



Physics Laboratory

Last modified : 2015-08-31

실험 1-1B. 포물선 운동

조교 유의 사항

실험 목적

역학은 물리학중 가장 오래된 학문으로 물체의 운동을 연구하는 분야이다. 운동을 기술할 때는 운동학(kinetics)을 다루게 되고, 관련된 힘과 운동하는 물체가 가지는 성질을 운동과 연관지을 때는 동역학(dynamics)을 다루게 된다. 시간에 따른 물체의 위치 즉 운동경로를 구하는 것은 가장 기초적으로 다루어야 할 내용인데, ‘뉴턴의 사과’ 실험에서의 일차원 운동과 포물선 운동과 같은 이차원 운동이 그것 들이다. ‘뉴턴의 사과’에서는 힘(중력)을 받는 방향과 운동방향이 같기 때문에 하나의 좌표에 대한 경로만을 구하였다. 하지만 포물체 운동은 2차원 평면(수직면)상의 등속도 운동과 수직 방향의 등가속도 운동이 결합되어 나타나기 때문에 두개의 좌표에 대한 시간에 따른 위치 정보를 구해야 물체의 운동을 완전히 기술할 수 있게 된다. 포물체가 포물선 운동을 한다는 것은 갈릴레이에 의해 처음으로 발견 되었다.

실험 개요

- 마찰과 회전 운동을 무시한 이상적인 2차원 운동을 기술한다.
- 물체가 각도를 가지고 발사된 경우와 운동을 살펴본다.
- 공기마찰을 많이 받는 공을 사용하여 마찰력이 운동에 미치는 효과를 알아본다.
- ‘뉴턴의 사과’ 실험과 같은 일차원 자유 낙하 실험을 반복하여 장비의 측정 데 이터에 대한 신뢰성을 확인한다.

실험 방법

실험실에는 이 실험을 위해서 다음과 같은 장치가 준비되어 있다. (괄호 안은 준비된 개수)

컴퓨터 (1)

CCD 카메라(1)

기준자 (1)

발사장치(1)

플라스틱 봉(1)


구슬

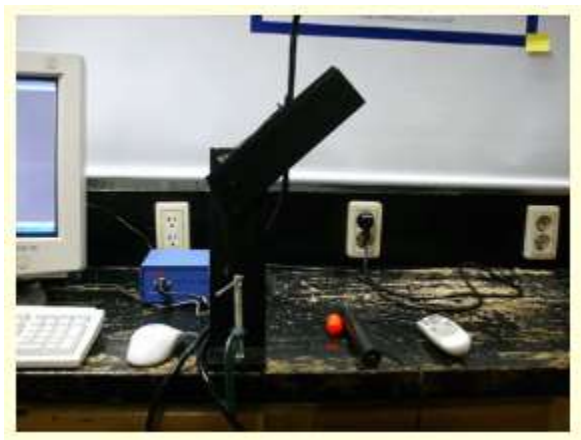
이외에도 더 필요한 것이 있으면 미리 담당 조교나 실험 준비실(19동 111호)로 문의하거나 각자가 미리 준비하도록 한다.

구체적인 실험 방법에 제한은 없으나 권장할 만한 표준적인 실험 방법은 다음과 같다.


실험 시작 전에 CCD를 이용하여 각자 자신의 얼굴을 갈무리하여 보고서에 표지에 자신의 얼굴을 넣게 한다.

1) 다양한 각도로 쏘아올린 물체가 어떤 궤적(trajjectory)을 그리며 운동을 하는지 알아보고 물체의 궤적을 시간의 함수로 구해본다.

① 실험 장치를 동영상  과 같이 꾸민다. 카메라는 운동을 측면에서 관측할 수 있게 설치하는데, 발사장치와 구슬이 떨어질 지점의 중간위치에 설치한다. 기준자를 발사장치와 같은 평면상(즉 운동이 일어나는 평면)에 위치시킨다. (카메라와 기준자의 위치를 잡는 이유를 생각해 보고 결과 분석에 같이 고려해 보아라)




컴퓨터를 켜고 "I-CA" 프로그램을 실행시킨다. 메뉴에 [파일-카메라 설정]을 클릭하여



CCD 화면이 나오는지를 확인한다. (동영상) 



* Tip. 카메라 설정

1. I-CA 프로그램을 실행시킨후 파일메뉴에서 카메라설정을 선택한다.
2. 리모콘의 메뉴를 setup menu 가 뜰때까지 누른다.
3. 셋째줄 ALS/AES 를 선택한다.
4. 마지막 줄 LEVEL -FIX- OFF 를 선택한다.
5. 1/250 을 선택한다.
6. 리모콘에서 BACK 을 누르고 뒤로 돌아간다.
7. AGS/SENS 를 선택한다.
8. LIGHT 를 선택후 NOMAL 을 선택한다.
9. SENS 을 선택한다.
10. X32(32배) 를 선택한다.

