

HM1-Zusammenfassung

1 Rechnerarithmetik

1.1 Definition 2.1: Maschinenzahlen

Bias: Fester Wert, der zum Exponenten addiert wird, um negative Exponenten darzustellen.

B: Basis des Zahlensystems

n: Anzahl der Mantissenstellen

e_min: Minimaler Exponent

e_max: Maximaler Exponent

Unter Normalisierung $m_1 \neq 0$ (falls $x \neq 0$):

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0.m_1m_2\dots m_n \cdot B^{e-\text{bias}}\} \cup \{0\}$$

$$\text{Wert: } x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$$

$$x_{\min} = B^{e_{\min}-\text{bias}}$$

$$x_{\max} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{\max}}$$

Anzahl möglicher Zahlen

$|e|$: Stellen Exponent

$$B^{n+|e|} + 1 \quad (+1 \text{ nur falls } 0 \text{ auch enthalten})$$

1.1.1 Vorgehen: Zahlensystem-Umwandlung

Schritt 1: Mantisse normalisieren ($0.m_1m_2\dots$ mit $m_1 \neq 0$)

Schritt 2: Exponent bestimmen (Verschiebungen zählen)

Schritt 3: Wert berechnen: $\sum m_i \cdot B^{-i} \cdot B^e$

1.1.2 Beispiel : Binärzahl

Gegeben: $x_2 = 0.111 \times 2^3$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: 0.111_2

Schritt 2: Exponent: $e = 3$

Schritt 3: Wert berechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}) \cdot 2^3 \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

1.1.3 Beispiel : Hexadezimalzahl

Gegeben: $x_5 = 0.AB3C9F \times 16^4$, mit $A = 10, B = 11$

Schritt 1: Mantisse normalisiert: $0.AB3C9F_{16}$

Schritt 2: Exponent: $e = 4$

Schritt 3: Wert berechnen (Auszug):

$$\begin{aligned} x_5 &= (10 \cdot 16^{-1} + 11 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + \dots) \cdot 16^4 \\ &= 10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + \dots \\ &= 40960 + 2816 + 48 + \dots = 43836.62\dots \end{aligned}$$

1.2 Definition 2.2: Fehler

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$ (falls $x \neq 0$)

1.2.1 Vorgehen: Fehlerberechnung

Schritt 1: Zahl auf n Stellen runden

Schritt 2: Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Schritt 3: Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

Schritt 4: Prüfen: $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)}$

1.2.2 Beispiel 2.2: Rundungsfehler

Gegeben: $x = 180.1234567 = 0.1801234567 \times 10^3$

Auf $n = 7$ Stellen runden.

Schritt 1: Rundung auf 7 Stellen:

$$\text{rd}(x) = 0.1801235 \times 10^3$$

(8. Stelle ist $6 \geq 5 \rightarrow$ aufrunden)

Schritt 2: Absoluter Fehler:

$$\begin{aligned} |\text{rd}(x) - x| &= |0.1801235 - 0.1801234567| \times 10^3 \\ &= 0.0000000433 \times 10^3 \\ &= 0.433 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Schritt 3: Relativer Fehler:

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} = \frac{0.433 \times 10^{-4}}{180.1234567} \approx 2.4 \times 10^{-7}$$

Schritt 4: Prüfung ($B = 10, e = 3, n = 7$):

$$\frac{B}{2} \cdot B^{e-(n+1)} = 5 \times 10^{3-8} = 0.5 \times 10^{-4}$$

$$0.433 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$$

1.3 Definition 2.3: Maschinengenauigkeit

$$\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$$

Maximaler relativer Rundungsfehler.

Merkmal	Single Precision	Double Precision
Gesamtlänge	32 Bit	64 Bit
Mantisse	23 Bit (+1)	52 Bit (+1)
Exponent	8 Bit (Bias 127)	11 Bit (Bias 1023)
Genauigkeit (ca.)	7 Dezimalstellen	16 Dezimalstellen
Speicherbedarf	klein	doppelt so groß

Hidden Bit: Das “+1” bei der Mantisse bezeichnet das sogenannte Hidden Bit da durch IEEE-754 Normierung die erste Stelle der Mantisse immer 1 ist und somit nicht gespeichert werden muss.

