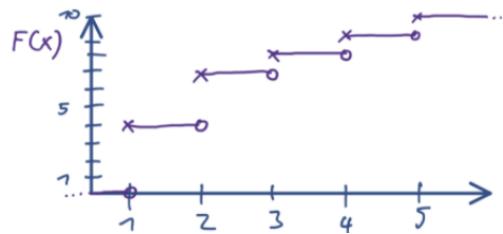


## 1 Grundbegriffe

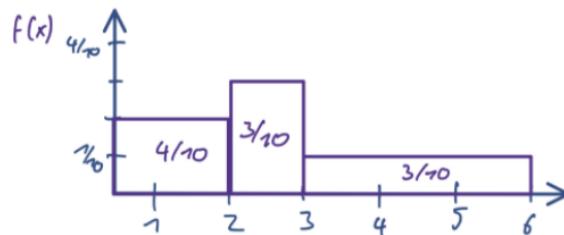
### Häufig gebrauchte Variablen:

- $x$ : Merkmal / Beobachtung
- $a_i$ : Merkmalsausprägung (Wertklasse)
- $h_i$ : absolute Häufigkeit von  $a_i$
- $f_i$ : relative Häufigkeit von  $a_i$
- $H_i$ : kumulierte absolute Häufigkeit
- $F(x)$ : kumulierte relative Häufigkeit
- $\bar{x}$ : arithmetisches Mittel
- $x_{\text{med}}$ : Median (2. Quantil)
- $x_{\text{mod}}$ : Modalwert (häufigster Wert)
- $s^2$ : Varianz,  $s_x$ : Standardabweichung
- $s_{\text{korr}}$ : korrigierte Standardabweichung
- $f(x)$ : PMF/PDF,  $F(x)$ : CMF/CDF



### 2.3 PDF

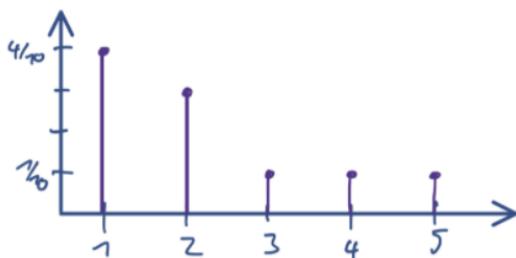
PDF:  $f(x)$  Höhe Balken Histogramm



## 2 Diagrammtypen

### 2.1 PMF

PMF:  $f(x)$  Relative Häufigkeit (Stabdiagramm)

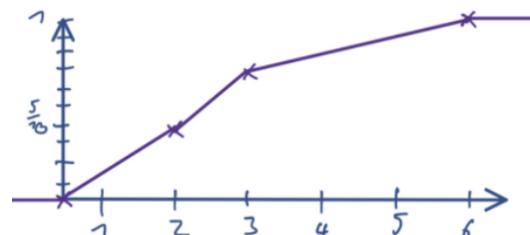


### 2.2 CMF

CMF:  $F(x)$  Kumulative relative Häufigkeit (Treppendiagramm)

### 2.4 CDF

CDF:  $F(x)$  Kumulative Fläche Balken Histogramm



## 3 Häufigkeiten und Verteilungen

### Neue Variablen in diesem Abschnitt:

- $n$ : Stichprobengröße (Anzahl Beobachtungen)

1. Urliste sortieren
2. Verschiedene Werte  $a_i$  bestimmen

3. Absolute Häufigkeit:  $h_i$  = Anzahl von  $a_i$

4. Relative Häufigkeit:  $f_i = \frac{h_i}{n}$

5. Kumulative Häufigkeit:

- $H_i = \sum_{k \leq i} h_k$
- $F_i = \sum_{k \leq i} f_k$

### Würfeln (20 Würfe):

$a_i$	1	2	3	4	5	6
$h_i$	4	3	4	0	6	3
$f_i$	0.2	0.15	0.2	0	0.3	0.15
$F_i$	0.2	0.35	0.55	0.55	0.85	1.0
$H_i$	4	7	11	11	17	20

CDF:  $F_i$ , CMF:  $H_i$

## 4 Median und Quantile

### Neue Variablen:

$q$ : Quantilsniveau (z.B. 0.25, 0.5, 0.75)

$Q_q$ : zugehöriges  $q$ -Quantil

$p$ : Positionsindex in der sortierten Liste

### $q$ -Quantil $Q_q$ :

Position:  $p = n \cdot q$

Falls  $p$  ganzzahlig:

$$Q_q = \frac{1}{2}(x_{(p)} + x_{(p+1)})$$

Falls  $p$  nicht ganzzahlig:

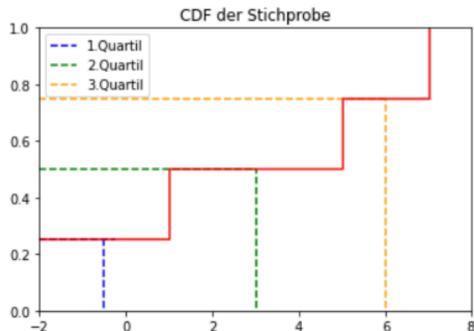
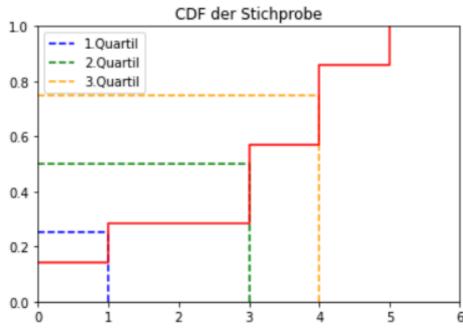
$$Q_q = x_{(\lceil p \rceil)}$$

