



## Chapter 12. 평형과 탄성

### Analyzing Objects at Rest



Corps. Halliday, 9e, Fig. 12.01

Physics 1 1

### 평형



이 물체는 평형상태인가?

❖ 물체가 평형상태를 유지하기 위해서는:

- 병진 평형(translational equilibrium):  
힘이 균형을 이루어야 한다:

$$\vec{F}_{net} = 0$$



- 회전 평형(rotational equilibrium):  
임의의 회전축에 대해서  
돌림힘이 균형을 이루어야 한다

$$\vec{\tau}_{net} = 0$$

• 평형조건: 성분별

$$F_{net,x} = F_{net,y} = F_{net,z} = 0$$

$$\tau_{net,x} = \tau_{net,y} = \tau_{net,z} = 0$$

• 정적 평형조건:

$$\vec{F}_{net} = 0 \oplus \vec{\tau}_{net} = 0 \oplus \vec{P} = 0 \text{ (안움직여야 함)}$$

Physics 1 2

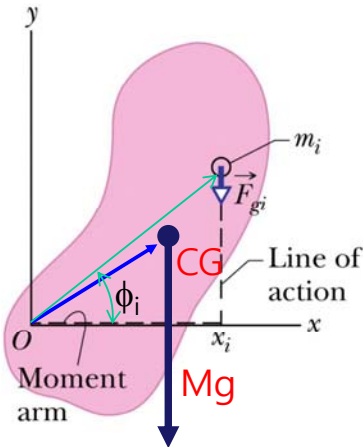
## 무게중심

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i$$

❖ 무게중심(Center of gravity: CG): 물체가 받는 중력은 물체를 구성하는 입자들이 받는 중력의 합이다. 무게중심을 통과하는 회전축에 대해서 물체에 작용하는 중력은 돌림힘을 만들지 않는다.

❖ 중력이 균일할 때 : 질량중심(CM) = 무게중심(CG)

❖ 중력이 균일할 때, 물체의 무게에 의한 돌림힘을 계산해 보자.



• O 를 회전축 (지면에 수직) 으로 할 때:

$$\tau_g = \sum \tau_i = \sum r_i (m_i g) \cos \phi_i$$

•  $r_i \cos \phi_i = x_i = x$  - 좌표 :

$$\begin{aligned} \tau_g &= \sum x_i (m_i g) = \left( \sum x_i m_i \right) g \\ &= M x_{CM} g = x_{CM} (Mg) = x_{CM} \times (\text{물체의 중력}) \end{aligned}$$

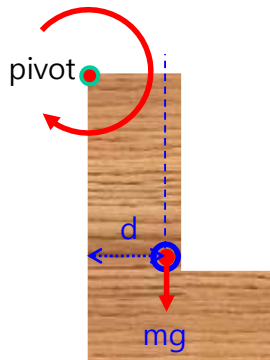
• 물체의 중력에 의한 돌림힘 (균일한 중력):

⇒ CM 위치에 모든 질량이 뭉쳐있는 것처럼 작용한다  
 균일한 중력: 회전축이 CM을 통과하면 돌림힘이 없음  
 ⇒  $CM = CG$

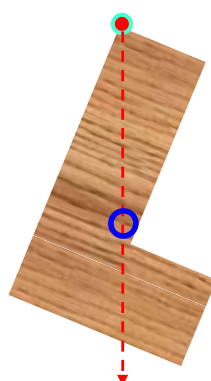
Physics 1 3

## 무게중심(or CM)을 계산하지 않고 알 수 있는가?

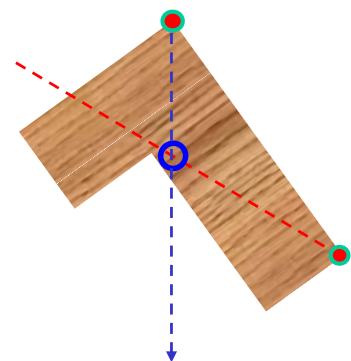
- 물체가 회전축에 대해서 자유롭게 회전할 수 있다면 중력은 물체의 CG가 가장 낮은 위치에 오도록 회전시킨다.
- 회전축을 통과하는 연직선 위에 CG가 있으면 → (모멘트팔) = 0 → (중력이 만드는 토크) = 0 → 더 이상 회전하지 않음.
- 2개 이상의 회전축에 대해서 생기는 연직선들의 교차점이 물체의 CG다



돌림힘(=mgd)  
≠ 0



붉은 점선은 CG를  
통과해야 한다: 돌림힘=0

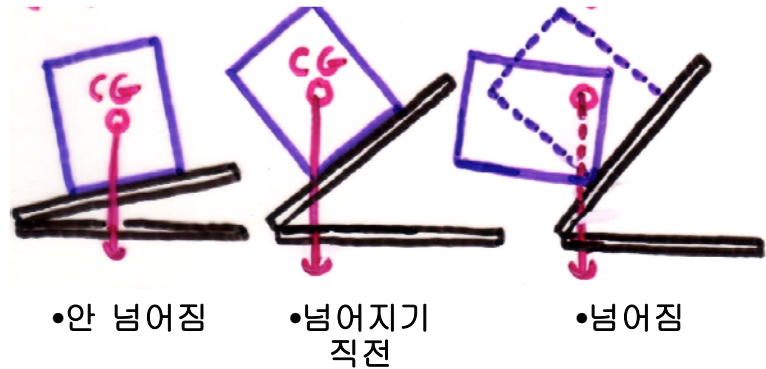


하늘색 점선은 CG를  
통과해야 한다: 돌림힘=0

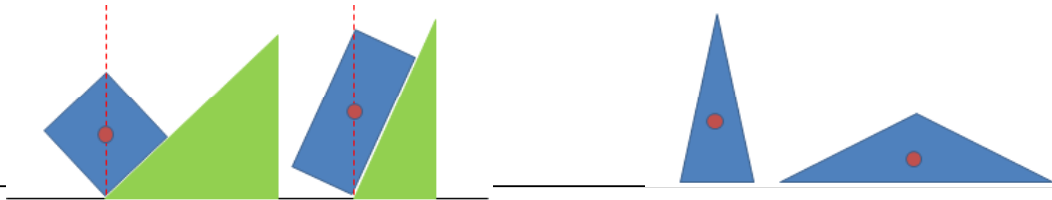
Physics 1 4

## 경사면에 놓인 물체는 언제 넘어지는가?

CG를 통과하는 연직선이  
물체의 왼쪽 모서리 (왼쪽  
모서리 = 회전축)을 벗어나는 때  
넘어짐  
(수직항력 토크=0)