1.3.1 Vorgehen: Maschinengenauigkeit

Schritt 1: Mantissenlänge n bestimmen

Schritt 2: Basis B identifizieren

Schritt 3: Formel anwenden: $\varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-n}$

Schritt 4: Bei IEEE: hidden bit beachten!

1.3.2 Beispiel 2.3a: IEEE Double Precision

Gegeben: IEEE-754 Double Precision

Schritt 1: Mantissenlänge bestimmen:

- 52 Bit gespeichert
- 1. hidden bit
- $\rightarrow n = 53$

Schritt 2: Basis: $B = 2$ (binär)

Schritt 3: Formel anwenden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{mach}} &= \frac{1}{2} \cdot 2^{1-53} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-52} \\ &= 2^{-53}\end{aligned}$$

Schritt 4: Dezimal umrechnen:

$$\varepsilon_{\text{mach}} \approx 1.110223 \times 10^{-16}$$

1.4 Definition 2.4: Konditionszahl

Die Konditionszahl gibt an, wie stark sich der relative Fehler des Ergebnisses ändert, wenn sich der relative Fehler der Eingabe ändert.

Wenn nur die Konditionszahl verlangt wird ist es immer die relative Konditionszahl

Absolute: $\kappa = |f'(x)|$

Relative: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

Absoluter Fehler bei Funktionsauswertungen:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler bei Funktionsauswertungen:

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx K(x) \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

$$K(x) \approx \frac{\text{relativer Fehler von } f(x)}{\text{relativer Fehler von } x}$$

Achtung: auch wenn relative Fehler mit mehreren Parametern angegeben werden muss man nichts rchenen! zB:

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

ist schon der relative Fehler von x !

1.4.1 Vorgehen: Konditionszahl berechnen

Schritt 1: Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen

Schritt 2: Konditionszahl berechnen:

- Absolut: $\kappa = |f'(x)|$
- Relativ: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|}$

Schritt 3: Interpretation:

- $\kappa_{\text{rel}} \approx 1$: gut konditioniert
- $\kappa_{\text{rel}} \gg 1$: schlecht konditioniert

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 4$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)|}{|\sqrt{4}|} \\ &= \frac{|4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)|}{2} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 0.5 \approx 1 \rightarrow$ gut konditioniert

-> **Konditionszahl:** 1/n

$$f(x) = x^n \text{ bei } x = 0.1, n = 10$$

Schritt 1: Ableitung:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Schritt 2: Konditionszahl:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{rel}} &= \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} \\ &= \frac{|0.1 \cdot (10 \cdot 0.1^{10-1})|}{|0.1^{10}|} \\ &= \frac{|1 \cdot 0.1^9|}{0.1^{10}} \\ &= 10\end{aligned}$$

Schritt 3: Interpretation: $\kappa_{\text{rel}} = 10 \gg 1 \rightarrow$ schlecht konditioniert

-> **Konditionszahl:** n

1.5 Auslöschung

Auslöschung: Verlust signifikanter Stellen durch Subtraktion fast gleicher Zahlen. Tritt in Funktionen an Stellen auf an denen sie schlecht konditioniert sind.

2 Nullstellenprobleme

2.1 Definition: Fixpunkt

\bar{x} heißt **Fixpunkt** von F , falls:

$$F(\bar{x}) = \bar{x}$$

2.1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ (d.h. F bildet $[a, b]$ auf sich selbst ab) und existiere eine Konstante α mit $0 < \alpha < 1$ und:

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b]$$

(d.h. F ist **Lipschitz-stetig** und **kontraktiv**, α nennt man auch **Lipschitz-Konstante**).

Dann gilt:

Kontraktionsbedingung: $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$ besagt, dass F eine **Kontraktion** ist.

Lipschitz-Konstante: $\alpha < 1$ garantiert, dass Abstände verkleinert werden.

Ableitung: Für differenzierbar F gilt: $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ für alle $x \in [a, b]$.

Existenz und Eindeutigkeit: Genau ein Fixpunkt existiert.

Globale Konvergenz: Jeder Startwert führt zur Konvergenz.

