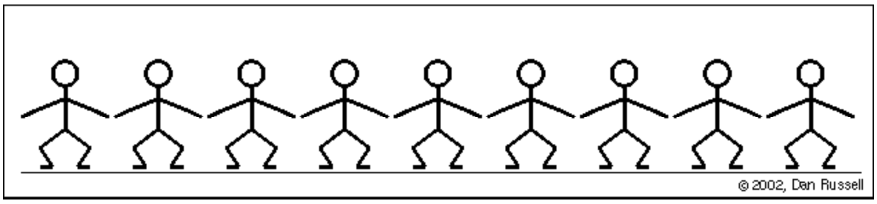
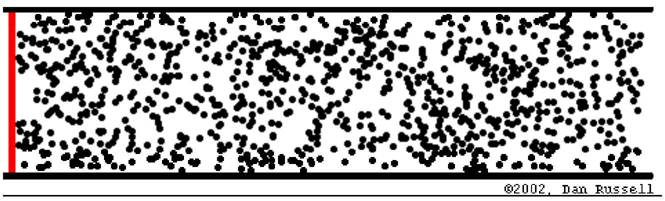


Chapter 16. Wave1

파동

- 파동 : 외력에 의해서 변형이 가능한 물체에서 진동, 또는 떨림 운동을 의미한다.
  - 파동은 물체의 특정부분에 외력을 가해서 변형을 시킬 때 만들어짐
  - 물체의 탄성 복원력이 한 부분에 가해진 요동을 인접한 부분으로 전파함
  - 요동은 점진적으로 물체의 전반으로 퍼져나간다.
- 파동이 전파하는 탄성이 있는 물체 → 매질
- 매질에 파동이 지나갈 때는 매질을 구성하는 입자들은 요동을 하지만 매질 전체의 병진운동은 없다.



파동과 입자

- 고전물리학의 두 가지 기본개념
  - 입자: 물질을 이루는 아주 작은 점 :
    - 질량, 위치, 운동량 등을 가지며 정해줄 수 있음
  - 파동: 에너지가 공간에 넓게 퍼져있는 것:
    - 진동의 전파를 통해 운동량과 에너지가 전파됨
- 파동의 종류
  - 역학적 파동: 수면파, 음파, 지진파, 탄성파
    - 본질: 매질을 이루는 입자들의 진동이 주변으로 전파되는 현상
    - 기본방정식: 역학적 파동방정식 (⇐ 뉴턴의 운동법칙)
  - 전자기 파동: 빛(가시광), 적외선, 자외선, 방송파, X-선 등
    - 본질: 전기장과 자기장의 진동의 전파 (매질을 이루는 입자와 무관)
    - 기본방정식: 전자기 파동방정식 (⇐ 맥스웰의 전자기장 방정식)
    - 특징: 진공에서의 속도 = 299,792,458 m/s
  - 물질 파동: 전자, 양성자, ... 등
    - 본질: 확률진폭의 파동
    - 기본방정식: 쉬뢰딩거 파동 방정식

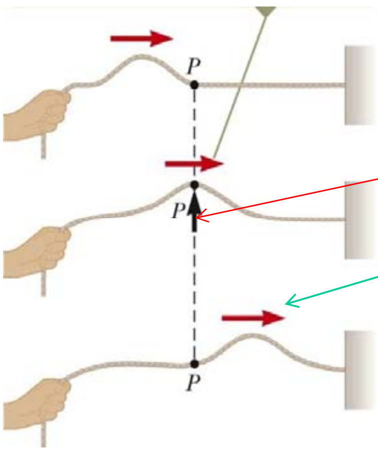
왜 파동이 중요한가?

- 파동에 에너지를 담을 수 있음
- 파동을 이용해서 다른 곳으로 에너지를 보낼 수 있음.
  - 수면파: 수면에 던져진 돌의 운동 E → 파동의 에너지
  - 태양으로 받은 에너지: 전자기파동(빛)의 형태(복사)로 에너지를 받음
- 물질은 근본적으로 입자의 특성과 동시에 파동의 특징을 지님: 물질파..

왜 자연은 파동을 선택했을까

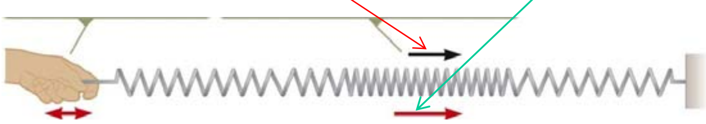
- 주변에 먼가를 보내서 알리고 싶을 때
  - 돌(입자)을 던져서 → 돌의 개수로 정보를 전달할 수 있다.
  - 그러나 중간에 장애물이 있으면 돌은 원하는 지점으로 보낼 수 가 없다.
  - 파동을 쓰면 중간에 장애물이 있더라도 너무 크기 않으면 별다른 영향을 받지 않고 원하는 지점에 보낼 수 있다(회절:diffraction).
  - 그러나 입자와 달리 파동은 공간적으로 퍼져 있으므로 필요없이 에너지가 많이 소요된다....

진동방향에 따른 파동의 종류



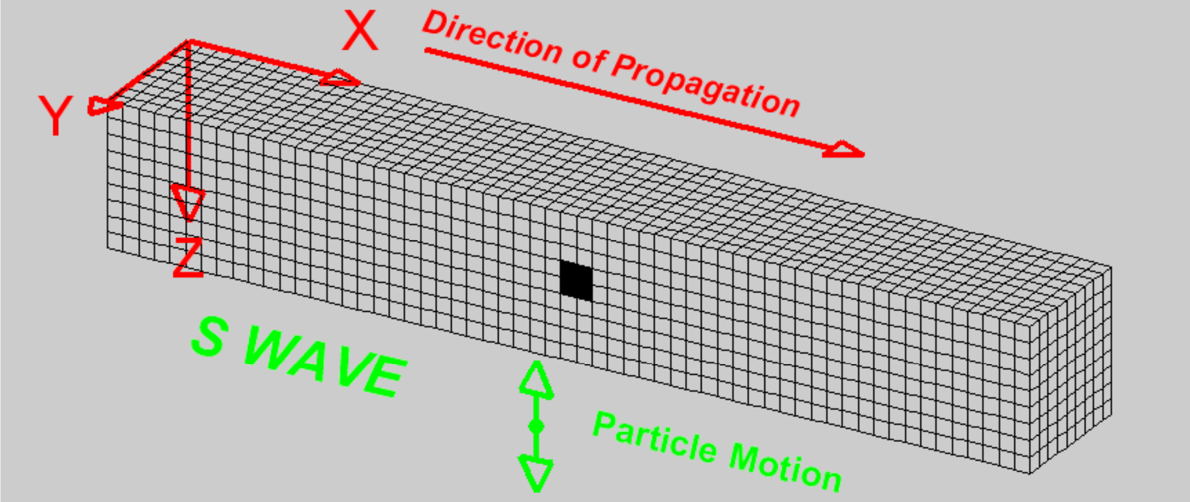
- 횡파: 매질의 진동방향이 파동의 전파방향과 수직

- 종파: 매질의 진동방향이 파동의 전파방향과 나란함



횡파(transverse wave, 가로파동)

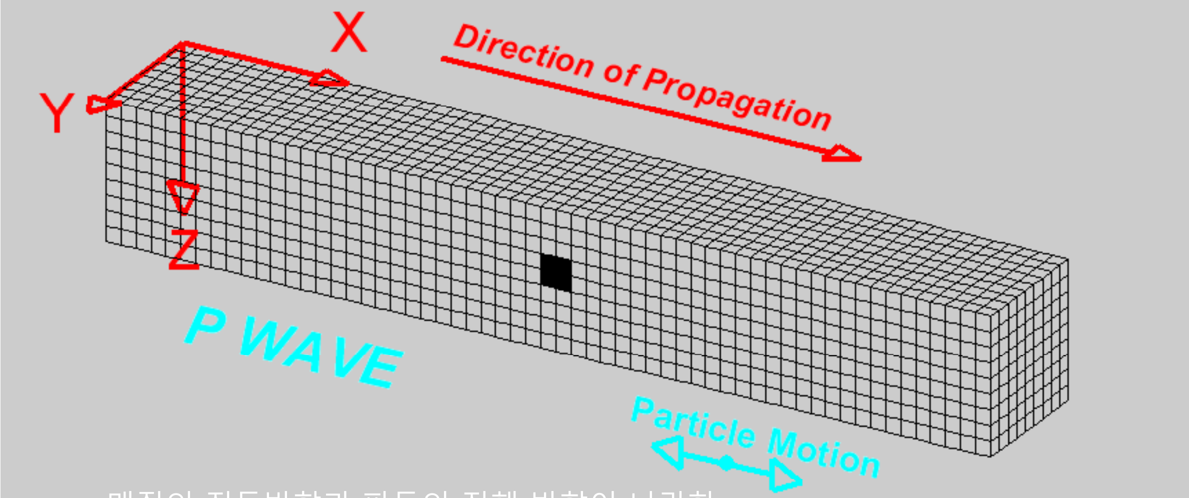
-- 줄의 파동, 빛, 지진파의 S파....