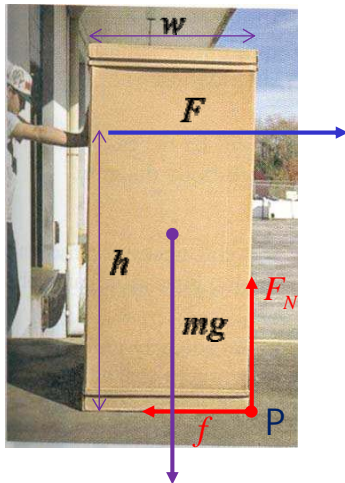


- ✓ 물체를 안 넘어지게 하려면 CG가 낮아야 (기울더라도 바닥면을 벗어나기 어려움), 또는 바닥면이 넓어야:
- ✓ 상식선에서 아는 것을 물리법칙을 써서 보임!



Physics 1 5

## 얼마의 힘을 주면 상자가 넘어지는가?



- 표면이 충분히 거칠어서 미끄러지지 않는다고 가정
- 넘어지기 직전 물체의 수직항력과 마찰력은 바닥 오른쪽 모서리에 모두 작용한다. 그리고 오른쪽 모서리를 회전축으로 한다.
- 중력은 CCW, F는 CW의 돌림힘을 만든다 ( $F_N$ ,  $f$ 는 P에 대해서 돌림힘을 만들지 못함)

• 넘어지기 직전 돌림힘 조건 (w.r.t. P; CW):

$$\tau = Fh - ? \frac{w}{2} \geq 0$$

$$\therefore F \geq mg \frac{w}{2h}$$

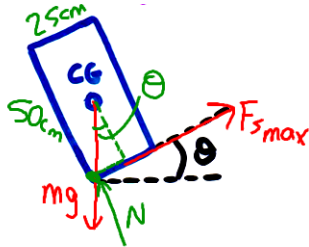
- 미끄러지지 않기 위해서는  
 $F < \text{최대정지마찰력}$

- 무게중심을 기준으로 하여도 된다: 이 경우에 물체가 넘어지지 않을 조건은 수직항력이 작용하는 점이 물체의 밑변을 벗어나지 않아야 한다.

Physics 1 6

## 넘어지는가 아니면 미끄러지는가?

- 경사면의 마찰계수가  $\mu_s=0.4$  이다.  
경사면의 기울기를 서서히 증가시키면  
먼저 미끄러질까 아니면 넘어질까?



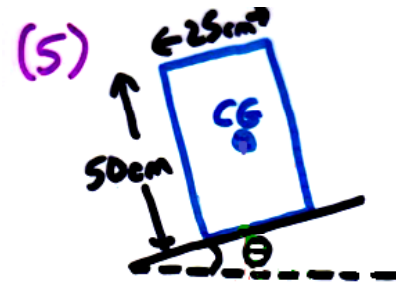
• 넘어질 조건:

넘어지면 중력에 의한 토크만 기여  
(수직항력 토크 = 0)

왼쪽 바닥 회전축 기준 → CCW 토크  $\geq 0$   
CG가 회전축 통과 연직선 상에 있을 조건

$$\tan \theta = \frac{12.5\text{cm}}{25\text{cm}} = 0.5$$

$$\theta = 27^\circ$$



• 미끄러질 조건:

$$mg \sin \theta \geq F_{s, \max}$$

$$mg \sin \theta \geq \mu_s mg \cos \theta$$

$$\tan \theta \geq \mu_s = 0.4$$

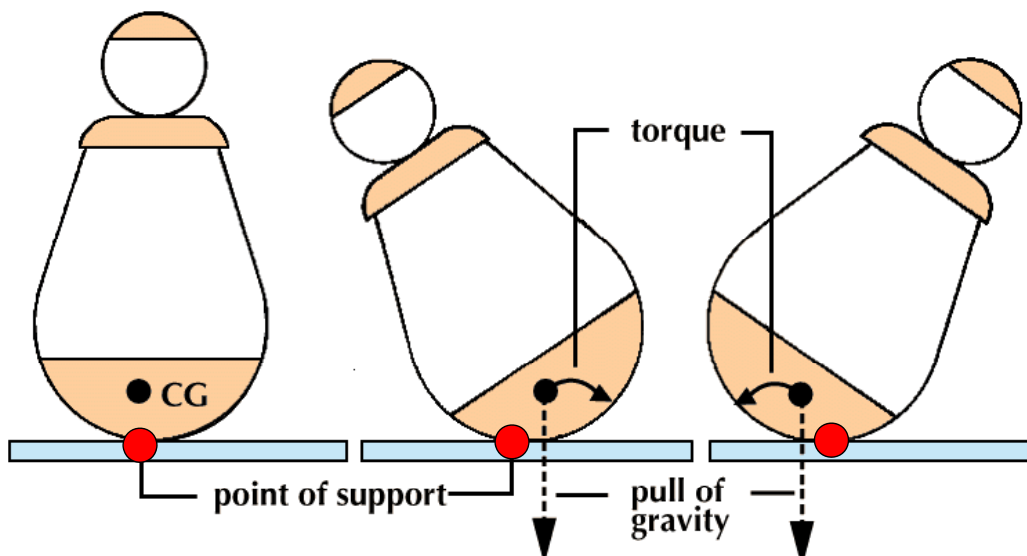
$$\theta \geq 22^\circ$$

따라서 먼저 미끄러짐

• 만약  $\mu_s > 0.5$  이면  
먼저 넘어진다.

Physics 1 7

## 오뚜기가 안 넘어지는 이유:



모멘트팔 = 0

→ 토크 = 0.