### Spezialfälle:

- Median:  $q = 0.5$
- 1. Quartil (Q1):  $q = 0.25$

- 3. Quartil (Q3):  $q = 0.75$

#### 4.0.1 Quartil aus CDF ablesen



- Daten sortieren:  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$
- Position berechnen:  $p = n \cdot q$
- Falls  $p$  ganzzahlig  $\rightarrow Q_q = \frac{1}{2}(x_{(p)} + x_{(p+1)})$   
-> auf Stufe
- Falls nicht  $\rightarrow k = \lceil p \rceil$ , dann  $Q_q = x_{(k)}$   
-> an Stufe

**Stichprobe:** 4, 4, 0, 3, 5, 3, 1

**Sortiert:** 0, 1, 3, 3, 4, 4, 5 ( $n = 7$ )

$$Q_1: p = 7 \cdot 0.25 = 1.75 \rightarrow k = 2 \rightarrow Q_1 = 1$$

$$\text{Median: } p = 7 \cdot 0.5 = 3.5 \rightarrow k = 4 \rightarrow Q_2 = 3$$

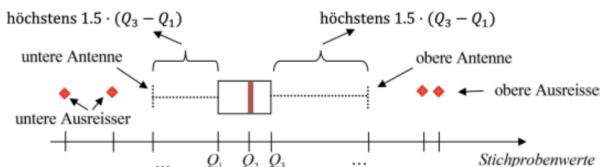
$$Q_3: p = 7 \cdot 0.75 = 5.25 \rightarrow k = 6 \rightarrow Q_3 = 4$$

## 5 Boxplot-Kennwerte

#### Neue Variablen:

IQR: Interquartilsabstand

Untere/obere Antenne: Bereich ohne Ausreißer



#### Interquartilsabstand (IQR):

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1$$

#### Antennen (Whisker):

- Untere: Minimum in  $[Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR}, Q_1]$
- Obere: Maximum in  $[Q_3, Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}]$

**Ausreißer:** Werte außerhalb  $[Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR}, Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR}]$

**Daten:** 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 22

$$Q_1 = 8, \quad \text{Median} = 10, \quad Q_3 = 15$$

$$\text{IQR} = 15 - 8 = 7$$

#### Whisker:

- Untere:  $Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR} = 8 - 10.5 = -2.5 \rightarrow \text{Min(Daten)} = 5$
- Obere:  $Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR} = 15 + 10.5 = 25.5 \rightarrow \text{Max(Daten)} = 22$

**Ergebnis:** Alle Werte in  $[5, 22] \rightarrow \text{keine Ausreißer}$

## 6 Mittelwert und Varianz

#### Neue Variablen:

$s$ : Standardabweichung

$s_{\text{korr}}$ : korrigierte Standardabweichung

#### Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

#### Empirische Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

#### Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

#### Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2}$$

#### Korrigierte Varianz:

$$s_{\text{korr}}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

- Mittelwert  $\bar{x}$  berechnen
- Varianz entweder direkt oder mit Verschiebungssatz
- Standardabweichung:  $s = \sqrt{s^2}$
- Für Schätzungen: korrigierte Varianz verwenden

#### Gewinnspiel (100 Spiele):

Gewinn	-1	0	4	8	10	20
$h_i$	74	13	3	5	4	1

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(-1 \cdot 74 + 0 \cdot 13 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1) = -0.38 \text{ CHF}$$

$$s^2 = \frac{1}{100}(1 \cdot 74 + 0 + 16 \cdot 3 + 64 \cdot 5 + 100 \cdot 4 + 400 \cdot 1) - 0.38^2 = 12.28 \text{ CHF}^2$$

$$s = \sqrt{12.28} \approx 3.5 \text{ CHF}$$

## 7 Bivariate Daten & Kovarianz

**Neue Variablen:**

$(x_i, y_i)$ : Wertepaare zweier Merkmale

$s_{xy}$ : empirische Kovarianz

$\bar{xy}$ : Mittelwert der Produkte

**Empirische Kovarianz:**

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**Verschiebungssatz:**

$$s_{xy} = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

wobei:

$$\bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Korrigierte Kovarianz:**

$$s_{xy,\text{korr}} = \frac{n}{n-1} \cdot s_{xy}$$

**Interpretation:**

- $s_{xy} > 0$ : positiver Zusammenhang
- $s_{xy} \approx 0$ : kein linearer Zusammenhang
- $s_{xy} < 0$ : negativer Zusammenhang

1. Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}$  berechnen
2. Produkte  $x_i y_i$  bilden
3. Verschiebungssatz anwenden:  $s_{xy} = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
4. Interpretation: Vorzeichen gibt Richtung des Zusammenhangs

**Stichprobe:**  $x = [1, 2, 3], y = [4, -1, 2]$

$$\bar{x} = 2, \quad \bar{y} = \frac{5}{3}$$

$$\bar{xy} = \frac{1}{3}(1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) = \frac{8}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

Negativer Wert → negativer Zusammenhang

## 8 Korrelation nach Bravais-Pearson

**Neue Variablen:**

$y$ : zweite Variable

$s_x, s_y$ : Standardabweichungen von  $x, y$

$s_{xy}$ : Kovarianz von  $x, y$

$r$ : Korrelationskoeffizient

**Korrelationskoeffizient:**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

wobei:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**Interpretation:**

- $r \approx 1$ : starker positiver Zusammenhang
- $r \approx 0$ : kein linearer Zusammenhang
- $r \approx -1$ : starker negativer Zusammenhang

