2 = r^2 = \frac{s_y^2 - s_{\text{Res}}^2}{s_y^2}$$

1. Korrelationskoeffizient r berechnen
2. Steigung: $b = s_{xy}/s_x^2$
3. Achsenabschnitt: $a = \overline{y} - b\overline{x}$
4. Prüfung: Residuenplot (sollte unsystematisch streuen)
5. Güte: R^2 berechnen (Anteil erklärter Varianz)

Größe-Gewicht (15 Personen):

$\overline{x} = 173$ cm, $s_x = 6.047$ cm

$\overline{y} = 72.267$ kg, $s_y = 7.474$ kg

$s_{xy} = 41.071$, $r = 0.898$

$$b = \frac{41.071}{6.047^2} \approx 1.123$$

$a = 72.267 - 1.123 \cdot 173 \approx -122.02$

Regressionsgerade:

$$y = -122.02 + 1.123x$$

$$R^2 = 0.898^2 \approx 0.806$$

$\longrightarrow$ 80.6% der Varianz erklärt

9 Bivariate Daten & Kovarianz

Neue Variablen:

(x_i, y_i): Wertepaare zweier Merkmale
s_{xy}: empirische Kovarianz
$\overline{xy}$: Mittelwert der Produkte

Empirische Kovarianz:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Verschiebungssatz:

$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

wobei:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Korrigierte Kovarianz:

$$s_{xy,\text{korr}} = \frac{n}{n-1} \cdot s_{xy}$$

Interpretation:

- $s_{xy} > 0$: positiver Zusammenhang
- $s_{xy} \approx 0$: kein linearer Zusammenhang
- $s_{xy} < 0$: negativer Zusammenhang

1. Mittelwerte $\overline{x}, \overline{y}$ berechnen
2. Produkte $x_i y_i$ bilden
3. Verschiebungssatz anwenden: $s_{xy} = \overline{xy} - \overline{xy}$
4. Interpretation: Vorzeichen gibt Richtung des Zusammenhangs

Stichprobe: $x = [1, 2, 3]$, $y = [4, -1, 2]$

$$\overline{x} = 2, \quad \overline{y} = \frac{5}{3}$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{3}(1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) = \frac{8}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

Negativer Wert $\longrightarrow$ negativer Zusammenhang

10 Spearman-Rangkorrelation

Neue Variablen:

$\text{rg}(x_i)$: Rang von x_i in sortierter Liste
r_{Sp}: Spearman-Korrelationskoeffizient
d_i: Differenz der Ränge

Definition (allgemein):

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\text{rg}(x_i) - \overline{\text{rg}(x)}\right)\left(\text{rg}(y_i) - \overline{\text{rg}(y)}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\text{rg}(x_i) - \overline{\text{rg}(x)}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\text{rg}(y_i) - \overline{\text{rg}(y)}\right)^2}}$$

Vereinfachte Formel (keine gleichen Ränge):

$$r_{\text{Sp}} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

wobei $d_i = \text{rg}(x_i) - \text{rg}(y_i)$

Interpretation:

- Misst monotonen (nicht nur linearen) Zusammenhang
- Robust gegen Ausreißer
- Werte: $-1 \leq r_{\text{Sp}} \leq 1$

1. Ränge für x und y separat vergeben (1 = kleinster Wert)
2. Bei gleichen Werten: Durchschnittsrang vergeben
3. Rangdifferenzen d_i berechnen
4. Formel anwenden (vereinfacht falls keine Bindungen)
5. Interpretation wie bei Pearson

Alter vs. Laufzeit (6 Personen):

i	x_i	y_i	$\text{rg}(x_i)$	$\text{rg}(y_i)$
1	59	14.6	6	6
2	35	11.8	3	2
3	43	14.3	5	5
4	23	13.0	1	3
5	42	14.2	4	4
6	27	11.0	2	1

$$\sum d_i^2 = 0 + 1 + 0 + 4 + 0 + 1 = 6$$

$$r_{\text{Sp}} = 1 - \frac{6 \cdot 6}{6(36-1)} = 1 - \frac{36}{210} \approx 0.83$$