11. BACK 을 2회 눌러서 나온다.

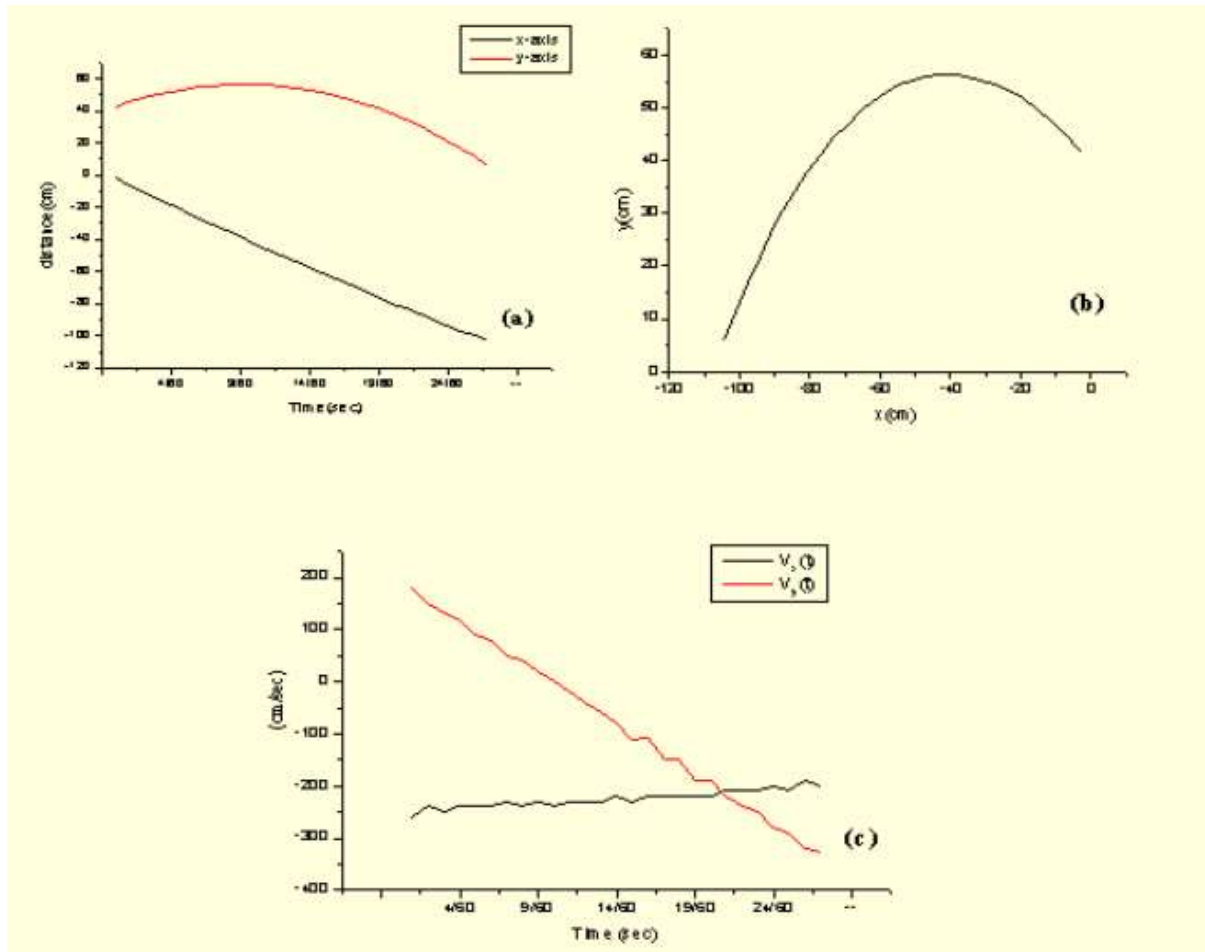
CCD 화면조정법(동영상)  을 참고 하여 초기 실험 장치 설정을 마친다. 발사장치를 알고 있는 각도로 조정한다. 발사장치는 3단까지 조정할 수 있지만 2단까지 만을 사용한다. 좌표계 설정을 위해 기준자를 발사장치에 삽입하여 [파일-화면 캡처]를 클릭하여