2.1.2 Abschätzungen der Fixpunktiteration

A-priori Abschätzung (vor Iteration bekannt):

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_0 - x_1|$$

$$n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \alpha)) / |x_1 - x_0|}{\ln(\alpha)}$$

A-posteriori Abschätzung (während Iteration berechenbar):

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1 - \alpha} |x_n - x_{n-1}|$$

Schritt 1: Banachscher Fixpunktsatz: Bedingungen prüfen

- Abbildung $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ verifizieren

Schritt 2: Lipschitz-Konstante finden

- Lipschitz-Konstante $\alpha < 1$ finden: $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$

Schritt 2.1: Ableitung $F'(x)$ berechnen

Schritt 2.2: Maximum von $|F'(x)|$ im Intervall bestimmen

Schritt 3: Konklusion

- Eindeutiger Fixpunkt \bar{x} existiert (erfüllt $F(\bar{x}) = \bar{x}$)
- Jeder Startwert in $[a, b]$ konvergiert gegen \bar{x}

Fixpunkt genau:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{wobei} \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

2.1.3 Beispiel: Banachscher Fixpunktsatz für $x^3 + 0.3 = 0$

Gesucht: Intervall $[a, b]$ und Konstante $\alpha < 1$, so dass der Banachsche Fixpunktsatz auf die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$ anwendbar ist.

Lösungsansatz: Die Fixpunktiteration konvergiert in der Nähe von $\bar{x} = 0.3389$. Wir suchen ein geeignetes Intervall und versuchen es mit $[a, b] = [0, 0.5]$.

Schritt 1: Überprüfen, ob $F : [0, 0.5] \rightarrow [0, 0.5]$:

- Für alle $x \in [0, 0.5]$: $F(x) = x^3 + 0.3 \geq 0.3$
- $F(0) = 0.3 \in [0, 0.5]$
- $F(0.5) = 0.125 + 0.3 = 0.425 \in [0, 0.5]$

Schritt 2: Finden einer Konstanten $\alpha < 1$:

Aus dem Satz wissen wir: $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$

Schritt 2.1: Ableitung berechnen:

$$F'(x) = 3x^2$$

Schritt 2.2: Die Ableitung ist monoton steigend, daher Maximum bei $x = 0.5$:

$$|F'(0.5)| = 3 \cdot 0.5^2 = 0.75 < 1$$

Schritt 3: Konklusion:

Mit $\alpha = 0.75 < 1$ sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = x_n^3 + 0.3$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \approx 0.3389$ für jeden Startwert in $[0, 0.5]$.

2.1.4 Vorgehen: Fixpunktform

Schritt 1: Nullstellenproblem $f(x) = 0$ gegeben

Schritt 2: Nach x auflösen: $F(x) = x$

Schritt 3: Mehrere Formen möglich!

Schritt 4: Konvergenz prüfen: $|F'(\bar{x})| < 1$

2.1.5 Beispiel 3.3: Fixpunktform

Gegeben: $p(x) = x^3 - x + 0.3 = 0$

Schritt 1: Nullstellenproblem identifiziert

Schritt 2: Umformen nach x :

Variante A: $x^3 - x + 0.3 = 0$

$$\rightarrow x = x^3 + 0.3$$

$$\rightarrow F(x) = x^3 + 0.3$$

Variante B: $x^3 = x - 0.3$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

$$\rightarrow F(x) = \sqrt[3]{x - 0.3}$$

Schritt 3: Beide Formen sind gültig

Schritt 4: Konvergenz prüfen (Variante A):

$$F'(x) = 3x^2$$

Bei $\bar{x} \approx 0.339$: $|F'(0.339)| = 3 \cdot 0.339^2 \approx 0.34 < 1$

2.1.6 Vorgehen: Fixpunktiteration

- Schritt 1:** Fixpunktform $x = F(x)$ aufstellen (wie oben)
- Schritt 2:** Startwert x_0 wählen
- Schritt 3:** Iterieren: $x_{n+1} = F(x_n)$
- Schritt 4:** Konvergenz prüfen: $|F'(\bar{x})| < 1$
- Schritt 5:** Abbruch bei $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.1.7 Beispiel 3.4: Fixpunktiteration

Gegeben: $F(x) = x^3 + 0.3$, Startwert $x_0 = 0$

Schritt 1: Fixpunktform bereits gegeben

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 0$

Schritt 3: Iteration durchführen:

$$x_1 = F(x_0) = 0^3 + 0.3 = 0.3$$

$$x_2 = F(x_1) = 0.3^3 + 0.3 = 0.027 + 0.3 = 0.327$$

$$x_3 = F(x_2) = 0.327^3 + 0.3 \approx 0.335$$

$$x_4 = F(x_3) = 0.335^3 + 0.3 \approx 0.338$$

$$x_5 = F(x_4) \approx 0.339$$

Schritt 4: Konvergenz (siehe Beispiel 3.3):

