Quiz 3 (5월 3일 금 7, 8 교시)

[2013년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 공간에서 $(1,1,2)$ 방향으로 진행하던 빛이 평면 $2x-y+3z=5$ 에 반사되어 나가는 방향을 구하시오.

2. (5점) 공간의 점 $P=(a,b,c)$ 에서 평면 $x+2y-z=6$ 위에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오.

3. (5점) 벡터 $\mathbf{a}=(1,-2,3,-4)$ 가 표준단위벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 와 이루는 각을 각각 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 라고 할 때,

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3$$

의 값을 구하시오.

4. (5점) 다음 세 벡터가 일차독립인지 일차종속인지 판별하시오.

$$(1,1,0,1), \quad (0,4,-1,1), \quad (2,-2,1,1)$$

Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. 빛의 진행방향을 $\mathbf{v} = (1,1,2)$, 평면에 수직인 벡터를 $\mathbf{n} = (2,-1,3)$ 이라 하면, 반사되어 나가는 방향 $\mathbf{v}^*$ 는

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - 2p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = (-1,2,-1)$$

이다. (5점)

2. 수선의 발의 좌표를 (α,β,γ) 라고 하면,

$$(\alpha - a, \beta - b, \gamma - c) = t(1,2,-1)$$

을 만족하는 상수 t 가 존재하고, (1점)
(α,β,γ) 는 평면 $x+2y-z=6$ 위의 점이므로,

$$(a+t) + 2(b+2t) - (c-t) = 6$$

을 만족한다. 따라서 $t = 1 - \dfrac{a+2b-c}{6}$ 이고, (4점)

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(1 + \frac{5a-2b+c}{6}, 2 - \frac{a-b-c}{3}, -1 + \frac{a+2b+5c}{6}\right)$$

이다. (5점)

3. $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4) = (1,-2,3,-4)$ 라 하면, 모든 $i = 1,2,3,4$ 에 대하여

$$a_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i = |\mathbf{a}|\cos\theta_i$$

이므로,

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 &= 3 - (\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3)\\ &= 3 - \left(\frac{a_1^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\mathbf{a}|^2}\right) = 3 - \left(1 - \frac{a_4^2}{|\mathbf{a}|^2}\right)\\ &= 2 + \cos^2\theta_4 = 2 + \frac{16}{30} = \frac{38}{15}\end{aligned}$$

이다. (5점)

4. $(0,4,-1,1) = 2(1,1,0,1) - (2,-2,1,1)$ 이므로 주어진 세 벡터는 일차종속이다. (5점)