✓매질의 진동방향과 진행방향이 서로 수직함
✓매질의 입자는 제자리에서 진동을 함.

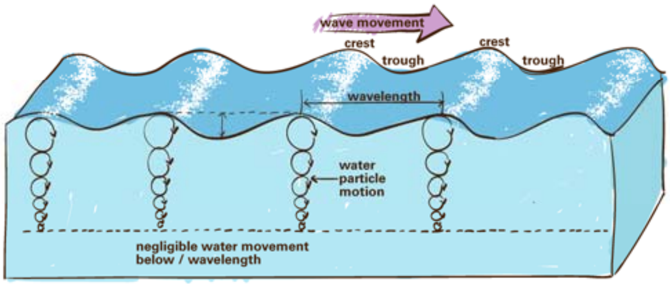
종파 (longitudial wave, 세로파동)

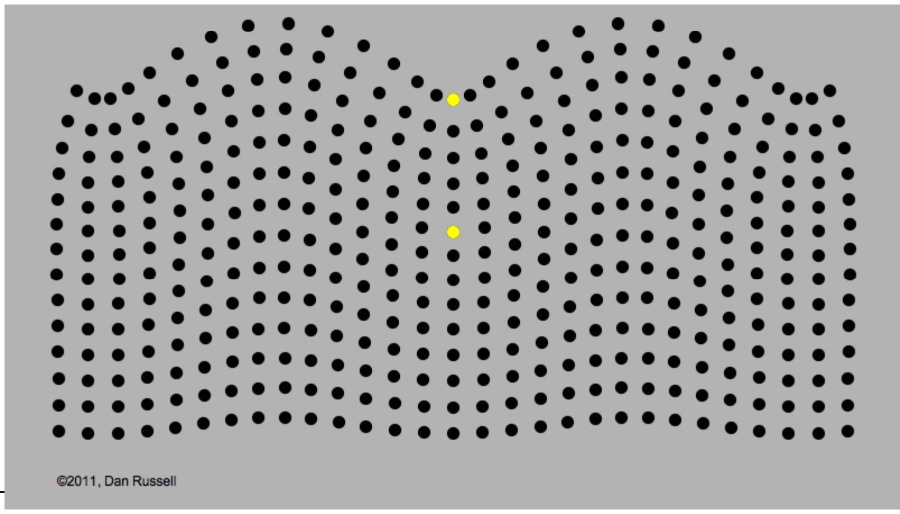
-- 음파(소리), 지진파의 p파



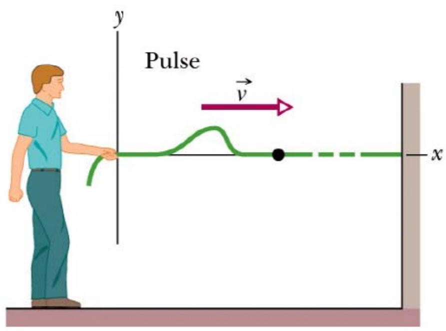
매질의 진동방향과 파동의 진행 방향이 나란함
매질 입자는 제자리에서 진동함.

수면파: 종파와 횡파의 합





움직이는 파동의 수학적 기술

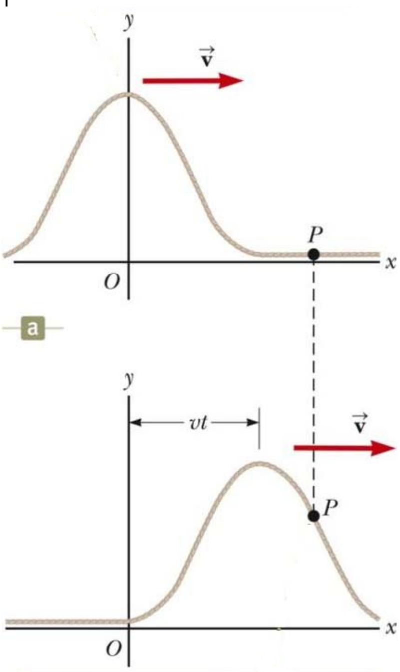


- x-방향으로 늘어선 줄에 생기는 y-방향의 요동을 수학적으로 어떻게 기술하는가?
  - X-축 : 파가 진행하는 방향;
  - Y-축 : 파의 진동방향
- 줄에 생긴 파동은 줄이 평형에서 벗어난 정도(y)를 위치 x와 시간 t의 함수로 나타낸 파동함수로 구현할 수 있다..

$$\text{파동함수}: y = y(x,t) \Rightarrow \text{공간}(x)\text{과 시간}(t)\text{의 함수}$$

파동의 수학적 기술 : 파동함수

줄에 생긴 파동은 일정한 형태를 유지하면서 줄을 따라 이동한다:



- t=0 일 때, 파동의 모양(줄의 변위)은 x-의 함수로 주어진다

$$y(x,0) = f(x)$$

- 파동의 속력이 v로 오른쪽으로 움직일 때, 시간 t 후에는 파동은 원래의 모양에서 오른쪽으로 x=vt 만큼의 평행이동으로 주어진다(모양에 변함이 없다) :

$$y(x,t) = (t = 0\text{일때 파동의 } vt-\text{만큼 평행이동}) \\ = y(x - vt, 0) = f(x - vt)$$

$$y(x,t) = f(x - vt): \text{오른쪽으로 이동하는 파동} \\ y(x,t) = f(x + vt): \text{왼쪽으로 이동하는 파동}$$

움직이는 **Pulse**

- 오른쪽으로 이동하는 펄스 예:

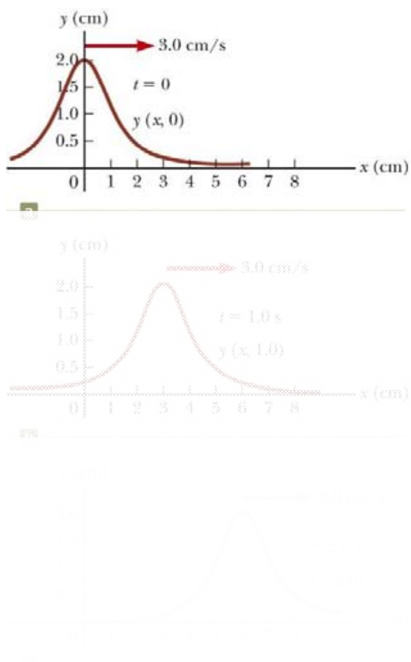
$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2 + 1}$$

$$(x, y\text{의 단위} = \text{cm}, t\text{의 단위} = \text{s})$$

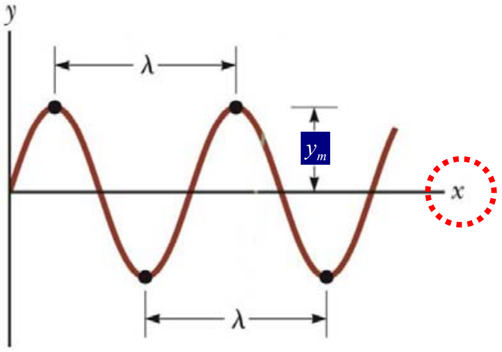
$$t = 0(s) \rightarrow y(x,0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$t = 1(s) \rightarrow y(x,t) = \frac{2}{(x-3)^2 + 1}$$

$$t = 2(s) \rightarrow y(x,2) = \frac{2}{(x-6)^2 + 1}$$

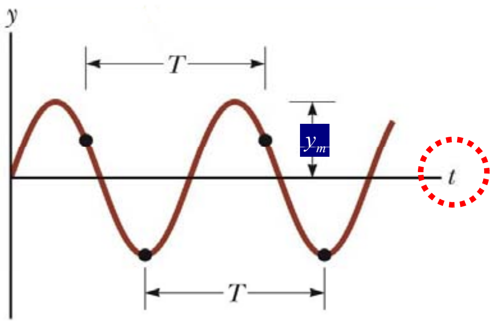


Sine형 파동(sinusoidal waves)

