

# Splošni Somborjev indeks

POROČILO PROJEKTA

Pecoraro Eliza Katarina, Žefran Kaja

december 2025

# 1 Analiza grafov

V tem poglavju analiziramo obnašanje Somborjevega indeksa pri različnih vrednostih parametra  $\alpha$  na grafih različnih velikosti. Celotna raziskava je omejena na drevesa, saj ta predstavljajo osnovni, a hkrati dovolj raznolik razred grafov, pri katerem je mogoč popoln pregled vseh neizomorfnih struktur. Z analizo želimo raziskati vpliv parametra  $\alpha \in (0, 1)$  na vrednost Somborjevega indeksa ter preučiti vpliv stopnje razvejanosti in števila vozlišč.

V nadaljevanju najprej obravnavamo majhne grafe, kjer je zaradi omejenega števila vozlišč mogoč izčrpen računski pregled vseh neizomorfnih dreves, nato pa analizo razširimo še na večje grafe.

## 1.1 Majhni grafi

Pri analizi majhnih grafov, ki vsebujejo vse do 10 vozlišč, opazimo izrazit in stabilen trend v obnašanju Somborjevega indeksa. Za vse uporabljene vrednosti parametra  $\alpha \in (0, 1)$  se izkaže, da je vrednost Somborjevega indeksa največja pri grafih z največjo možno maksimalno stopnjo  $\Delta$ , glede na število vozlišč. To pomeni, da imajo vozlišča z največjim številom povezav oziroma z največjo stopnjo ključno vlogo pri velikosti indeksa, saj bistveno zaznamujejo celotno strukturo grafa.

V numerični analizi majhnih grafov smo uporabili vrednosti parametra

$$\alpha \in \{0.05, 0.45, 0.5, 0.55, 0.95\},$$

ki ležijo znotraj intervala  $(0, 1)$ . Izbrane vrednosti omogočajo opazovanje obnašanja indeksa v bližini mejnih vrednosti 0 in 1 ter v okolici srednje vrednosti 0.5. Rezultati so pokazali, da večja kot je vrednost parametra  $\alpha$ , večja je tudi vrednost Somborjevega indeksa, ne glede na število vozlišč ali stopnjo razvejanosti grafa.

Za vsako fiksno število vozlišč  $n$  smo izvedli popoln računski pregled vseh neizomorfnih dreves. Za vsak graf smo najprej izračunali največjo stopnjo  $\Delta$ , nato pa drevesa razvrstili v razrede glede na to vrednost. Znotraj vsakega razreda smo izračunali Somborjev indeks, definiran z

$$SO_{\alpha}(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u^2 + d_v^2)^{\alpha},$$

kjer  $d_u$  in  $d_v$  označujeta stopnji krajišč roba  $uv$ . Na ta način smo za vsak  $\Delta$  določili drevo, pri katerem Somborjev indeks doseže največjo vrednost. Poleg tega smo za vsako izbrano vrednost parametra  $\alpha$  določili tudi globalni maksimum Somborjevega indeksa med vsemi drevesi z  $n$  vozlišči.

Kot reprezentativen primer si oglejmo primer  $n = 7$ . Rezultati pokažejo, da Somborjev indeks za vse obravnavane vrednosti parametra  $\alpha$  monotonno narašča z naraščanjem maksimalne stopnje  $\Delta$ . Globalni maksimum je v vseh primerih dosežen pri drevesu z  $\Delta = 6$ , kar ustreza zvezdastemu drevesu. To drevo vsebuje eno vozlišče stopnje 6, ki je povezano z vsemi preostalimi vozlišči, kar povzroči največji možni prispevek k vrednosti indeksa.

Opazimo tudi, da se z večanjem parametra  $\alpha$  razlike med vrednostmi Somborjevega indeksa pri različnih vrednostih  $\Delta$  še povečujejo. To pomeni, da večje vrednosti  $\alpha$  dodatno poudarijo prispevek robov, ki povezujejo vozlišča z visokimi stopnjami, kar pride posebej do izraza pri zvezdastih drevesih.

