HM1-Zusammenfassung

1 Rechnerarithmetik

1.1 Definition 2.1: Maschinenzahlen

Bias: Fester Wert, der zum Exponenten addiert wird, um negative Exponenten darzustellen.

B: Basis des Zahlensystems
n: Anzahl der Mantissenstellen
e_min: Minimaler Exponent
e_max: Maximaler Exponent

Unter Normalisierung $m_1 \neq 0$ (falls $x \neq 0$):

$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0.m_1 m_2 ... m_n \cdot B^{e - \text{ bias}}\} \cup \{0\}$

Wert: $x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

$x_{\text{min}} = B^{e_{\text{min}} - \text{ bias}}$

$x_{\text{max}} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{\text{max}}}$

Anzahl möglicher Zahlen

|e| : Stellen Exponent

$B^{n + |e|} + 1$ (+1 nur falls 0 auch enthalten)

1.1.1 Vorgehen: Zahlensystem-Umwandlung

Schritt 1: Mantisse normalisieren ($0.m_1 m_2 ...$ mit $m_1 \neq 0$)

Schritt 2: Exponent bestimmen (Verschiebungen zählen)

Schritt 3: Wert berechnen: $\sum m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

1.1.2 Beispiel : Binärzahl

Gegeben: $x_2 = 0.111 \times 2^3$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: 0.111_2

Schritt 2: Exponent: $e = 3$

Schritt 3: Wert berechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}) \cdot 2^3 \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

1.1.3 Beispiel : Hexadezimalzahl

Gegeben: $x_5 = 0.\text{AB3C9F} \times 16^4$, mit $A = 10, B = 11$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: $0.\text{AB3C9F}_{16}$

Schritt 2: Exponent: $e = 4$

Schritt 3: Wert berechnen (Auszug):

$$\begin{aligned} x_5 &= (10 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + ...) \cdot 16^4 \\ &= 10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + ... \\ &= 40960 + 2816 + 48 + ... = 43836.62... \end{aligned}$$

1.2 Definition 2.2: Fehler

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$ (falls $x \neq 0$)

1.2.1 Vorgehen: Fehlerberechnung

Schritt 1: Zahl auf n Stellen runden

Schritt 2: Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Schritt 3: Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

Schritt 4: Prüfen: $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)}$

1.2.2 Beispiel 2.2: Rundungsfehler

Gegeben: $x = 180.1234567 = 0.1801234567 \times 10^3$

Auf $n = 7$ Stellen runden.

Schritt 1: Rundung auf 7 Stellen:

$$\text{rd}(x) = 0.1801235 \times 10^3$$

(8. Stelle ist $6 \geq 5 \to$ aufrunden)

Schritt 2: Absoluter Fehler:

$$\begin{aligned} |\text{rd}(x) - x| &= |0.1801235 - 0.1801234567| \times 10^3 \\ &= 0.0000000433 \times 10^3 \\ &= 0.433 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Schritt 3: Relativer Fehler:

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} = \frac{0.433 \times 10^{-4}}{180.1234567} \approx 2.4 \times 10^{-7}$$

Schritt 4: Prüfung ($B = 10, e = 3, n = 7$):

$$\frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)} = 5 \times 10^{3-8} = 0.5 \times 10^{-4}$$

$0.433 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$

1.3 Definition 2.3: Maschinengenauigkeit

$$\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$$

Maximaler relativer Rundungsfehler.

Merkmal	**Single Precision**	**Double Precision**
Gesamtlänge	32 Bit	64 Bit
Mantisse	23 Bit (+1)	52 Bit (+1)
Exponent	8 Bit (Bias 127)	11 Bit (Bias 1023)
Genauigkeit (ca.)	7 Dezimalstellen	16 Dezimalstellen
Speicherbedarf	klein	doppelt so groß

Hidden Bit: Das "+1" bei der Mantisse bezeichnet das sogenannte Hidden Bit da durch IEEE-754 Normierung die erste Stelle der Mantisse immer 1 ist und somit nicht gespeichert werden muss.

1.3.1 Vorgehen: Maschinengenauigkeit

Schritt 1: Mantissenlänge n bestimmen

Schritt 2: Basis B identifizieren

Schritt 3: Formel anwenden: $\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$

Schritt 4: Bei IEEE: hidden bit beachten!