Schritt 5: $|x_5 - x_4| \approx 0.001 \rightarrow$ Abbruch bei $\varepsilon = 0.01$

Fixpunkt: $\bar{x} \approx 0.339$

2.2 Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}$$

mit konstanter Ableitung $c = f'(x_0)$

2.2.1 Vorgehen: Newton-Verfahren

- Schritt 1:** Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ bestimmen
- Schritt 2:** Startwert x_0 wählen (nahe Nullstelle)
- Schritt 3:** Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Schritt 4:** Konvergenz prüfen: $\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} < 1$
- Schritt 5:** Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
- Schritt 6:** Quadratische Konvergenz bei einfachen Nullstellen

2.2.2 Beispiel 3.5: Newton für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwert $x_0 = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktionen bestimmen:

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Schritt 2: Startwert: $x_0 = 1$

Schritt 3: Iteration:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1 - 2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} \approx 1.4167$$

$$x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} \approx 1.4142$$

Schritt 4: Konvergenzprüfung bei $x \approx 1.414$:

$$\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} = \frac{|(x^2 - 2) \cdot 2|}{|2x|^2} \approx \frac{0}{8} < 1$$

Schritt 5: Abbruchkriterium prüfen bei $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$|f(x_3)| = |1.4142^2 - 2| \approx 0.00005 < 10^{-4}$$

Schritt 6: $\sqrt{2} \approx 1.4142$ (quadratische Konvergenz!)

2.3 Sekantenverfahren

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

2.3.1 Vorgehen: Sekantenverfahren

- Schritt 1:** Funktion $f(x)$ bestimmen (keine Ableitung nötig)
- Schritt 2:** Zwei Startwerte x_0 und x_1 wählen (nahe Nullstelle)
- Schritt 3:** Iterieren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
- Schritt 4:** Abbruch bei $|f(x_n)| < \varepsilon$ oder $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

2.3.2 Beispiel 3.6: Sekantenverfahren für $x^2 = 2$

Gegeben: $f(x) = x^2 - 2$, Startwerte $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Schritt 1: Funktion bestimmt: $f(x) = x^2 - 2$

Schritt 2: Startwerte: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$

Schritt 3: Iteration:

$$f(x_0) = 1^2 - 2 = -1$$

$$f(x_1) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= 1.5 - \frac{0.25 \cdot (1.5 - 1)}{0.25 - (-1)} \\ &= 1.5 - 0.1 = 1.4 \end{aligned}$$

$$f(x_2) = 1.4^2 - 2 = -0.04$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 1.4 - \frac{-0.04 \cdot (1.4 - 1.5)}{-0.04 - 0.25} \\ &= 1.4 - \frac{0.004}{-0.29} \approx 1.414 \end{aligned}$$

Schritt 4: $|f(x_3)| \approx |1.414^2 - 2| \approx 0 \rightarrow$ Konvergiert schnell

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Definition 4.1: Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix: Alle Einträge oberhalb der Diagonale sind 0.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix: Alle Einträge unterhalb der Diagonale sind 0.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Normiert: Diagonale = 1

3.2 Gauss Algorithmus

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Schritt 1 - Vorwärtselimination:

- Zeile 2: – Vielfaches von Zeile 1
- Zeile 3: – Vielfaches von Zeile 1
- Dann weiter mit Zeile 3: – Vielfaches von Zeile 2

Schritt 2: Ergebnis ist obere Dreiecksmatrix

Schritt 3 - Rückwärtseinsetzen:

- x_n aus letzter Zeile
- x_{n-1} aus vorletzter (mit x_n)
- Weiter bis x_1

3.2.1 Beispiel 3x3 Gauss Elimination

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Erweiterte Matrix: } (A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

Schritt 1a: Eliminiere a_{21}

$$i = 1, j = 2 \Rightarrow z_2 = z_2 - \frac{1}{-1}z_1 = (A_1 | b_1)$$

$$(A_1 | b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

Schritt 1b: Eliminiere a_{31}

$$i = 1, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{5}{-1}z_1 = (A_2 | b_2)$$

$$(A_2 | b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

Schritt 1c: Eliminiere a_{32}

$$i = 2, j = 3 \Rightarrow z_3 = z_3 - \frac{6}{-2}z_2 = (A_3 | b_3)$$

$$(A_3 | b_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

Schritt 2: Obere Dreiecksform erreicht:

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.3 LR Zerlegung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$A = LR$$

$$Ly = b \Leftrightarrow y = (L|b)$$

$$Rx = y \Leftrightarrow (R|y) = x$$

mit Permutationsmatrix P :

$$PA = LR$$

$$Ly = Pb$$

3.3.1 Vorgehen: LR-Zerlegung

Schritt 1: Gauss-Elimination durchführen

Schritt 2: Faktoren in L eintragen

Schritt 3: Resultat ist R

Schritt 4 - Lösen:

- $Ly = b$ (Vorwärts)
- $Rx = y$ (Rückwärts)

3.3.2 Beispiel 4.3: LR-Zerlegung

Gegeben: System aus Beispiel 4.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Gauss-Elimination durchgeführt (siehe 4.2)

Schritt 2: Multiplikatoren sammeln:

- Zeile 2: Faktor war $\frac{1}{-1} = -1$
- Zeile 3: Faktor war $\frac{5}{-1} = -5$, dann $\frac{6}{-2} = -3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Resultat nach Gauss (obere Dreiecksmatrix):

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Lösen (für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$):

Vorwärts ($Ly = b$):

Erweiterte Matrix: $(L \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$

Schritt 1: Eliminiere L_{21} :

$$z_2 = z_2 - (-1) \cdot z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Schritt 2: Eliminiere L_{31} :

$$z_3 = z_3 - (-5) \cdot z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Schritt 3: Eliminiere L_{32} :

$$z_3 = z_3 - (-3) \cdot z_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

Vereinfacht

$$y_1 = 0$$

$$-1 \cdot y_1 + y_2 = 5 \rightarrow y_2 = 5$$

$$-5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 = 3 \rightarrow y_3 = 3 - 0 + 15 = 18$$

Resultat:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rückwärts ($Rx = y$): wie in 4.2

$$x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - (-1) \cdot 3}{-2} = -4$$

$$x_1 = \frac{0 - 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{-1} = -1$$

Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -4, 3)$

3.4 QR Zerlegung

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **orthogonal**, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind:

$$Q^T Q = I_n \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$$

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Darstellung:

$$A = QR$$

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$v_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i^T u_j) u_j \quad (\text{orthogonal})$$

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad (\text{normalisiert})$$

Finden von R :

$$R = Q^T A$$

3.4.1 Vorgehen: QR (Gram-Schmidt)

Schritt 1: Spalten a_1, a_2, \dots von A

$$\text{Schritt 2: } u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

Schritt 3: Für $i = 2, \dots, n$:

- v_i berechnen (orthogonalisieren)
- $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ berechnen

$$\text{Schritt 4: } Q = [u_1 \mid \dots \mid u_n]$$

$$\text{Schritt 5: } R = Q^T A$$

3.4.2 Beispiel 4.3: QR für 2×2

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Spalten:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Ersten orthonormalen Vektor:

$$\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Zweiten Vektor orthogonalisieren:

$$\mathbf{a}_2^T \mathbf{u}_1 = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.8 = 2.2$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2.2 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.76 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{0.32^2 + 0.24^2} = 0.4$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{0.4} \begin{pmatrix} -0.32 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

Schritt 5:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Householder-Transformation

Die Householder-Reflexion ist ein numerisch stabiles Verfahren zur Berechnung der QR-Zerlegung. Sie nutzt Householder-Matrizen, um Spalten einer Matrix schrittweise zu triangularisieren.

Householder:

Für einen Vektor \mathbf{a} und Einheitsvektor \mathbf{e}_1 :

$$\mathbf{v}_i := \mathbf{a}_i + \text{sign}(a_{i1}) \|\mathbf{a}_i\| \cdot \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{u}_i := \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

$$\mathbf{H}_i := \mathbf{I}_n - 2\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$$

Schritt 1: Für jede Spalte i von \mathbf{A} :

- Berechne \mathbf{v}_i und \mathbf{u}_i
- Konstruiere Householder-Matrix \mathbf{H}_i
- Wende \mathbf{H}_i auf \mathbf{A} an, um Nullen unterhalb der Diagonale zu erzeugen