**Bestimmtheitsmaß:**  $r^2 = \text{Anteil erklärter Varianz}$

1. Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}$  berechnen
2. Standardabweichungen  $s_x, s_y$  berechnen
3. Kovarianz  $s_{xy}$  berechnen
4. Korrelationskoeffizient:  $r = s_{xy} / (s_x s_y)$

**Beispiel: Berechnung des Bravais-Pearson Korrelationskoeffizienten**

Gegeben sind folgende Wertepaare  $(x_i, y_i)$ :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	5	10	20	8	4	6	12	15
$y_i$	27	46	73	40	30	28	47	59

**(1) Mittelwerte berechnen:**  $\bar{x} = 10, \bar{y} = 43.75$

$x^2$	25	100	400	64	16	36	144	225
$y^2$	729	2116	5329	1600	900	784	2209	3481
$x_i y_i$	135	460	1460	320	120	168	564	885

$$\sum x_i^2 = 1010, \sum y_i^2 = 17148, \sum x_i y_i = 4112$$

**(2) Standardabweichungen berechnen:**

$$n = 8$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{126.25 - 100} = \sqrt{26.25} = 5.12$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_i^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{2143.5 - 1914.06} = 15.15$$

**(3) Kovarianz berechnen:**

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = 514 - 10 \cdot 43.75 = 76.5$$

**(4) Korrelationskoeffizient berechnen:**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{76.5}{5.12 \cdot 15.15} \approx 0.986$$

→ Starker positiver linearer Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$

## 9 Lineare Regression (KQM)

### Neue Variablen:

a: Achsenabschnitt

b: Steigung der Regressionsgeraden

$R^2$ : Bestimmtheitsmaß

Regressionsgerade:  $y = a + bx$

Steigung:

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Achsenabschnitt:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Residualvarianz:

$$s_{\text{Res}}^2 = s_y^2(1 - r^2)$$

Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Bestimmtheitsmaß:

$$R^2 = r^2 = \frac{s_y^2 - s_{\text{Res}}^2}{s_y^2}$$

1. Korrelationskoeffizient  $r$  berechnen
2. Steigung:  $b = s_{xy}/s_x^2$  (siehe Kapitel Bivariate Daten)
3. Achsenabschnitt:  $a = \bar{y} - b\bar{x}$
4. Prüfung: Residuenplot (sollte unsystematisch streuen)
5. Güte:  $R^2$  berechnen (Anteil erklärter Varianz)

Größe-Gewicht (15 Personen):

$$\bar{x} = 173 \text{ cm}, s_x = 6.047 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 72.267 \text{ kg}, s_y = 7.474 \text{ kg}$$

$$s_{xy} = 41.071, r = 0.898$$

$$b = \frac{41.071}{6.047^2} \approx 1.123$$

$$a = 72.267 - 1.123 \cdot 173 \approx -122.02$$

Regressionsgerade:

$$y = -122.02 + 1.123x$$

$$R^2 = 0.898^2 \approx 0.806$$

→ 80.6% der Varianz erklärt

## 9.1 Transformationen für nicht-lineare Regression

Ausgangsfunktion	Transformation
$y = q \cdot x^m$	$\log(y) = \log(q) + m \cdot \log(x)$
$y = q \cdot m^x$	$\log(y) = \log(q) + \log(m) \cdot x$
$y = q \cdot e^{m \cdot x}$	$\ln(y) = \ln(q) + m \cdot x$
$y = \frac{1}{q+m \cdot x}$	$V = q + m \cdot x; V = \frac{1}{y}$
$y = q + m \cdot \ln(x)$	$y = q + m \cdot U; U = \ln(x)$
$y = \frac{1}{q \cdot m^x}$	$\log\left(\frac{1}{y}\right) = \log(q) + \log(m) \cdot x$

Beispiel: Exponentielles Wachstum

Gegeben sind folgende Wertepaare  $(x_i, y_i)$ :

i	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	3	4	5	6
$y_i$	2.7	7.4	20.1	54.6	148.4	403.4

(1) Transformation:  $Y = \log(y)$

i	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	3	4	5	6

$Y_i$	0.431	0.869	1.303	1.737	2.171	2.606
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

(2) Regressionsgerade für  $Y = a + bx$  berechnen:

$$\bar{x} = 3.5, s_x = 1.7078$$

$$\bar{Y} = 1.5195, s_Y = 0.7896$$

$$s_{xY} = 1.3483, r = 0.999$$

$$b = \frac{1.3483}{1.7078^2} \approx 0.462$$

$$a = 1.5195 - 0.462 \cdot 3.5 \approx -1.1135$$

Regressionsgerade für transformierte Daten:

$$Y = -1.1135 + 0.462x$$

(3) Rücktransformation:

$$y = 10^Y = 10^{-1.1135+0.462x} = 0.0772 \cdot 10^{0.462x}$$

Endergebnis:

$$y = 0.0772 \cdot (2.9)^x$$

## 10 Spearman-Rangkorrelation

Neue Variablen:

$\text{rg}(x_i)$ : Rang von  $x_i$  in sortierter Liste

$r_{\text{Sp}}$ : Spearman-Korrelationskoeffizient

$d_i$ : Differenz der Ränge

Definition : (auch bei gleichen Rängen)