1.3.2 Beispiel 2.3a: IEEE Double Precision

Gegeben: IEEE-754 Double Precision

Schritt 1: Mantissenlänge bestimmen:
- 52 Bit gespeichert
- 1. 1 hidden bit
- $\rightarrow n = 53$

Schritt 2: Basis: $B = 2$ (binär)

Schritt 3: Formel anwenden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{mach}} &= \frac{1}{2} \cdot 2^{1-53} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-52} \\ &= 2^{-53}\end{aligned}$$

Schritt 4: Dezimal umrechnen:

$$\varepsilon_{\text{mach}} \approx 1.110223 \times 10^{-16}$$

1.4 Definition 2.4: Konditionszahl

Die Konditionszahl gibt an , wie stark sich der relative Fehler des Ergebnisses ändert, wenn sich der relative Fehler der Eingabe ändert.

Wenn nur die Konditionszahl verlangt wird ist es immer die relative Konditionszahl

Absolute: $\kappa = |f'(x)|$

Relative: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

Absoluter Fehler bei Funktionsauswertungen:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler bei Funktionsauswertungen:

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von f(x)}} \approx K(x) \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von x}}$$

$$K(x) \approx \frac{\text{relativer Fehler von f(x)}}{\text{relativer Fehler von x}}$$

Achtung: auch wenn relatve Fehler mit mehreren Parametert angegeben werden muss man nichts rchenen! zB:

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

ist schon der relative Fehler von x!

1.4.1 Vorgehen: Konditionszahl berechnen

Schritt 1: Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen

Schritt 2: Konditionszahl berechnen:
- Absolut: $\kappa = |f'(x)|$
- Relativ: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

Schritt 3: Interpretation:
- $\kappa_{\text{rel}} \approx 1$: gut konditioniert
- $\kappa_{\text{rel}} \gg 1$: schlecht konditioniert

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 4$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{\left|4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)\right|}{|\sqrt{4}|} \\ &= \frac{\left|4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\right|}{2} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 0.5 \approx 1 \longrightarrow$ gut konditioniert

-> **Konditionszahl**: 1/n

$f(x) = x^n$ bei $x = 0.1, n = 10$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|0.1 \cdot (10 \cdot 0.1^{10-1})|}{|0.1^{10}|} \\ &= \frac{|1 \cdot 0.1^9|}{0.1^{10}} \\ &= 10\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 10 \gg 1 \longrightarrow$ schlecht konditioniert

-> **Konditionszahl**: n

1.5 Auslöschung

Auslöschung: Verlust signifikanter Stellen durch Subtraktion fast gleicher Zahlen. Tritt in Funktionen an Stellen auf an denen sie schlecht konditioniert sind.

2 Nullstellenprobleme

2.1 Definition: Fixpunkt

$\overline{x}$ heißt **Fixpunkt** von F, falls:

$$F(\overline{x}) = \overline{x}$$

2.1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $F : [a, b] \to [a, b]$ (d.h. F bildet $[a, b]$ auf sich selbst ab) und existiere eine Konstante α mit $0 < \alpha < 1$ und:

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha\ |x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in [a, b]$$

(d.h. F ist **Lipschitz-stetig** und **kontraktiv**, α nennt man auch **Lipschitz-Konstante**).

Dann gilt:

Kontraktionsbedingung: $|F(x) - F(y)| \leq \alpha\ |x - y|$ besagt, dass F eine **Kontraktion** ist.

Lipschitz-Konstante: $\alpha < 1$ garantiert, dass Abstände verkleinert werden.

Ableitung: Für differenzierbar F gilt: $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ für alle $x \in [a, b]$.

Existenz und Eindeutigkeit: Genau ein Fixpunkt existiert.

Globale Konvergenz: Jeder Startwert führt zur Konvergenz.