Schritt 2: Das Produkt aller Householder-Matrizen ergibt \mathbf{Q}^T

Schritt 3: \mathbf{R} ist die transformierte Matrix nach Anwendung aller Householder-Matrizen

3.4.4 Beispiel 4.10: QR-Zerlegung mit Householder

Gegeben: Das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Householder für erste Spalte

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Anwendung auf Matrix:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T = \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifikation:

$$\mathbf{QR} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Lösen des Systems:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{39}{5} - \frac{72}{5} \\ -\frac{52}{5} + \frac{54}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{111}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Rückwärtssubstitution aus $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$:

$$2x_2 = \frac{2}{5} \rightarrow x_2 = \frac{1}{5}$$

$$-5x_1 - 2x_2 = -\frac{111}{5} \rightarrow -5x_1 - \frac{2}{5} = -\frac{111}{5} \rightarrow x_1 = \frac{109}{25}$$

3.4.5 Vorgehen: Jacobi-Verfahren

Schritt 1: Zerlegung: $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R}$

Schritt 2: Iterationsformel aufstellen

Schritt 3: Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 4: Konvergenz prüfen.

Iterationsformel:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Konvergenz Prüfen Formel

$$B = -D^{-1}(L + R)$$

$$c = D^{-1}b$$

Somit ist

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = B\mathbf{x}^{(n)} + c =: \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

Falls $\|B\| < 1 \rightarrow$ konvergiert für jeden Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$. Falls $\|B\| \geq 1 \rightarrow$ keine Konvergenz garantiert.

Diagonaldominanz:

Zeilenweise

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Spaltenweise :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Gegeben:

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Schritt 1 Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2 Iterationsformel:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1)} &= -D^{-1}((L + R)\mathbf{x}^{(n)} - b) \\ &= -\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0.4 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schritt 3 Startwert:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5125 \\ 2.03 \\ 2.295 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.80125 \\ 2.059 \\ 2.282 \end{pmatrix}$$

3.5 Gauß-Seidel

Das Gauß-Seidel Verfahren ist eine Modifikation des Jacobi-Verfahrens. Vorteile sind schnellere Konvergenz und weniger Speicherbedarf (da kein Zwischenspeicher für den alten Vektor benötigt wird).

Schritt 1: Zerlegung: $A = L + D + R$ (wie Jacobi)

Schritt 2: Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ wählen

Schritt 3: Für jede Komponente i **sequentiell** von oben nach unten:

- Nutze **neue** $x_j^{(k+1)}$ für $j < i$ (bereits berechnet!)
- Nutze **alte** $x_j^{(k)}$ für $j > i$ (noch nicht berechnet)

Schritt 4: Alle Komponenten in dieser Iteration berechnen

Schritt 5: Konvergenz: Matrix diagonaldominant?

Schritt 6: Abbruch: $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$

$$(D + L)\mathbf{x}^{(k+1)} = -R\mathbf{x}^{(k)} + b$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}R\mathbf{x}^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

Allgemein für Komponente i :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

3.5.1 Beispiel 4.5: Gauß-Seidel

Schritt 1: Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Startvektor:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3+4: Iteration 1 ($k = 0$) - für jede Komponente sequentiell:

Komponente 1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(5 - 0 - 0) = 1.25$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(1)} = 1.25$):

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 1.25 - 0) = \frac{1}{5}(13.5) = 2.7$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(1)} = 1.25, x_2^{(1)} = 2.7$):

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 1.25 - (-2) \cdot 2.7) = \frac{1}{5}(16.15) = 3.23$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.7 \\ 3.23 \end{pmatrix}$$

Iteration 2 ($k = 1$):

Komponente 1:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(5 - (-1) \cdot 2.7 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{4}(3.47) = 0.87$$

Komponente 2 (nutze neues $x_1^{(2)} = 0.87$):

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(11 - (-2) \cdot 0.87 - 1 \cdot 3.23) = \frac{1}{5}(9.51) = 1.90$$

Komponente 3 (nutze neue $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$):

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 1 \cdot 0.87 - (-2) \cdot 1.90) = \frac{1}{5}(13.93) = 2.79$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 1.90 \\ 2.79 \end{pmatrix}$$

Schritt 5: Diagonaldominanz: $|4| > |-1| + |1| = 2 \checkmark$, $|5| > |-2| + |1| = 3 \checkmark$, $|5| > |1| + |-2| = 3 \checkmark$

Schritt 6: Konvergiert schneller als Jacobi zum gleichen Vektor!

