# 2015년 물리학1 2차 시험 (서울대학교)

총 3페이지 / 시험시간: 100 분: 확인______________

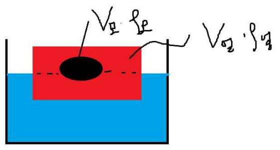
학과: 학번: 이름: 점수:

*문제의 의미가 모호한 경우에는 반드시 감독자에게 문의하세요.

*풀이과정이 있는 답만 점수를 부여합니다. (계산기 사용가능, 수치계산에서는 중력가속도는 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ )

*특별한 언급이 없으면 마찰이나 공기저항 등은 무시합니다.

**문제 1.** (a) 물이 담긴 컵에 모래가 조금 섞여 있는 얼음조각이 떠있다. 얼음이 다 녹으면 물높이는 어떻게 변하는지 설명하라. (얼음이 다 녹은 후에도 컵의 물이 넘치지 않는다)(5점)



모래섞인 얼음에서 얼음과 모래가 차지하는 부피를 각각 $V_{얼음}, V_{모래}$라고 하고, 또 밀도를 각각 $\rho_{얼음}, \rho_{모래}$, 또, 모래얼음이 잠긴 부분의 부피를 $V_{잠긴부피}$이라면,

부력 = 모래얼음 무게: $V_{잠긴부피}\rho_{물} = V_{얼음}\rho_{얼음} + V_{모래}\rho_{모래}$

$$\therefore V_{잠긴부피} = V_{얼음}\frac{\rho_{얼음}}{\rho_{물}} + V_{모래}\frac{\rho_{모래}}{\rho_{물}};$$

$V_{얼음}$ 부피의 얼음이 녹으면 $V_{얼음}\dfrac{\rho_{얼음}}{\rho_{물}}$ 부피만큼 물이 생기고(같은 질량이어야 하므로)

모래는 녹으면 물에 빠져 $V_{모래}$만큼 공간을 차지함;

따라서 모래얼음이 다 녹은 후 차지하는 공간은 얼음물 + 모래부피= $V_{얼음}\dfrac{\rho_{얼음}}{\rho_{물}} + V_{모래} < V_{잠김부피}$ (왜냐면, $\dfrac{\rho_{모래}}{\rho_{물}} > 1$)

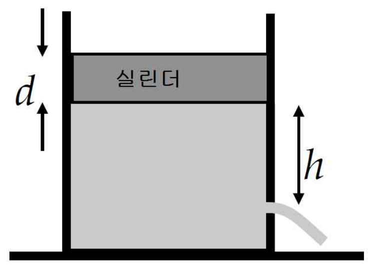
따라서 수면이 낮아진다.

돌을 배에 실은 경우와 돌을 물 속에 넣은 경우를 비교해 보라. 돌을 물속에 넣는 경우가 수면이 낮아진다.
(얼음은 배고, 모래는 돌이라고 생각. 순수얼음은 수면을 변화시키지 않으므로 오직 모래의 효과만 나타난다.)

(b) 물(밀도=$\rho_w$)이 담긴 용기에 물이 새지 않게 꼭 맞는(그러나 자유롭게 위-아래로 움직일 수 있는) 실린더(두께=$d$, 밀도=$\rho_c = 2\rho_w$)가 있다. 실린더의 위치가 구멍에서 $h$만큼 위에 있을 때 물이 $v$ 속력으로 나온다. $v$를 주어진 $d, h, \rho_w, g$로 표현하라.(6점)

실린더 바로 아래서 압력은 대기압과 실린더 무게에 의한 압력 (유체처럼 생각하면 됨);

$P = P_0 + \rho_c g d = P_0 + 2\rho_w g d;$ (3점)



