Homework 1

1.1.8.

어떤 양수 $e > 0$에 대해서는 임의의 자연수 N에 대하여 $n \geq N \to \frac{1}{n} < e$가 성립하지 않는다.

즉, 어떤 양수 $e > 0$에 대해서는, 임의의 자연수 N에 대하여, 어떤 $n \geq N$이 존재하여 $\frac{1}{n} \geq e$를 만족한다.

1.1.12.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
\Rightarrow &\exists a \in I | x \in A_a \\
&\exists b \in J | x \in B_b \\
\Rightarrow &x \in A_a \cap B_b \\
\Rightarrow &x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)
\end{aligned}$$

2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \supset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \\
\Rightarrow &\exists a \in I, \exists b \in J | x \in A_a \cap B_b \\
\Rightarrow &x \in A_a, x \in B_b \\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ 또는 } x \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \\
\Rightarrow &x \forall i \in I, \forall j \in J | x \in A_i \cup B_j \\
\Rightarrow &x x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)
\end{aligned}$$

2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \supset \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j) \\
\Rightarrow &\forall i \in I, \forall j \in J | x \in A_i \cup B_j
\end{aligned}$$

만약,

$$\begin{aligned}
&x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ 라면} \\
\Rightarrow &\exists a \in I, x \notin A_a \\
\Rightarrow &\forall j \in J | x \in A_a \cup B_j \\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

비슷하게

$$\begin{aligned}
&x \notin \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Rightarrow x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
\therefore &x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}$$

1.2.4.

(가)

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

라고 한다면 함수 g가 단사이므로,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

또한 함수 f가 단사이므로,

$$x_1 = x_2$$

따라서, g ∘ f는 단사이다.

$$f(x_1)) = f(x_2)$$

라고 한다면 양변에 함수 g를 취하면,

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

함수 g ∘ f가 단사이므로,

$$x_1 = x_2$$

따라서 f는 단사함수이다.

(나)

$$g(f(x)) = z, (\forall z \in Z)$$

에서 $x \in X$가 존재하는지 확인해보자. 함수 g가 전사이므로

$$g(y) = z$$

인 $y \in Y$가 존재한다. 마찬가지로 함수 f가 전사이므로

$$f(x) = y$$

인 $x \in X$가 존재한다. 따라서 함수 $g \circ f$는 전사함수이다.

$$g(y) = z, (\forall z \in Z)$$

에서 $y \in Y$가 존재하는지 확인해보자. 함수 $g \circ f$가 전사이므로

$$(g \circ f)(x) = z$$

인 $x \in X$가 존재한다. 이제 y를

$$y = f(x)$$

로 잡으면 $g(y) = z$을 만족하는 것을 알 수 있다. 따라서 함수 g는 전사이다.

(다)

f와 g가 전사이고, 단사이므로 (가), (나)에 의해서 $g \circ f$가 전단사함수임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
&(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\
=&g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
=&g \circ 1_Y \circ g^{-1} \\
=&g \circ g^{-1} \\
=&1_Z
\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}
&(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\
=&f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\
=&f^{-1} \circ 1_Y \circ f \\
=&f^{-1} \circ f \\
=&1_X
\end{aligned}$$

따라서 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$임을 알 수 있다.

1.2.11.

$\exists f : X \to 2^X$가 전사함수라고 가정하자.

집합 $Y \in 2^X$를 다음과 같이 정의하자. $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$

그러면 $f(a) = Y$를 만족하는 $a \in X$가 존재하지 않는다.

pf. 귀류법 $\exists a \in X \mid f(a) = Y$라 하자.

그러면 Y의 정의에 따라 $a \in f(a) = Y \iff a \notin f(a) = Y$ 이므로 모순이다. □

따라서, X에서 2^X로 가는 전사함수는 존재하지 않는다.

1.2.12.

1)

모든 $A \in 2^X$에 대해 생각해보자.

먼저, $x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$ 이다.

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$ 이므로

$$\therefore f^{-1}(f(A)) \supset A \qquad (1)$$

는 항상 성립한다.

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2 \in X \mid f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\
\iff& [f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A] \\
\iff& [x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow x \in A] \\
\iff& f^{-1}(f(A)) \subset A \qquad (2)
\end{aligned}$$

결론 (1)과 (2)에 의해 함수 f가 단사일 필요충분조건은

$$f^{-1}(f(A)) = A \qquad A \in 2^X$$

이다.

2)

모든 $B \in 2^Y$에 대해 생각해보자.

먼저, $y \in f(f^{-1}(B)) \iff [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y]$이다.