3.6 Fehlerabschätzung

Von Jacobi: $B = D^{-1}(L + R)$

Von Gauss-Seidel: $B = -(D + L)^{-1}R$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{c} =: \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)})$$

A-priori Abschätzung:

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|^n}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$n \geq \frac{\log(\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\|) + \log(1 - \|\mathbf{B}\|) - \log(\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|)}{\log(\|\mathbf{B}\|)}$$

A-posteriori Abschätzung:

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|$$

3.7 Fehler für gestörte LGS

Die Unedndlichnorm einer Matrix ist das Maximum der absoluten Zeilensummen einer Matrix.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Die Unedndlichnorm eines Vektors ist das Maximum der absoluten Einträge eines Vektors.

$$\|\mathbf{b}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A}$$

Konditionszahl

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$$

Nur \mathbf{b} gestört: absoluter Fehler:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty$$

relativer Fehler:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

$$\text{oder: } \kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}.$$

- Nur \mathbf{A} gestört:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}}{1 - \kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}}.$$

- \mathbf{A} und \mathbf{b} gestört:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A})}{1 - \kappa_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}} \left(\frac{\|\Delta \mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} + \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \right).$$

- Direkter Weg:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \quad \text{Fehler} = \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}.$$

Schritt 1: Berechne $\kappa_\infty(\mathbf{A})$

Schritt 2: Wähle die passende Formel (nur \mathbf{b} , nur \mathbf{A} , oder beides gestört)

Schritt 3: Setze die Werte ein und berechne den Fehler

Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit gestörtem b :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Dabei ist ε eine kleine Störung (z.B. Rundungsfehler).

Schritt 1: Berechne $\kappa_\infty(\mathbf{A})$

Zeilensummen von A :

- Zeile 1: $|2| + |0| + |3| = 5$
- Zeile 2: $|1| + |-2| + |1| = 4$
- Zeile 3: $|0| + |3| + |1| = 4$

$$\|A\|_\infty = \max(5, 4, 4) = 5$$

Zeilensummen von A^{-1} :

- Zeile 1: $|5| + |-9| + |-6| = 5 + 9 + 6 = 20$
- Zeile 2: $|1| + |-2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$
- Zeile 3: $|-3| + |6| + |4| = 3 + 6 + 4 = 13$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(20, 4, 13) = 20$$

$$\kappa_{\infty(A)} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 20 = 100$$

Schritt 2: Wähle die passende Formel

Da nur \mathbf{b} gestört ist (mit Störung ε), verwenden wir:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \kappa_{\infty(A)} \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

Schritt 3: Setze die Werte ein und berechne den Fehler

- Originals $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$ (eigentlich sollte dies $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sein, Störung ist ε)
- Gestört $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{b}\|_\infty = 4$$

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \approx \kappa_{\infty(A)} \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

Interpretation:

- Wenn $\kappa_{\infty(A)}$ klein ist: kleine Störungen führen zu kleinen Fehlern (gut konditioniert)
- Wenn $\kappa_{\infty(A)}$ groß ist: kleine Störungen können zu großen Fehlern führen (schlecht konditioniert)

3.7.1 Definition 4.6: Eigenwert

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ = Eigenwert, $v \neq 0$ = Eigenvektor

3.7.2 Vorgehen: Eigenwerte

Schritt 1: bilde $A - \lambda I$

Schritt 2: finde Charakteristisches Polynom (char.).

Schritt 3: löse $\text{char} = 0$ (finde λ)

Schritt 4: Für jeden λ : $(A - \lambda I)v = 0$

3.7.3 Beispiel 4.7: Eigenwerte 2×2

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Bilde $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Charakteristisches Polynom (Determinante):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 \\ p(\lambda) &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Schritt 3: Löse $p(\lambda) = 0$ (pq-Formel):

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Schritt 4: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5$:

$$(A - 5I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 5 & 1 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Zeile 2 ist -2 mal Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zur Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der (einzigsten unabhängigen) Gleichung: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

$$v_1 = v_2 = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 5)$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 2 & 1 \\ 2 & 3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Gleichung: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2)$$

3.7.4 Vorgehen: Potenzmethode

Schritt 1: Startvektor $v^{(0)}$ wählen (zufällig)

Schritt 2: Iteration:

$$w^{(k)} = A v^{(k-1)}$$

Schritt 3: Normieren:

$$v^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|}$$

Schritt 4: Eigenwert approximieren:

$$\lambda \approx (v^{(k)})^T A v^{(k)}$$

Konvergiert zum betragmäßig größten EW.