Starker positiver monotoner Zusammenhang

11 Korrelation nach Bravais-Pearson

Neue Variablen:

y: zweite Variable
s_x, s_y: Standardabweichungen von x, y
s_{xy}: Kovarianz von x, y
r: Korrelationskoeffizient

Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

wobei:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Interpretation:
- $r \approx 1$: starker positiver Zusammenhang
- $r \approx 0$: kein linearer Zusammenhang
- $r \approx -1$: starker negativer Zusammenhang

Bestimmtheitsmaß: r^2 = Anteil erklärter Varianz

1. Mittelwerte $\overline{x}, \overline{y}$ berechnen
2. Standardabweichungen s_x, s_y berechnen
3. Kovarianz s_{xy} berechnen
4. Korrelationskoeffizient: $r = s_{xy}/(s_x s_y)$

Beispiel: Berechnung des Bravais-Pearson Korrelationskoeffizienten

Gegeben sind folgende Wertepaare (x_i, y_i):

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	5	10	20	8	4	6	12	15
y_i	27	46	73	40	30	28	47	59

(1) Mittelwerte berechnen: $\overline{x} = 10, \overline{y} = 43.75$

x^2	25	100	400	64	16	36	144	225
y^2	729	2116	5329	1600	900	784	2209	3481
$x_i y_i$	135	460	1460	320	120	168	564	885

$\sum x_i^2 = 1010, \sum y_i^2 = 17148, \sum x_i y_i = 4112$

(2) Standardabweichungen berechnen:

$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\overline{x})^2} = \sqrt{126.25 - 100} = \sqrt{26.25} = 5.12$

$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_i^2 - (\overline{y})^2} = \sqrt{2143.5 - 1914.06} = 15.15$

(3) Kovarianz berechnen:

$s_{xy} = \frac{1}{8} \sum x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y} = 514 - 10 \cdot 43.75 = 76.5$

(4) Korrelationskoeffizient berechnen:

$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{76.5}{5.12 \cdot 15.15} \approx 0.986$

→ **Starker positiver linearer Zusammenhang** zwischen x und y

11.1 Kombinatorik

Neue Variablen:

n: Größe der Grundmenge
k: Größe der Teilmenge

1. Art der Auswahl bestimmen (Variation/Kombination, mit/ohne Wiederholung)
2. Passende Formel aus Übersichtstabelle auswählen
3. Werte für n, k einsetzen und berechnen

Art	**Mit Wiederholung**	**Ohne Wiederholung**
Variation (mit Reihenfolge)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (ohne Reihenfolge)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Permutation: (alle Elemente, keine Wiederholung)

$$N = n!$$

→ Es werden **alle n Elemente** in **verschiedener Reihenfolge** angeordnet.

Permutation mit Wiederholungen

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

n_i: Anzahl gleiche Elemente der i-ten Sorte (3 für T in TATTOO)

→ Es gibt **mehrere gleiche Elemente**, z. B. bei Wörtern wie **„TATTOO“**

Beispiel: TATTOO

Das Wort „TATTOO“ hat 6 Buchstaben:
- T kommt 3-mal vor
- A kommt 1-mal vor
- O kommt 2-mal vor

$$N = \frac{6!}{3! \times 1! \times 2!} = \frac{720}{6 \times 1 \times 2} = \frac{720}{12} = 60$$

Es gibt also **60 verschiedene Anordnungen** des Wortes „TATTOO“.

11.1.1 Wahrscheinlichkeit berechenen

Obige Kombinatorikformeln können zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

$$P = \frac{N_{\text{günstig}}}{N_{\text{möglich}}}$$

11.2 hypergeometrische Verteilung Anwendung

Formel siehe unten bei Kontingenztabellen.