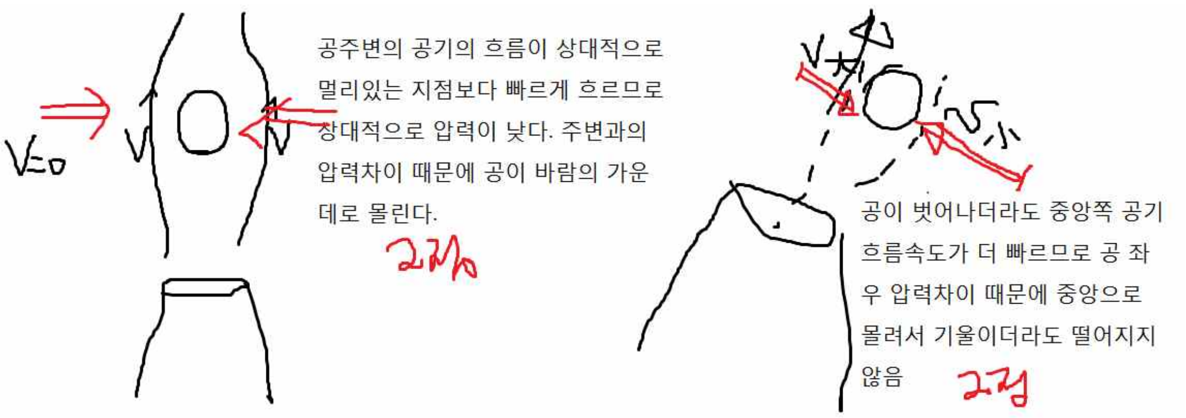

실린더 바로 아래와 물이 나오는 구멍 두 지점 사이에 베루누이 정리를 적용하면 **(실린더가 내려오는 속도는 무시함;언급필요)**

$$P + \rho_w g h + \frac{1}{2}\rho_w \cdot 0^2 = P_0 + \rho_w g \cdot 0 + \frac{1}{2}\rho_w v^2$$

따라서, $v = \sqrt{g(4d + 2h)}$ (3점)

(c) 헤어드라이어기로 탁구공에 바람을 보낼 때, 그림 오른쪽처럼 기울리더라도 공이 떨어지지 않고 공중에 떠 있을 수 있는 이유를 설명하라(4점)

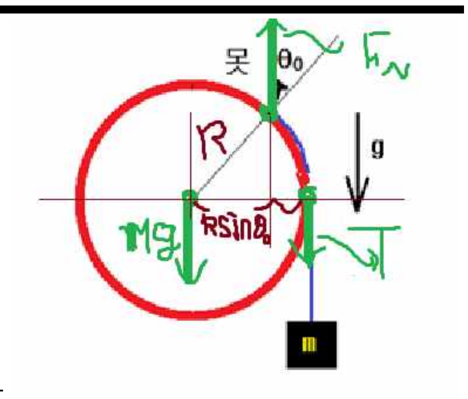
베루누이 원리에 의해서 (왜 기울려도 옆으로 빠지지 않는가가 설명의 핵심임)




**문제 2.** 반지름이 R이고 질량이 M인 둥근 고리 테두리에 구멍을 뚫고 벽의 못에 걸어두었다. 둥근 고리는 못에 대해 자유롭게 회전할 수 있다. 질량이 m인 물체를 못에 연결된 줄에 묶어 고리의 테두리에 걸치도록 하였더니 그림과 같은 위치에서 평형을 이루었다.
(a) 각도 $\theta_0$? (둥근 고리의 FBD를 그려야 한다) (6점)

2015년 물리학1 2차 시험 (서울대학교) 총 3페이지 / 시험시간: 100 분: 확인______________

학과: 학번: 이름: 점수:




1. 자유물체도 : (1 점)

2. 수직방향 힘의 평형: 고리; $\sum F_y = F_N - Mg - T = 0$;

m에 대해서; $\sum F_y = T - mg = 0$ (2점)

3. 고리중심을 회전축으로 한 회전평형; $\sum \tau = F_N R\sin\theta_0 - TRsin90 = 0 \quad (CCW+)$ ;