2.1.2 Interpretationen der Abschätzungen

2.1.3 Abschätzungen der Fixpunktiteration

A-priori Abschätzung (vor Iteration bekannt):

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\ |x_1 - x_0|$$

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \alpha)/\ |x_1 - x_0|)}{\ln(\alpha)}$$

A-posteriori Abschätzung (während Iteration berechenbar):

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{1 - \alpha}\ |x_n - x_{n-1}|$$

Schritt 1: Banachscher Fixpunktsatz: Bedingungen prüfen

- Abbildung $F : [a, b] \to [a, b]$ verifizieren

Schritt 2: Lipschitz-Konstante finden

- Lipschitz-Konstante $\alpha < 1$ finden: $\alpha = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)|$
- **Schritt 2.1:** Ableitung $F'(x)$ berechnen
- **Schritt 2.2:** Maximumvon $|F'(x)|$ im Intervall bestimmen

Schritt 3: Konklusion

- Eindeutiger Fixpunkt $\overline{x}$ existiert (erfüllt $F(\overline{x}) = \overline{x}$)
- Jeder Startwert in $[a, b]$ konvergiert gegen $\overline{x}$

Fixpunkt genau:

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{wobei} \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

2.1.4 Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz für $x^3 + 0.3 = 0$

Gesucht: Intervall $[a, b]$ und Konstante $\alpha < 1$, so dass der Banachsche Fixpunktsatz auf die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$ anwendbar ist.

Lösungsansatz: Die Fixpunktiteration konvergiert in der Nähe von $\overline{x} = 0.3389$. Wir suchen ein geeignetes Intervall und versuchen es mit $[a, b] = [0, 0.5]$.

Schritt 1: Überprüfen, ob $F : [0, 0.5] \to [0, 0.5]$:

- Für alle $x \in [0, 0.5]$: $F(x) = x^3 + 0.3 \geq 0.3$
- $F(0) = 0.3 \in [0, 0.5]$
- $F(0.5) = 0.125 + 0.3 = 0.425 \in [0, 0.5]$

Schritt 2: Finden einer Konstanten $\alpha < 1$:

Aus dem Satz wissen wir: $\alpha = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)|$

Schritt 2.1: Ableitung berechnen:

$$F'(x) = 3x^2$$

Schritt 2.2: Die Ableitung ist monoton steigend, daher Maximum bei $x = 0.5$:

$$|F'(0.5)| = 3 \cdot 0.5^2 = 0.75 < 1$$

Schritt 3: Konklusion:

Mit $\alpha = 0.75 < 1$ sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = x_n^3 + 0.3$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} \approx 0.3389$ für jeden Startwert in $[0, 0.5]$.

2.1.5 Vorgehen: Fixpunktform

Schritt 1: Nullstellenproblem $f(x) = 0$ gegeben

Schritt 2: Nach x auflösen: $F(x) = x$

Schritt 3: Mehrere Formen möglich!

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $|F'(\overline{x})| < 1$

2.1.6 Beispiel 3.3: Fixpunktform

Gegeben: $p(x) = x^3 - x + 0.3 = 0$

Schritt 1: Nullstellenproblem identifiziert

Schritt 2: Umformen nach x:

Variante A: $x^3 - x + 0.3 = 0$

$$\to x = x^3 + 0.3$$

$$\to F(x) = x^3 + 0.3$$

Variante B: $x^3 = x - 0.3$

$$\to x = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

$$\to F(x) = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

Schritt 3: Beide Formen sind gültig

Schritt 4: Konvergenz prüfen (Variante A):

$$F'(x) = 3x^2$$

Bei $\overline{x} \approx 0.339$: $|F'(0.339)| = 3 \cdot 0.339^2 \approx 0.34 < 1$

2.1.7 Vorgehen: Fixpunktiteration

Schritt 1: Fixpunktform $x = F(x)$ aufstellen

Schritt 2: Startwert x_0 wählen

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = F(x_n)$

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $|F'(\overline{x})| < 1$

Schritt 5: Abbruch bei $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.1.8 Beispiel 3.4: Fixpunktiteration

Gegeben: $F(x) = x^3 + 0.3$, Startwert $x_0 = 0$

Schritt 1: Fixpunktform bereits gegeben

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 0$

Schritt 3: Iteration durchführen:

$$x_1 = F(x_0) = 0^3 + 0.3 = 0.3$$

$$x_2 = F(x_1) = 0.3^3 + 0.3 = 0.027 + 0.3 = 0.327$$

$$x_3 = F(x_2) = 0.327^3 + 0.3 \approx 0.335$$

$$x_4 = F(x_3) = 0.335^3 + 0.3 \approx 0.338$$

$$x_5 = F(x_4) \approx 0.339$$

Schritt 4: Konvergenz (siehe Beispiel 3.3):