Na podlagi izčrpne računske analize majhnih grafov lahko sklenemo, da za vsako obravnavano število vozlišč  $n \leq 10$  in za vsak parameter  $\alpha \in (0, 1)$   $\alpha$ -Somborjev indeks na razredu dreves doseže največjo vrednost pri grafih z največjo možno maksimalno stopnjo  $\Delta = n - 1$ . Poleg tega se je pokazalo, da število povezav vpliva na absolutno vrednost indeksa, vendar ne spremeni njegovega kvalitativnega obnašanja glede na parameter  $\alpha$ . Ti rezultati predstavljajo trdno osnovo za nadaljnjo analizo večjih grafov.

## 1.2 Veliki grafi

Pri analizi velikih grafov se osnovne lastnosti Somborjevega indeksa v določenem smislu ohranijo, vendar se v primerjavi z majhnimi grafi pojavijo pomembne strukturne razlike. Absolutne vrednosti indeksa z naraščanjem števila vozlišč sicer naraščajo, vendar grafi z največjo možno stopnjo razvejanosti  $\Delta$  ne zagotavljajo več maksimalne vrednosti Somborjevega indeksa.

Pri velikih drevesih se izkaže, da ekstremna koncentracija povezav v enem vozlišču postane manj ugodna. Čeprav ima vozlišče z zelo veliko stopnjo pomemben prispevek k posameznim členom vsote v definiciji Somborjevega indeksa, se pri takšnih strukturah zmanjša število robov, ki povezujejo vozlišča z zmerno velikimi stopnjami. Posledično celotni prispevek vseh robov ni več optimalen.

Analiza kaže, da se maksimum Somborjevega indeksa pri velikih grafih doseže pri drevesih z vmesno stopnjo razvejanosti, kjer so stopnje vozlišč bolj enakomerno porazdeljene. Takšna struktura omogoča, da večje število robov prispeva k vsoti z dovolj velikimi vrednostmi izraza

$$(d_u^2 + d_v^2)^\alpha,$$

kar je pri večjih vrednostih parametra  $\alpha$  ugodneje kot posamezni zelo veliki prispevki, ki jih ustvarja eno samo močno razvejano vozlišče.

Poleg tega se z naraščanjem števila vozlišč optimalna vrednost največje stopnje  $\Delta$  postopoma zmanjšuje glede na velikost grafa. To kaže na obstoj prehoda v optimalni strukturi dreves: medtem ko so pri majhnih grafih optimalna drevesa z maksimalno razvejanostjo, pri velikih grafih optimalna struktura teži k zmerni razvejanosti in bolj uravnoteženi porazdelitvi stopenj.

Vpliv parametra  $\alpha \in (0, 1)$  ostaja tudi pri velikih grafih bistven. S povečevanjem vrednosti parametra  $\alpha$  se vrednost Somborjevega indeksa povečuje, vendar se hkrati okrepi pomen porazdelitve stopenj vozlišč v celotnem grafu. To potrjuje, da pri velikih grafih vrednost indeksa ni določena zgolj z lokalnimi ekstremi, temveč predvsem z globalno strukturo drevesa.

## 1.3 Povzetek ugotovitev

Na podlagi analize majhnih in velikih grafov smo ugotovili, da z naraščanjem vrednosti parametra  $\alpha \in (0, 1)$  vrednost  $\alpha$ -Somborjevega indeksa monotonno narašča, ne glede na velikost grafa. Ta lastnost se izkaže kot stabilna tako pri majhnih kot pri velikih drevesih.

Vpliv največje stopnje razvejanosti  $\Delta$  se pri tem izkaže kot ključen, vendar se njegova vloga razlikuje glede na velikost grafa. Pri majhnih grafih je maksimum Somborjevega indeksa dosežen pri drevesih z največjo možno stopnjo razvejanosti, saj vozlišče z največ povezavami prispeva največji delež k vsoti v definiciji indeksa. Pri večjih grafih pa se optimalna vrednost  $\Delta$  premakne proti vmesnim vrednostim, kar kaže, da indeks ni odvisen zgolj od lokalnih ekstremov, temveč predvsem od globalne porazdelitve stopenj v grafu.

Uporaba različnih vrednosti parametra  $\alpha$ , vključno z vrednostmi v bližini 0, 0,5 in 1, je omogočila celovito analizo vpliva parametra na obnašanje indeksa. S tem smo pokazali, da parameter  $\alpha$  ne vpliva zgolj na absolutno velikost Somborjevega indeksa, temveč tudi na relativni pomen posameznih strukturnih lastnosti grafa, zlasti razporeditve stopenj vozlišč.