짧게 동영상을 촬영한다.(동영상)  [파일-좌표계 설정]을 클릭하여 방금 전에 촬영한 동영상을 불러와서 좌표계 설정([시작점 설정]->[마지막점 설정]->[길이 입력]->[다음]->[기준점(원점) 설정]->[확인]))을 한다.(동영상) 

② [파일-화면 캡처]를 클릭하고 Data 저장 경로를 결정한 뒤 구슬을 발사하여 실험을 시작한다.(동영상)  Data 저장이가 끝나면 [파일-분석]을 선택하여 저장된 자료를 분석한다.([처음 프레임 선택]->[마지막 프레임 선택]->[피사체 선택]->[분석 시작]->[분석된 자료 저장])(동영상) 

③ 분석이 끝나고 Data를 저장하면 분석에 사용한 image file과 피사체의 위치 정보 file 이 화면상에 나타난다.(시간에 따른 x 좌표와 y 좌표, 그리고 각 프레임 구간에서의 V_x 와 V_y)

④ Excel을 사용하여 얻은 그래프를 그릴 수 있다.(Origin을 사용하여 data를 불러오려면 먼저 Excel로 data를 열고 파일형식을 [텍스트(탭으로 분리)]을 선택하여 저장한 뒤 불러오면 된다.)



⑤ 구슬의 x 좌표는 시간에 따라 선형적으로 비례하는 그래프를 얻을 수 있는데, 발사각도를 알고 있으므로 초속도를 구할 수 있다. x 좌표와 y 좌표의 시간에 따른 속도는 측정된 두 프레임 간의 평균 속도이다. (a)와 (c)에서 구한 초속도가 서로 같은가? 다르다면 그 이유는? 또한 구슬의 y 좌표는 시간에 따라 2차 곡선 형태를 갖는데, y가 최고점에 이를 때의 시간을 구할 수 있으므로 앞서서 구한 초속도를 이용하여 중력가속도 값을 구할 수 있다. 일반적으로 알려진 중력가속도 값과 같은가? 이유는? V_x 는 시간에 따라 어떻게 변하는가? 이론적인 경우와 실험 결과를 비교해 보고, 이러한 결과가 나오게 된 이유에 대해 토의해 보아라.

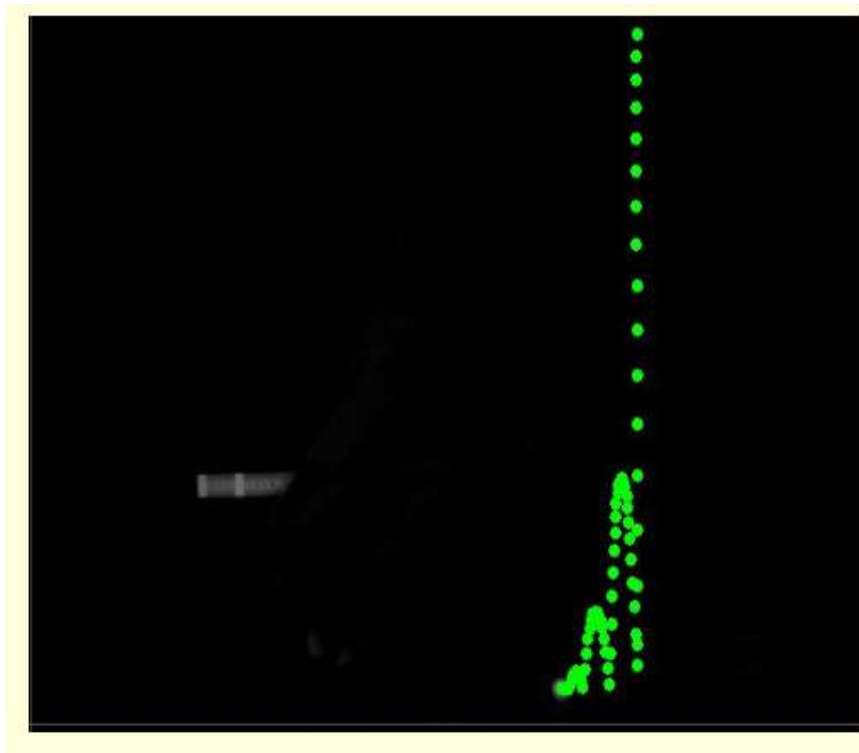
⑥ 작은 각도에서 3번 이상 실험을 하여 같은 결과가 나오는지 확인해 보고(그래프를 겹쳐서 fitting하면 알 수 있다.) 평균과 표준편차를 구한다. 45° 를 포함하여 발사각도를 변화시켜 실험을 반복.(5가지 이상) 그래프 상에서 포사체가 지면에 닿기 전까지의 비행 시간(T)과 수평방향 이동거리(R) 및 발사각도가 45° 일 때의 최대이동거리(R_{max})를 구한 후 이론적으로 계산된 값과 비교해 본다. 차이가 난다면 그 이유에 대해 토론해 본다.