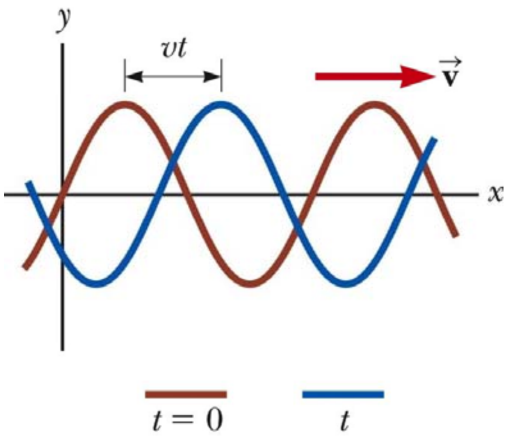


- 마루(crest) : 매질의 변위가 최대인 점
- 골(trough) : 매질의 변위가 최저인 점
- 파장(wavelength) : 파동의 어떤 한 점과 같은 변위를 갖는 가장 인접한 점 사이의 거리
  예) 이웃한 두 마루 사이 거리리

- 주기(period) : 한 파장을 이동하는데 걸리는 시간
  $T = \lambda / v \quad [s]$
- 진동수(frequency) : 주기의 역수
  (단위 시간당 진동 횟수)
  $f = 1/T = v/\lambda \quad [\text{Hz}] = [\text{s}^{-1}]$



Sine형 파동



- 특정한 시각 t에서($t=0$), 파동함수는
  $y(x,0) = y_m \sin(ax)$ 형태 : y_m = 진폭(amplitude)
- $y(x,0)$는 파장 λ마다 반복되므로(x 의 주기함수)
  $\rightarrow \underline{a = 2\pi/\lambda}$

$$\rightarrow y(x,0) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}x\right]$$

임의의 시간 : $\boxed{y(x,t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]}$

$v = \lambda / T$이므로 $\boxed{y(x,t) = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$

- 파수 (*wave number*) : $k = 2\pi/\lambda$
- 각진동수 (*angular frequency*) : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin[kx - \omega t]}$$

일반적인 Sine형 파동

- 일반적인 사인형 파동의 표현:

$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)}$$

$$y_m = \text{진폭(amplitude)}$$

$$\phi = \text{위상상수(phase constant); 초기조건에 의해 결정}$$

$$kx - \omega t + \phi = \text{위상}(phase):$$

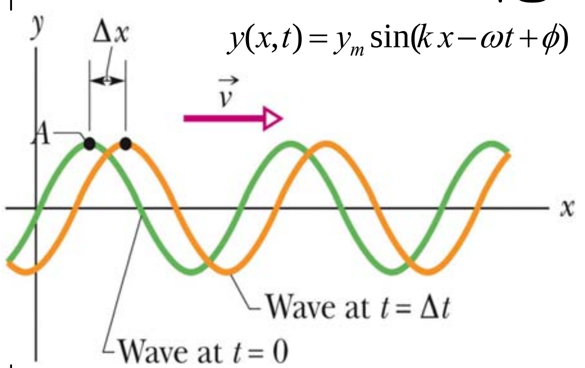
- 진행하는 파동함수의 인자는 항상 $\boxed{kx \pm \omega t}$ 의 조합으로 주어짐

e.g.

1. $y(x,t) = \sqrt{ax + bt} \quad \Rightarrow k = a,\ \omega = b$ 인 파동을 나타낸다.
2. $y(x,t) = \sin^2(ax^2 - bt)$는 진행하는 파동이 아님

파동의 속도 again

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$



- t=0, t=Δt 일 때, 각각 그린 위치에 따른 파동의 모습
- 이 시간 동안 +x 방향으로 Δx 만큼 진행
- 파동의 속력 = Δx/Δt
- 이 비를 어떻게 구할까?

- 마루(A지점)의 이동 : 같은 변위 → 같은 위상 즉, 위상의 변화가 없다.

$$\underbrace{kx - \omega t + \phi}_{\text{이동 전 위상}} = \underbrace{k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \phi}_{\text{이동 후 위상}}$$

$$\Rightarrow \quad k\,\Delta x = \omega\,\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = f\lambda} \text{ : 파의 속력}$$

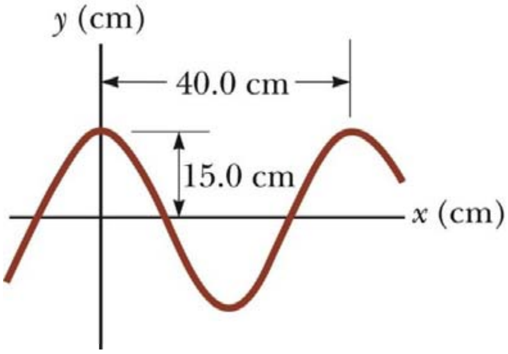
- 파동의 속도는 위상이 같은 지점들(파면)이 움직이는 속도

$$\boxed{kx - \omega t = const} \rightarrow t \text{에 대해서 미분}$$

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \rightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$$

$$\boxed{v = f\lambda}$$

$+x$ 방향으로 진행하는 사인형 파동이 있다. 진폭이 15.0 cm, 파장이 40.0 cm, 진동수가 8.00 Hz이며, $t = 0$과 $x = 0$에서 매질 요소의 수직 위치는 그림과 같이 15.0 cm이다.



- 파수, 주기, 각진동수, 속력?

파수 : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{40\text{cm}} = 15.7 \text{ rad/m}$

주기 : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{8\text{s}^{-1}} = 0.125\text{s}$

각진동수 : $\omega = 2\pi f = 2\pi(8\text{s}^{-1}) = 50.3\text{rad/s}$

속력 : $v = \lambda f = (40\text{cm})(8\text{s}^{-1}) = 3.2\text{m/s}$

- 위상상수 및 파동함수?

$y(0,0) = 15\text{cm}$

$\rightarrow 15 = 15\sin\phi \rightarrow \sin\phi = 1 \rightarrow \phi = \pi/2$

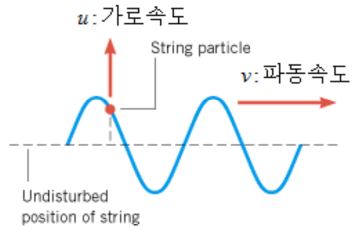
파동함수 :

$y(x,t) = (0.15\text{m})\sin[(15.7\text{rad/m})x - (50.3\text{rad/s})t]$

가로속도, 가로가속도

파동이 진행할 때 매질입자가 움직이는 속도와 가속도는?

- $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$



- 임의의 지점에서 줄의 모든 부분은 y 방향으로 조화진동을 함
- 조화진동의 속도 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{가로속도(transverse velocity)}}$

$$u \equiv \frac{\partial y}{\partial t} = x - \text{위치를 고정한 채 } t\text{에 대한 변화율}$$

$$= -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

- 가로가속도 (transverse acceleration) :

$$a_y \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y$$

$$\longrightarrow (\text{가속도}) \propto -(\text{변위})$$

: y − 방향으로 $\boxed{\text{조화진동}}$ 을 의미함

파동의 속도: 차원해석 법

- 파동의 속도에 관련된 물리량

  ⇒ 줄의 장력 and 줄의 단위길이당 질량

$$\begin{cases}[\text{속도}]=[v]=LT^{-1}, \\ [\text{장력}]=[\tau]=MLT^{-2} \\ [\text{선밀도}]=[\mu]=ML^{-1}\end{cases}$$

⇒ 파동의 속도:

$\boxed{v=C\tau^{a}\mu^{b}}$, $C=$ 상수

로 가정

$$[\text{좌변}]=LT^{-1}$$

$$[\text{우변}]=(MLT^{-2})^{a}(ML^{-1})^{b}=M^{a+b}L^{a-b}T^{-2a}$$

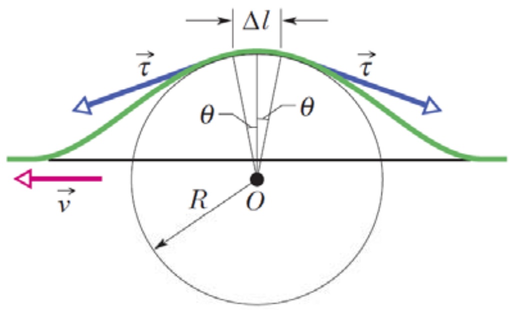
$$\rightarrow a=1/2,\ b=-1/2$$

$$\boxed{v=C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}} \quad (\text{정확한 식}: C=1)$$

팽팽하고, 선밀도가 작은 줄일수록 파동의 속도가 크다!

