Quiz 2 (10월 14일 금 7, 8교시)

[2011 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 함수 $f(x,y) = x + 2y - x^2y^4$ 의 임계점이 안장점이 됨을 보이시오.

2. (7점) 라그랑즈 승수법으로 타원 $\{(x,y) : g(x,y) = x^2 + 3y^2 = 1\}$ 위에서 함수 $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ 의 극점 (x_0, y_0) 를 찾을 때, $f(x_0, y_0)$ 는 라그랑즈 승수 λ가 됨을 보이시오.
   (즉, λ 는 $\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = \lambda\, \mathrm{grad} g(x_0, y_0)$ 을 만족시키는 실수이다.)

3. (7점) 구면좌표계 $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \cos\varphi$의 야코비 행렬 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = (a_{ij})_{3\times 3}$에 대해 $\mathbf{b}_j := (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})\,(j = 1,2,3)$ 라고 하자. $\sqrt{\det(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j)_{3\times 3}} = |\det(a_{ij})_{3\times 3}|$ 임을 보이시오.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1. $\nabla f(x,y) = (1-2xy^4, 2-4x^2y^3) = (0,0)$
   $\Rightarrow xy^4 = \dfrac{1}{2} = x^2y^3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}} = y \Rightarrow (\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}})$: 임계점. (3점)
   $f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^4 & -8xy^3 \\ -8xy^3 & -12x^2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det f''(x,y) = -40x^2y^6 \le 0$ (5점)
   $\Rightarrow (\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}})$: 안장점. (6점)

2. $g(x,y) := x^2 + 3y^2 \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$
   $\Rightarrow (2x_0 + 2y_0, 2x_0 + 6y_0) = \lambda(2x_0, 6y_0)$ (2점)
   $\Rightarrow x_0 + y_0 = \lambda x_0, x_0 + 3y_0 = 3\lambda y_0$
   $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ 3y_0 \end{pmatrix}$ (4점)
   $\Rightarrow f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ 3y_0 \end{pmatrix} = \lambda(x_0^2 + 3y_0^2) = \lambda.$ (7점)

3. (구면좌표계) 교재의 보기에서 이미 본 것 처럼 $\det(a_{ij})_{3\times3} = y_1^2 \sin y_2$ (3점)
   $(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j)_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 \sin^2 y_2 \end{pmatrix}$ (3점)
   $\Rightarrow \sqrt{\det(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j)_{3\times3}} = |\det(a_{ij})_{3\times3}|$ (1점)