12 Aufgabe

Beim Rommé spielt man mit **110** Karten; **sechs** davon sind Joker. Zu Beginn eines Spiels erhält jeder Spieler genau **12** Karten. In wieviel Prozent aller möglichen Fälle sind darunter

a) genau zwei bzw. b) mindestens ein Joker?

12.1 Lösung

a)

$$\frac{\binom{6}{2} * \binom{104}{10}}{\binom{110}{12}} \approx 11.13\%$$

b)

$$1 - \frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}} \approx 50.85\%$$

13 Kontingenztabellen

Neue Variablen:

n_{ij}: absolute Häufigkeit in Zelle (i, j)
f_{ij}: relative Häufigkeit in Zelle (i, j)
Randsummen: Summen über Zeilen/Spalten

Kontingenztabelle für Merkmale A, B:

	B_1	B_2	**Summe**
A_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
Summe	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n

Randhäufigkeiten:

- Zeilen: $n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}$
- Spalten: $n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$

Relative Häufigkeiten:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

Bedingte Häufigkeit (A_i gegeben B_j):

$$f(A_i \mid B_j) = \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}}$$

1. Tabelle mit Zeilen (Merkmal A) und Spalten (Merkmal B) aufstellen
2. Absolute Häufigkeiten n_{ij} eintragen
3. Randsummen berechnen
4. Relative/bedingte Häufigkeiten bei Bedarf berechnen
5. Visualisierung: Mosaikplot

Zivilstand vs. Geschlecht (100 Personen):

	Männer	**Frauen**	**Summe**
Ledig	25	20	45
Verheiratet	30	25	55
Summe	55	45	100

$$f(\text{Ledig} \mid \text{Mann}) = \frac{25}{55} \approx 0.45$$

$$f(\text{Frau} \mid \text{Verheiratet}) = \frac{25}{55} \approx 0.45$$

14 Scatterplot & Streudiagramm

evaluieren ob irgendwo gebraucht

Verwendung: Visualisierung zweier metrischer Merkmale

Interpretation:

- Form: linear, gekrümmt, mehrere Cluster
- Richtung: positiv (steigend), negativ (fallend)
- Stärke: eng um Kurve $\longrightarrow$ stark, weit gestreut $\longrightarrow$ schwach

Warnung: Korrelation ≠ Kausalität (Scheinkorrelation möglich)

1. Wertepaare (x_i, y_i) als Punkte in Koordinatensystem eintragen
2. Visuelle Inspektion: Form, Richtung, Stärke erkennen
3. Ausreißer identifizieren
4. Korrelationskoeffizient berechnen (Pearson oder Spearman)
5. Immer Scatterplot + Korrelationskoeffizient zusammen angeben!

15 Übersichtstabelle Verteilungen

Verteilung	**PMF/PDF**	**E(X)**	**Var(X)**
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Hypergeom.	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	...
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	μ	σ^2

16 Wichtige Quantile

Neue Begriffe:

z_p: p-Quantil der Standardnormalverteilung
$t_{\text{df};p}$: p-Quantil der t-Verteilung mit df Freiheitsgraden

Niveau	**z-Wert**	**Verwendung**
90%	1.645	Normalvert.
95%	1.960	Normalvert.
99%	2.576	Normalvert.
95% (n=7)	2.365	t-Vert. (df=7)
95% (n=10)	2.262	t-Vert. (df=9)

17 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Neue Variablen:

A, B: Ereignisse
A_i: Zerlegung des Ergebnisraums in Teilereignisse
$P(\cdot)$: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Definition:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Satz von Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

1. Vierfeldertafel erstellen (Randsummen!)
2. Gegebene Wahrscheinlichkeiten eintragen
3. Formel $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ anwenden
4. Bei Bayes: Totale Wahrscheinlichkeit im Nenner

Raucher/Nichtraucher (1400 Personen):

