

Quiz 4 (5월 25일 금 7, 8 교시)

[2012년 1학기 수학 및 연습 1]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) \mathbb{R}^3 상의 네 점 $(1, 2, 4), (2, 5, 8), (2, 6, 13), (3, 8, 14)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

2. (5점) \mathbb{R}^3 상의 곡선 $X(t)$ 에 대하여

$$f(t) = X(t) \cdot (X'(t) \times X''(t))$$

로 정의할 때,

$$f'(t) = X(t) \cdot (X'(t) \times X'''(t))$$

임을 보이시오.

3. (5점) 곡선 $X(t) = (\sin t, \cos t, t)$ 의 $t = \frac{\pi}{2}$ 인 점에서의 접촉평면의 식을 구하시오.
4. (5점) 곡선 $X(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ 에 대하여 $X(t)$ 와 $X'(t)$ 가 이루는 각은 항상 일정함을 보이시오.

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1. $A(1, 2, 4), B(2, 5, 8), C(2, 6, 13), D(3, 8, 14)$ 에 대해

$$|\det(\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD})| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}| = 2 \quad (3\text{점})$$

따라서 사면체의 부피는 $\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{3}$ 이다. (5점)

2. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'$ 과 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} f'(t) &= X'(t) \cdot (X'(t) \times X''(t)) + X(t) \cdot (X'(t) \times X''(t))' \\ &= 0 + X(t) \cdot (X''(t) \times X''(t) + X'(t) \times X'''(t)) \\ &= X(t) \cdot (X'(t) \times X'''(t)) \quad (5\text{점}) \end{aligned}$$

3. $X'(t) = (\cos t, -\sin t, 1) \Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 1)$

$$X''(t) = (-\sin t, -\cos t, 0) \Rightarrow X''(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 0)$$

$$\Rightarrow X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, -1) \quad (3\text{점})$$

구하고자 하는 접축평면은 $(0, -1, -1)$ 과 수직이고, 점 $X(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, \frac{\pi}{2})$ 를 지나는 평면으로 $y + z = \frac{\pi}{2}$ 이다. (5점)

4. $|X(t)| = e^t, \quad X'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t) \Rightarrow |X'(t)| = \sqrt{2}e^t$
 $X(t)$ 와 $X'(t)$ 사이의 각을 $\theta(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{2t} \cos \theta(t) &= X(t) \cdot X'(t) \\ &= e^{2t}(\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t) \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall t$$

따라서 두 벡터가 이루는 각은 일정하다. (5점)