뉴턴의 2법칙을 이용한 줄에서 파동의 속도

오른쪽으로 이동하는 좌우 대칭적 펄스 (진폭=R)가 줄에서 움직이는 경우: 이 펄스와 같은 속도로 움직이는 관성계에서 보면 펄스는 옆 그림처럼 고정되고, 대신 줄이 왼쪽으로 v의 속도로 움직인다.



- Δl 부분이 받는 알짜힘 (↓ 방향):

  $F=2\tau\sin\theta$

- Δl 부분의 질량: $\Delta m=\mu\Delta l$

- 이 관성계에서 줄은 왼쪽으로 움직인다.

  Δl 부분이 원에 접하므로 원운동 구간임:

$$\tau\sin(2\theta)=\Delta m\frac{v^{2}}{R}$$

$$\tau(2\theta)\approx(\mu\Delta l)\frac{v^{2}}{R}$$

$$\tau\frac{\Delta l}{R}=(\mu\Delta l)\frac{v^{2}}{R}$$

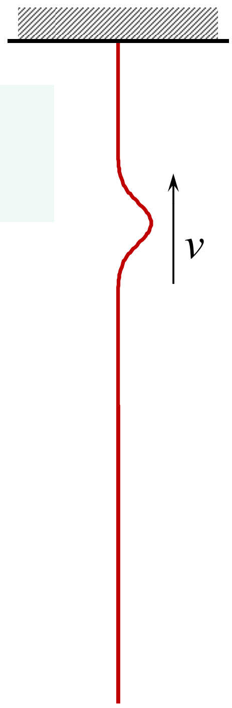
$$\Rightarrow \boxed{v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}$$

: 장력과 줄의 질량에만 의존

*차원해석 결과와 비교

Wave on vertical string

A heavy rope hangs from the ceiling, and a small amplitude transverse wave is started by jiggling the rope at the bottom. As the wave travels up the rope, its speed will:



(a) increase

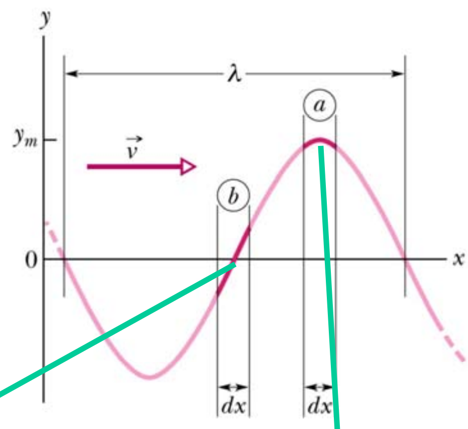
(b) decrease

(c) stay the same

- *Can you calculate how long will it take for a pulse travels a rope of length L and mass m ?*

파동의 에너지

- 줄에 파동이 지나가면 진행방향에 수직방향으로 매질입자는 진동 → 운동에너지를 가짐
- 옆 입자와 진동변위가 다르므로 → 줄의 탄성에 의한 위치에너지를 가짐



- 줄의 가로진동 (↕) 속력 = 가로속도 = u

$$y = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

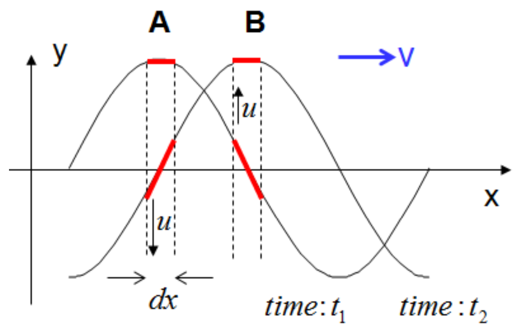
$\underbrace{y = 0 \text{ 일 때}}_{kx-\omega t=\pi/2,\dots}$
- 매질입자의 가로속도가 가장 큼
  → 운동에너지 = 최대
- 옆입자와 간격이 가장 많이 벌어짐
  → 탄성 위치에너지 = 최대

$\underbrace{y = y_m \text{ 일 때}}_{kx-\omega t=0,\pi,\dots}$
- 매질입자의 가로속도 = 0
  → 운동에너지 = 0
- 옆입자와 간격이 가장 적음
  → 탄성 위치에너지 = 0

줄에 파동이 지나가면 에너지가 많은 부분→적은 부분으로 이동

줄을 따라 진행하는 파동의 에너지와 일률*

파가 줄을 따라 이동하더라도 줄의 각 부분이 파 진행방향으로 움직이는 것이 아니라, 매질의 각 부분은 위-아래로 움직인다(횡파). 파의 진행방향으로 전달되는 것은 파의 에너지다.



- dx 부분의 진동($\updownarrow$)속력 = 가로속력 = u

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

- dx − 부분의 운동에너지:

$$dK = \tfrac{1}{2}(dm)u^2 \qquad (dm = dx \text{ 부분질량})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

- 파동에 의한 운동에너지 전달율:

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t), \quad v = \frac{dx}{dt} = \text{파동속도}$$

- 한 파장내에서 평균에너지 전달율: $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \left(\frac{dK}{dt}\right) dx$

$$\Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \underbrace{\left[\cos^2(kx - \omega t)\right]_{avg}}_{=1/2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2$$

- Sine 파동 $\longrightarrow$ <u>운동E − 평균</u> = <u>위치E − 평균</u>
  (조화진동자를 생각하면 됨)

- 평균파워: 파동이 전달하는 시간당 에너지

$$P_{avg} = \left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} + \left(\frac{dU}{dt}\right)_{avg}$$
$$= 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{avg} = \tfrac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2$$

note : $P_{avg} \propto \omega^2 y_m^2$: 일반적인 파동에서 특징

파동방정식*

$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$가 만족하는 파동방정식은?
**편미분의 개념을 모르면 생략

- $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \phi) \\ \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

- $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k y_m \cos(kx - \omega t + \phi) \\ \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

$$\text{where} \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

; x − 축으로 따라 속도 v로 움직이는 파동방정식

[$check$]임의의 $f(x)$에 대해서 $f(kx \pm \omega t)$가 이 파동방정식의 해가 됨을 체크할 수 있다.

Problem

• $y(x,t)=\dfrac{2}{(x-3t)^2+1}$ 가 파동방정식을 만족시킴을 보이라.

(1) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{12(x-3t)^2-4}{\left[(x-3t)^2+1\right]}$

(2) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{108(x-3t)^2-36}{\left[(x-3t)^2+1\right]^3}=9\dfrac{12(x-3t)^2-4}{\left[(x-3t)^2+1\right]^3}$

• 두 식의 우변을 비교하면

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{9}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\rightarrow v=3.0\text{cm/s}$

$\Rightarrow$ *Sine*파동뿐만아니라 일반적인 파동에 대해서도 파동방정식

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 을 만족시킨다.

줄에서 파동방정식 유도*

• 줄의 미소부분(ℓ): 장력 F_1 & F_2 를 받음

• ℓ 부분은 파동이 지나가면 ↕진동을 한다

$x: F_x=F_{2x}-F_{1x}=0$ (횡파: 줄방향 운동없음)

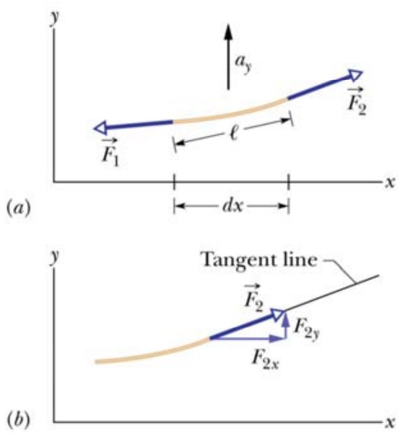
$y: F_y=F_{2y}-F_{1y}=(dm)a_y=(\mu\ell)a_y\approx(\mu dx)a_y=(\mu dx)\dfrac{d^2y}{dt^2}$

• 줄 장력: $\tau=\sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2}\approx F_{2x}$(평형에서 많이 안벗어남)

• ℓ부분 양끝에서 기울기 차이:

$S_2\equiv\dfrac{F_{2y}}{F_{2x}}\rightarrow F_{2y}=F_{2x}S_2=\tau S_2$

$S_1\equiv\dfrac{F_{1y}}{F_{1x}}\rightarrow F_{1y}=F_{1x}S_1=\tau S_1$



$y: \tau S_2-\tau S_1=\mu dx\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$\rightarrow\dfrac{S_2-S_1}{dx}=\dfrac{\mu}{\tau}\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$\therefore\ \boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\mu}{\tau}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$

• 파동방정식과 비교

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2},$

$\therefore\ \boxed{v=\sqrt{\dfrac{\tau}{\mu}}}$

• 줄의 기울기는 $S=dy/dx$로 표현됨.

