HM1-Zusammenfassung

1 Rechnerarithmetik

1.1 Definition 2.1: Maschinenzahlen

Unter Normalisierung $m_1 \neq 0$ (falls $x \neq 0$):

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0.m_1 m_2 ... m_n \cdot B^{e-\text{ bias}}\} \cup \{0\}$$

Wert: $x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

Anzahl möglicher Zahlen

|M| : Mantissenstellen |e| : Stellen Exponent

$B^{|M| \cdot |e|}$

1.1.1 Vorgehen: Zahlensystem-Umwandlung

Schritt 1: Mantisse normalisieren ($0.m_1 m_2 ...$ mit $m_1 \neq 0$)

Schritt 2: Exponent bestimmen (Verschiebungen zählen)

Schritt 3: Wert berechnen: $\sum m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

1.1.2 Beispiel : Binärzahl

Gegeben: $x_2 = 0.111 \times 2^3$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: 0.111_2

Schritt 2: Exponent: $e = 3$

Schritt 3: Wert berechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}) \cdot 2^3 \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

1.1.3 Beispiel : Hexadezimalzahl

Gegeben: $x_5 = 0.\text{AB3C9F} \times 16^4$, mit $A = 10, B = 11$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: $0.\text{AB3C9F}_{16}$

Schritt 2: Exponent: $e = 4$

Schritt 3: Wert berechnen (Auszug):

$$\begin{aligned} x_5 &= (10 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + ...) \cdot 16^4 \\ &= 10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + ... \\ &= 40960 + 2816 + 48 + ... = 43836.62... \end{aligned}$$

1.2 Definition 2.2: Fehler

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$ (falls $x \neq 0$)

1.2.1 Vorgehen: Fehlerberechnung

Schritt 1: Zahl auf n Stellen runden

Schritt 2: Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Schritt 3: Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$

Schritt 4: Prüfen: $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)}$

1.2.2 Beispiel 2.2: Rundungsfehler

Gegeben: $x = 180.1234567 = 0.1801234567 \times 10^3$

Auf $n = 7$ Stellen runden.

Schritt 1: Rundung auf 7 Stellen:

$$\text{rd}(x) = 0.1801235 \times 10^3$$

(8. Stelle ist $6 \geq 5 \rightarrow$ aufrunden)

Schritt 2: Absoluter Fehler:

$$\begin{aligned} |\text{rd}(x) - x| &= |0.1801235 - 0.1801234567| \times 10^3 \\ &= 0.0000000433 \times 10^3 \\ &= 0.433 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Schritt 3: Relativer Fehler:

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} = \frac{0.433 \times 10^{-4}}{180.1234567} \approx 2.4 \times 10^{-7}$$

Schritt 4: Prüfung ($B = 10, e = 3, n = 7$):

$$\frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)} = 5 \times 10^{3-8} = 0.5 \times 10^{-4}$$

$0.433 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$

1.3 Definition 2.3: Maschinengenauigkeit

$$\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$$

Maximaler relativer Rundungsfehler.

Merkmal	Single Precision	Double Precision
Gesamtlänge	32 Bit	64 Bit
Mantisse	23 Bit (+1)	52 Bit (+1)
Exponent	8 Bit (Bias 127)	11 Bit (Bias 1023)
Genauigkeit (ca.)	7 Dezimalstellen	16 Dezimalstellen
Speicherbedarf	klein	doppelt so groß

Hidden Bit: Das "+1" bei der Mantisse bezeichnet das sogenannte Hidden Bit da durch IEEE-754 Normierung die erste Stelle der Mantisse immer 1 ist und somit nicht gespeichert werden muss.

1.3.1 Vorgehen: Maschinengenauigkeit

Schritt 1: Mantissenlänge n bestimmen

Schritt 2: Basis B identifizieren

Schritt 3: Formel anwenden: $\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$

Schritt 4: Bei IEEE: hidden bit beachten!

1.3.2 Beispiel 2.3a: IEEE Double Precision

Gegeben: IEEE-754 Double Precision

Schritt 1: Mantissenlänge bestimmen:
- 52 Bit gespeichert

- 1. 1 hidden bit
- $\rightarrow n = 53$

Schritt 2: Basis: $B = 2$ (binär)

Schritt 3: Formel anwenden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{mach}} &= \frac{1}{2} \cdot 2^{1-53} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-52} \\ &= 2^{-53}\end{aligned}$$

Schritt 4: Dezimal umrechnen:

$$\varepsilon_{\text{mach}} \approx 1.110223 \times 10^{-16}$$

1.4 Definition 2.4: Konditionszahl

Die Konditionszahl gibt an , wie stark sich der relative Fehler des Ergebnisses ändert, wenn sich der relative Fehler der Eingabe ändert.