3.7.5 Beispiel 4.8: Potenzmethode

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, Start: $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Iteration 1:

$$Schrift 2: w^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Schrift 3: \|w^{(1)}\| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.47$$

$$v^{(1)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{4.47} \approx \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Iteration 2:

$$Schrift 2: w^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.01 \\ 3.13 \end{pmatrix}$$

$$Schrift 3: \|w^{(2)}\| \approx 5.08$$

$$v^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.62 \end{pmatrix}$$

$$Schrift 3: v^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Eigenwert (nach Konvergenz):

$$\begin{aligned} \lambda &= v^T A v \\ &= \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Größter EW $\lambda_1 = 5$ (vgl. 4.7)

3.8 komplexe Zahlen

3.8.1 Darstellungen

Normalform (kartesisch):

$$z = x + iy$$

Trigonometrische Form (polar):

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Exponentialform:

$$z = re^{i\varphi}$$

Dabei gilt: $r \geq 0$ und φ ist der Winkel.

3.8.2 Umrechnen: Normalform -> Polar/Expo

Gegeben $z = x + iy$:

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkel:

$$\varphi = \arg(z)$$

Praktisch rechnet man zuerst

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und korrigiert dann den Quadranten:

- falls $x > 0$:
 $\varphi = \varphi_0$
- falls $x < 0$ und $y \geq 0$:
 $\varphi = \varphi_0 + \pi$
- falls $x < 0$ und $y < 0$:
 $\varphi = \varphi_0 - \pi$
- falls $x = 0$ und $y > 0$:
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- falls $x = 0$ und $y < 0$:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Hinweis: Viele Taschenrechner/Programmiersprachen haben `atan2(y, x)`, das liefert direkt den richtigen Winkel:

$$\varphi = \text{atan2}(y, x)$$

Dann:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

3.8.3 Umrechnen: Polar/Expo -> Normalform

Gegeben $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ oder $z = re^{i\varphi}$:

Realteil und Imaginärteil:

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Also:

$$z = x + iy = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)$$

3.8.4 algebraische Operationen

Konjugation: $z^* = x - iy$

Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.8.5 Grundrechenarten komplexer Zahlen

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in der Normalform:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Differenz

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Produkt

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

Ausmultiplizieren und $i^2 = -1$ benutzen:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Division

Für $z_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Mit dem konjugiert Komplexen $z_2^* = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

Nenner:

$$(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

Zähler:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

Damit:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

In Exponentialform:

Für $z_2 \neq 0$ (also $r_2 > 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Wurzel

Die n -ten Wurzeln von $z = r e^{i\varphi}$ sind:

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Gegeben: $z = 4$ (reelle Zahl), gesucht: kubische Wurzeln ($n = 3$)

Schritt 1: In Exponentialform umwandeln:

$$r = |4| = 4, \quad \varphi = 0$$

$$z = 4e^{i \cdot 0}$$

Schritt 2: Wurzeln berechnen mit Formel:

$$z_k = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{0+2k\pi}{3}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2$$

Schritt 3: Die drei Wurzeln:

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot 0} = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$$

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}} (-0.5 + i0.866)$$

$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}} (-0.5 - i0.866)$$

Geometrisch: Die drei Wurzeln liegen gleichmäßig auf einem Kreis mit Radius $4^{\frac{1}{3}} \approx 1.587$, verteilt um 120° auseinander.

4 Ergänzung & Formeln

4.1 Ableitungen & Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) \quad \text{Linearität}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

Ableitungen elementarer Funktionen:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq 0$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a), \quad a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_{a(x)})' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

4.2 Logarithmus Gesetze

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad a, b > 0$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a), \quad a > 0, n \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad x > 0$$

$$\log_{b(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{Basiswechsel}$$

4.3 Polynome

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

$$P(x) = \int p(x) dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C$$

4.4 Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

4.5 Geometrie

$$V_{\text{kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad A_{\text{kreis}} = \pi r^2$$

$$V_{\text{zyl}} = \pi r^2 l$$

$$V_{\text{kugelsegment}} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

4.6 Lineare Algebra Basics

$$\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \quad \text{für } 2 \times 2$$