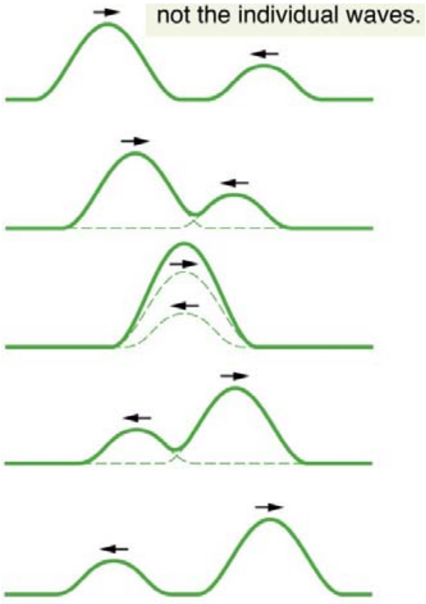
• ℓ 양끝에서 기울기차: $S_2-S_1=dS$

$(LHS)=\dfrac{S_2-S_1}{dx}=\dfrac{dS}{dx}=\dfrac{d(dy/dx)}{dx}$

*분모단위 $=(\text{길이})^2$

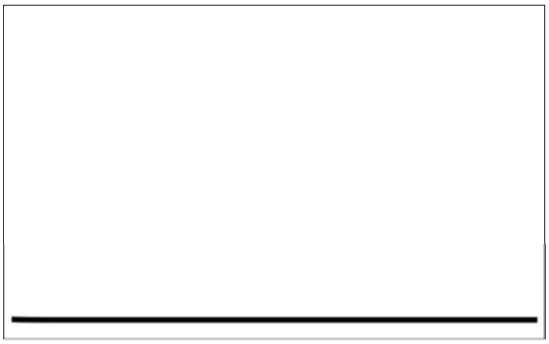
파동의 중첩

•중첩되는 파동의 합성파동은 각 파동의 대수적인 합으로 주어진다.
•각 파동의 진행방향은 변하지 안는다.



당겨진 실을 따라
반대 방향으로 진행하는 두 파동이
만나 겹쳐졌다 다시 제각각 진행하는 모습.

합성파동 : $y(x,t) = \underbrace{y_1(x,t) + y_2(x,t)}_{\text{두 파의 합}}$



•중첩의 원리:
여러효과가 동시에 일어날 때, 전체 효과는
개별효과의 합으로 주어짐.

파동의 간섭

$$\sin(A) + \sin(B) = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$y_1(x,t) = y_m \sin(\underbrace{kx - \omega t + \phi}_{\text{파동의 위상}})$$

$$y_2(x,t) = y_m \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{파동의 위상}})$$

•위상차가 있는 두 파동(동일한 파장, 진동수)의 중첩:

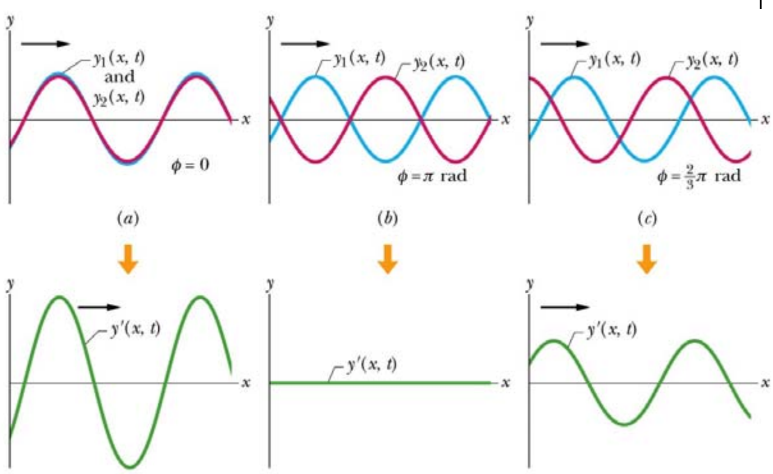
$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t + \phi) + y_m \sin(kx - \omega t)$$
$$= \left[2y_m \cos\left(\tfrac{1}{2}\phi\right)\right]\sin\left(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi\right)$$

•합성파의 진폭 $= 2y_m \cos\left(\tfrac{1}{2}\phi\right)$
$\rightarrow$ 위상차(ϕ)에 의존함

•위상차 $= \phi = 0$ (*in phase*)
$\longrightarrow$ 보강간섭; 진폭 두 배
$y(x,t) = 2y_m \sin(kx - \omega t)$

•위상차 $= \phi = \pi$ (*out of phase*)
$\longrightarrow$ 상쇄간섭; 진폭 $= 0$
$y(x,t) = 0$

•위상차 $= \phi = 2\pi/3 \rightarrow$ 진폭 $= y_m$
$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \pi/6)$

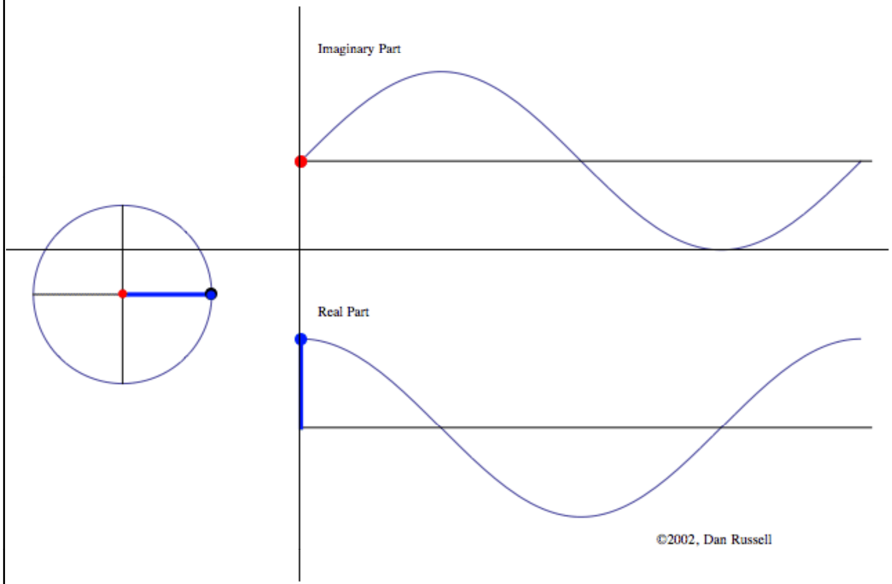


보강간섭

상쇄간섭

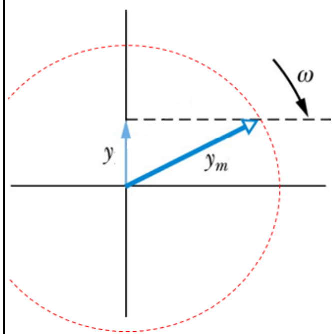
진폭이 같을 필요는 없다

원운동과 파동

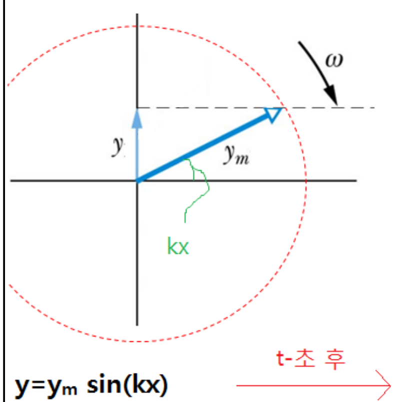


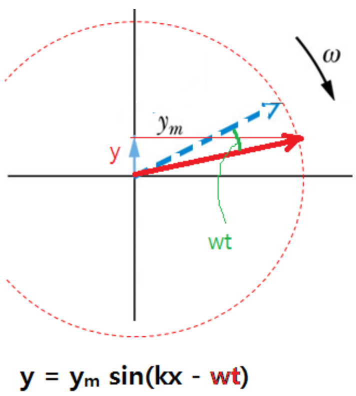
- 원운동하는 입자의 x-y 좌표는 조화진동으로 표현된다.
- 따라서 한 지점에서 조화파동을 나타낸다고 생각할 수 있다.