Absolute: $\kappa = |f'(x)|$

Relative: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

1.4.1 Vorgehen: Konditionszahl berechnen

Schritt 1: Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen

Schritt 2: Konditionszahl berechnen:
- Absolut: $\kappa = |f'(x)|$
- Relativ: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

Schritt 3: Interpretation:
- $\kappa_{\text{rel}} \approx 1$: gut konditioniert
- $\kappa_{\text{rel}} \gg 1$: schlecht konditioniert

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 4$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{\left|4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)\right|}{|\sqrt{4}|} \\ &= \frac{\left|4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\right|}{2} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 0.5 \approx 1 \longrightarrow$ gut konditioniert

-> **Konditionszahl**: 1/n

$f(x) = x^n$ bei $x = 0.1$, $n = 10$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|0.1 \cdot (10 \cdot 0.1^{10-1})|}{|0.1^{10}|} \\ &= \frac{|1 \cdot 0.1^{9}|}{0.1^{10}} \\ &= 10\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 10 \gg 1 \longrightarrow$ schlecht konditioniert

-> **Konditionszahl**: n

1.5 Auslöschung

Auslöschung: Verlust signifikanter Stellen durch Subtraktion fast gleicher Zahlen. Tritt in Funktionen an Stellen auf an denen sie schlecht konditioniert sind.

2 Nullstellenprobleme

2.1 Definition: Fixpunkt

$\overline{x}$ heißt **Fixpunkt** von F, falls:

$$F(\overline{x}) = \overline{x}$$

2.1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $F : [a, b] \to [a, b]$ (d.h. F bildet $[a, b]$ auf sich selbst ab) und existiere eine Konstante α mit $0 < \alpha < 1$ und:

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha \; |x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in [a, b]$$

(d.h. F ist **Lipschitz-stetig** und **kontraktiv**, α nennt man auch **Lipschitz-Konstante**).

Dann gilt:

Kontraktionsbedingung: $|F(x) - F(y)| \leq \alpha \; |x - y|$ besagt, dass F eine **Kontraktion** ist.

Lipschitz-Konstante: $\alpha < 1$ garantiert, dass Abstände verkleinert werden.

Ableitung: Für differenzierbar F gilt: $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ für alle $x \in [a, b]$.

Existenz und Eindeutigkeit: Genau ein Fixpunkt existiert.

Globale Konvergenz: Jeder Startwert führt zur Konvergenz.

2.1.2 Interpretationen der Abschätzungen

2.1.3 Abschätzungen der Fixpunktiteration

A-priori Abschätzung (vor Iteration bekannt):

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \; |x_1 - x_0|$$

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \alpha) / \; |x_1 - x_0|)}{\ln(\alpha)}$$

A-posteriori Abschätzung (während Iteration berechenbar):

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{1-\alpha} |x_n - x_{n-1}|$$

Schritt 1: Banachscher Fixpunktsatz: Bedingungen prüfen

- Abbildung $F : [a, b] \to [a, b]$ verifizieren

Schritt 2: Lipschitz-Konstante finden

- Lipschitz-Konstante $\alpha < 1$ finden: $\alpha = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)|$
- **Schritt 2.1:** Ableitung $F'(x)$ berechnen
- **Schritt 2.2:** Maximumvon $|F'(x)|$ im Intervall bestimmen

Schritt 3: Konklusion

- Eindeutiger Fixpunkt $\overline{x}$ existiert (erfüllt $F(\overline{x}) = \overline{x}$)
- Jeder Startwert in $[a, b]$ konvergiert gegen $\overline{x}$

Fixpunkt genau:

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{wobei} \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

2.1.4 Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz für $x^3 + 0.3 = 0$

Gesucht: Intervall $[a, b]$ und Konstante $\alpha < 1$, so dass der Banachsche Fixpunktsatz auf die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$ anwendbar ist.

Lösungsansatz: Die Fixpunktiteration konvergiert in der Nähe von $\overline{x} = 0.3389$. Wir suchen ein geeignetes Intervall und versuchen es mit $[a, b] = [0, 0.5]$.