→ 평형유지

왼쪽으로 기울면

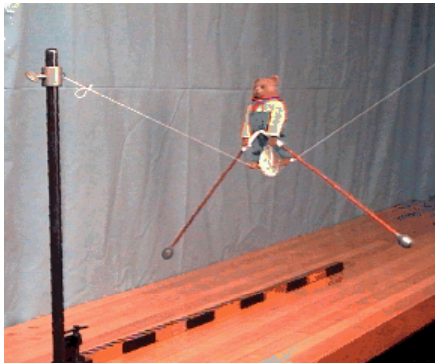
회전축에 대해서 CG가  
오른쪽 이동 → 시계방향  
토크를 만듦.

오른쪽으로 기울면

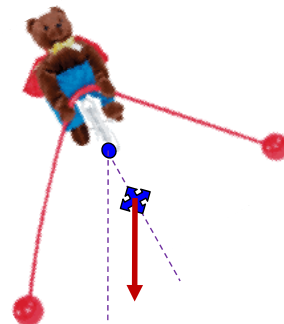
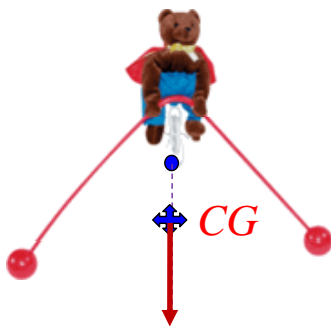
회전축에 대해서 CG가  
왼쪽으로 이동  
→ 반시계방향 토크를 만듦.

Physics 1 8

## The “Balancing Bear” High Wire Act : 곰 인형이 어떻게 줄에서 떨어지지 않고 건널 수 있을까?



무게추를 이용해서 인형과 추의 CG를 바퀴와 줄이 접촉하는 점 (회전축)보다 아래로 보낸다.



인형이 기울어지면

CG가 회전축에 대해서 오른쪽  
→ 시계방향 돌림힘 만듦

Physics 1 9

## 동일한 아이디어를 적용한 놀이기구

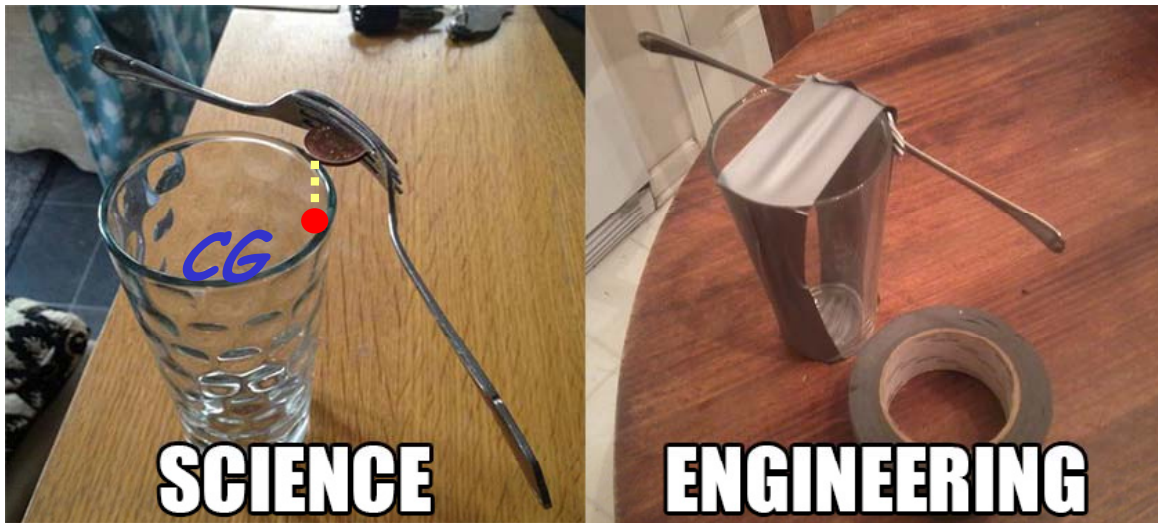


CG가 회전축보다 아래에 놓여야 안정적이다.

Physics 1 11



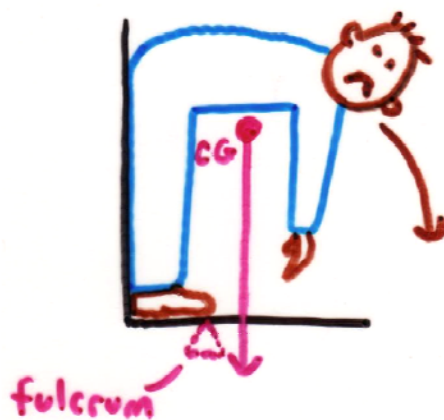
## 과학도와 공학도의 차이



Physics 1 12

## 벽을 기대고 허리 굽혀 발 닿기..

스키를 신는 경우



CG가 발끝 밖으로 나가면  
넘어진다



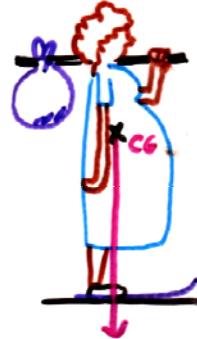
CG가 스키의 오른쪽 접촉점  
안쪽에 있어 넘어지지 않음

Physics 1 13

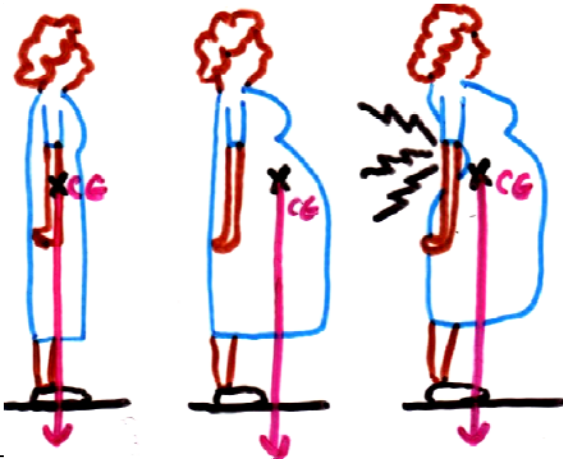
## 왜 임신한 여성은 허리가 아플까?

- 몸무게가 늘어나면서, 임신부의 CG가 앞으로 나가게 되어 신발끝을 넘으면 앞으로 넘어진다.
- 안 넘어지기 위해서 상체를 뒤로 젖혀 CG를 뒤로 보내야 하므로 허리에 무리가 온다.