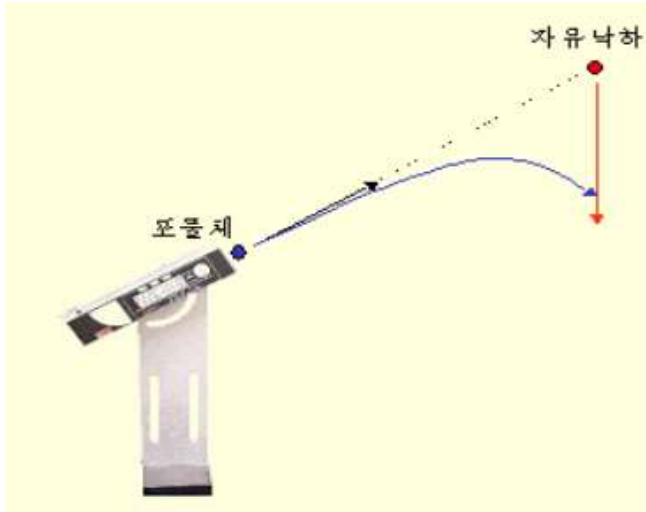
2) 질량이 다른 공을 이용하여 비교 실험.

질량이 다른 2개 이상의 구슬을 이용하여 위의 실험을 반복한다. 구슬의 질량이 포물선의 운동에 영향을 주는가? 그렇다면 그 이유에 대해 토론해 보아라. 그렇지 않다면 모든 구슬의 초속도가 같다면 같은 결과를 얻게 되는가?

3) 뉴턴의 사과 실험과의 비교

질량이 다른 2개 이상의 구슬의 자유낙하 실험을 하여 ‘뉴턴의 사과’ 실험과 결과를 비교해 보아라. 중력가속도 값은 같은가? 역학적 에너지는 보존이 되는가? 어느 경우가 이론값에 더 맞는가? 그 이유는? (이번 실험과 ‘뉴턴의 사과’ 실험에서의 측정 방법에서 생길 수 있는 차이에 대해 토론해 보아라) 구슬과 바닥과의 반발계수를 구해 보아라.





(4) 포물선 운동 구슬과 낙하 운동 구슬의 충돌

발사장치를 낙하 운동을 시킬 구슬을 향하게 한 후 발사와 동시에 낙하 운동을 시킨다. 두 공의 충돌운동을 관찰한다. (프로그램을 사용하지 말고 실험한다.)

배경 이론

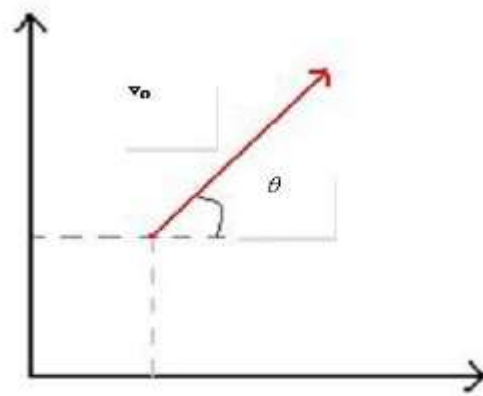


그림 1

초기속도의 각 방향 성분은

$v_{0x} = v_0 \cos \theta$, $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ 이다.