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{rg}(x_i) - \bar{\text{rg}}(x))(\text{rg}(y_i) - \bar{\text{rg}}(y))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{rg}(x_i) - \bar{\text{rg}}(x))^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{rg}(y_i) - \bar{\text{rg}}(y))^2}}$$

Vereinfachte Formel (keine gleichen Ränge):

$$r_{\text{Sp}} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

wobei  $d_i = \text{rg}(x_i) - \text{rg}(y_i)$

#### Interpretation:

- Misst **monotonen** (nicht nur linearen) Zusammenhang
- Robust gegen Ausreißer
- Werte:  $-1 \leq r_{\text{Sp}} \leq 1$

- Ränge für  $x$  und  $y$  separat vergeben (1 = kleinster Wert)
- Bei gleichen Werten: Durchschnittsrang vergeben
- Rangdifferenzen  $d_i$  berechnen
- Formel anwenden (vereinfacht falls keine Bindungen)
- Interpretation wie bei Pearson

#### Alter vs. Laufzeit (6 Personen):

$i$	$x_i$	$y_i$	$\text{rg}(x_i)$	$\text{rg}(y_i)$
1	59	14.6	6	6
2	35	11.8	3	2
3	43	14.3	5	5
4	23	13.0	1	3
5	42	14.2	4	4
6	27	11.0	2	1

$$\sum d_i^2 = 0 + 1 + 0 + 4 + 0 + 1 = 6$$

$$r_{\text{Sp}} = 1 - \frac{6 \cdot 6}{6(36-1)} = 1 - \frac{36}{210} \approx 0.83$$

Starker positiver monotoner Zusammenhang

#### Gleiche Ränge:

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	23	27	35	35	42	59
$\text{rg}(x_i)$	1	2	(3+4)/2 =3.5	(3+4)/2 =3.5	5	6

Bei gleichen Werten wird der Durchschnittsrang vergeben.

Achtung: vereinfachte Formel kann **nicht** verwendet werden!

## 11 Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

#### Variablen:

$\Omega$ : Ergebnisraum (endlich oder abzählbar unendlich)

$\mathcal{A}$ : Ereignisalgebra (Potenzmenge von  $\Omega$ )

$P$ : Wahrscheinlichkeitsmass

$\omega_i$ : Einzelne Ergebnisse

#### Definition:

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \quad \text{endlich oder abzählbar}$$

#### Eigenschaften eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraums ( $\Omega, P$ ):

(A1) Unmögliches Ereignis:

$$P(\emptyset) = 0$$

(A2) Sicheres Ereignis:

$$P(\Omega) = 1$$

(A3) Komplementäres Ereignis:

$$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

(A4) Vereinigung:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(A5) Sigma-Additivität:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

falls die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3, \dots$  paarweise disjunkt sind.

#### Laplace-Raum:

Ist  $(\Omega, P)$  ein Laplace-Raum, so gilt:

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$$

1. Ergebnisraum  $\Omega$  definieren

2. Einzelwahrscheinlichkeiten  $P(\{\omega_i\})$  festlegen

3. Prüfen: Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten = 1

4. Ereigniswahrscheinlichkeiten durch Addition berechnen

#### Unfaire Würfel:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{1\}) = \frac{1}{12}, P(\{2\}) = \frac{1}{12}, P(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{4\}) = \frac{1}{6}, P(\{5\}) = \frac{1}{4}, P(\{6\}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prüfung: } \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$P(\text{gerade}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$$

## 12 Laplace-Experiment

#### Variablen:

$\Omega$ : Ergebnisraum (alle möglichen Ergebnisse)

$\omega$ : Einzelnes Ergebnis

$A$ : Ereignis (Teilmenge von  $\Omega$ )

$P(A)$ : Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$

$|A|$ : Anzahl der günstigen Ergebnisse

$|\Omega|$ : Anzahl aller möglichen Ergebnisse

#### Definition Laplace-Experiment:

Ein Zufallsexperiment heisst Laplace-Experiment, wenn alle Ergebnisse **gleichwahrscheinlich** sind.

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega \in \Omega$$

#### Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

1. Ergebnisraum  $\Omega$  bestimmen
2. Prüfen, ob alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind
3. Anzahl günstiger Ergebnisse  $|A|$  zählen
4. Anzahl möglicher Ergebnisse  $|\Omega|$  zählen
5. Wahrscheinlichkeit  $P(A) = |A|/|\Omega|$  berechnen

#### Würfelwurf:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Omega| = 6$$

Ereignis A: "Gerade Augenzahl" =  $\{2, 4, 6\}$ ,  $|A| = 3$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

#### Zwei Würfel:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36 \text{ (mit Reihenfolge)}$$

Ereignis A: "Summe = 7" =

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

## 13 Rechnen mit Zufallsvariablen

#### Variablen:

$X, Y$ : Zufallsvariablen

$E(X)$ : Erwartungswert von  $X$

$\text{Var}(X)$ : Varianz von  $X$

$\sigma_X$ : Standardabweichung von  $X$

### 13.1 Allgemeine Rechenregeln

Gegeben sind ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  sowie eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann haben die Kenngrößen von  $X$  folgende Eigenschaften:

#### (1) Linearität des Erwartungswertes:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ und } E(\alpha X) = \alpha E(X), \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

#### (2) Verschiebungssatz für die Varianz:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left( \sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2 \right) - E(X)^2$$

#### (3) Varianz bei linearer Transformation:

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X) \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

### 13.2 Stochastische Unabhängigkeit (Ereignisse)

Wir betrachten einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$  und zwei Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$ .