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Frauen	100	200	300
Männer	400	700	1100
Summe	500	900	1400

$$P(\text{Raucherin} \mid \text{Frau}) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Mann} \mid \text{Raucher}) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$

18 Ereignisbäume & Satz von Bayes

Neue Begriffe:

Pfadwahrscheinlichkeit: Produkt der Kantenwahrscheinlichkeiten

1. Ereignisbaum zeichnen mit allen Verzweigungen
2. Pfadwahrscheinlichkeit = Produkt entlang Pfad
3. Totale Wahrscheinlichkeit = Summe aller Pfade zum Ereignis
4. Bayes: $P(A|B) = \frac{\text{Pfad zu A und B}}{\text{Alle Pfade zu B}}$

Steckdosen (defekt):

Fabrik 1: $P(F_1) = 0.8$, $P(D|F_1) = 0.05$

Fabrik 2: $P(F_2) = 0.2$, $P(D|F_2) = 0.1$

Totale Wahrscheinlichkeit (defekt):

$$P(D) = 0.8 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.06$$

Bayes (F1 gegeben defekt):

$$P(F_1 \mid D) = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.06} = \frac{2}{3}$$

19 Binomialverteilung

Neue Variablen:

n: Anzahl Versuche
p: Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch
k: Anzahl Erfolge

Notation: $X \sim B(n, p)$

Dichtefunktion (PMF):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot p$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

1. Prüfen: n Wiederholungen, konstantes p, unabhängig?
2. Parameter n, p festlegen
3. $P(X = k)$ mit PMF-Formel berechnen
4. Für Intervalle: CDF nutzen oder summieren

12× Würfeln, X = Anzahl Sechsen

$n = 12$, $p = \frac{1}{6}$

$$P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0.1974$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k) \approx 0.8748$$

$$E(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$$

$$\text{Var}(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

20 Poissonverteilung

Neue Variablen:

λ: mittlere Ereignisrate pro Intervall

Notation: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

Dichtefunktion:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Erwartungswert & Varianz:

$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

Anwendung: Seltene Ereignisse in festem Intervall

1. Modell: Ereignisse pro Zeit/Fläche/Volumen
2. Parameter λ = erwartete Anzahl
3. $P(X = k)$ mit PMF berechnen
4. Für Summen: einzeln addieren oder Tabelle nutzen

Anrufe (120/Stunde = 2/Minute):

$\lambda = 2$

$$P(X = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0.135$$

$$P(X = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0.271$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k) \approx 0.857$$

21 Hypergeometrische Verteilung

Neue Variablen:

N: Gesamtzahl Objekte
M: Anzahl Merkmalträger in Grundgesamtheit
n: Stichprobengröße
k: Merkmalsträger in Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

1. Modell: Ziehen ohne Zurücklegen aus endlicher Grundgesamtheit
2. Parameter N, M, n bestimmen
3. $P(X = k)$ mit Binomialkoeffizienten berechnen
4. Bei großem N: Approximation durch Binomialverteilung

Lotto 6 aus 49:

$N = 49$, $M = 6$, $n = 6$

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{6} \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$
$$\approx 0.00099$$

Etwa 1 von 1000 Tipps hat ≥ 4 Richtige.

Approximation durch Binomial:

Faustregel: $\frac{n}{N} \leq 0.05 \to B\left(n, \frac{M}{N}\right)$

22 Normalverteilung

Neue Variablen:

μ: Erwartungswert der Normalverteilung
σ: Standardabweichung
Φ: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Notation: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dichtefunktion (PDF):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Standardisierung:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Intervallwahrscheinlichkeit:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

68-95-99.7-Regel:
- ca. 68% in $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- ca. 95% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- ca. 99.7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

1. Gegeben: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
2. Grenzen a, b standardisieren: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
3. Tabellenwerte $\Phi(z_a)$, $\Phi(z_b)$ ablesen
4. $P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$