바닥평면과 일정한 각도로 쏘아 올려진 물체의 이차원 운동을 간단한 이계 미분 방정식의 풀이로 기술하여 이해해 보자. 먼저 그림과 같이 초기 속도 v_0 로 바닥평면과 θ 의 각도로 쏘아 올려진 물체가 처음에($t=0^+$) 받는 힘은 $-y$ 방향의 중력뿐이다.(물체를 쏘는 외력은 $t=0$ 까지만 작용한다.)

즉 x 방향으로 받는 힘이 없으므로 속도의 변화 또한 없으므로 가속도=0이다. 하지만 $-y$ 방향으로 중력을 받게 된다. 따라서 뉴턴의 제1법칙을 이용하면 다음을 구할 수 있다. ($F=ma$)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = -mg \dots\dots\dots (2)$$

(1)식과 (2)식을 적분하면 시간에 따른 속도의 x, y 성분을 각각 구할 수 있다.

$$\int dv_x = 0 \Rightarrow v_x(t) = C_1 \Rightarrow v_x(t) = v_{0x} \dots\dots\dots (3)$$

($t=0$ 일때 속도의 x 방향 성분은 $v_{0x}=v_0\cos\theta$ 이므로 적분 상수 C_1 을 구할 수 있다.) 즉 x 방향으로 받는 힘이 없으

므로 속도는 일정하다. 이를 다시 적분해 주면 시간에 따른 x 좌표의 변화를 구할 수 있다.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow \int dx = \int v_{0x} dt \Rightarrow x(t) = C_2 + v_{0x}t \dots\dots\dots (4)$$

$$\therefore x(t) = x_0 + v_{0x}t \dots\dots\dots (5)$$

역시 $t=0$ 일때 $x(0)=x_0$ 이므로 적분상수 $C_2=x_0$ 임을 구할 수 있다. 시간에 따른 y 좌표도 같은 방식으로 구할 수 있다.

$$\int dv_y = \int (-g) dt \Rightarrow v_y(t) = -gt + C_3 \Rightarrow v_y(t) = v_{0y} - gt \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots(7)$$

$$y(x) = y_0 + \tan\theta(x-x_0) - \frac{1}{2}g \frac{(x-x_0)^2}{(v_0\cos\theta)^2} \dots\dots\dots(8)$$

$$v_y = \frac{dx}{dt} = v_{0y} - gt \Rightarrow \int dx = \int (v_{0y} - gt)dt \Rightarrow y(t) = C_4 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots(9)$$

(5)식을 시간 t로 정리한 뒤 (8)식에 대입하여 정리하면 물체의 궤적을 구할 수 있다.

물체가 지면에 닿기까지 걸리는 비행시간(T)은 y(t)=0일 때의 시간을 구하면 알 수 있다. (즉 이차 방정식의 해를 구하면 된다.)

$$gt^2 - 2(v_0\sin\theta)t - 2y_0 = 0 \dots\dots\dots(10)$$

$$\therefore t = T = \frac{v_0\sin\theta}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0g}{(v_0\sin\theta)^2}} \right) \dots\dots\dots(11)$$

수평 방향의 이동거리(R)는 식(5)에 위에서 구한 (11)을 대입하면 된다.(이는 직접 계산해 보라) 수평방향 이동 거리를 구하였다면 수평방향 이동거리가 최대가 되는(R_{max}) 발사각도를 유추해 보아라.

최대 수평방향 이동거리는 다음과 같다.

$$R_{\max} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4y_0g}{v_0^2}} \right) \dots\dots\dots(12)$$

이제 공기의 마찰력 효과를 고려해 보자. 일반적으로 속력이 v인 물체는 다음과 같은 마찰힘을 받는다.

$$f = bv^\alpha \quad (1 < \alpha < 3, \text{ } b \text{ 는 상수}) \dots\dots\dots(13)$$

간단히 속도의 비례하는 마찰력을 받는다고 가정하면 식(1)과 (2)는 다음과 같이 된다.(k=b/m)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -kv \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g -kv \dots\dots\dots(15)$$

이를 역시 적분을 해주면 시간에 따른 속도 및 좌표를 구할 수 있다.