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (i)  $A$  und  $B$  sind stochastisch unabhängig.
- (ii)  $A$  und  $\Omega \setminus B$  sind stochastisch unabhängig.
- (iii)  $\Omega \setminus A$  und  $\Omega \setminus B$  sind stochastisch unabhängig.

#### Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Zufallsvariablen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

### 13.3 Rechenregeln

Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(a \cdot X) = a^2 V(X)$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}$$

Für  $n$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen

$X_1, \dots, X_n$ :

Summe:

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

Mittelwert:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

#### Erwartungswerte:

$$E(S) = n \cdot E(X), E(\bar{X}) = E(X)$$

#### Varianzen:

$$\text{Var}(S) = n \cdot \text{Var}(X), \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$$

#### Standardabweichungen:

$$\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Zeigen Stochastische Unabhängigkeit:

1. Berechnen von  $P(A)$  und  $P(B)$
2. Berechnen von  $P(A \cap B)$
3. Prüfen ob  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

#### Zeigen Stochastische Unabhängigkeit:

Gegeben: Faire Münze und fairer Würfel

Ereignisse:  $A$  = "Münze zeigt Kopf",  $B$  = "Würfel zeigt eine 6"

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{Kopf und 6}) = \frac{1}{12}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

→ A und B sind stochastisch unabhängig

1. Linearität des Erwartungswerts ausnutzen
2. Bei Varianz: Konstanten quadrieren, aus Summe ziehen
3. Unabhängigkeit prüfen für Vereinfachungen
4. Achtung: Konstanten verschwinden bei Varianz!

**Gegeben:**  $E(X) = 10$ ,  $\text{Var}(X) = 4$ ,  $E(Y) = 5$ ,  $\text{Var}(Y) = 9$   
 $X, Y$  unabhängig

**Gesucht:**  $E(2X - 3Y + 7)$ ,  $\text{Var}(2X - 3Y + 7)$

**Erwartungswert (Linearität):**

$$E(2X - 3Y + 7) = 2E(X) - 3E(Y) + 7 = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 + 7 = 12$$

**Varianz (Konstanten quadrieren, + bei Summe und Differenz):**

$$\begin{aligned} \text{Var}(2X - 3Y + 7) &= 2^2 \text{Var}(X) + (-3)^2 \text{Var}(Y) + 0 \\ &= 4 \cdot 4 + 9 \cdot 9 = 16 + 81 = 97 \end{aligned}$$

**Standardabweichung:**

$$\sigma_{2X-3Y+7} = \sqrt{97} \approx 9.85$$

## 14 Kombinatorik

**Neue Variablen:**

n: Größe der Grundmenge  
k: Größe der Teilmenge

1. Art der Auswahl bestimmen (Variation/Kombination, mit/ohne Wiederholung)
2. Passende Formel aus Übersichtstabelle auswählen
3. Werte für n, k einsetzen und berechnen

Art	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
-----	------------------	-------------------

<b>Variation</b> (mit Reihenfolge)	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
<b>Kombination</b> (ohne Reihenfolge)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$P = \frac{N_{\text{günstig}}}{N_{\text{möglich}}}$$

## 14.1 hypergeometrische Verteilung Anwendung

Formel siehe unten bei Kontingenztabellen.

### Aufgabe

Beim Rommé spielt man mit 110 Karten; sechs davon sind Joker. Zu Beginn eines Spiels erhält jeder Spieler genau 12 Karten. In wieviel Prozent aller möglichen Fälle sind darunter

- a) genau zwei bzw. b) mindestens ein Joker?

### Lösung

a)

$$\frac{\binom{6}{2} * \binom{104}{10}}{\binom{110}{12}} \approx 11.13\%$$

b)

$$1 - \frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}} \approx 50.85\%$$

**Permutation:** (alle Elemente, keine Wiederholung)

$$N = n!$$

→ Es werden alle **n Elemente** in **verschiedener Reihenfolge** angeordnet.

**Permutation mit Wiederholungen**

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

$n_i$ : Anzahl gleiche Elemente der i-ten Sorte (3 für T in TATTOO)

→ Es gibt **mehrere gleiche Elemente**, z. B. bei Wörtern wie „TATTOO“

**Beispiel: TATTOO**

Das Wort „TATTOO“ hat 6 Buchstaben:

- T kommt 3-mal vor
- A kommt 1-mal vor
- O kommt 2-mal vor

$$N = \frac{6!}{3! \times 1! \times 2!} = \frac{720}{6 \times 1 \times 2} = \frac{720}{12} = 60$$

Es gibt also **60 verschiedene Anordnungen** des Wortes „TATTOO“.

### 14.0.1 Wahrscheinlichkeit berechnen

Obige Kombinatorikformeln können zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

## 15 Scatterplot & Streudiagramm

**Verwendung:** Visualisierung zweier metrischer Merkmale

### Interpretation:

- **Form:** linear, gekrümmmt, mehrere Cluster
- **Richtung:** positiv (steigend), negativ (fallend)
- **Stärke:** eng um Kurve → stark, weit gestreut → schwach

**Warnung:** Korrelation ≠ Kausalität (Scheinkorrelation möglich)

1. Wertepaare  $(x_i, y_i)$  als Punkte in Koordinatensystem eintragen
2. Visuelle Inspektion: Form, Richtung, Stärke erkennen
3. Ausreißer identifizieren
4. Korrelationskoeffizient berechnen (Pearson oder Spearman)
5. Immer Scatterplot + Korrelationskoeffizient zusammen angeben!