Schritt 5: $|x_5 - x_4| \approx 0.001 \longrightarrow$ Abbruch bei $\varepsilon = 0.01$

Fixpunkt: $\overline{x} \approx 0.339$

2.2 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}$$

mit konstanter Ableitung $c = f'(x_0)$

2.2.1 Vorgehen: Newton-Verfahren

Schritt 1: Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen

Schritt 2: Startwert x_0 wählen (nahe Nullstelle)

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} < 1$

Schritt 5: Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Schritt 6: Quadratische Konvergenz bei einfachen Nullstellen

2.2.2 Beispiel 3.5: Newton für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwert $x_0 = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktionen bestimmen:

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 1$

Schritt 3: Iteration:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1-2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \approx 1.4167$$

$$x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142$$

Schritt 4: Konvergenzprüfung bei $x \approx 1.414$:

$$\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} = \frac{|(x^2 - 2) \cdot 2|}{|2x|^2} \approx \frac{0}{8} < 1$$

Schritt 5: Abbruchkriterium prüfen bei $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$|f(x_3)| = |1.4142^2 - 2| \approx 0.00005 < 10^{-4}$$

Schritt 6: $\sqrt{2} \approx 1.4142$ (quadratische Konvergenz!)

2.3 Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

2.3.1 Vorgehen: Sekantenverfahren

Schritt 1: Funktion $f(x)$ bestimmen (keine Ableitung nötig!)

Schritt 2: Zwei Startwerte x_0 und x_1 wählen (nahe Nullstelle)

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Schritt 4: Konvergenz: Superlinear (Ordnung ≈ 1.618, besser als linear, schlechter als quadratisch)

Schritt 5: Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.3.2 Beispiel 3.6: Sekantenverfahren für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwerte $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktion bestimmt: $f(x) = x^2 - 2$

Schritt 2: Startwerte: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$

Schritt 3: Iteration:

$$f(x_0) = 1^2 - 2 = -1$$

$$f(x_1) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot (1.5 - 1)}{0.25 - (-1)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot 0.5}{1.25}$$

$$= 1.5 - 0.1 = 1.4$$

$$f(x_2) = 1.4^2 - 2 = -0.04$$

$$x_3 = 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (1.4 - 1.5)}{-0.04 - 0.25}$$

$$= 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (-0.1)}{-0.29}$$

$$= 1.4 - \frac{0.004}{-0.29} \approx 1.414$$

Schritt 4: Konvergenz: Superlinear (besser als Fixpunktiteration, weniger Ableitungen als Newton)

Schritt 5: $|f(x_3)| \approx |1.414^2 - 2| \approx 0 \longrightarrow$ Konvergiert schnell

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix: Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

3.2 Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, ..., 1$$

Schritt 1 - Vorwärtselimination:

- Zeile 2: — Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 2

Schritt 2: Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:

- x_n aus letzter Zeile
- x_{n-1} aus vorletzter (mit x_n)
- Weiter bis x_1

3.2.1 Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1 a: Eliminiere a_{21}

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1)$$

$$(\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1b: Eliminiere a_{31}

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2)$$

$$(\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1c: Eliminiere a_{32}

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2} z_2 = (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3)$$

$$(\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.3 LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$

mit Permutationsmatrix P:

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

3.3.1 Vorgehen: LR-Zerlegung

Schritt 1: Gauss-Elimination durchführen

Schritt 2: Faktoren in $\boldsymbol{L}$ eintragen

Schritt 3: Resultat ist $\boldsymbol{R}$

Schritt 4 - Lösen:
- $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ (Vorwärts)
- $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (Rückwärts)

3.3.2 Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

Gegeben: System aus Beispiel 4.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

Schritt 2: Multiplikatoren sammeln:
- Zeile 2: Faktor war $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war $\frac{5}{-1} = -5$, dann $\frac{6}{-2} = -3$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Lösen (für $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$):

Vorwärts ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$):

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{L} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1: Eliminiere L_{21}:

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Eliminiere L_{31}:

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Eliminiere L_{32}:

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

Vereinfacht

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \to y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \to y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

