Homework 3

2.4.2.

동치류 연산의 Well Defined

두 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$에 대해

$$[\alpha] < [\beta]$$

라고 하자.

위의 식이 잘 정의됨을 보이는 것이 목표이므로,

$$\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta \middle| [\alpha_1] < [\beta_1]$$

을 보이자.

pf. $[\alpha] < [\beta]$ 에서,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists D \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_0 \implies \alpha(i) - \beta(i) > D \tag{1}$$

$\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta$ 에서, $e = \dfrac{D}{3}$에 대해 자연수 N_1, N_2이 존재해

$$e = \frac{D}{3} \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N_1 \in \mathbb{N} \middle| i \geq N_1 \implies |\alpha_1(i) - \alpha(i)| < e \tag{2}$$
$$e = \frac{D}{3} \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N_2 \in \mathbb{N} \middle| i \geq N_2 \implies |\beta_1(i) - \beta(i)| < e \tag{3}$$

이다. 여기서 $N = \sup\{N_0, N_1, N_2\}$라 두면, $\forall i \geq N$에 대해서

$$(\alpha(i) - \beta(i) > D) \wedge (|\alpha_1(i) - \alpha(i)| < e) \wedge (|\beta_1(i) - \beta(i)| < e)$$
$$\implies$$
$$(\alpha(i) - \beta(i) > D) \wedge (\alpha_1(i) - \alpha(i) > -e) \wedge (\beta(i) - \beta_1(i) > -e)$$
$$\implies$$
$$(\alpha(i) - \beta(i)) + (\alpha_1(i) - \alpha(i)) + (\beta(i) - \beta_1(i)) > (D) + (-e) + (-e)$$
$$\implies$$
$$\alpha_1(i) - \beta_1(i) > \frac{D}{3}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \frac{D}{3} \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N \implies \alpha_1(i) - \beta_1(i) > \frac{D}{3}$$

이므로, $[\alpha_1] < [\beta_1]$이다. 이 결과로,

$$\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta \middle| [\alpha_1] < [\beta_1]$$

임을 알 수 있다. □

$[\alpha] = [\beta]$**인 경우**

위에서 동치류의 어떤 원소를 뽑아도 잘 정의됨을 안다. 두 집합이 같으니, 각각의 동치류에서 α를 골라도 무방하다.

그러면,

$$\forall d \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \in \mathbb{N} \implies \alpha(i) - \alpha(i) = 0 <= d$$

이므로,

$$[\alpha] < [\alpha]$$

를 만족하지 않는다.

$(\neg[\alpha] < [\beta]) \wedge (\neg[\beta] < [\alpha])$**인 경우**

책의 정리 2.4.2. 의해 임의의 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$에 대해

$$([\alpha] < [\beta]) \vee ([\beta] < [\alpha]) \vee ([\alpha] = [\beta])$$

이므로,

$$(\neg[\alpha] < [\beta]) \wedge (\neg[\beta] < [\alpha]) \implies ([\alpha] = [\beta])$$

이다.

$[\alpha] < [\beta], [\beta] < [\gamma]$**인 경우**

$[\alpha] < [\beta]$ 에서,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists D_0 \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_0 \implies \alpha(i) - \beta(i) > D_0 \tag{1}$$

이고, $[\beta] < [\gamma]$ 에서,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \exists D_1 \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_1 \implies \beta(i) - \gamma(i) > D_1 \tag{2}$$

이다.

여기서 $N = \sup\{N_0, N_1\}$라 두면, (1)와 (2)에 의해

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists D_0 + D_1 \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_1 \implies \alpha(i) - \gamma(i) > D_0 + D_1$$

이다. 따라서,

$$[\alpha] < [\gamma]$$

이다.

결론. 따라서,

$$[\alpha] = [\beta] \implies \neg([\alpha] < [\beta])$$

이고,

$$(\neg[\alpha] < [\beta]) \wedge (\neg[\beta] < [\alpha]) \implies \alpha = \beta$$

이고,

$$[\alpha] < [\beta], [\beta] < [\gamma] \implies [\alpha] < [\gamma]$$

이므로, 위 관계는 잘 정의되었다.

2.4.3.

각각의 명제 $[\alpha] > [\beta], [\alpha] = [\beta], [\alpha] < [\beta]$는 다음을 의미한다.

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists D_0 \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_0 \implies \alpha(i) - \beta(i) > D_0 \quad (1)$$

$$\exists N_e \in \mathbb{N}, \forall e \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_e \implies |\alpha(i) - \beta(i)| < e \quad (2)$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \exists D_1 \in P_{\mathbb{Q}} \middle| i \geq N_1 \implies \beta(i) - \alpha(i) > D_1 \quad (3)$$

식 (2)에서 N_e는 $e > 0$에 대해 정해지는 자연수라 생각하자.

이제 두 명제가 성립하는 3가지 경우 모두 불가능함을 보이자.

Case 1. $([\alpha] > [\beta]) \wedge ([\alpha] = [\beta])$

귀류법. $([\alpha] > [\beta]) \wedge ([\alpha] = [\beta])$ 라 하고, 모순을 보이자.