## 16 Bedingte Wahrscheinlichkeit

### Neue Variablen:

$A, B$ : Ereignisse

$A_i$ : Zerlegung des Ergebnisraums in Teilereignisse

$P(\cdot)$ : Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

### Definition:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

### Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

### Satz von Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}$$

### Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

1. Vierfeldertafel erstellen (Randsummen!)
2. Gegebene Wahrscheinlichkeiten eintragen
3. Formel  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  anwenden
4. Bei Bayes: Totale Wahrscheinlichkeit im Nenner

### Raucher/Nichtraucher (1400 Personen):

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Frauen	100	200	300
Männer	400	700	1100
Summe	500	900	1400

$$P(\text{Raucherin} | \text{Frau}) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

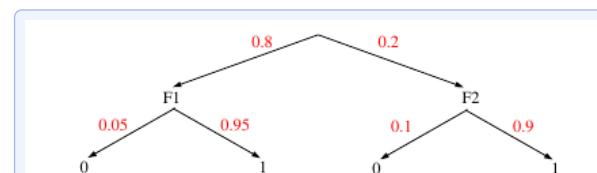
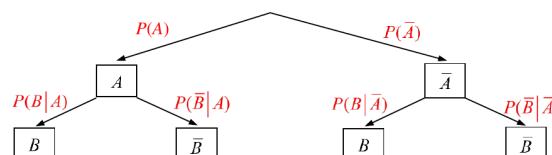
$$P(\text{Mann} | \text{Raucher}) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$

## 17 Ereignisbäume & Satz von Bayes

### Neue Begriffe:

**Pfadwahrscheinlichkeit:** Produkt der Kantenwahrscheinlichkeiten

1. Ereignisbaum zeichnen mit allen Verzweigungen
2. Pfadwahrscheinlichkeit = Produkt entlang Pfad
3. Totale Wahrscheinlichkeit = Summe aller Pfade zum Ereignis
4. Bayes:  $P(A|B) = \frac{\text{Pfad zu A und B}}{\text{Alle Pfade zu B}}$



### Steckdosen (defekt):

Fabrik 1:  $P(F_1) = 0.8, P(D|F_1) = 0.05$

Fabrik 2:  $P(F_2) = 0.2, P(D|F_2) = 0.1$

### Totale Wahrscheinlichkeit (defekt):

$$P(D) = 0.8 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.06$$

### Nicht fehlerhaft und aus F1:

$$P(F_1 \cap \bar{D}) = P(F_1) \cdot P(\bar{D}|F_1) = 0.8 \cdot 0.95 = 0.76$$

### F1 oder fehlerhaft:

$$P(F_1 \cup D) = P(F_1 \cap \bar{D}) + P(D) = 0.76 + 0.06 = 0.82$$

### Bayes (F1 gegeben defekt):

$$P(F_1 | D) = \frac{P(F_1) \cdot P(D|F_1)}{P(D)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.06} = \frac{2}{3}$$

### Bayes (F2 gegeben defekt):

$$P(F_2 | D) = 1 - P(F_1 | D) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

## 18 Übersichtstabelle Verteilungen

Art	PMF/PDF	E(X)	Var(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}$	$p$	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$np$	$np(1-p)$
Poisson	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$
Hyperg.	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n \frac{M}{N}$	...
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\mu$	$\sigma^2$

## 19 Wichtige Quantile

### Neue Begriffe:

$z_p$ : p-Quantil der Standardnormalverteilung

$t_{df,p}$ : p-Quantil der t-Verteilung mit df Freiheitsgraden

Niveau	z-Wert	Verwendung
90%	1.645	Normalvert.

95%	1.960	Normalvert.
99%	2.576	Normalvert.
95% (n=7)	2.365	t-Vert. (df=7)
95% (n=10)	2.262	t-Vert. (df=9)

## 20 Binomialverteilung

### Neue Variablen:

n: Anzahl Versuche

p: Erfolgswahrscheinlichkeit pro Versuch

k: Anzahl Erfolge

**Notation:**  $X \sim B(n, p)$

### Dichtefunktion (PMF):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

### Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot p$$

### Varianz:

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

### Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

1. Prüfen: n Wiederholungen, konstantes p, unabhängig?
2. Parameter n, p festlegen
3.  $P(X = k)$  mit PMF-Formel berechnen
4. Für Intervalle: CDF nutzen oder summieren

## 12x Würfeln, X = Anzahl Sechsen

$$n = 12, p = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0.1974$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 P(X = k) \approx 0.8748$$

$$E(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$$

$$\text{Var}(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

## 21 Poissonverteilung

### Neue Variablen:

$\lambda$ : mittlere Ereignisrate pro Intervall

**Notation:**  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

### Dichtefunktion:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

### Erwartungswert & Varianz:

$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

**Anwendung:** Seltene Ereignisse in festem Intervall

1. Modell: Ereignisse pro Zeit/Fläche/Volumen
2. Parameter  $\lambda$  = erwartete Anzahl
3.  $P(X = k)$  mit PMF berechnen
4. Für Summen: einzeln addieren oder Tabelle nutzen

### Anrufe (120/Stunde = 2/Minute):

$$\lambda = 2$$

$$P(X = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0.135$$

$$P(X = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0.271$$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 P(X = k) \approx 0.857$$

## 22 Hypergeometrische Verteilung

### Neue Variablen:

N: Gesamtzahl Objekte

M: Anzahl Merkmalsträger in Grundgesamtheit

n: Stichprobengröße

k: Merkmalsträger in Stichprobe

### Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

### Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

### Varianz:

$$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

1. Modell: Ziehen ohne Zurücklegen aus endlicher Grundgesamtheit
2. Parameter N, M, n bestimmen
3.  $P(X = k)$  mit Binomialkoeffizienten berechnen
4. Bei großem N: Approximation durch Binomialverteilung

### Lotto 6 aus 49:

$$N = 49, M = 6, n = 6$$

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^6 \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

$$\approx 0.00099$$

Etwa 1 von 1000 Tipps hat  $\geq 4$  Richtige.