Schritt 1: Überprüfen, ob $F : [0, 0.5] \to [0, 0.5]$:

- Für alle $x \in [0, 0.5]$: $F(x) = x^3 + 0.3 \geq 0.3$
- $F(0) = 0.3 \in [0, 0.5]$
- $F(0.5) = 0.125 + 0.3 = 0.425 \in [0, 0.5]$

Schritt 2: Finden einer Konstanten $\alpha < 1$:

Aus dem Satz wissen wir: $\alpha = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)|$

Schritt 2.1: Ableitung berechnen:

$$F'(x) = 3x^2$$

Schritt 2.2: Die Ableitung ist monoton steigend, daher Maximum bei $x = 0.5$:

$$|F'(0.5)| = 3 \cdot 0.5^2 = 0.75 < 1$$

Schritt 3: Konklusion:

Mit $\alpha = 0.75 < 1$ sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = x_n^3 + 0.3$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} \approx 0.3389$ für jeden Startwert in $[0, 0.5]$.

2.1.5 Vorgehen: Fixpunktform

Schritt 1: Nullstellenproblem $f(x) = 0$ gegeben

Schritt 2: Nach x auflösen: $F(x) = x$

Schritt 3: Mehrere Formen möglich!

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $|F'(\overline{x})| < 1$

2.1.6 Beispiel 3.3: Fixpunktform

Gegeben: $p(x) = x^3 - x + 0.3 = 0$

Schritt 1: Nullstellenproblem identifiziert

Schritt 2: Umformen nach x:

Variante A: $x^3 - x + 0.3 = 0$

$$\to x = x^3 + 0.3$$

$$\to F(x) = x^3 + 0.3$$

Variante B: $x^3 = x - 0.3$

$$\to x = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

$$\to F(x) = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

Schritt 3: Beide Formen sind gültig

Schritt 4: Konvergenz prüfen (Variante A):

$$F'(x) = 3x^2$$

Bei $\overline{x} \approx 0.339$: $|F'(0.339)| = 3 \cdot 0.339^2 \approx 0.34 < 1$

2.1.7 Vorgehen: Fixpunktiteration

Schritt 1: Fixpunktform $x = F(x)$ aufstellen

Schritt 2: Startwert x_0 wählen

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = F(x_n)$

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $|F'(\overline{x})| < 1$

Schritt 5: Abbruch bei $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.1.8 Beispiel 3.4: Fixpunktiteration

Gegeben: $F(x) = x^3 + 0.3$, Startwert $x_0 = 0$

Schritt 1: Fixpunktform bereits gegeben

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 0$

Schritt 3: Iteration durchführen:

$$x_1 = F(x_0) = 0^3 + 0.3 = 0.3$$

$$x_2 = F(x_1) = 0.3^3 + 0.3 = 0.027 + 0.3 = 0.327$$

$$x_3 = F(x_2) = 0.327^3 + 0.3 \approx 0.335$$

$$x_4 = F(x_3) = 0.335^3 + 0.3 \approx 0.338$$

$$x_5 = F(x_4) \approx 0.339$$

Schritt 4: Konvergenz (siehe Beispiel 3.3):

Schritt 5: $|x_5 - x_4| \approx 0.001 \longrightarrow$ Abbruch bei $\varepsilon = 0.01$

Fixpunkt: $\overline{x} \approx 0.339$

2.2 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}$$

mit konstanter Ableitung $c = f'(x_0)$

2.2.1 Vorgehen: Newton-Verfahren

Schritt 1: Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen

Schritt 2: Startwert x_0 wählen (nahe Nullstelle)

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} < 1$

Schritt 5: Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Schritt 6: Quadratische Konvergenz bei einfachen Nullstellen

2.2.2 Beispiel 3.5: Newton für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwert $x_0 = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktionen bestimmen:

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 1$

Schritt 3: Iteration:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1-2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \approx 1.4167$$

$$x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142$$

Schritt 4: Konvergenzprüfung bei $x \approx 1.414$:

$$\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} = \frac{|(x^2-2) \cdot 2|}{|2x|^2} \approx \frac{0}{8} < 1$$

Schritt 5: Abbruchkriterium prüfen bei $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$|f(x_3)| = |1.4142^2 - 2| \approx 0.00005 < 10^{-4}$$

Schritt 6: $\sqrt{2} \approx 1.4142$ (quadratische Konvergenz!)

2.3 Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

2.3.1 Vorgehen: Sekantenverfahren

Schritt 1: Funktion $f(x)$ bestimmen (keine Ableitung nötig!)