해결책은?

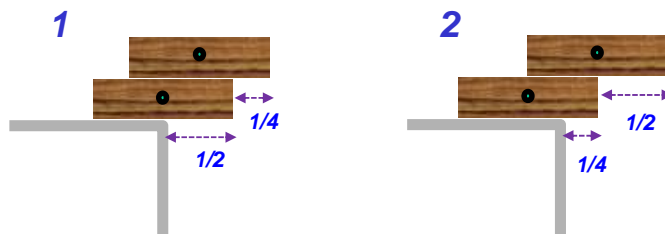


backpack을 사용하여 CG를 뒤로 보내거나 스키를 신고 다니면 된다.



Physics 1 14

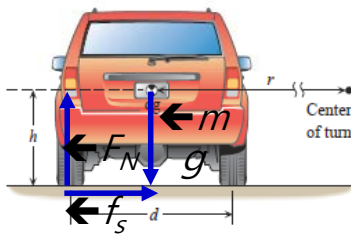
## 어느 경우가 넘어지는가?



- A. 1번 경우
- B. 2번 경우
- C. 둘 다 넘어진다
- D. 둘 다 안 넘어진다

Physics 1 15

## 원형 트랙을 돌고 있는 SUV가 전복되지 않으려면 얼마의 속력으로?



- SUV가 원형트랙을 돌 때, 두 바퀴의 정지마찰력이 구심력 역할을 함.
- 전복되기 직전 오른쪽 바퀴에 작용하는 마찰력과 수직항력은 없어지고 전적으로 왼쪽바퀴에만 작용함
- 자동차는 가속운동이므로 왼쪽 바퀴 끝에 회전축을 둘 수 없고 무게중심 축을 기준으로 해야 함.

- 수직방향 힘 평형조건(위쪽+)

$$\sum F_y = F_N - mg = 0$$

- 질량중심에 대한 토크평형: CCW + (넘어지기 직전)

$$\sum \tau = f_s h - F_N \left( \frac{d}{2} \right) + mg \times 0 = 0$$

$$f_s = \frac{F_N d}{2h} = \frac{mgd}{2h}$$

- 등속원운동을 하므로

$$\text{구심력} = f_s = m \frac{v_{\max}^2}{r}$$

- 넘어지지 않기 위한 최대속력

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{f_s r}{m}} = \sqrt{\frac{rgd}{2h}}$$

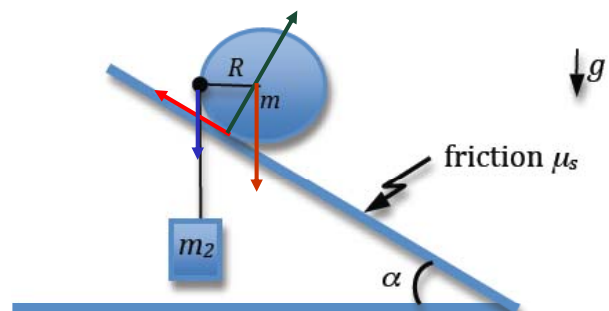
기울려서 d를 0이 아니게 만듦



## 연습

실린더가 구르지 않게 하는 추의 질량  $m_2 = ?$

- 실린더에 작용하는 힘:  
중력( $mg$ ), 수직항력( $N$ ),  
정지마찰력( $f_s$ ), 장력( $T = m_2 g$ )



- 평형조건:

$$\sum F_y = F_N \cos \alpha + f_s \sin \alpha - T - mg = 0$$

$$\sum F_x = F_N \sin \alpha - f_s \cos \alpha = 0$$

$$\sum \tau_{\text{ccw}}(\text{center}) = TR - f_s R = 0$$

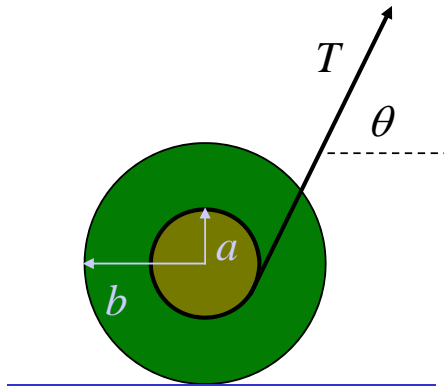
$$\begin{aligned} \bullet \text{미지수: } T, f_s, F_N \\ T = f_s, F_N = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} T, \\ \therefore T = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} mg \end{aligned}$$

- $\mu_{s, \min} = ?$



## Spool on a rough surface...

- A spool (yo-yo) with inner radius  $a$  and outer radius  $b$  is at rest on a rough horizontal table. A string is wound around the inner radius, and extends behind the spool making an angle  $\theta$  with the horizontal axis. There is tension  $T$  in the string. What is  $\theta$  such that the spool does not?



장력의 크기와 장력이 작용하는 각도를 잘 조절하면 힘이 작용해도 구르지 않는다.

## Spool on a rough surface...

- A spool (yo-yo) with inner radius  $a$  and outer radius  $b$  is at rest on a rough horizontal table. A string is wound around the inner radius, and extends behind the spool making an angle  $\theta$  with the horizontal axis. There is tension  $T$  in the string. What is  $\theta$  such that the spool does not move?

• no slip :

$$F_{net,x} = T \cos \theta - f = 0$$

$$\rightarrow T \cos \theta = f$$

• CM에 대한 토크 (CCW+)

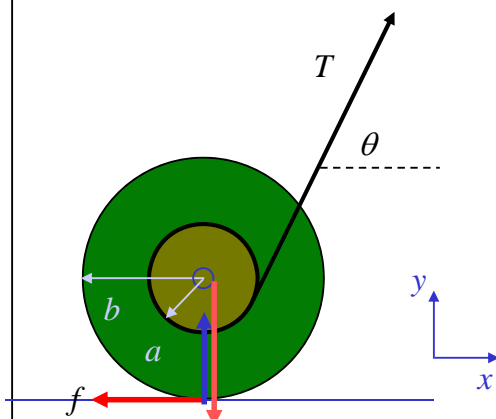
$$\tau_{net} = aT - bf = 0 \quad \leftarrow \text{no rolling}$$