위상자(phasor)



- 파동 $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$은 고정 위치(x=0으로 잡아도 됨)에서 시간에 따라 조화진동을 한다.
- 또, 조화진동은 평면에서 회전(각속도:ω)하는 벡터의 y-축 정사영 (cosine은 x-축)으로 볼 수 있다.
- **위상자(phasor)**: 주어진 진동을 기술하는 평면에서 회전하는 벡터.





- 특정 x 위치에서 파동의 값 변화

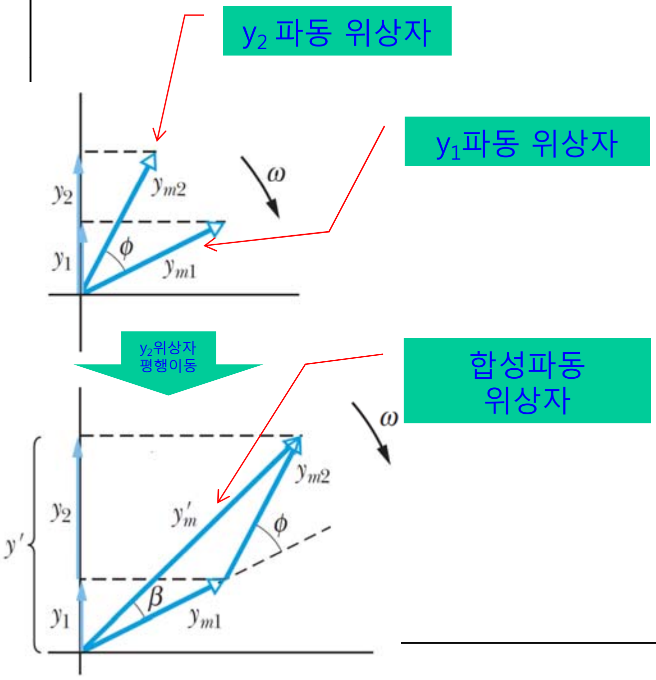
$$y(x, t=0) = y_m \sin(kx)$$

$$\longrightarrow y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

;파동을 각속도 ω로 시계방향으로 회전하는 위상자의 $y-$축 정사영으로 생각할 수 있다.

위상자를 이용한 파동의 합성

위상자를 이용하면 두 파동의 합성파동을 구할 때 벡터의 합성으로 생각할 수 있기 때문에 합성파동의 진폭과 위상상수를 구하기가 쉬어진다.



$y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx-\omega t)$ 과

$y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx-\omega t+\phi)$ 의

합성파동의 진폭($\underline{y'_m}$) 및 위상상수($\underline{\beta}$)는?

$$y = y_1 + y_2 = y'_m \sin(kx-\omega t+\beta)$$

- $y_{m1}\sin(kx-\omega t) + y_{m2}\sin(kx-\omega t+\phi) = ?$

;삼각함수를 이용해서 계산가능(복잡)

- 위상자 이용 : $x = 0 = t$일 때

  y_1위상자 벡터 $= (y_{m1}, 0)$

  y_2위상자 벡터 $= (y_{m2}\cos\phi, y_{m2}\sin\phi)$

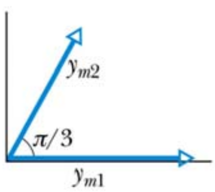
- 합성파동 위상자 벡터 =

  $(y_{m1} + y_{m2}\cos\phi, y_{m2}\sin\phi)$

보기 16-7

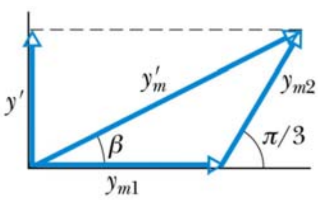
Q. 진폭이 y_{m1}=4.mm, y_{m2}=3.0인 파장이 같은 두 사인파가 같은 방향으로 진행한다. 두 파의 위상상수는 0, π/3이다. 합성파동의 진폭과 위상 상수는?

힌트: 파장이 같고, 같은 줄을 진행하므로 k 와 ω = kv도 같다.
→ 두 파동의 위상자는 항상 같은 각도로 벌어져 있으므로 x=0, t=0일 때 합성파동을 구하면 쉽다



- $x = 0 = t$ 일 때

y_1, y_2 의 위상자



합성파(y')의 위상자

- 합성파 위상자 진폭 :

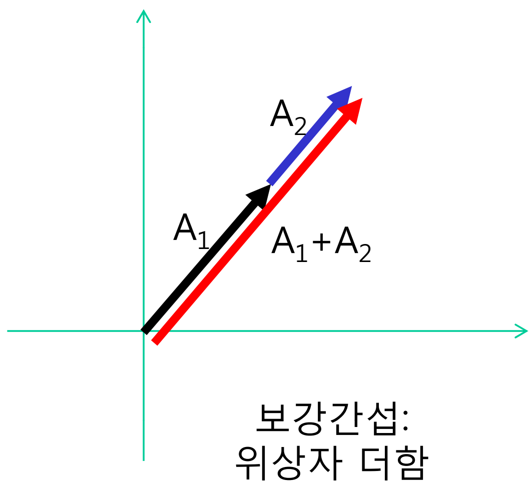
$$y_m' = \sqrt{(y_{m1})^2 + (y_{m2})^2 - 2y_{m1}y_{m2}\cos(2\pi/3)}$$
$$= \sqrt{4^2 + 3^2 - 2(4)(3)(-1/2)} = \sqrt{37}\ \ [\mathrm{mm}]$$

$$y_m'\sin\beta = y_{m2}\sin(\pi/3)$$
$$\rightarrow \sin\beta = y_{m2}\sin(\pi/3)/y_m'$$
$$\rightarrow \beta = 25.3^o$$

합성파 : $y'(x,t) = \sqrt{37}\sin(kx-\omega t+25.3^0)\ \ [mm]$

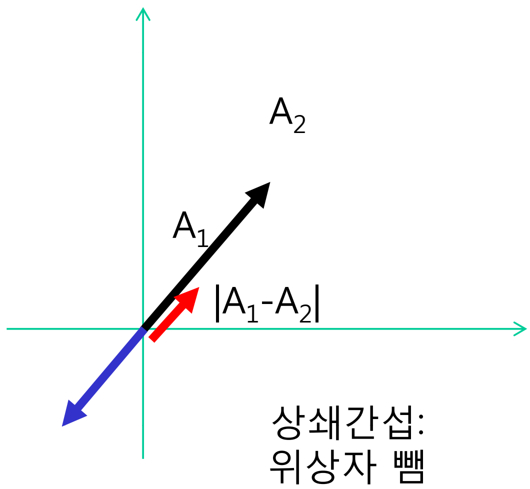
위상차

위상차 = 0



보강간섭:
위상차 더함
→ 진폭의 합

위상차 = 180



상쇄간섭:
위상차 뺌
→ 진폭의 차

정상파(정지파):

$$\sin(A)+\sin(B)=2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

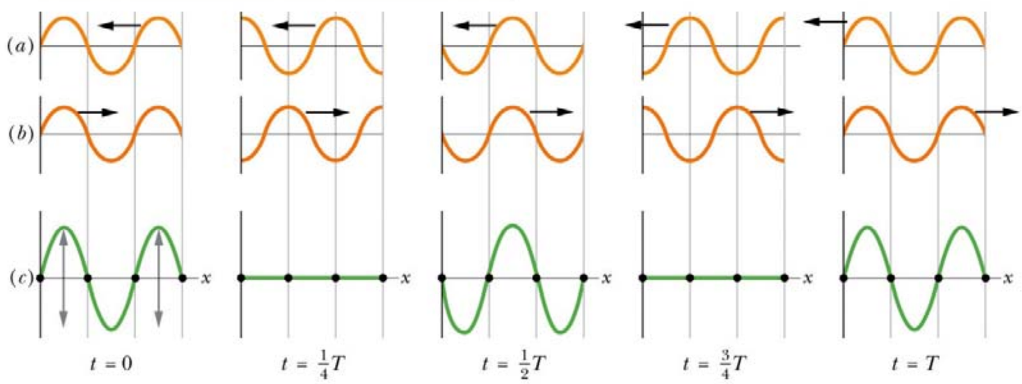
같은 파장, 진동수, 진폭을 갖는 두 파동이 서로 반대방향으로 진행하면서 만나면:

- $y_1(x,t)=y_m\sin(kx-\omega t)$:
  $\rightarrow$ 오른쪽 진행$(kx-\omega t)$
- $y_2(x,t)=y_m\sin(kx+\omega t)$:
  $\rightarrow$ 왼쪽 진행$(kx+\omega t)$

중첩원리

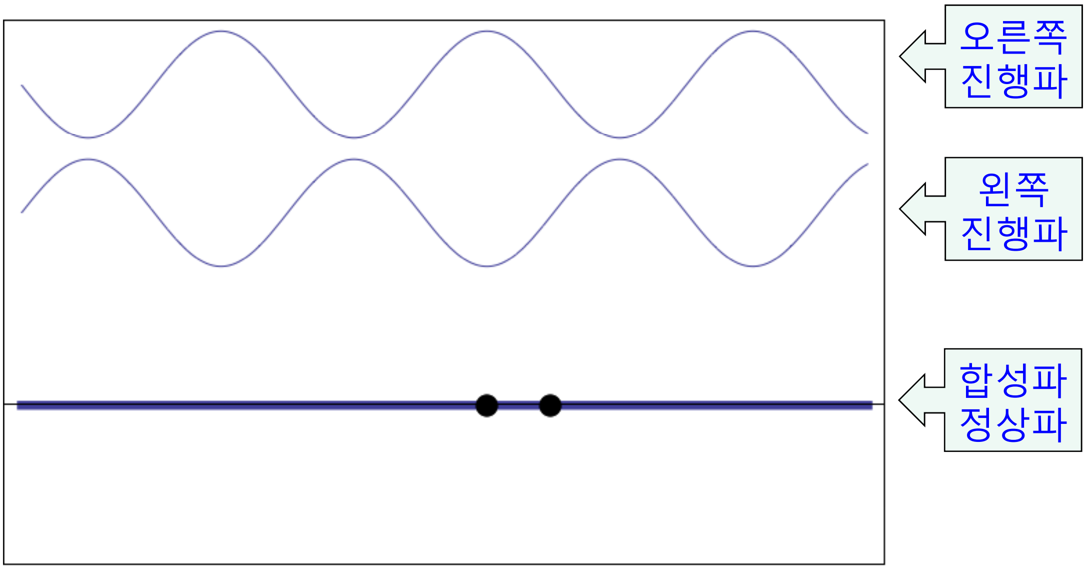
합성파 : $y'(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t);$

$$y'(x,t)=\underbrace{[2y_m\sin(kx)]}_{\text{진폭:}x-\text{의존}}\cos(\omega t)$$



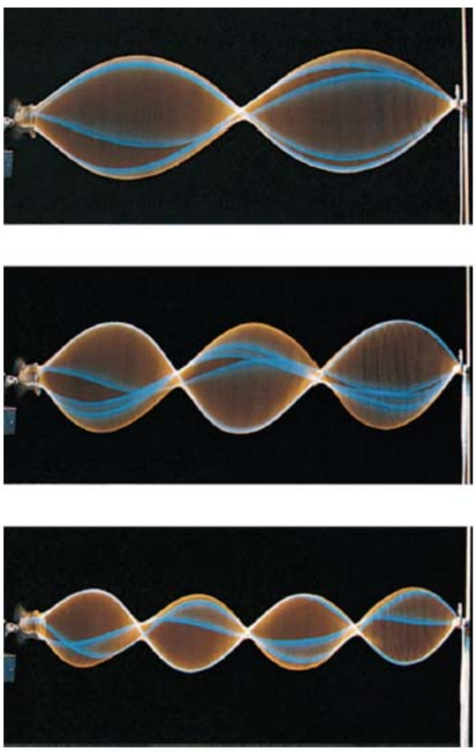
실제 파형

합성파동은 줄의 움직임이 없는 부분(node:마디)와 진폭이
최대가 되는 부분(antinode:배)이 일정한 위치에서 생긴다
→제자리에 정지한 파동처럼 보임 →정상파



정상파에서 진폭이 항상 0인 곳(마디, node)와 최대의 진폭을 가지는 부분(배, anti-node)의 위치는 변하지 않는다

정상파의 마디, 배



정상파 : $y'(x,t) = \underbrace{[2y_m \sin(kx)]}_{\text{진폭}} \cos(\omega t)$

$$\boxed{\text{진폭} = 2y_m \sin(kx) = 2y_m \sin\frac{2\pi x}{\lambda}}$$

- 진폭이 항상 0인 곳(node : 마디)

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi \qquad n = 0,1,2,...$$

$$\Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,...$$

(항상 양끝에서는 node)

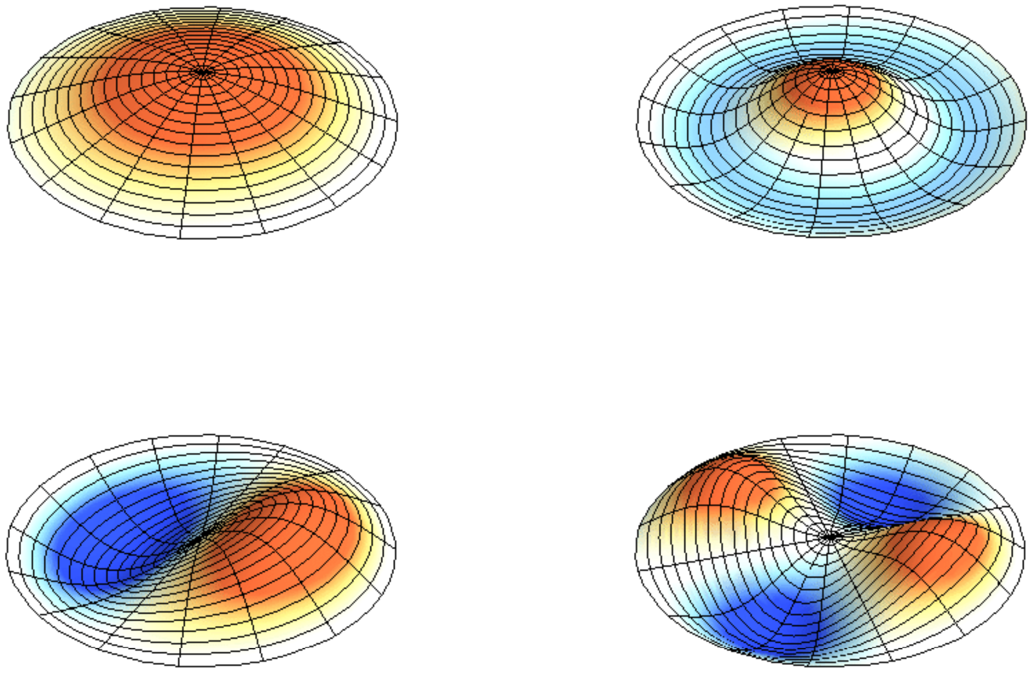
- 진폭이 최대가 나타나는 곳(antinode : 배)

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi, ...$$

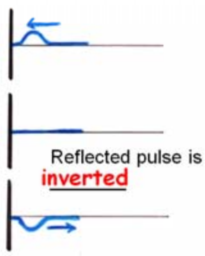
$$= (n + \tfrac{1}{2})\pi \qquad n = 0,1,2,...$$

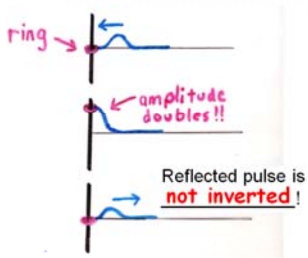
$$\Rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,...$$

Drum (2차원 파동)에 생기는 정상파들…



경계에서 파동의 반사

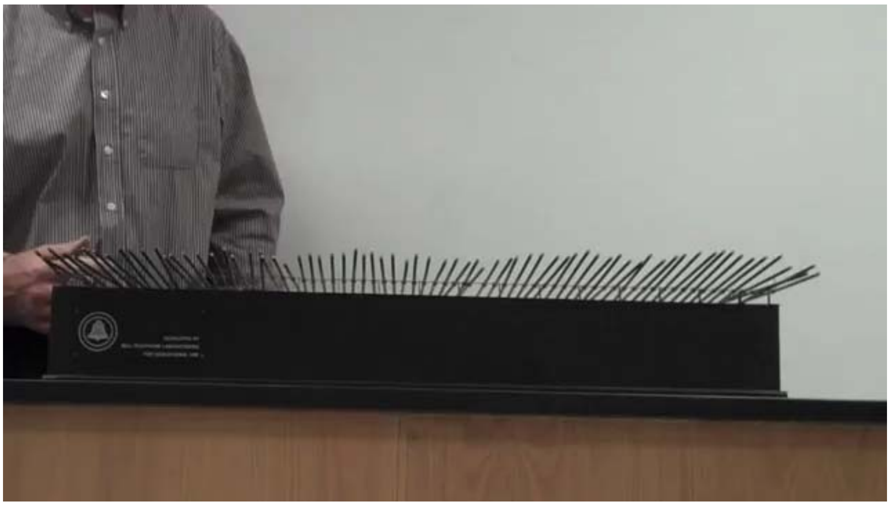




- 고정단 반사: 펄스가 고정단에 위로 향하는 힘을 가하고, 이 반작용이 줄에 아래로 향하는 힘을 줌 → 반사파 변위는 입사파와 반대 부호를 갖음 (위상이 π 차이남)