Schritt 2: Zwei Startwerte x_0 und x_1 wählen (nahe Nullstelle)

Schritt 3: Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Schritt 4: Konvergenz: Superlinear (Ordnung ≈ 1.618, besser als linear, schlechter als quadratisch)

Schritt 5: Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.3.2 Beispiel 3.6: Sekantenverfahren für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwerte $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktion bestimmt: $f(x) = x^2 - 2$

Schritt 2: Startwerte: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$

Schritt 3: Iteration:

$$f(x_0) = 1^2 - 2 = -1$$

$$f(x_1) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot (1.5 - 1)}{0.25 - (-1)}$$

$$= 1.5 - \frac{0.25 \cdot 0.5}{1.25}$$

$$= 1.5 - 0.1 = 1.4$$

$$f(x_2) = 1.4^2 - 2 = -0.04$$

$$x_3 = 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (1.4 - 1.5)}{-0.04 - 0.25}$$

$$= 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (-0.1)}{-0.29}$$

$$= 1.4 - \frac{0.004}{-0.29} \approx 1.414$$

Schritt 4: Konvergenz: Superlinear (besser als Fixpunktiteration, weniger Ableitungen als Newton)

Schritt 5: $|f(x_3)| \approx |1.414^2 - 2| \approx 0 \longrightarrow$ Konvergiert schnell

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix: Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

3.2 Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, ..., 1$$

Schritt 1 - Vorwärtselimination:
- Zeile 2: — Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: — Vielfaches von Zeile 2

Schritt 2: Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:
- x_n aus letzter Zeile
- x_{n-1} aus vorletzter (mit x_n)
- Weiter bis x_1

3.2.1 Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Matrix: $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1 a: Eliminiere a_{21}

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1)$$

$$(\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1b: Eliminiere a_{31}

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1} z_1 = (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2)$$

$$(\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 1c: Eliminiere a_{32}

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2} z_2 = (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3)$$

$$(\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.3 LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$$

mit Permutationsmatrix P:

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

3.3.1 Vorgehen: LR-Zerlegung

Schritt 1: Gauss-Elimination durchführen

Schritt 2: Faktoren in $\boldsymbol{L}$ eintragen

Schritt 3: Resultat ist $\boldsymbol{R}$

Schritt 4 - Lösen:
- $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ (Vorwärts)
- $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{y}$ (Rückwärts)

3.3.2 Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

Gegeben: System aus Beispiel 4.2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

Schritt 2: Multiplikatoren sammeln:
- Zeile 2: Faktor war $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war $\frac{5}{-1} = -5$, dann $\frac{6}{-2} = -3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Lösen (für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$):

Vorwärts ($Ly = b$):

Erweiterte Matrix: $(L \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Schritt 1: Eliminiere L_{21}:

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Eliminiere L_{31}:

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Eliminiere L_{32}:

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

Vereinfacht

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \to y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \to y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

Resultat:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rückwärts ($Rx = y$): wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.4 QR Zerlegung

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$Q^T Q = I_n \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Darstellung:

$$A = QR$$

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$v_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i^T u_j) u_j \quad \text{(orthogonal)}$$

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad \text{(normalisiert)}$$

Finden von R:

$$R = Q^T A$$

3.4.1 Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

Schritt 1: Spalten $a_1, a_2, \ldots$ von A

Schritt 2: $u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

Schritt 3: Für $i = 2, \ldots, n$:

- v_i berechnen (orthogonalisieren)
- $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ berechnen

Schritt 4: $Q = [u_1 \mid \ldots \mid u_n]$

Schritt 5: $R = Q^T A$

3.4.2 Beispiel 4.3: QR für 2×2

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Spalten:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|a_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$u_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$a_2^T u_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{0.32^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$u_2 = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

Schritt 5:

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Vorgehen: Jacobi-Verfahren

Schritt 1: Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$

Schritt 2: Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 3: Für jede Komponente i:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Schritt 4: Alle gleichzeitig berechnen

Schritt 5: Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

Schritt 6: Abbruch: $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

3.4.4 Beispiel 4.4: Jacobi-Iteration

Gegeben:

$$4x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 = 7$$

Start: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \binom{0}{0}$

Schritt 1: Zerlegung erkannt

Schritt 2: Startwert: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \binom{0}{0}$

Schritt 3+4: Erste Iteration ($k = 0$):

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 1 \cdot 0}{4} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 - 1 \cdot 0}{3} = 2.33$$

Iteration 2 ($k = 1$):

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1 \cdot 2.33}{4} = 0.67$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 - 1 \cdot 1.25}{3} = 1.92$$

Iteration 3 ($k = 2$):

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 1 \cdot 1.92}{4} = 0.77$$

$$x_2^{(3)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.67}{3} = 2.11$$

Schritt 5: Diagonaldominanz: $|4| > |1|$ ✓, $|3| > |1|$ ✓

Schritt 6: Konvergiert gegen $(1, 2)$

3.4.5 Vorgehen: Gauß-Seidel

Wie Jacobi, aber in Schritt 3:

Für Komponente i:

- Nutze **neue** $x_j^{(k+1)}$ für $j < i$
- Nutze **alte** $x_j^{(k)}$ für $j > i$

Sequentiell von oben nach unten!