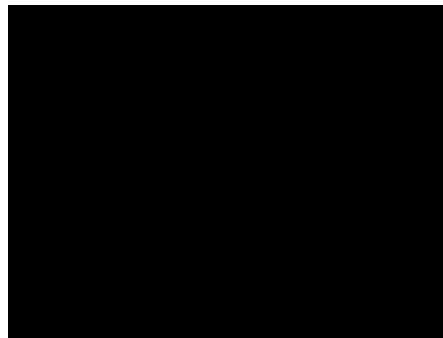
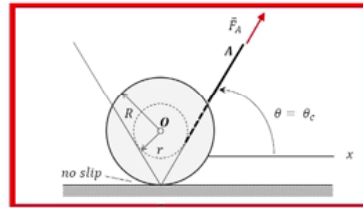
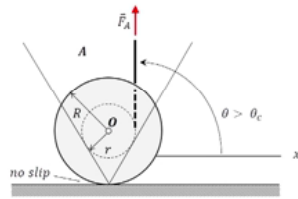
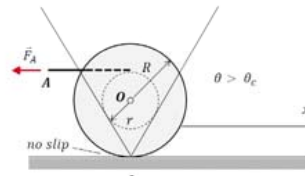
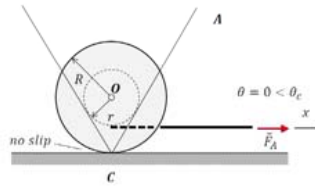
$$\rightarrow aT = bf$$

$$aT = bT \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{a}{b}$$

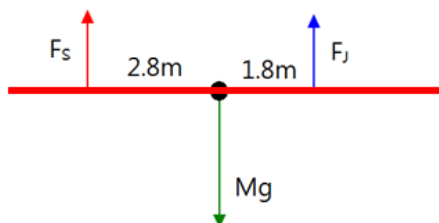
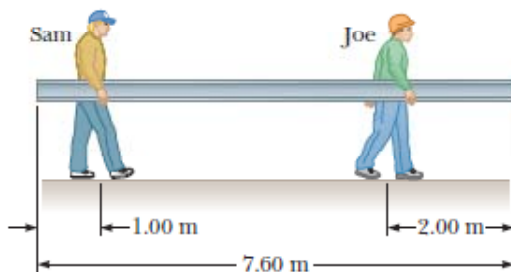
이 각도를 유지한 채  $T$ 을 증가시켜 최대정지마찰력을 넘으면 구르지 않고 미끄러진다. 각도를 작게 하면 앞으로 구르고, 크게 하면 뒤로 구른다.





## 누구 더 무겁다고 느끼는가?

A uniform beam of length 7.60 m and weight  $4.50 \times 10^3 \text{ N}$  is carried by two workers, Sam and Joe, as shown in Figure P12.11. Determine the force that each person exerts on the beam.



1. 힘의 평형:  $F_{net,y} = F_s + F_j - Mg = 0$

2. 토크평형 (CM, CCW+):

$$\tau_{net} = (1.8\text{m})F_j - (2.8\text{m})F_s + (0)Mg = 0$$

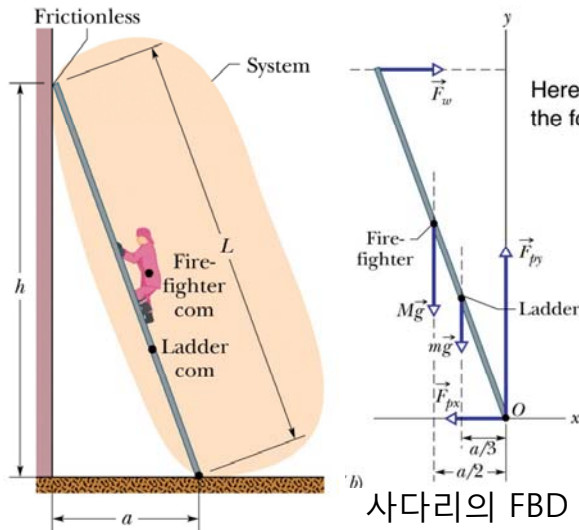
2'. 토크평형 (Left end, CCW+):

$$\tau_{net} = (4.6\text{m})F_j - (2.8\text{m})Mg = 0$$

$$\therefore F_j = 0.61 \times Mg$$

$$F_s = 0.39 \times Mg$$

## 안전한 사다리 타기...



Here :  
the fo

● 사다리: 
$$\begin{cases} F_{net,x} = F_w - F_{px} = 0 \\ F_{net,y} = F_{py} - Mg - mg = 0 \end{cases}$$

● 토크 평형: w.r.t. O, CCW +

$$\tau_{net} = -hF_w + \frac{a}{2}Mg + \frac{a}{3}mg + 0.F_{px} + 0.F_{py} = 0$$

▶ 미지수 :  $F_w$ ,  $F_{px}$ ,  $F_{py}$

- 바닥의 정지마찰력이 미끄러짐을 막는다.
- 사다리(m) 질량중심: 밑에서 위로  $\frac{1}{3}$  지점
- 사람(M): 중간 위치
- $F_w$ ,  $F_{px}$ ,  $F_{py}$  = ?

$$\begin{cases} \text{벽이 미치는 힘: } F_w = (\frac{1}{2}M + \frac{1}{3}m)g \frac{a}{h} \\ \text{바닥과 마찰력: } F_{px} = F_w \\ \text{바닥의 수직항력: } F_{py} = (M + m)g \end{cases}$$

$$a = \sqrt{L^2 - h^2}$$

사다리의 FBD

$M = 430\text{kg}$ ,  $m = 85\text{kg}$   
 $a = 1.9\text{m}$ ,  $b = 2.5\text{m}$