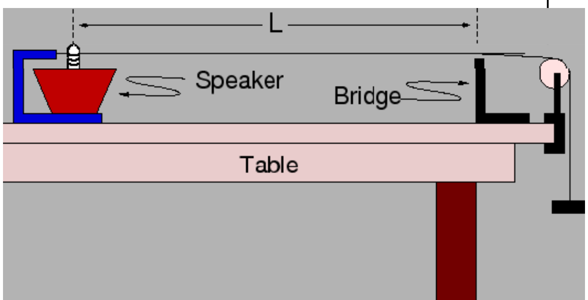
- 자유단 반사: 펄스가 자유단에 가까이 오면 링을 위로 끌고→ 링이 줄을 위로 당기게 되고 → 다시 당겨진 줄이 아래로 내려오면서 입사한 펄스와 같은 부호의 진폭을 갖는 반사펄스를 만듬(같은 위상을 갖음)

횡파의 전파



정상파의 공진

- 조화 진동자를 외부에서 일정하게 흔들면 같은 진동수로 흔들린다.
- 외부진동수가 진동자의 고유 주파수와 같으면 진폭이 매우 커진다 → 공진(공명)!
- 같은 원리로 끝이 고정된 줄에 외부에서 줄을 따라 파동을 연속적으로 만들어 주면 : 원래 파와 줄의 고정된 부분에서 반사된 반사파가 간섭현상을 일으킴.
- 중첩된 파가 정상파를 만들 때, 외부 진동과의 공진에 의해서 만들어졌다고 할 수 있음



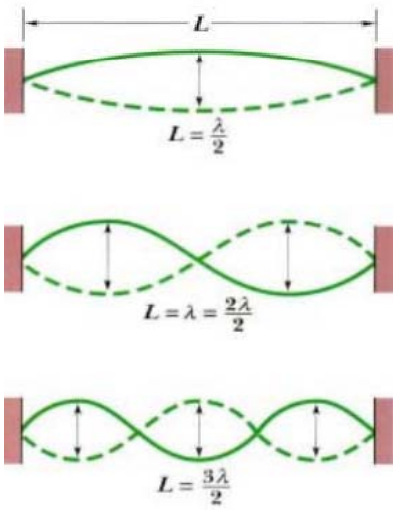
- 양끝이 묶인 실의 공진 : 정상파를 만들 때

$$2L = \lambda n, \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

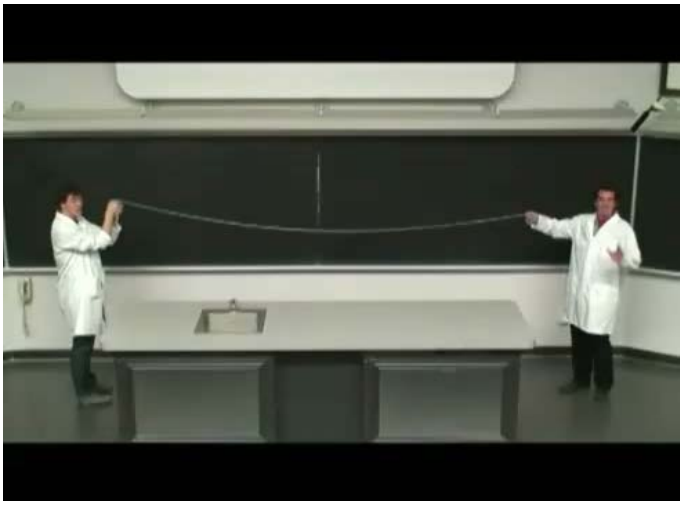
$$\Rightarrow \text{공진진동수}: f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} n, \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

- 파동속력: $v = \sqrt{\tau / \mu}$ 이므로

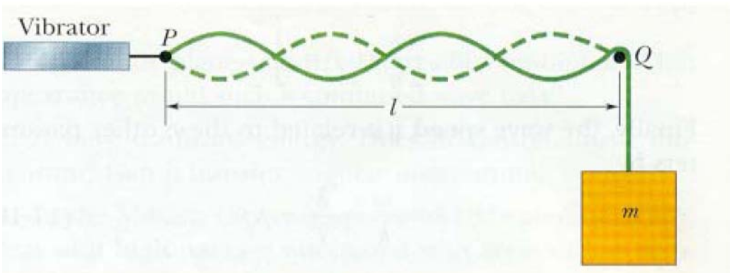
$$\therefore f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = n f_1, \quad f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$



Mechanical vibrator을 이용한 정상파 생성



Ex. 정상파 생성.



$l = 1.2\text{m}$

$\mu = 1.6\text{g/m}$

$f = 120\text{Hz}$

- 정상파 조건 : $l = \left(\frac{1}{2}\lambda\right)n$

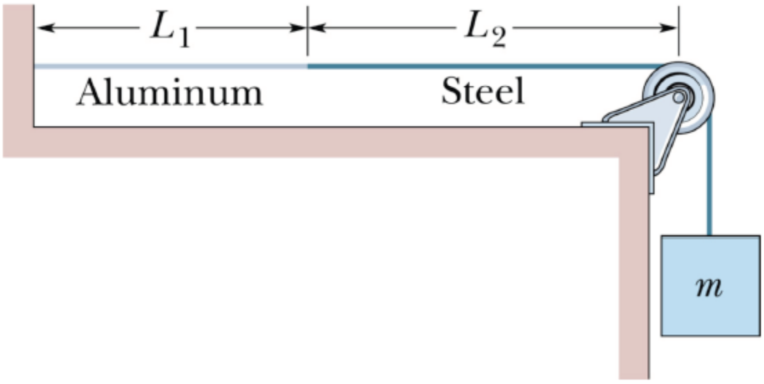
$v = f\lambda \Rightarrow v = \dfrac{2fl}{n}, \quad n = 1,2,3...$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{v^2\mu}{g}$$

$$\therefore m = \left.\frac{4l^2 f^2 \mu}{n^2 g}\right|_{n=4} = 0.85\text{kg}$$

an Aluminum wire of length L_1=60. cm, cross-sectional area 1x10^{-2} cm^2, and density 2.60 g/cm^3, is joined to a steel wire, of density 7.80 g/cm^3 and the same cross section. The compound wire is loaded with a mass m=10.g with L_2=86.6 cm. A transverse wave is set up by an external source. A) find the lowest frequency that generates a standing wave having the joint as one of the nodes. B) How many nodes are observed at this frequency?



알류미늄선과 강철선의 경계에서 마디를 갖는 정상파가 만들어지기 위한 최소의 진동수는?

solution

Note: 두 매질의 밀도가 다르므로, 두 매질에서 만들어지는 정상파의 파장은 다르다. 그러나 장력은& 진동수는 같다

알류미늄에서 n_1개 node가 만들어지면: $L_1 = \frac{\lambda_1}{2} n_1 = \frac{v_1}{2f} n_1$

강철에서 n_2개 node가 만들어지면: $L_2 = \frac{\lambda_2}{2} n_2 = \frac{v_2}{2f} n_2$

same $f \Rightarrow \frac{v_1 n_1}{L_1} = \frac{v_2 n_2}{L_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2} \frac{v_2}{v_1}$

선의질량: $m = \rho A L \to \mu = m / L = \rho A$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_1 A}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_2 A}} \end{aligned}\right\} \text{same } \tau \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

$$\therefore \frac{n_2}{n_1} = \frac{L_2}{L_1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{86.6}{60}\sqrt{\frac{7.8}{6.0}} \cong 2.5$$

최소정수: $(n_1, n_2) = (2, 5)$

since $\tau = mg$,

최소주파수: $f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{mg}{\rho_1 A}} = 289 Hz$