(2점; 다른 축도 상관없음)

$\therefore \ \sin\theta_0 = \frac{T}{F_N} = \frac{mg}{Mg+mg} = \frac{m}{M+m}$; 여기까지 OK

(b) 물체를 매단 줄을 자르면 고리는 못에 대해 회전한다. 고리가 맨 아래로 왔을 때 회전각속도는? (6점)

못의 위치를 원점으로 하면

1. 못 축에 대한 회전관성: 평행축 정리 $I = I_{cm} + MR^2 = 2MR^2$ (2점)

2. $E_i = -MgR\cos\theta_0$;

$E_f = \frac{1}{2} I w^2 - MgR = MR^2 w^2 - MgR$ (3점)

3. 역학적 에너지 보존; (1점)

$w = \sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{R}}$

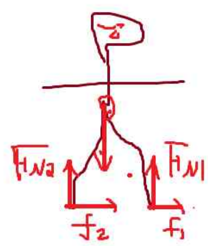
(c) 둥근 고리가 맨 아래에 내려온 순간 못에 작용하는 힘의 방향과 크기는? (5점)

고리에 작용하는 알짜외력이 질량중심의 운동을 결정한다. 맨 아래에 내려온 순간 질량중심에 작용하는 외력은 못의 수직항력(윗)과 고리의 중력(아래)뿐이고, 이 두 힘의 합력은 회전중심방향이므로 질량중심이 원운동하기 위한 구심력이 된다. (2점)

$F_N - Mg = \frac{Mv^2}{R} = MRw^2$; $\quad \therefore \ F_N = Mg + MRw^2 = Mg(2-\cos\theta_0)$ (3점)

물론 못에는 수직항력으로 반작용으로 아랫방향의 $F_N$ 크기임.

**문제 3.** 구하라를 태운 버스가 가속도 $a$로 출발하려고 한다. 구하라의 무게중심은 지면에서 $75cm$ 높이에 있고, 두 발의 간격은 $50cm$이다 (쩍벌녀 구하라). 구하라가 넘어지지 않고 그대로 서 있을 수 있는 버스의 최대 가속도는 얼마인가? 단, 바닥의 마찰은 충분히 커서 미끄러지지 않는다고 가정함. (8점)




1. 구하라의 FBD 그림(1점) (양발 마찰력, 양발 수직항력, 중력)

2. 수평=가속운동(두 발의 마찰력): $\sum F_x = f_1 + f_2 = ma$

수직(평형): $\sum F_y = F_{N1} + F_{N2} - mg = 0$ (2점)

3. 질량중심에 대한 회전평형: $\sum \tau = (f_1+f_2)h + F_{N1}\frac{d}{2} - F_{N2}\frac{d}{2} = 0$; (CCW+) (3점)

(h = 무게중심 높이, d = 두발 간격)

4. $F_{N1} = \frac{mg}{2} - \frac{mah}{d}, \quad F_{N2} = \frac{mg}{2} + \frac{mah}{d}$

5. 넘어지지 않기 위해서는 $F_{N1} \geqq 0, \quad \therefore \ a \leqq \frac{dg}{2h} = \frac{g}{3}$ (2점)

**문제 4.** 수평바닥을 일정한 속력 $v_0$로 구르던 yo-yo가 경사면을 구르면서 올라간다. 단, 수평면과 경사면(경사각=$\theta$)의 마찰이 충분해서 미끄러짐이 없다고 가정한다. yo-yo의 질량은 $M$, 바깥반지름은 $R$, 회전관성은 $I = \gamma MR^2$이다.