## 기중기..

● 힘 평형:

beam: 
$$\begin{cases} F_{net,x} = F_h - T_c = 0 \\ F_{net,y} = F_v - mg - T_r = 0 \end{cases}$$

box:  $F_{net,y} = T_r - Mg = 0$

● 토크 평형: (w.r.t. hinge, CCW+)

$$\tau_{net} = (a)(T_c) - (b)(T_r) - (\frac{1}{2}b)(mg) = 0$$

● Sol: 미지수 =  $F_h$ ,  $F_v$ ,  $T_c$

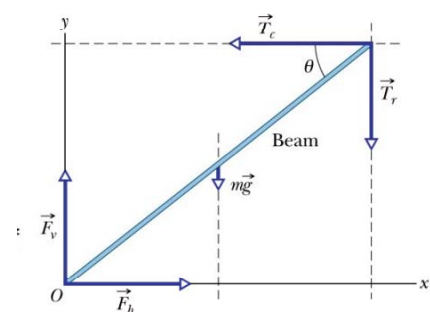
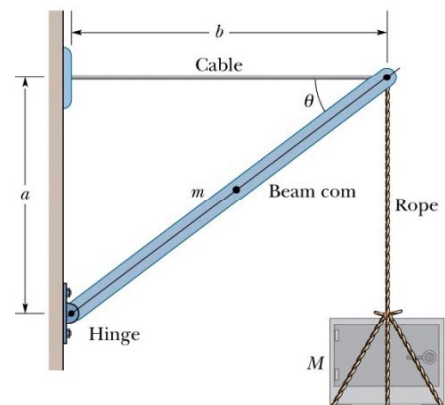
$$\begin{cases} T_r = Mg = 4214\text{N} \\ T_c = (M + \frac{1}{2}m)g \frac{b}{a} = 6093\text{N} \\ F_h = T_c = 6093\text{N} \\ F_v = (m + M)g = 5047\text{N} \end{cases}$$

● 경첩이 버티는 힘:

$$F = \sqrt{F_v^2 + F_h^2}$$

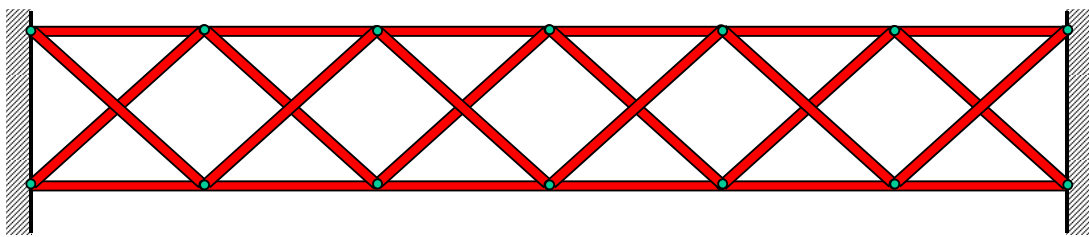
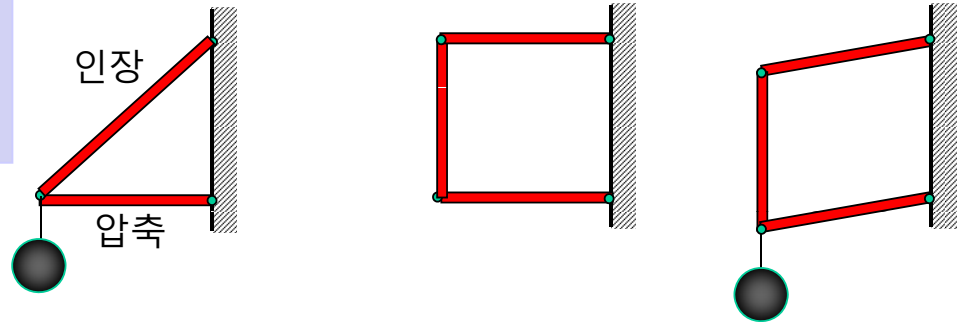
●  $\theta = \tan^{-1}(a/b) = 37.2^\circ$

$\tan^{-1}(F_v / F_h) = 39.6^\circ \Rightarrow$  설계잘못



## Stability of a static structure.

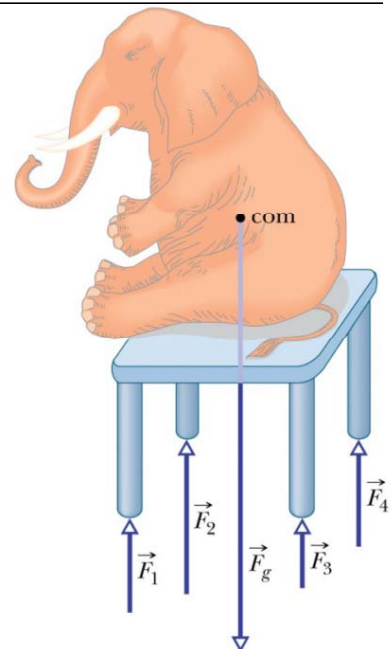
Triangles  
vs.  
squares



Physics 1 29

## 미결정 구조

- 정적평형 문제
  - 힘 평형 조건  $\rightarrow$  2개 방정식( $x, y$ )
  - 돌림힘 평형 조건  $\rightarrow$  1개 방정식(한 축)
  - ✓ 3개 보다 많은 힘이 걸리는 정적 평형문제는 대수적으로 풀리지 않는 문제임!
  - ✓ 예: 벽에 걸친 사다리 문제에서 벽 부분의 마찰이 있는 경우
  - ✓ 4개의 다리를 가지는 테이블의 다리에 걸리는 힘구하기
- 코끼리가 올라간 테이블의 4 다리의 힘은 실제로 셀 수 있다.....
  - ✓ 4 개 미지수(힘)에 3 개 방정식  $\rightarrow$  정적평형 조건으로 불가
- 어떻게 가능한 것인가?
  - ✓ 강체를 다룰 때 무한히 딱딱한 것을 가정하였지만, 실제 세상에서는 힘을 받는 강체는 평형이 이루어 지도록 변형이 일어남.
- 책상에 코끼리가 올려지면 각 다리의 길이가 변형이 되어 평형을 만들 수 있다.

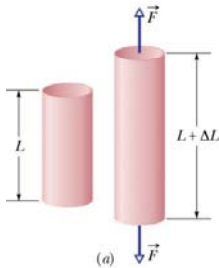
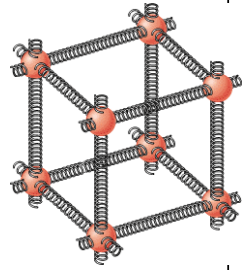


힘을 줄 때 물체의 변형 정도는 어떻게 연결되는가?