Gegeben: $X \sim N(3, 4) \to \mu = 3, \sigma = 2$

Gesucht: $P(1.26 \leq X \leq 5.12)$

$$z_1 = \frac{1.26 - 3}{2} = -0.87$$

$$z_2 = \frac{5.12 - 3}{2} = 1.06$$

$$\begin{aligned} P(1.26 \leq X \leq 5.12) &= \Phi(1.06) - \Phi(-0.87) \\ &= 0.8554 - (1 - 0.8078) \\ &= 0.6632 \end{aligned}$$

23 Normalapproximation der Binomialverteilung

Neue Begriffe:

Y: approximierende Normalverteilung zu X
Stetigkeitskorrektur: Anpassung um 0.5

Faustregel: $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$

Approximation:

$$B(n, p) \approx N(np, np(1 - p))$$

Stetigkeitskorrektur:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$$

wobei $Y \sim N(np, np(1 - p))$

1. Faustregel prüfen: $np(1 - p) \geq 9$
2. Parameter berechnen: $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1 - p)$
3. Stetigkeitskorrektur anwenden (±0.5)
4. Mit Standardnormalverteilung rechnen

200 Geräte, $p = 0.06$, $P(10 \leq X \leq 15)$

Prüfung: $200 \cdot 0.06 \cdot 0.94 = 11.28 \geq 9$ ✓

$$\mu = 12, \quad \sigma = \sqrt{11.28} \approx 3.36$$

Mit Stetigkeitskorrektur:

$$\begin{aligned} P(9.5 \leq Y \leq 15.5) &= \Phi\left(\frac{15.5 - 12}{3.36}\right) - \Phi\left(\frac{9.5 - 12}{3.36}\right) \\ &= \Phi(1.04) - \Phi(-0.74) \\ &\approx 0.85 - 0.23 = 0.62 \end{aligned}$$

24 Zentraler Grenzwertsatz

Neue Variablen:

X_i: i-te Zufallsvariable in Stichprobe
$\overline{X}$: Stichprobenmittel
n: Stichprobengröße (hier als Zufallsvariablenzahl)

Aussage: Summe/Mittelwert von i.i.d. Zufallsvariablen ist asymptotisch normalverteilt.

Gegeben: $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. mit $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Für großes n:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Standardisiert:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Produktion (6 Arbeitsschritte):

Jeder Schritt: gleichverteilt in [1, 2] Stunden

$$\mu = 1.5, \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

Gesamtdauer $T = \sum_{i=1}^{6} X_i$:

$$E(T) = 6 \cdot 1.5 = 9$$

$$\text{Var}(T) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$P(T \leq 10) \approx \Phi\left(\frac{10 - 9}{0.707}\right) \approx \Phi(1.41) \approx 0.92$$

25 Punktschätzungen

Neue Variablen:

$\hat{\theta}$: Schätzer für Parameter θ
$\hat{\mu}$: Schätzer für Mittelwert
$\hat{\sigma}^2$: Schätzer für Varianz

Erwartungswert:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Varianz:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Eigenschaften:

- **Erwartungstreu:** $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$
- **Konsistent:** $\hat{\theta} \to \theta$ für $n \to \infty$
- **Effizient:** minimale Varianz

1. Stichprobe $x_1, ..., x_n$ gegeben
2. Schätzer wählen (z.B. $\overline{x}$ für μ)
3. Schätzwert berechnen
4. Eigenschaften prüfen (erwartungstreu, konsistent)