(a) 경사면을 오르는 동안, yo-yo에 작용하는 마찰력의 방향을 설명하고, 크기를 구하라.(7점으로 수정됨)

1. 마찰이 없으면 질량중심에 대해서 시계방향으로 회전하므로 접촉면에 대해서 아래로 내려가는 상대운동이 생긴다. 마찰은 이 상대운동을 막아야 하므로 위로 작용한다(결국 마찰 반시계방향 토크를 만들어 회전각속도를 감소시킴) 3점;

2. 질량중심(경사면위쪽+) $\sum F_x = f_s - Mg\sin\theta = Ma \qquad (a<0)$;

3. 질량중심에 대해 회전(시계방향+)$\sum \tau = -f_s R = I\alpha = \gamma MR^2(a/R) = \gamma MRa$ **(시계방향회전을 +로 하면 회전각도 증가와 경사면 위쪽 변위 증가는 같은 부호임; $v = +Rw \rightarrow a = +R\alpha$)**

4. 연립하면 $a = -\frac{\sin\theta}{1+\gamma} g$ , $\therefore \ f_s = \frac{\gamma}{1+\gamma} Mg\sin\theta$ (4점)

(b) yo-yo가 최대로 올라갈 수 있는 높이는?(5점)

요요의 중심을 기준으로 높이를 측정하면 된다; 중력만 일을 하므로 역학적에너지가 보존된다.(정지마찰력은 접촉점이 미끌리지 않으

므로 일을 하지 않음)

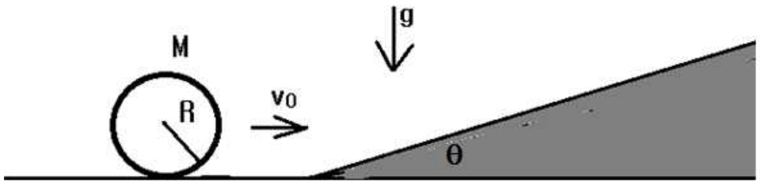
처음 역학적에너지(질량중심병진+회전에너지) = $E_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}Iw^2 = \frac{1}{2}(1+\gamma)Mv_0^2;$

나중 역학적에너지(위치에너지) $E_f = Mgh;$ $h = \frac{(1+\gamma)v_0^2}{2g}$

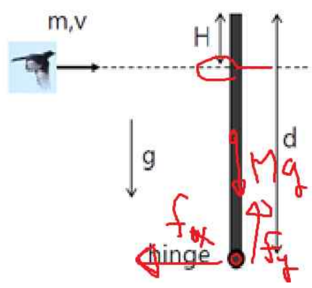
(c) 만약 경사면의 마찰이 없어 매끄럽다면 yo-yo는 얼마의 높이까지 올라가는가?(4점으로 수정됨)

나중 역학적에너지(위치에너지 + 회전운동에너지) 처음 질량중심의 병진운동에너지 만큼만 위치에너지로 변환됨.

$Mgh' = \frac{1}{2}Mv_0^2, \quad h' = \frac{v_0^2}{2g}$




**문제 5.** 그림처럼 수직방향으로 서 있는 막대에 새(질량 $m$)가 수평방향으로 $v$의 속도로 날아와서 막대 꼭대기에서 $H$만큼 아랫부분에 부딪힌 후 (기절한) 새는 그대로 아래로 추락했다. 막대의 길이는 $d$이고 질량은 $M$이다. 막대의 아래쪽은 자유롭게 회전할 수 있는 경첩으로 고정이 되어 있다. 충돌은 순간적으로 일어난다고 가정한다.