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B)) &\Rightarrow [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y] \\ &\Rightarrow [y = f(x) \in B] \end{aligned}$$

이므로,

$$\therefore f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad (1)$$

는 항상 성립한다.

$$\begin{aligned} &\forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y \\ \iff &\big[y \in B \Rightarrow [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y]\big] \\ \iff &\big[y \in B \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))\big] \\ \iff &f(f^{-1}(B)) \supset B \qquad (2) \end{aligned}$$

결론 (1)과 (2)에 의해 함수 f가 전사일 필요충분조건은

$$f(f^{-1}(B)) = B \qquad B \in 2^Y$$

이다.

1.2.15.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

pf.

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \\ \iff &f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \\ \iff &\exists i \in I \mid f(x) \in B_i \\ \iff &\exists i \in I \mid x \in f^{-1}(B_i) \\ \iff &x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

□

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

pf.

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \\ \iff &f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \\ \iff &\forall i \in I \mid f(x) \in B_i \\ \iff &\forall i \in I \mid x \in f^{-1}(B_i) \\ \iff &x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

□

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

pf.

$$\begin{aligned} &y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ \iff &\exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(x) = y \\ \iff &\exists i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\ \iff &\bigcup_{i\in I} f(A_i) \end{aligned}$$

□

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \qquad (1)$$

pf. 네번째 줄로 넘어갈 때 $\iff$ 가 아닌 $\Rightarrow$임에 유의하라.

$$\begin{aligned} &y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\ \iff &\exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i \mid f(x) = y \\ \iff &[\exists x \mid \forall i \in I, x \in A_i] \mid f(x) = y \\ \Rightarrow &\forall i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\ \iff &\bigcap_{i\in I} f(A_i) \end{aligned}$$

□

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

의 필요충분조건을 찾는 것은

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

의 필요충분조건을 찾는 것과 같다. ($\therefore$ 식 (1))

$$\begin{aligned} f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\supset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \\ \iff &\forall i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\ &\Rightarrow [\exists x \mid \forall i \in I, x \in A_i] \mid f(x) = y \\ \iff &[f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2] \end{aligned}$$

이므로,

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \iff [f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2]$$

즉, 함수 f가 단사인 것과 필요충분조건이다.

1.3.1.

(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ $\neg$(3)

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,c) \in R$이지만 $(a,c) \notin R$이다.

$\neg$(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3)

$R = \{(c,c)\}$
$(a,a) \notin R$이다.

(1) $\wedge$ $\neg$(2) $\wedge$ (3)

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$
$(a,b) \in$이지만 $(b,a) \notin R$이다.

1.3.2.

$$\begin{aligned} \exists(x,y) \in R &\Rightarrow (y,x) \in R \\ (x,y) \in R, (y,x) \in R &\Rightarrow (x,x) \in R \end{aligned}$$

주장은 위와 같다. 하지만 결국 $(x,x) \in R$이 만족하기 위해서는 $(x,y) \in R$이어야 한다. 즉, R에서 (x,y)꼴의 원소가 없다면 (x,x)가 R의 원소일 보장은 없다.

예를 들어, 원소 세 개인 집합 $X = \{a,b,c\}$에서 $R = \{(c,c)\}$인 경우가 있다.

1.3.7.

$$k \in \mathbb{N}, m \sim n \iff k \mid m - n$$

1)

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{Z}, k \mid x - x \\ \Rightarrow &\forall x \in \mathbb{Z}, x \sim x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x \sim y \Rightarrow &k \mid x - y \\ \Rightarrow &k \mid -(x-y) \\ \Rightarrow &k \mid y - x \\ \Rightarrow &y \sim x \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} x \sim y, y \sim z \Rightarrow &k \mid x - y, k \mid y - z \\ \Rightarrow &k \mid (x-y) + (y-z) \\ \Rightarrow &k \mid x - z \\ \Rightarrow &x \sim z \end{aligned}$$

결론 따라서 $\sim$은 동치관계이다.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/\sim &= \{[m] \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[0], [1], \cdots, [k-1]\} \end{aligned}$$

1.3.12.

1)

$x, y \in V/W, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$에 대해 다음 8가지를 만족한다.

1.$x + y = y + x$
2.$x + (y + z) = (x + y) + z$
3.유일한 항등원 $\bar{0}$(영 벡터)가 존재하여 $\mid x + \bar{0} = x$
4.각 원소에 대해 유일한 역원 $-x$가 존재하여 $\mid x + (-x) = \bar{0}$
5.$1x = x$
6.$(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$
7.$c(x + y) = cx + cy$
8.$(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$

따라서, V/W는 벡터공간이다.

2)

$\phi, \widetilde{\phi}$는 선형사상이다.