(1) Verteilung Grundgesamtheit	(2) Param.	(3) Schätzfunktionen	(4) standardisierte Zufallsvariable	(5) Verteilung, benötigte Quantile	(6) Intervallgrenzen
Normalverteilung (Varianz σ^2 bekannt)	μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	**Standardnormalverteilung** (Tabelle 2) $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \overline{X} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\theta_o = \overline{X} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung (Varianz σ^2 unbekannt und $n \leq 30$; sonst Fall 1 mit s als Schätzwert für σ)	μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$	$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	***t*-Verteilung** (Tabelle 4) mit $f = n-1$ $c = t_{(p;f)}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \overline{X} - c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\theta_o = \overline{X} + c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung	σ^2	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$	$Z = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$	**Chi-Quadrat-Verteilung** (Tabelle 3) mit $f = n-1$ $c_1 = z_{(p_1;f)}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$ $c_2 = z_{(p_2;f)}$ mit $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \frac{(n-1)\cdot S^2}{c_2}$ $\theta_o = \frac{(n-1)\cdot S^2}{c_1}$
Bernoulli-Verteilung Anteilsschätzung (mit $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$)	p	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ X_i 0/1-wertig mit $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$	**Standardnormalverteilung** (näherungsweise), Tabelle 2 $c = u_q$ mit $q = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \overline{X} - c \cdot \sqrt{\frac{\overline{X}\cdot(1-\overline{X})}{n}}$ $\theta_o = \overline{X} + c \cdot \sqrt{\frac{\overline{X}\cdot(1-\overline{X})}{n}}$
beliebig mit $n > 30$	μ, σ^2	wie im Fall 1 (gegebenenfalls mit s als Schätzwert für σ) bzw. im Fall 3			

Vertrauensintervall für μ (σ bekannt)

Gewichte ($\sigma = 2$ kg, $n = 100$, $\overline{x} = 75$ kg, 95%-Niveau):

1. **Vertrauensniveau festlegen:** 95% $\longrightarrow \alpha = 0.05$
2. **Quantil aus Tabelle 2:** $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.960$
3. **Halbbreite berechnen:**

$$h = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.960 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0.392$$

4. **Intervallgrenzen:**

$$\theta_u = \overline{x} - h = 75 - 0.392 = 74.608$$

$$\theta_o = \overline{x} + h = 75 + 0.392 = 75.392$$

Vertrauensintervall: $[74.608, 75.392]$

Vertrauensintervall für μ (σ unbekannt)

Marroni ($n = 8$, $\overline{x} = 18$, $s = 2.39$, 95%-Niveau):

1. **Vertrauensniveau:** 95% $\longrightarrow \alpha = 0.05$
2. **Freiheitsgrade:** $f = n - 1 = 7$
3. **t-Quantil aus Tabelle 4:** $t_{7;0.975} = 2.365$
4. **Halbbreite berechnen:**

$$h = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.365 \cdot \frac{2.39}{\sqrt{8}} \approx 2.0$$

5. **Intervallgrenzen:**

$$\theta_u = 18 - 2.0 = 16.0$$

$$\theta_o = 18 + 2.0 = 20.0$$

Vertrauensintervall: $[16.0, 20.0]$

Vertrauensintervall für σ^2

Marroni ($n = 8$, $s^2 = 5.71$, 95%-Niveau):

1. **Vertrauensniveau:** 95% $\longrightarrow \alpha = 0.05$
2. **Freiheitsgrade:** $f = n - 1 = 7$
3. **χ^2-Quantile aus Tabelle 3:**
   - $\chi^2_{7;0.975} = 16.01$ (für untere Grenze)
   - $\chi^2_{7;0.025} = 1.69$ (für obere Grenze)
4. **Intervallgrenzen:**

$$\theta_u = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{0.975}} = \frac{7 \cdot 5.71}{16.01} = 2.50$$

$$\theta_o = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{0.025}} = \frac{7 \cdot 5.71}{1.69} = 23.66$$

Vertrauensintervall: $[2.50, 23.66]$

Vertrauensintervall für Anteilswert p

Umfrage ($n = 1200$, $k = 473$ Ja, 99%-Niveau):