(1) 충돌과정에서 새와 막대의 총운동량은 보존되지 않지만 총각운동량은 보존이 됨을 설명하라? (FBD를 그려야 한다)(5점)

충돌 시 수평방향으로는 경첩부분에 알짜외력 $f_x$가 작용한다. 따라서 운동량 보전이 안됨 (2점)

경첩을 회전축으로 할 때 $f_x, f_y$는 모멘트팔=0 이어서 토크기여 없고,

중력(막대/새)도 역시 모멘트팔이 0 이어서 토크에 기여가 없다 ($\vec{r}$와 중력이 만드는 각도 = 180;)

따라서 알짜외부 토크가 없으므로 경첩축에 대한 각운동량이 보존됨. (3점)

(2) 막대 끝이 가장 아래로 내려와 다시 수직방향이 되는 순간 회전각속도는?(5점)

충돌직전 각운동량 = 새의 각운동량 = $L_0 = mv(d-H)$

충돌직후 각운동량 = 막대의 각운동량 (새는 아래로 떨어지므로 속도방향과 $\vec{r}$이 180도여서 경첩에 대한 각운동량 없음) (2점)

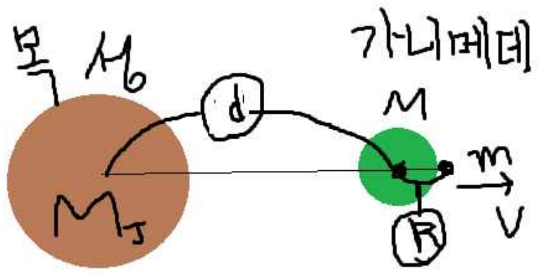
처음에너지 에너지 = 막대의 회전운동 에너지+위치에너지 = $\frac{L_0^2}{2I} + \frac{Mgd}{2};$

나중 역학적 에너지 = 막대의 회전운동 에너지 + 위치에너지 = $\frac{1}{2}Iw^2 - \frac{Mgd}{2}$

$w = \sqrt{\frac{6g}{d} + \frac{9mv^2(d-H)^2}{M^2d^2}}$ (3점)

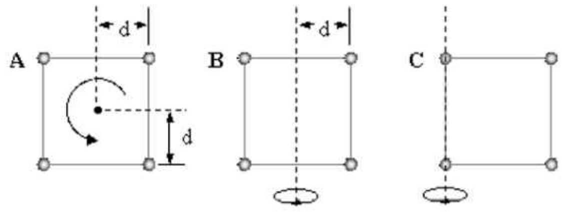
**문제 6.** 목성의 가장 큰 달은 가니메데(Ganymede)로 갈릴레이가 발견하였다. 가니메데의 반지름은 $2.64\times10^8\,\mathrm{m}$ 이고, 질량은 $1.495\times10^{23}\,\mathrm{kg}$ 이다. 목성의 질량은 $1.90\times10^{27}\,\mathrm{kg}$ 이다. 목성과 가니메데의 거리는 $1.071\times10^9\,\mathrm{m}$ 이다. 가니메데의 표면에 착륙한 탐사선의 탈출속력은 얼마나 되나 되는가? 단, 탐사선의 발사는 가니메데 표면 중 목성과 가장 먼 지점에서 한다. (6점)

달의 공전/자전 무시; 주변의 달, 태양, 다른 행성의 영향은 무시한다(무시해도 될까?)




$-\frac{GM_Jm}{d+r} - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \qquad v = \sqrt{2G\left(\frac{M_J}{d+R} + \frac{M}{R}\right)}$

**문제 7.** 같은 질량의 입자 4개를 길이 $2d$의 막대(입자와 같은 질량) 4개로 연결하여 정사각형을 구성하였다. 이 정사각형을 그림에 표시된 축으로 회전을 시킬 때, 회전시키기가 쉬운 것부터 어려운 것 순으로 나열하라.(6점)




막대의 길이가 2d임;

A번에서 막대(**길이 2d**)의 회전관성 = $I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}m(2d)^2 = \frac{4}{3}md^2$ (평행축 정리)

$I_A = 4\times m(\sqrt{2}\,d)^2 + 4\times\frac{4}{3}md^2 = \frac{40}{3}md^2$;

B 번에서 회전축과 나란한 막대의 회전관성= $I = md^2$;

$I_B = 4\times md^2 + 2\times\frac{1}{12}m(2d)^2 + 2\times md^2 = \frac{20}{3}md^2$