Meist schnellere Konvergenz.

3.4.6 Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

Gegeben: System aus 4.4

Start: $\boldsymbol{x}^{(0)} = \binom{0}{0}$

Iteration 1 ($k = 0$):

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 1 \cdot 0}{4} = 1.25$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 - 1 \cdot 1.25}{3} = 1.92$$

(nutzt neues $x_1^{(1)}$!)

Iteration 2 ($k = 1$):

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1 \cdot 1.92}{4} = 0.77$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.77}{3} = 2.08$$

Iteration 3 ($k = 2$):

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 1 \cdot 2.08}{4} = 0.73$$

$$x_2^{(3)} = \frac{7 - 1 \cdot 0.73}{3} = 2.09$$

Vergleich: Schnellere Konvergenz als Jacobi!

Lösung: $(1, 2)$

3.4.7 Definition 4.6: Eigenwert

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ = Eigenwert, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ = Eigenvektor

3.4.8 Vorgehen: Eigenwerte (2×2)

Schritt 1: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Schritt 3: Lösen: $\lambda_{1,2} = \ldots$

Schritt 4: Für jeden λ: $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

3.4.9 Beispiel 4.7: Eigenwerte 2×2

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Matrix identifiziert: $a = 4, b = 1, c = 2, d = 3$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - (4 + 3)\lambda + (4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Schritt 3: Nullstellen (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{(2.25)} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Schritt 4: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$:

$$(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow -v_1 + v_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.4.10 Vorgehen: Potenzmethode

Schritt 1: Startvektor $\boldsymbol{v}^{(0)}$ wählen (zufällig)

Schritt 2: Iteration:

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}$$

Schritt 3: Normieren:

$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{w}^{(k)}}{\|}\boldsymbol{w}^{(k)}\|$$

Schritt 4: Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx \left(\boldsymbol{v}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}$$

Konvergiert zum betragsmäßig größten EW.

3.4.11 Beispiel 4.8: Potenzmethode

Gegeben: $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, Start: $\boldsymbol{v}^{(0)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

Iteration 1:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(1)}\| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}{4.47} \approx \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Iteration 2:

Schritt 2: $\boldsymbol{w}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4.01 \\ 3.13 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 3: $\|\boldsymbol{w}^{(2)}\| \approx 5.08$

$$\boldsymbol{v}^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.62 \end{pmatrix}$$

Iteration 3: $\boldsymbol{v}^{(3)} \approx \left(\begin{smallmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{smallmatrix}\right)$

Schritt 4: Eigenwert (nach Konvergenz):

$$\begin{aligned} \lambda &= \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \\ &= \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Größter EW $\lambda_1 = 5$ (vgl. 4.7)

4 Ergänzung & Formeln

4.1 Ableitungen & Integrale

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq 0$$

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\texttt{int } x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\texttt{int } \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\texttt{int } e^x dx = e^x + C$$

$$\texttt{int} \sin x dx = -\cos x + C, \quad \texttt{int} \cos x dx = \sin x + C$$

4.2 Logarithmus Gesetze

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a), \quad a > 0, n \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad x > 0$$

$$\log_{b(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{Basiswechsel}$$

4.3 Polynome

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

$$P(x) = \texttt{int } p(x) \text{ dx} = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C$$

4.4 Fakultät & Binomialkoeffizient

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4.5 Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

4.6 Geometrie

$$V_{\text{kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A_{\text{kreis}} = \pi r^2$$

$$V_{\text{zyl}} = \pi r^2 l$$

$$V_{\text{kugelsegment}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

4.7 Lineare Algebra Basics

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

$$\det! \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$p(\backslash\ \lambda) = \det(A - \backslash\ \lambda I)$$

$$p(\backslash\ \lambda) = \backslash\ \lambda^2 - (a+d) \backslash\ \lambda + (ad - bc) \quad \text{für } 2 \times 2$$