Resultat:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rückwärts ($\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$): wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.4 QR Zerlegung

Eine Matrix $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_n \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Darstellung:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$$

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j \quad \text{(orthogonal)}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} \quad \text{(normalisiert)}$$

Finden von $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$$

3.4.1 Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

Schritt 1: Spalten $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ von $\boldsymbol{A}$

Schritt 2: $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$

Schritt 3: Für $i = 2, \ldots, n$:

- $\boldsymbol{v}_i$ berechnen (orthogonalisieren)
- $\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|}$ berechnen

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{u}_1 \mid \ldots \mid \boldsymbol{u}_n]$

Schritt 5: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}$

3.4.2 Beispiel 4.3: QR für 2×2

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Spalten:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$\boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{u}_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{0.32^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{0.4}\begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

Schritt 5:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Vorgehen: Jacobi-Verfahren

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$

Schritt 2: Iterationsformel aufstellen

Schritt 3: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 4: Konvergenz prüfen.

Interationsformel:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Konvergenz Prüfen Formel

$$B = D^{-1}(L + R)$$

Falls $\|B\| < 1$ -> konvergiert für jeden Startvektor $x^{(0)}$. Falls $\|B\| \geq 1$ -> keine Konvergenz garantiert.

Diagonaldominanz:
Zeilenweise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Spaltenweise :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Gegeben:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Schritt 1 Zerlegung:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2 Iterationsformel:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = -\boldsymbol{D}^{-1}\left((\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{b}\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0.4 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Schritt 3 Startwert:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5125 \\ 2.03 \\ 2.295 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.80125 \\ 2.059 \\ 2.282 \end{pmatrix}$$

3.5 Gauß-Seidel

Das Gauß-Seidel Verfahren ist eine Modifikation des Jacobi-Verfahrens. Vorteile sind schnellere Konvergenz und weniger Speicherbedarf (da kein Zwischenspeicher für den alten Vektor benötigt wird).

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$ (wie Jacobi)

Schritt 2: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 3: Für jede Komponente i **sequentiell** von oben nach unten:

- Nutze **neue** $x_j^{(k+1)}$ für $j < i$ (bereits berechnet!)
- Nutze **alte** $x_j^{(k)}$ für $j > i$ (noch nicht berechnet)

Schritt 4: Alle Komponenten in dieser Iteration berechnen

Schritt 5: Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

Schritt 6: Abbruch: $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

Allgemein für Komponente i:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

3.5.1 Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

Schritt 1: Zerlegung:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Startvektor:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3+4: Iteration 1 ($k = 0$) - für jede Komponente sequentiell:

Komponente 1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(5 - 0 - 0) = 1.25$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(1)} = 1.25$):

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.25 - 0) = \frac{1}{5}(13.5) = 2.7$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(1)} = 1.25, x_2^{(1)} = 2.7$):

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.25 - (-2) \cdot 2.7) = \frac{1}{5}(16.15) = 3.23$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.7 \\ 3.23 \end{pmatrix}$$

Iteration 2 ($k = 1$):

Komponente 1:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 2.7 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{4}(3.47) = 0.87$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(2)} = 0.87$):

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 0.87 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{5}(9.51) = 1.90$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$):

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 0.87 - (-2) \cdot 1.90) = \frac{1}{5}(13.93) = 2.79$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 1.90 \\ 2.79 \end{pmatrix}$$

Schritt 5: Diagonaldominanz: $|4| > |-1| + |1| = 2$ ✓, $|5| > |-2| + |1| = 3$ ✓, $|5| > |1| + |-2| = 3$ ✓

Schritt 6: Konvergiert schneller als Jacobi zum gleichen Vektor!

3.6 Fehlerabschätzung

Von Jacobi: $B = D^{-1}(L + R)$
Von Gauss-Seidel: $B = -(D + L)^{-1}R$

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(n)} + \boldsymbol{c} =: \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right)$$

A-priori Abschätzung:

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|^n}{1 - \|\boldsymbol{B}\|} \left\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\right\|$$

$$n \geq \frac{\log\left(\left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right\|\right) + \log(1 - \|\boldsymbol{B}\|) - \log\left(\left\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\right\|\right)}{\log(\|\boldsymbol{B}\|)}$$

A-posteriori Abschätzung:

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|}{1 - \|\boldsymbol{B}\|} \left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}\right\|$$

3.7 Fehler für gestörte LGS

Die Unendlichnorm einer Matrix ist das Maximum der absoluten Zeilensummen einer Matrix.