C-번에서 회전축과 나란한 막대의 회전관성: $I = m(2d)^2 = 4md^2$

$I_C = 2\times m(2d)^2 + 2\times\frac{1}{3}m(2d)^2 + 4md^2 = \frac{44}{3}md^2$;

**문제 8.** 태양 주위의 원궤도를 도는 행성의 속력은 궤도반지름에 의해서 결정이 된다. 행성의 속력을 정밀하게 관측한 실험에서 주어진 궤도반지름에서 속력이 예측된 것보다 크게 나타났다. 이는 행성이 태양 중력보다 더 큰 중력을 받고 있음을 의미한다. 이를 해결하기 위해서 눈에 보이지 않는 물질(암흑물질:Dark matter)이 태양을 중심으로 태양계 전 영역에 균일하게 구형으로 분포한다고 가설을 세우고, 이 암흑물질에 의한 중력효과를 추가하였더니 관측결과를 설명할 수 있었다. 궤도반지름이 $1.5\times10^8 km$인 지구의 공전속력 관측값이 예상값보다 0.0001% 더 크게 나왔다면, 암흑물질의 밀도는 얼마로 추정할 수 있는가? (단, 태양의 질량 $M = 2\times10^{30}kg$이고, 암흑물질에 의한 지구의 끌림저항은 없다고 가정한다)(10점)

반지름 R인 원궤도에서 태양만 중력을 작용할 때(공전속력: v);

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad\rightarrow\quad v^2 = \frac{GM}{R}$$

암흑물질이 균일하게 퍼져있는 경우(공전속력: v'): 원궤도반지름 안쪽의 구형부분의 암흑물질만 중력을 작용한다.

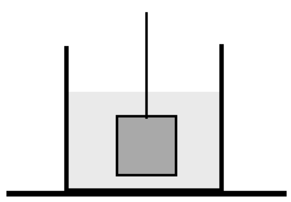
$$\frac{mv'^2}{R} = \text{태양중력} + (\text{반지름}R\text{ 내부의 암흑물질 중력}) = \frac{GMm}{R^2} + \frac{G(\frac{4\pi}{3}R^3\rho)m}{R^2}$$

$$\rightarrow v'^2 = \frac{GM}{R} + \frac{4\pi}{3}GR^2\rho = v^2 + \frac{4\pi}{3}GR^2\rho$$

$$\rightarrow \frac{4\pi}{3}\rho = \frac{v'^2 - v^2}{GR^2} = \frac{(v'-v)(v+v')}{GR^2} \approx \frac{2v^2}{GR^2}\frac{\Delta v}{v} = 2*10^{-6}\frac{M}{R^3} \qquad \text{(since } \frac{v'-v}{v} = \frac{\Delta v}{v} = 10^{-6},\ v'+v \approx 2v)$$

ρ = 2.83 * $10^{-10}$ kg/$m^3$ = 2.83*$10^{-13}$ g/$cm^3$;

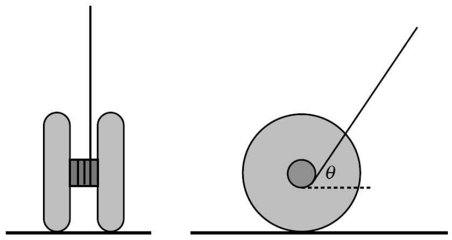
**문제 9.** 밀도가 물의 4배인 균일한 물체(질량=$m$)를 줄에 매달아 테이블에 놓인 비커의 물에 완전히 잠기도록 하였다. 이 때, 테이블이 비커에 작용하는 수직항력은? 단, 물-비커의 총질량은 $M$이다.(6점)



물체의 부피를 V라면 ; $\frac{m}{V} = \rho_{물체} = 4\rho_w$; 부력은 $F_b = \rho_w g V = \frac{mg}{4}$,