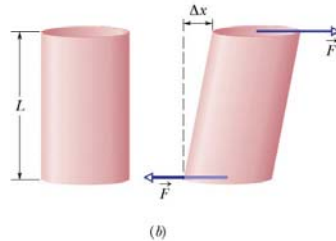
Physics 1 31

## 탄성

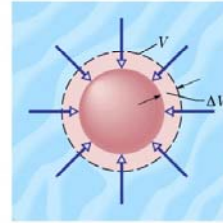
- 강체는 이론적으로 무한히 딱딱한 상태이지만, 실제 물체는 외부에서 힘을 가하면 변형이 만들어진다.
- 고체에 힘이 가해질 때 변형 방식



인장변형 → 끊어짐  
(Tensile strain)



층밀림 → 부러짐  
(Shear strain)



수력압축  
(hydraulic stress)

단면적이 A이고 길이 L인 물체의 늘어난 정도(elongation)가  $\Delta L$ 일 때

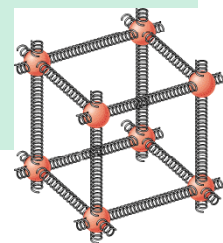
- 상대적인 변형의 크기 (=Strain):  $\epsilon = \Delta L / L$
- 단위면적당 변형을 일으키는 힘의 크기(=Stress) :=  $F/A$

$\frac{F}{A}$  와  $\frac{\Delta L}{L}$  의 관계?

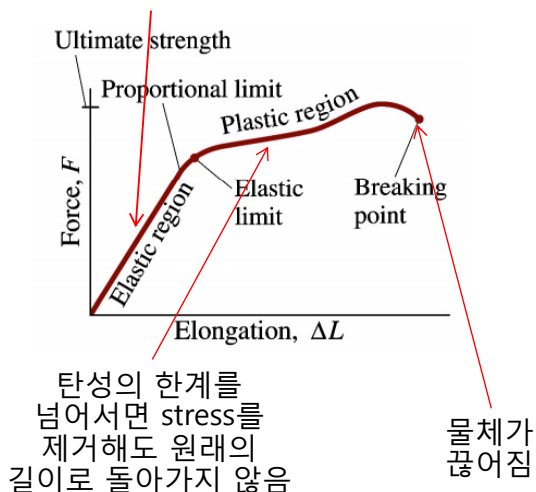
## 탄성

**탄성:** 물체가 변형이 되었을 때 원래의 형태로 돌아가려는 특성

- 물체를 구성하는 원자들은 전기적인 상호작용으로 연결됨
- 고체는 원자들이 용수철에 의해서 연결된 것처럼 행동함.
- 고체의 작은 변형은 Hooks의 법칙은 따른다.



- 탄성구간:  $\text{stress} (F / A) = (\text{modulus}) \times \text{strain} (\Delta L / L)$  :



- 인장 & 압축:  $E = \text{Young modulus}$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

- 층밀림:  $G = \text{shear modulus}$

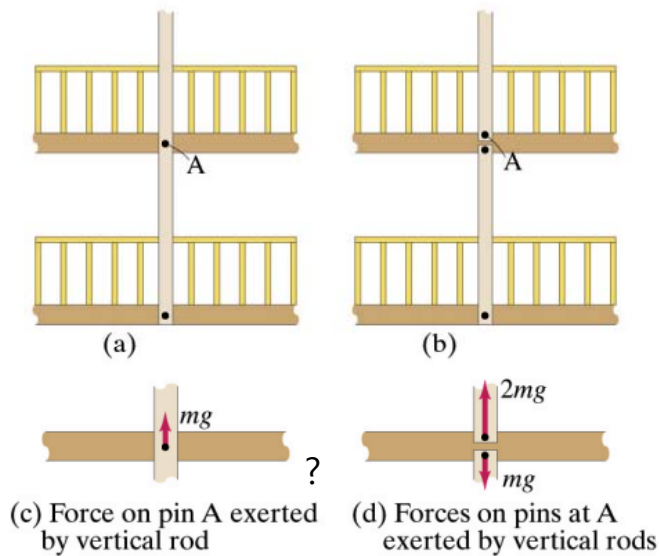
$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}$$

- 수력압축:  $B = \text{bulk modulus}$

$$p = B \frac{\Delta V}{V}$$



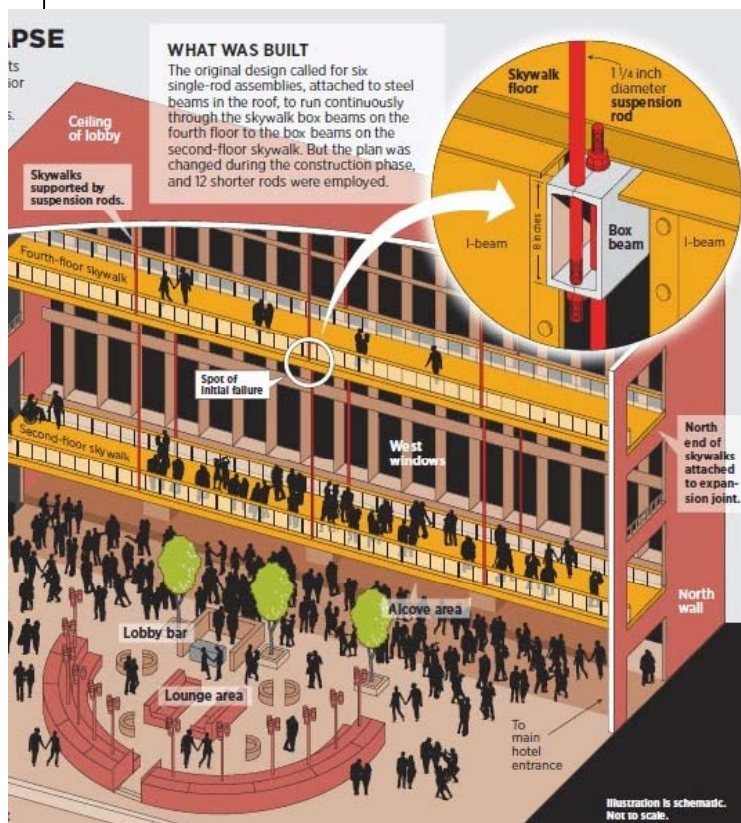
## 철강재를 써서 베란다를 연결할 때 옳은 방법은?



