Quiz 4 (12월 2일 금 7, 8교시)

[2011 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (4점) 좌표평면에서 $y = x^2$ 과 $y = x$으로 둘러싸인 부분을 D 라고 할 때, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_{\partial D} (xy^2)dx + (y + x)dy$$

2. (6점) 곡면의 넓이를 구하시오.

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ z \geq 0$$

3. (5점) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x, -z^2)$에 대하여 곡면

$$S : y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4$$

를 빠져나가는 양을 구하시오.
(단, 단위법벡터 $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \geq 0$ 을 만족한다.)

4. (5점) 입체각 벡터장

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

가 곡면 $S_1 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$ 을 벗어나는 양을 구하시오.
(단, 단위법벡터 $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 을 만족한다.)

Quiz 4 채점기준 예시

1. (그린정리를 이용)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^2}^{x}(1-2xy)dydx &= \int_0^1 y-xy^2|_{x^2}^{x}dx\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

(선적분을 이용)

$$\begin{aligned}\int_{C_1:y=x}(xy^2)dx+(y+x)dy &= \int_0^1(x^3+2x)dx=\frac{5}{4}\\ \int_{C_2:y=x^2}(xy^2)dx+(y+x)dy &= \int_0^1(x^5+x+x^2)dx=\frac{4}{3}\\ \text{따라서}\int_C(xy^2)dx+(y+x)dy &= \frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

2. 반지름의 길이가 2인 구면의 면적소는 $dS=4\sin\varphi d\varphi d\theta$이고, 원기둥면을 구면 좌표계로 표현하면 $4\sin^2\varphi\leq 4\sin\varphi\cos\theta$ 즉, $0\leq\varphi\leq\arcsin\cos\theta$

$$\begin{aligned}area &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arcsin\cos\theta}4\sin\varphi d\varphi d\theta\\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos\varphi|_0^{\arcsin\cos\theta}d\theta\\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta\\ &= 8(\theta+\cos\theta|_0^{\frac{\pi}{2}})\\ &= 4\pi-8\end{aligned}$$

3. 곡면의 매개화는 $X(x,z)=(x,x^2,z)$ 이면 , 외향 법벡터는

$$N=X_x\times X_z=(2x,-1,0)$$

이 된다.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dxdz\\ &= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z-x)dxdz\\ &= 2\end{aligned}$$

4. (a) (방법 1) 주어진 영역을 S_1이라 하고,
$B_+ = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$, R를 곡면 S_1과 B_+로 둘러싸인 영역이라고 하자.
영역 R에서 벡터장 $\mathbf{A}$는 잘 정의되고, $div\mathbf{A}=0$ 이므로 ,
발산정리를 이용하면
$0=\iiint_R div\mathbf{A}dV=\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}-\iint_{B_+}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$
$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{B_+}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{B_+}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}dS=\iint_{B_+}dS=2\pi$

(b) (방법 2) 매개 곡면 $X(x,y)=(x,y,1-x^2-y^2)$라고 두면,
외향 법벡터는 $N=X_x\times X_y=(2x,2y,1)$이 된다.

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} &= \iint \frac{(x,y,z)}{r^3}\cdot(2x,2y,1)dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{r^2+1}{(r^4-r^2+1)^{3/2}}rdrd\theta\\ &= 2\pi \qquad \text{치환적분을 이용하여}\end{aligned}$$