테이블이 작용하는 수직항력은 = (물-비커)무게 + 부력반작용 $= Mg + \frac{mg}{4}$

**문제 10.** yo-yo가 충분한 마찰이 있는 바닥에 그림처럼 놓여있다. yo-yo에 감긴 줄을 이용해서 오른쪽으로 수평하게($\theta = 0$) 일정한 장력 $T$로 잡아당겨서 yo-yo가 미끄러짐이 없이 구르게 한다. yo-yo의 중심축에 대한 회전관성은 $I_0 = \gamma m R^2$, 질량은 $m$, 외부 반지름은 $R$ 내부반지름은 $r$이다. 운동을 시작한 이 후 $t-$초 동안 장력이 한 일을 구하라 (운동방향과 마찰력의 방향에 대한 설명이 있어야 한다)(7점)



줄로 잡아당기면 질량중심축에 대해서 반시계방향으로 회전하려함. 따라서 접촉지점에 마찰은 미끄러짐을 방해해야 하므로 수평장력과 반대방향임(왼쪽)

질량중심운동(오른쪽+) = $F_x = T - f_s = ma$;

**시계방향으로 회전각을 +로 하면 회전각이 증가하면 오른쪽으로 변위도 같이 증가한다:**

$v = +Rw \rightarrow a = +R\alpha$ **(반드시 필요함)**

질량중심회전운동(시계방향+): $\sum \tau = f_s R - Tr = I\alpha = \gamma m R^2 \dfrac{a}{R} = \gamma m R a$

연립하면; $a = \dfrac{T(1-r/R)}{m(1+\gamma)}$ (r<R이므로 오른쪽)

운동에너지는 질량중심병진+회전=$\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}Iw^2 = \dfrac{1}{2}(1+\gamma)mv^2$

질량중심이 등가속도 운동을 하므로 속도 $v = at$;

알짜일은 결국 장력이 하므로(정지마찰력이 한 일은 없다) 일-운동에너지 정리에서

$$W_T = K = \frac{T^2(1-r/R)^2}{2m(1+\gamma)}t^2$$

**[보너스 문제: 만점을 넘기지 않는 범위에서 점수를 부여한다]** 물병 속에 작은 스티로폼 공을 바닥에 줄로 고정한 후 물병을 낙하시킨다. 낙하하는 순간에 줄이 끊어진다면 스티로폼 공은 어떻게 움직일까?(3점)


물과 스티로폼이 같이 자유낙하 한다. 같이 떨어지는 사람이 보면 물분자도, 스티로폼도 무중력상태이므로 위치에 따라 압력차가 생길 수 없다. 부력은 압력차에 의해서 만들어지므로 이 경우에 부력이 없다.

**유용한 공식:** $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$,

막대 : $I_{cm} = \dfrac{1}{12}ML^2$, $I_{end} = \dfrac{1}{3}ML^2$, 평행축 정리:$I_p = I_{cm} + Mh^2$($h = cm$에서 회전축까지 거리)

링(=둥근고리=속빈 실린더): $I_{cm} = MR^2$ , 원판(=속찬 실린더): $I_{cm} = \dfrac{1}{2}MR^2$,

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ($\tau = rF\sin\phi = r_\perp F = rF_\perp$), $I = \sum_i m_i r_i^2$, $K_{rot} = \dfrac{1}{2}Iw^2$, $\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$ ($\ell = mvr\sin\phi$), $L = Iw$,

회전에 대한 Newton 방정식: $\tau = I\alpha$, $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

$F = \dfrac{Gm_1 m_2}{r^2}$, $U_g = -\dfrac{GMm}{r}$, 만유인력 상수: $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2/kg^2}$ , 케플러의 3법칙: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{sun}}$

밀도: $= M/V$, 깊은 곳에서 압력: $P = P_0 + \rho gh$, 부력: $F_b = \rho_f Vg$,

베르누이 방정식: $\dfrac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gy = const$,

**--끝--**