#### Approximation durch Binomial:

$$\text{Faustregel: } \frac{n}{N} \leq 0.05 \rightarrow B(n, \frac{M}{N})$$

## 23 Normalverteilung

#### Neue Variablen:

$\mu$ : Erwartungswert der Normalverteilung

$\sigma$ : Standardabweichung

$\Phi$ : Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

**Notation:**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

#### Dichtefunktion (PDF):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

#### Standardisierung:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

#### Intervallwahrscheinlichkeit:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

#### 68-95-99.7-Regel:

- ca. 68% in  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- ca. 95% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- ca. 99.7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

1. Gegeben:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

2. Grenzen  $a, b$  standardisieren:  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
3. Tabellenwerte  $\Phi(z_a), \Phi(z_b)$  ablesen
4.  $P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$

**Gegeben:**  $X \sim N(3, 4) \rightarrow \mu = 3, \sigma = 2$

**Gesucht:**  $P(1.26 \leq X \leq 5.12)$

$$z_1 = \frac{1.26 - 3}{2} = -0.87$$

$$z_2 = \frac{5.12 - 3}{2} = 1.06$$

$$\begin{aligned} P(1.26 \leq X \leq 5.12) &= \Phi(1.06) - \Phi(-0.87) \\ &= 0.8554 - (1 - 0.8078) \\ &= 0.6632 \end{aligned}$$

## 24 Normalapproximation der Binomialverteilung

#### Neue Begriffe:

$Y$ : approximierende Normalverteilung zu  $X$

Stetigkeitskorrektur: Anpassung um 0.5

**Faustregel:**  $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$

#### Approximation:

$$B(n, p) \approx N(np, np(1-p))$$

#### Stetigkeitskorrektur:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$$

wobei  $Y \sim N(np, np(1-p))$

1. Faustregel prüfen:  $np(1-p) \geq 9$
2. Parameter berechnen:  $\mu = np, \sigma^2 = np(1-p)$
3. Stetigkeitskorrektur anwenden ( $\pm 0.5$ )
4. Mit Standardnormalverteilung rechnen

#### 200 Geräte, $p = 0.06, P(10 \leq X \leq 15)$

Prüfung:  $200 \cdot 0.06 \cdot 0.94 = 11.28 \geq 9$

$$\mu = 12, \quad \sigma = \sqrt{11.28} \approx 3.36$$

Mit Stetigkeitskorrektur:

$$\begin{aligned} P(9.5 \leq Y \leq 15.5) &= \Phi\left(\frac{15.5 - 12}{3.36}\right) - \Phi\left(\frac{9.5 - 12}{3.36}\right) \\ &= \Phi(1.04) - \Phi(-0.74) \\ &\approx 0.85 - 0.23 = 0.62 \end{aligned}$$

## 25 Zentraler Grenzwertsatz

#### Neue Variablen:

$X_i$ : i-te Zufallsvariable in Stichprobe

$\bar{X}$ : Stichprobenmittel

$n$ : Stichprobengröße (hier als Zufallsvariablenzahl)

**Aussage:** Summe/Mittelwert von i.i.d. Zufallsvariablen ist asymptotisch normalverteilt.

Gegeben:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. mit  $E(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Für großes  $n$ :

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Standardisiert:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

#### Produktion (6 Arbeitsschritte):

Jeder Schritt: gleichverteilt in  $[1, 2]$  Stunden

$$\mu = 1.5, \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

Gesamtdauer  $T = \sum_{i=1}^6 X_i$ :

$$E(T) = 6 \cdot 1.5 = 9$$

$$\text{Var}(T) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$P(T \leq 10) \approx \Phi\left(\frac{10 - 9}{0.707}\right) \approx \Phi(1.41) \approx 0.92$$

## 26 Punktschätzungen

**Neue Variablen:**

$\hat{\theta}$ : Schätzer für Parameter  $\theta$

$\hat{\mu}$ : Schätzer für Mittelwert

$\hat{\sigma}^2$ : Schätzer für Varianz

**Erwartungswert:**

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Varianz:**

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**Eigenschaften:**

- **Erwartungstreu:**  $E(\hat{\theta}) = \theta$
- **Konsistent:**  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  für  $n \rightarrow \infty$
- **Effizient:** minimale Varianz

1. Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  gegeben
2. Schätzer wählen (z.B.  $\bar{x}$  für  $\mu$ )
3. Schätzwert berechnen
4. Eigenschaften prüfen (erwartungstreu, konsistent)