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Die Unendlichnorm eines Vektors ist das Maximum der absoluten Einträge eines Vektors.

$$\|\boldsymbol{b}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |$$

$\tilde{A} = \Delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}$

Konditionszahl

$$\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_\infty$$

Nur b gestört: absoluter Fehler:

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_\infty \left\|\tilde{\boldsymbol{b}}\right\|_\infty$$

relativer Fehler:

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|_\infty \left\|\tilde{\boldsymbol{b}}\right\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \quad \text{oder:} \quad \kappa_\infty(\boldsymbol{A})\frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}.$$

- Nur $\boldsymbol{A}$ gestört:

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\boldsymbol{A})\frac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}}{1 - \kappa_\infty(\boldsymbol{A})\frac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}}.$$

- $\boldsymbol{A}$ und b gestört:

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa_\infty(\boldsymbol{A})\frac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty}} \left(\frac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}\right).$$

- Direkter Weg:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \text{Fehler} = \frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}.$$

Schritt 1: Berechne $\kappa_\infty(\boldsymbol{A})$

Schritt 2: Wähle die passende Formel (nur b, nur A, oder beides gestört)

Schritt 3: Setze die Werte ein und berechne den Fehler

Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit gestörtem b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Dabei ist ε eine kleine Störung (z.B. Rundungsfehler).

Schritt 1: Berechne $\kappa_\infty(\boldsymbol{A})$

Zeilensummen von A:
- Zeile 1: $|2| + |0| + |3| = 5$
- Zeile 2: $|1| + |-2| + |1| = 4$
- Zeile 3: $|0| + |3| + |1| = 4$

$$\|A\|_\infty = \max(5, 4, 4) = 5$$

Zeilensummen von A^{-1}:
- Zeile 1: $|5| + |-9| + |-6| = 5 + 9 + 6 = 20$
- Zeile 2: $|1| + |-2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$
- Zeile 3: $|-3| + |6| + |4| = 3 + 6 + 4 = 13$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(20, 4, 13) = 20$$

$$\kappa_{\infty(A)} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 20 = 100$$

Schritt 2: Wähle die passende Formel

Da nur b gestört ist (mit Störung ε), verwenden wir:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \kappa_{\infty(A)} \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

Schritt 3: Setze die Werte ein und berechne den Fehler

- Originales $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$ (eigentlich sollte dies $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, Störung ist ε)
- Gestörtes $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$
- $\|b\|_\infty = 4$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx \kappa_{\infty(A)} \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

Interpretation:
- Wenn $\kappa_{\infty(A)}$ klein ist: kleine Störungen führen zu kleinen Fehlern (gut konditioniert)
- Wenn $\kappa_{\infty(A)}$ groß ist: kleine Störungen können zu großen Fehlern führen (schlecht konditioniert)

3.7.1 Definition 4.6: Eigenwert

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ = Eigenwert, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ = Eigenvektor

3.7.2 Vorgehen: Eigenwerte

Schritt 1: bilde $A - \lambda I$

Schritt 2: finde Charakteristisches Polynom (char).

Schritt 3: löse char $= 0$ (finde λ)

Schritt 4: Für jeden λ: $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

3.7.3 Beispiel 4.7: Eigenwerte 2×2

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Bilde $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom (Determinante):

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Schritt 3: Löse $p(\lambda) = 0$ (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Schritt 4: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$:

$$(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Zeile 2 ist -2 mal Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zur Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der (einzigen unabhängigen) Gleichung: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 5\ )$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Gleichung: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2\ )$$

3.7.4 Vorgehen: Potenzmethode

Schritt 1: Startvektor $\boldsymbol{v}^{(0)}$ wählen (zufällig)

Schritt 2: Iteration:

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}$$

Schritt 3: Normieren:

$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{w}^{(k)}}{\|\boldsymbol{w}^{(k)}\|}$$

Schritt 4: Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx \left(\boldsymbol{v}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}$$

Konvergiert zum betragsmäßig größten EW.