1. **Anteil berechnen:**

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{473}{1200} = 0.394$$

2. **Faustregel prüfen:**

$$n\hat{p}(1-\hat{p}) = 1200 \cdot 0.394 \cdot 0.606 = 286.5 \geq 9$$

3. **Quantil (Tabelle 2):** $z_{0.995} = 2.576$
4. **Halbbreite:**

$$h = z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.576\sqrt{\frac{0.394 \cdot 0.606}{1200}} \approx 0.036$$

5. **Intervallgrenzen:**

$$\theta_u = 0.394 - 0.036 = 0.358$$

$$\theta_o = 0.394 + 0.036 = 0.430$$

Vertrauensintervall: $[0.358, 0.430]$

26 Lineare Regression (KQM)

Neue Variablen:

a: Achsenabschnitt
b: Steigung der Regressionsgeraden
R^2: Bestimmtheitsmaß

Regressionsgerade: $y = ax + b$

Steigung:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Achsenabschnitt:

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$$

Residualvarianz:

$$s_{\text{Res}}^2 = s_y^2(1 - r^2)$$

Bestimmtheitsmaß:

$$R^2 = r^2 = \frac{s_y^2 - s_{\text{Res}}^2}{s_y^2}$$

1. Korrelationskoeffizient r berechnen
2. Steigung: $b = s_{xy}/s_x^2$
3. Achsenabschnitt: $a = \overline{y} - b\overline{x}$
4. Prüfung: Residuenplot (sollte unsystematisch streuen)
5. Güte: R^2 berechnen (Anteil erklärter Varianz)

Größe-Gewicht (15 Personen):

$\overline{x} = 173$ cm, $s_x = 6.047$ cm

$\overline{y} = 72.267$ kg, $s_y = 7.474$ kg

$s_{xy} = 41.071$, $r = 0.898$

$$b = \frac{41.071}{6.047^2} \approx 1.123$$

$a = 72.267 - 1.123 \cdot 173 \approx -122.02$

Regressionsgerade:

$$y = -122.02 + 1.123x$$

$$R^2 = 0.898^2 \approx 0.806$$

$\longrightarrow$ 80.6% der Varianz erklärt

27 Übersichtstabelle Verteilungen

Verteilung	**PMF/PDF**	**E(X)**	**Var(X)**
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
Hypergeom.	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	...
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	μ	σ^2

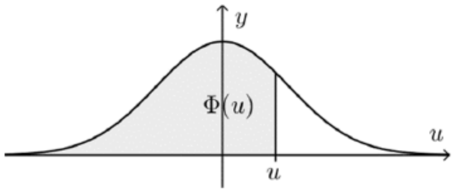
28 Wichtige Quantile

Neue Begriffe:

z_p: p-Quantil der Standardnormalverteilung
$t_{\text{df};p}$: p-Quantil der t-Verteilung mit df Freiheitsgraden

Niveau	**z-Wert**	**Verwendung**
90%	1.645	Normalvert.
95%	1.960	Normalvert.
99%	2.576	Normalvert.
95% (n=7)	2.365	t-Vert. (df=7)
95% (n=10)	2.262	t-Vert. (df=9)

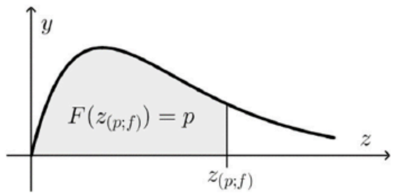
Tabelle 1: CDF $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung



$$P(U \le u) = \Phi(u)$$
$$P(U \ge u) = 1 - \Phi(u)$$
$$P(-u \le U \le u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$$
$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung

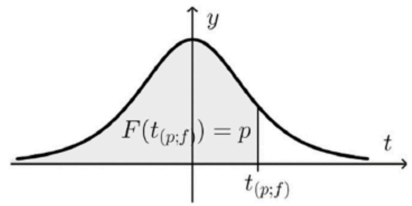


p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$z_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p									
f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von «Student»



p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$t_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p				
f	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$\boxed{t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}}$

kaiseja1