- Bolt-A에 걸리는 힘이 어떻게 다른가?
- 재료에 걸리는 stress가 탄성한계를 넘지 않도록 설계되어야 한다.

Good

## Hyatt Regency walkway collapse



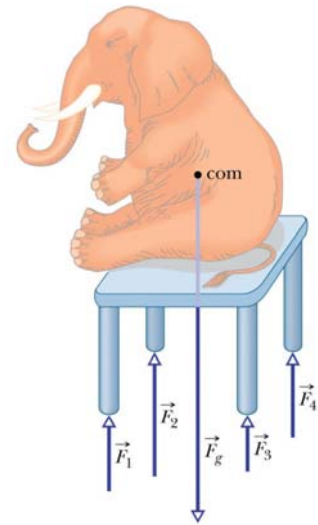
## Problem

- 한 다리(1번)가 나머지 다리 (2,3,4)보다 약간 긴 식탁 위에 매우 무거운 물체를 놓았더니, 더 이상 빼그덕 거리지 않았다(식탁은 평평해졌다고 하자). 각 다리에 걸리는 힘은?

$$L_2 = L_3 = L_4 = 1.0\text{m}, L_1 = L_2 + d$$

$$d = 0.5\text{mm}, E = 1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$A = 1.0\text{cm}^2$$



- ✓ 힘이 가해지므로 각각의 다리는 변형이 된다.
- ✓ 평형이 맞추려면 1번 다리의 길이가 가장 많이 줄어들어야 한다.

• 1-3번 다리를 비교하면:

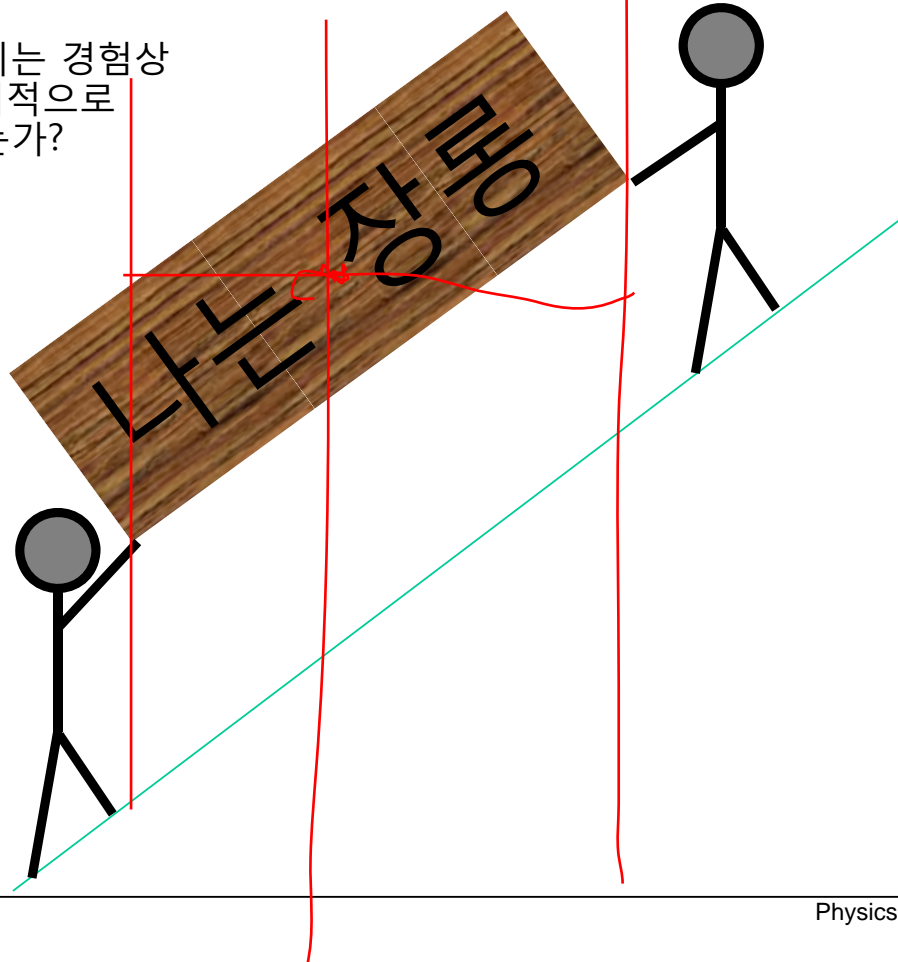
$$\begin{cases} \frac{F_1}{A} = E \frac{\Delta L_1}{L_1} \rightarrow \frac{F_1 L_1}{AE} = \Delta L_1 \\ \frac{F_3}{A} = E \frac{\Delta L_3}{L_3} \rightarrow \frac{F_3 L_3}{AE} = \Delta L_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \bullet L'_1 = L'_3 \\ & \rightarrow L_1 + d - \Delta L_1 = L_3 - \Delta L_3 \\ & \rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_3 + d \\ & \Rightarrow F_1 L_1 = F_3 L_3 + dAE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 3F_3 + F_1 - Mg = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{1}{4} Mg - \frac{1}{4} dAE / L = 548\text{N} \\ F_1 = \frac{1}{4} Mg + \frac{3}{4} dAE / L = 1200\text{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Physics 1 36

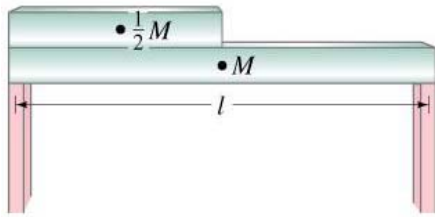
누가 더 힘들지는 경험상  
자명하다. 물리적으로  
설명할 수 있는가?



Physics 1 37

시간이 되면 풀어 봅니다.

Q. 각 기둥에 걸리는 수직하중은 얼마인가?



질량  $M$  인 막대의 힘평형:

$$F_{net,y} = F_L + F_R - Mg - \frac{1}{2}Mg = 0$$

왼쪽 끝에 대한 돌림힘:

$$\tau_{net} = F_R \ell - Mg \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}Mg \frac{\ell}{4} = 0$$

$$\rightarrow F_R = \frac{5}{8}Mg$$

$$F_L = \frac{7}{8}Mg$$

## The “anti-gravity hammer”