Verteilung Grundgesamtheit	Parameter	Schätzfunktionen	standardisierte Zufallsvariable	Verteilung, benötigte Quantile	Intervallgrenzen
Normalverteilung (Varianz $\sigma^2$ bekannt)	$\mu$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standardnormalverteilung (Table 2) $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \bar{X} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\theta_o = \bar{X} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung (Varianz $\sigma^2$ unbekannt und $n \leq 30$ ; sonst Fall 1 mit $s$ als Schätzwert für $\sigma$ )	$\mu$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung (Table 4) mit $f = n - 1$ $c = t_{(p;f)}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \bar{X} - c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\theta_o = \bar{X} + c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung	$\sigma^2$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$Z = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$	Chi-Quadrat-Verteilung (Tabelle 3) mit $f = n - 1$ $c_1 = z_{(p_1;f)}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$ $c_2 = z_{(p_2;f)}$ mit $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_1}$ $\theta_o = \frac{(n-1) \cdot S^2}{c_2}$
Bernoulli-Verteilung Anteilstschätzung (mit $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$ )	$p$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $X_i$ 0/1-wertig mit $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$	Standardnormalverteilung (näherungsweise), Tabelle 2 $c = u_q$ mit $q = \frac{1+\gamma}{2}$	$\theta_u = \bar{X} - c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$ $\theta_o = \bar{X} + c \cdot \sqrt{\frac{\bar{X} \cdot (1-\bar{X})}{n}}$
beliebig mit $n > 30$	$\mu, \sigma^2$	Fall 1 ( $s$ Schätzwert für $\sigma$ ) bzw. Fall 3			

#### Vertrauensintervall für $\mu$ ( $\sigma$ bekannt)

Gewichte ( $\sigma = 2$  kg,  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 75$  kg, 95%-Niveau):

1. Vertrauensniveau festlegen: 95%  $\rightarrow \alpha = 0.05$
2. Quantil aus Tabelle 2:  $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.960$
3. Halbbreite berechnen:

$$h = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.960 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0.392$$

4. Intervallgrenzen:

$$\theta_u = \bar{x} - h = 75 - 0.392 = 74.608$$

$$\theta_o = \bar{x} + h = 75 + 0.392 = 75.392$$

Vertrauensintervall: [74.608, 75.392]

#### Vertrauensintervall für $\mu$ ( $\sigma$ unbekannt)

Marroni ( $n = 8$ ,  $\bar{x} = 18$ ,  $s = 2.39$ , 95%-Niveau):

1. Vertrauensniveau: 95%  $\rightarrow \alpha = 0.05$
2. Freiheitsgrade:  $f = n - 1 = 7$
3. t-Quantil aus Tabelle 4:  $t_{7;0.975} = 2.365$
4. Halbbreite berechnen:

$$h = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.365 \cdot \frac{2.39}{\sqrt{8}} \approx 2.0$$

5. Intervallgrenzen:

$$\theta_u = 18 - 2.0 = 16.0$$

$$\theta_o = 18 + 2.0 = 20.0$$

Vertrauensintervall: [16.0, 20.0]

#### Vertrauensintervall für $\sigma^2$

Marroni ( $n = 8$ ,  $s^2 = 5.71$ , 95%-Niveau):

1. Vertrauensniveau: 95%  $\rightarrow \alpha = 0.05$
2. Freiheitsgrade:  $f = n - 1 = 7$
3.  $\chi^2$ -Quantile aus Tabelle 3:
  - $\chi^2_{7;0.975} = 16.01$  (für untere Grenze)
  - $\chi^2_{7;0.025} = 1.69$  (für obere Grenze)
4. Intervallgrenzen:

$$\theta_u = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.975}} = \frac{7 \cdot 5.71}{16.01} = 2.50$$

$$\theta_o = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.025}} = \frac{7 \cdot 5.71}{1.69} = 23.66$$

Vertrauensintervall: [2.50, 23.66]

#### Vertrauensintervall für Anteilswert $p$

Umfrage ( $n = 1200$ ,  $k = 473$  Ja, 99%-Niveau):

1. Anteil berechnen:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{473}{1200} = 0.394$$

2. Faustregel prüfen:

$$n\hat{p}(1-\hat{p}) = 1200 \cdot 0.394 \cdot 0.606 = 286.5 \geq 9$$

3. Quantil (Tabelle 2):  $z_{0.995} = 2.576$

4. Halbbreite:

$$h = z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.576 \sqrt{\frac{0.394 \cdot 0.606}{1200}} \approx 0.036$$

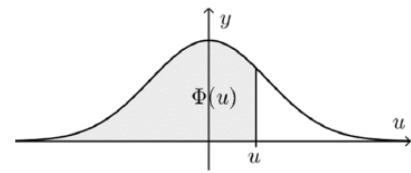
5. Intervallgrenzen:

$$\theta_u = 0.394 - 0.036 = 0.358$$

$$\theta_o = 0.394 + 0.036 = 0.430$$

Vertrauensintervall: [0.358, 0.430]

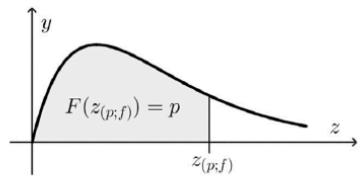
**Tabelle 1: CDF  $\Phi(u)$  der Standardnormalverteilung**



$$\begin{aligned}
 P(U \leq u) &= \Phi(u) \\
 P(U \geq u) &= 1 - \Phi(u) \\
 P(-u \leq U \leq u) &= 2 \cdot \Phi(u) - 1 \\
 \Phi(-u) &= 1 - \Phi(u)
 \end{aligned}$$

$u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

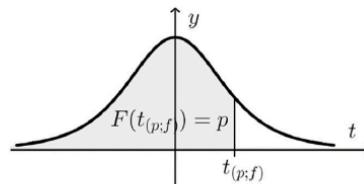
**Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung**



$p$  : vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
 $z_{(p;f)}$  : zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden

$f$	$p$									
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

**Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von «Student»**



$p$  : vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
 $t_{(p;f)}$  : zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden

$f$	$p$				
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576