$\phi : V \to Z$에 대하여 $\widetilde{\phi} \circ q = \phi$를 만족하는 $\widetilde{\phi} : V/W \to Z$가 존재 할 필요충분조건은

$$x \sim_W y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

이다. 한편,

$$x \sim_W y \iff x - y \in W \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) &\iff \phi(x) - \phi(y) = 0 \\ &\iff \phi(x-y) = 0 \qquad (\because \phi\text{는 선형사상}) \\ \therefore \phi(x) = \phi(y) &\iff \phi(x-y) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

인 것을 확인할 수 있다. 이를 이용하면,

$$\begin{aligned} &[x \sim_W y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)] \\ \iff &[x - y \in W \Rightarrow \phi(x-y) = 0] \qquad (\because (1), (2)) \\ \iff &[x \in W \Rightarrow \phi(x) = 0] \end{aligned}$$

따라서, $x \in W \Rightarrow \phi(x) = 0$은 필요충분조건이다.

1.4.1.

집합 $X = \{a, b, c\}$에 대해 관계 $R \subset X \times X$를 생각하자.

(1) $\wedge$ **(2)** $\wedge$ $\neg$**(3)**

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,c) \in R$이지만 $(a,c) \notin R$이다.

$\neg$**(1)** $\wedge$ **(2)** $\wedge$ **(3)**

$R = \{(c,c)\}$
$(a,a) \notin R$이다.

(1) $\wedge$ $\neg$**(2)** $\wedge$ **(3)**

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,a) \in R$이지만 $a \neq b$이다.

1.4.5.

$$\forall A \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcap \mathbb{A} \subset A$$

이므로, $\bigcap \mathbb{A}$는 $\mathbb{A}$의 하계이다.
만약 $I \in 2^X$가 $\mathbb{A}$의 하계라면, $\forall A \in \mathbb{A}, I \subset A$이므로,

$$\begin{aligned} x \in I \Rightarrow &\forall A \in \mathbb{A}, x \in A \\ \Rightarrow &x \in \bigcap \mathbb{A} \\ \therefore I \subset &\bigcap \mathbb{A} \end{aligned}$$

따라서, $\inf \mathbb{A} = \bigcap \mathbb{A}$

1.4.7.

증명전에, 면들의 교집합은 정의에 의해 면이 된다는 것을 상기하라.

$\mathbb{F}(C)$의 모든 상계들의 집합을 $\mathbb{S}$라 하자. $C \in S$이므로, S는 공집합이 아니다.
이제 $S = \bigcap \mathbb{S}$가 $\mathbb{F}(C)$의 상한임을 보이겠다.

$$\forall s \in \mathbb{S}, \forall c \in \mathbb{F}(C), c \subset s$$

이므로,

$$\forall c \in \mathbb{F}(C), c \subset \bigcap \mathbb{S}$$

이다. 또한,

$$\forall s \in \mathbb{S}, \ \bigcap \mathbb{S} \subset s$$

이므로, $S = \bigcap \mathbb{S}$은 상한의 두가지 성질을 만족한다.

$I = \bigcap \mathbb{F}(C)$가 $\mathbb{F}(C)$의 하한임을 보이겠다.

$$\forall c \in \mathbb{F}(C), I \subset c$$

이므로, I는 하계이다. 또한,

$$\forall i \in \mathbb{F}(C)\text{의 하계집합}, i \subset I$$
$$\because \text{아니라면, } i\text{가 하계인 것에 모순이 된다.}$$

이므로, $I = \bigcap \mathbb{F}(C)$은 하한의 두가지 성질을 만족한다.

1.4.9.

1.4.7.에 의하면 상한은 상계들의 교집합이고, 하한은 두 면의 교집합이다.

$$\begin{aligned} F \vee G &= \sup\{F, G\} = \{F, G\}\text{의 상계들의 교집합} \\ F \wedge G &= \inf\{F, G\} = F \cap G \end{aligned}$$

보기 1.4.5.의 경우에는, 면들의 집합은 원소 네 개인 집합 $X = \{a, b, c, d\}$에 의해 정의된 2^X와 같은 순서집합이다. 함수 $f : \mathbb{F}(C) \to 2^X$가 면들의 집합에서 2^X로 가는 매칭하는 함수라고 하자. 이 함수는 자연스럽게 역함수 f^{-1}을 가진다.

즉, 보기 1.4.5.의 경우의 $\vee$와 $\wedge$는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned} F \vee G &= \sup\{F, G\} = f^{-1}(f(F) \cup f(G)) \\ F \wedge G &= \inf\{F, G\} = f^{-1}(f(F) \cap f(G)) \end{aligned}$$

일반적인 면들에 대해서는 성립하지 않음에 유의하라.