3.7.5 Beispiel 4.8: Potenzmethode

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, Start: $\boldsymbol{v}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Iteration 1:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(1)}\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{4.47} \approx \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Iteration 2:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.01 \\ 3.13 \end{pmatrix}$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(2)}\| \approx 5.08$

$$\boldsymbol{v}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.62 \end{pmatrix}$$

Iteration 3: $\boldsymbol{v}^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$

Schritt 4: Eigenwert (nach Konvergenz):

$$\begin{aligned} \lambda &= \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \\ &= \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Größter EW $\lambda_1 = 5$ (vgl. 4.7)

3.8 komplexe Zahlen

3.8.1 Darstellungen

Normalform (kartesisch):

$$z = x + iy$$

Trigonometrische Form (polar):

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Exponentialform:

$$z = re^{i\varphi}$$

Dabei gilt: $r \geq 0$ und φ ist der Winkel.

3.8.2 Umrechnen: Normalform -> Polar/Expo

Gegeben $z = x + iy$:

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkel:

$$\varphi = \arg(z)$$

Praktisch rechnet man zuerst

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und korrigiert dann den Quadranten:

- falls $x > 0$:
  $$\varphi = \varphi_0$$
- falls $x < 0$ und $y \geq 0$:
  $$\varphi = \varphi_0 + \pi$$
- falls $x < 0$ und $y < 0$:
  $$\varphi = \varphi_0 - \pi$$
- falls $x = 0$ und $y > 0$:
  $$\varphi = \frac{\pi}{2}$$
- falls $x = 0$ und $y < 0$:
  $$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Hinweis: Viele Taschenrechner/Programmiersprachen haben `atan2(y, x)`, das liefert direkt den richtigen Winkel:

$$\varphi = atan2(y, x)$$

.

Dann:

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

.

3.8.3 Umrechnen: Polar/Expo -> Normalform

Gegeben $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ oder $z = re^{i\varphi}$:

Realteil und Imaginärteil:

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

Also:

$$z = x + iy = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$$

.

3.8.4 algebraische Operationen

Konjugation: $z^* = x - iy$
Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.8.5 Grundrechenarten komplexer Zahlen

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in der Normalform:
$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2.$

Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Differenz

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Produkt

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ benutzen:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Division

Für $z_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Mit dem konjugiert Komplexen $z_2^* = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

Nenner:

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

Zähler:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

Damit:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

In Exponentialform:
Für $z_2 \neq 0$ (also $r_2 > 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Wurzel

Die n-ten Wurzeln von $z = re^{i\varphi}$ sind:

$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ für k = 0,1, … , n-1

Gegeben: $z = 4$ (reelle Zahl), gesucht: kubische Wurzeln ($n = 3$)

Schritt 1: In Exponentialform umwandeln:

$$r = |4| = 4, \quad \varphi = 0$$

$$z = 4e^{i \cdot 0}$$

Schritt 2: Wurzeln berechnen mit Formel:

$$z_k = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{0 + 2k\pi}{3}} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2$$

Schritt 3: Die drei Wurzeln:

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot 0} = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$$

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}}(-0.5 + i0.866)$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(-0.5 - i0.866)$$

Geometrisch: Die drei Wurzeln liegen gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius $4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$, verteilt um 120° auseinander.

4 Ergänzung & Formeln

4.1 Ableitungen & Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) \quad \text{Linearität}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

Ableitungen elementarer Funktionen:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq 0$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a), \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\left(\log_{a(x)}\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\texttt{int } x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\texttt{int } \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\texttt{int } e^x dx = e^x + C$$

$$\texttt{int} \sin x dx = -\cos x + C, \quad \texttt{int} \cos x dx = \sin x + C$$

4.2 Logarithmus Gesetze

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a), \quad a > 0, n \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad x > 0$$

$$\log_{b(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{Basiswechsel}$$

4.3 Polynome

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1$$

$$P(x) = \texttt{int}\ p(x)\ \mathrm{dx} = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ... + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C$$

4.4 Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

4.5 Geometrie

$$V_{\text{kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A_{\text{kreis}} = \pi r^2$$

$$V_{\text{zyl}} = \pi r^2 l$$

$$V_{\text{kugelsegment}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

4.6 Lineare Algebra Basics

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \quad \text{für } 2 \times 2$$