Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix: Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

Schritt 1 - Vorwärtselimination:
- Zeile 2: — Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 2

Schritt 2: Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:
- x_n aus letzter Zeile
- x_{n-1} aus vorletzter (mit x_n)
- Weiter bis x_1

Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1 a: Eliminiere a_{21}

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1)$$

$$(\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1b: Eliminiere a_{31}

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2)$$

$$(\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1c: Eliminiere a_{32}

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2} z_2 = (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3)$$

$$(\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$

mit Permutationsmatrix P:

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

Vorgehen: LR-Zerlegung

Schritt 1: Gauss-Elimination durchführen

Schritt 2: Faktoren in $\boldsymbol{L}$ eintragen

Schritt 3: Resultat ist $\boldsymbol{R}$

Schritt 4 - Lösen:
- $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ (Vorwärts)
- $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (Rückwärts)

Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

Gegeben: System aus Beispiel 4.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

Schritt 2: Multiplikatoren sammeln:
- Zeile 2: Faktor war $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war $\frac{5}{-1} = -5$, dann $\frac{6}{-2} = -3$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Lösen (für $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$):

Vorwärts ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$):

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{L} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1: Eliminiere L_{21}:

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Eliminiere L_{31}:

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Eliminiere L_{32}:

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 18 \end{pmatrix}$$

Vereinfacht

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \rightarrow y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \rightarrow y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

Resultat:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rückwärts ($\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$): wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

QR Zerlegung

Eine Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Darstellung:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j \quad \text{(orthogonal)}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} \quad \text{(normalisiert)}$$

Finden von $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$$

Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

Schritt 1: Spalten $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ von $\boldsymbol{A}$

Schritt 2: $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$

Schritt 3: Für $i = 2, ..., n$:
- $\boldsymbol{v}_i$ berechnen (orthogonalisieren)
- $\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|}$ berechnen

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u}_1 \mid ... \mid \boldsymbol{u}_n]$

Schritt 5: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$

Beispiel 4.3: QR für 2×2

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Spalten:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$\boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{u}_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{0.32^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

Schritt 5:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: Jacobi-Verfahren

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$

Schritt 2: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 3: Für jede Komponente i:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Schritt 4: Alle gleichzeitig berechnen

Schritt 5: Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

Schritt 6: Abbruch: $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

Beispiel 4.4: Jacobi-Iteration

Gegeben:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Start: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \binom{0}{0}$

Schritt 1: Zerlegung erkannt

Schritt 2: Startwert: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \binom{0}{0}$

Schritt 3+4: Erste Iteration ($k = 0$):

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 1 \cdot 0}{4} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 - 1 \cdot 0}{3} = 2.33$$

Iteration 2 ($k = 1$):

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1 \cdot 2.33}{4} = 0.67$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 - 1 \cdot 1.25}{3} = 1.92$$

Iteration 3 ($k = 2$):

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 1 \cdot 1.92}{4} = 0.77$$

$$x_2^{(3)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.67}{3} = 2.11$$

Schritt 5: Diagonaldominanz: $|4| > |1|$ ✓, $|3| > |1|$ ✓

Schritt 6: Konvergiert gegen $(1, 2)$

Vorgehen: Gauß-Seidel

Wie Jacobi, aber in Schritt 3:

Für Komponente i:
- Nutze **neue** $x_j^{(k+1)}$ für $j < i$
- Nutze **alte** $x_j^{(k)}$ für $j > i$

Sequentiell von oben nach unten!

Meist schnellere Konvergenz.

Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

Gegeben: System aus 4.4

Start: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Iteration 1 ($k = 0$):

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 1 \cdot 0}{4} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 - 1 \cdot 1.25}{3} = 1.92$$

(nutzt neues $x_1^{(1)}$!)

Iteration 2 ($k = 1$):

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1 \cdot 1.92}{4} = 0.77$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.77}{3} = 2.08$$

Iteration 3 ($k = 2$):

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 1 \cdot 2.08}{4} = 0.73$$

$$x_2^{(3)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.73}{3} = 2.09$$

Vergleich: Schnellere Konvergenz als Jacobi!

Lösung: $(1, 2)$

Definition 4.6: Eigenwert

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ = Eigenwert, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ = Eigenvektor

Vorgehen: Eigenwerte (2×2)

Schritt 1: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Schritt 3: Lösen: $\lambda_{1,2} = \dots$

Schritt 4: Für jeden λ: $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})v = \boldsymbol{0}$

Beispiel 4.7: Eigenwerte 2×2

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Matrix identifiziert: $a = 4, b = 1, c = 2, d = 3$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - (4+3)\lambda + (4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Schritt 3: Nullstellen (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{(2.25)} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Schritt 4: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$:

$$(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to -v_1 + v_2 = 0 \to \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to 2v_1 + v_2 = 0 \to \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: Potenzmethode

Schritt 1: Startvektor $\boldsymbol{v}^{(0)}$ wählen (zufällig)

Schritt 2: Iteration:

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}$$

Schritt 3: Normieren:

$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{w}^{(k)}}{\|}\boldsymbol{w}^{(k)}\|$$

Schritt 4: Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx \left(\boldsymbol{v}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}$$

Konvergiert zum betragsmäßig größten EW.

Beispiel 4.8: Potenzmethode

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, Start: $\boldsymbol{v}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Iteration 1:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(1)}\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}{4.47} \approx \begin{pmatrix}0.89\\0.45\end{pmatrix}$$

Iteration 2:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(2)} = \begin{pmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.89\\0.45\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4.01\\3.13\end{pmatrix}$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(2)}\| \approx 5.08$

$$\boldsymbol{v}^{(2)} \approx \begin{pmatrix}0.79\\0.62\end{pmatrix}$$

Iteration 3: $\boldsymbol{v}^{(3)} \approx \begin{pmatrix}0.71\\0.71\end{pmatrix}$

Schritt 4: Eigenwert (nach Konvergenz):

$$\begin{aligned}\lambda &= \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}\\ &= \begin{pmatrix}0.71\\0.71\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.71\\0.71\end{pmatrix}\\ &\approx 5\end{aligned}$$

Ergebnis: Größter EW $\lambda_1 = 5$ (vgl. 4.7)