$$\int \frac{dv}{kv+g} = \int (-dt) \Rightarrow v_y(t) = -\frac{g}{k} + \frac{g+kv_0\sin\theta}{k} e^{-kt} \dots\dots\dots(16)$$

$$v_x(t) = v_0\cos\theta e^{-kt} \Rightarrow \therefore x(t) = x_0 + \frac{v_0\cos\theta}{k} (1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots(17)$$

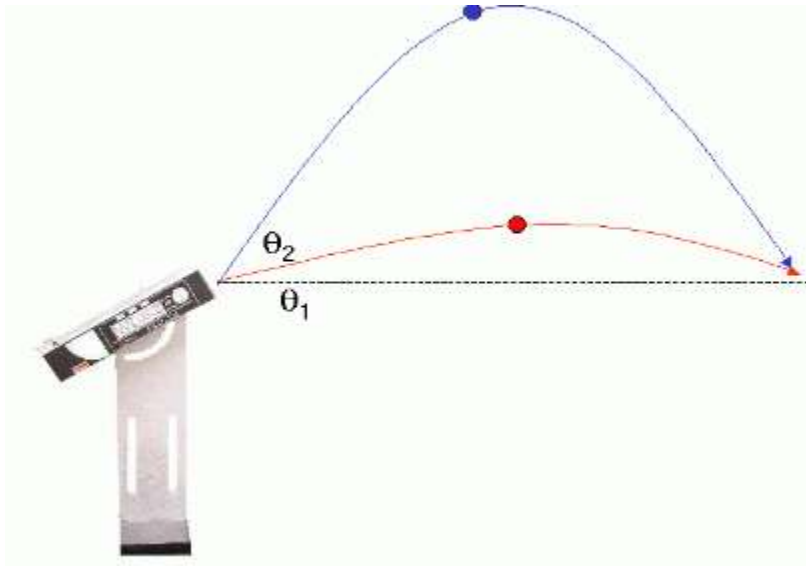
$$\therefore y(t) = y_0 - \frac{g}{k} t + \frac{g+kv_0\sin\theta}{k^2} (1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots(18)$$

(16)식에서 충분히 오랜 시간 뒤에는 속력이 일정한 종단속력에 도달하게 된다.(terminal speed : $v_y = -g/k$) 즉 이로부터 마찰력 비례계수 b를 구할 수 있다.

생각해 볼 만한 것들

① 서부영화에서 나오는 장총의 경우 총신이 길어지면 힘을 받는 시간이 늘어나므로 총구를 빠져 나오는 총알의 초기 속도가 증가하고 더욱 멀리 나아가게 된다. 총신이 긴 총과 짧은 총을 수평방향으로 발사하였을 때 두 총알 중 어느 총알이 공중에 더욱 오래 머무르게 되나? 실험 (4)의 경우도 같이 생각해 보라.

② 이론적으로 최대 도달거리는 발사각도가 45°일 때 이다. 즉 45°보다 큰 각이나 작은 각에서는 도달거리가 R_{\max} 보다 작아지게 된다. 즉 일정거리 R에 떨어뜨릴수 있는 두 개의 발사각도가 있다. 그렇다면 50cm 떨어진 곳에 구슬을 떨어뜨리려면 가능한 두 개의 발사각도(evaluation angle of fire)를 구해 보아라.(이 때 발사장치 입구높이를 바닥으로 가정한다. 또한 공기의 저항 역시 무시한다.) [실험 (1)에서 구한 초속도를 이용하라.] 두 각의 합은 언제나 일정하다. 이를 구해 보아라.



- [측정 데이터 처리 방법](#)
- [그래프에 의한 분석 방법](#)
- [아이작 뉴턴 - 정원에서 만유인력을](#)
- [갈릴레오 갈릴레이 - 뉴턴의 길을 닦은 실험물리학의 아버지](#)
- [공기의 마찰이 낙하 운동에 미치는 영향](#)
- [한국 표준과학연구원 \(KRISS\)](#)
- [미국 국립표준기술원 \(NIST\)](#)
- [Acceleration Due to Gravity](#)
- [Acceleration Due to Gravity-Lecture Notes](#)

※포사체 운동에 대한 다양한 애플릿이 있는 site

<http://physics.new21.org/pages/1/D/60/>