$e = \dfrac{D_0}{2}$라 하고, $N = \sup\{N_0, N_e\}$라 두면, $\forall i \geq N$에 대해

$$\begin{aligned} &(\alpha(i) - \beta(i) > D_0) \wedge \left(|\alpha(i) - \beta(i)| < \frac{D_0}{2}\right) \\ &\implies D_0 < \alpha(i) - \beta(i) < \frac{D_0}{2} \end{aligned}$$

이므로 모순이다. □

Case 2. $([\alpha] < [\beta]) \wedge ([\alpha] = [\beta])$

귀류법. $([\alpha] < [\beta]) \wedge ([\alpha] = [\beta])$ 라 하고, 모순을 보이자.

$e = \dfrac{D_1}{2}$라 하고, $N = \sup\{N_1, N_e\}$라 두면, $\forall i \geq N$에 대해

$$\begin{aligned} &(\beta(i) - \alpha(i) > D_1) \wedge \left(|\alpha(i) - \beta(i)| < \frac{D_1}{2}\right) \\ &\implies D_1 < \beta(i) - \alpha(i) < \frac{D_1}{2} \end{aligned}$$

이므로 모순이다. □

Case 3. $([\alpha] > [\beta]) \wedge ([\alpha] < [\beta])$

귀류법. $([\alpha] > [\beta]) \wedge ([\alpha] < [\beta])$ 라 하고, 모순을 보이자.

$N = \sup\{N_0, N_1\}$라 두면, $\forall i \geq N$에 대해

$$\begin{aligned} &(\alpha(i) - \beta(i) > D_0) \wedge (\beta(i) - \alpha(i) > D_1) \\ &\implies D_0 < \alpha(i) - \beta(i) < -D_1 \end{aligned}$$

이므로 모순이다. □

결론. 따라서, 두 명제가 동시에 성립할 수 없다.

2.4.4.

Well Defined

두 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$에 대해

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$$

라고 하자.

위의 식이 잘 정의됨을 보이는 것이 목표이므로,

$$\begin{aligned} &\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta \middle| [\alpha_1 + \beta_1] = [\alpha + \beta] \\ \iff &\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta \middle| (\alpha_1 + \beta_1) \sim (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

을 보이자.

pf. $\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta$ 에서, 자연수 N_1, N_2이 존재해

$$\frac{e}{2} \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N_1 \in \mathbb{N} \middle| i \geq N_1 \implies |\alpha_1(i) - \alpha(i)| < \frac{e}{2} \quad (1)$$

$$\frac{e}{2} \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N_2 \in \mathbb{N} \middle| i \geq N_2 \implies |\beta_1(i) - \beta(i)| < \frac{e}{2} \quad (2)$$

이다. 여기서 $N = \sup\{N_1, N_2\}$라 두면, $\forall i \geq N$에 대해서

$$\begin{aligned} |(\alpha_1 + \beta_1)(i) - (\alpha + \beta)(i)| &= |\alpha_1(i) + \beta_1(i) - \alpha(i) - \beta(i)| \\ &= |\alpha_1(i) - \alpha(i) + \beta_1(i) - \beta(i)| \\ &\leq |\alpha_1(i) - \alpha(i)| + |\beta_1(i) - \beta(i)| \\ &\leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e \end{aligned}$$

이다. 이를 정리하면,

$$i \leq N \implies |(\alpha_1 + \beta_1)(i) - (\alpha + \beta)(i)| < e$$

이고, 따라서 $(\alpha_1 + \beta_1) \sim (\alpha + \beta)$가 성립한다.

따라서,

$$\forall \alpha_1 \sim \alpha, \forall \beta_1 \sim \beta \middle| (\alpha_1 + \beta_1) \sim (\alpha + \beta)$$

이고, 이는 덧셈이 잘 정의됨을 의미한다.

Associative Law

코시수열 α, β, γ에 대해 생각해보자.

유리수의 결합법칙에 의해, $\forall i \in \mathbb{N}$에 대해

$$(\alpha(i) + \beta(i)) + \gamma(i) = \alpha(i) + (\beta(i) + \gamma(i))$$

이다. 이를 이용하면, 세 실수 $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \mathbb{R}$에 대해

$$\begin{aligned} [\alpha] + [\beta] + [\gamma] &= [\alpha + \beta] + [\gamma] = [(\alpha + \beta) + \gamma] \\ &= [\alpha + (\beta + \gamma)] = [\alpha] + [\beta + \gamma] \\ &= [\alpha] + [\beta] + [\gamma] \end{aligned}$$

이므로, 실수에서 결합법칙이 성립한다.

Commutative Law

코시수열 α, β에 대해 생각해보자.

유리수의 결합법칙에 의해, $\forall i \in \mathbb{N}$에 대해

$$\alpha(i) + \beta(i) = \beta(i) + \alpha(i)$$

이다. 이를 이용하면, 세 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$에 대해

$$\begin{aligned}[\alpha] + [\beta] =& [\alpha + \beta] = [\beta + \alpha] \\ =& [\beta] + [\alpha]\end{aligned}$$

이므로, 실수에서 결합법칙이 성립한다.

Additive Identity (0^*)

$$\begin{aligned}[\alpha] + [0^*] =& [\alpha + 0^*] = [\alpha] \\ =& [0^* + \alpha] = [0^*] + [\alpha]\end{aligned}$$

이므로 0^*는 덧셈에 대한 항등원이다.

$-\alpha$ **is Cauchy sequence**

α는 코시수열이므로,

$$\forall e \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N_e \in \mathbb{N} \Big| i, j \geq N_e \implies |\alpha(i) - \alpha(j)| < e$$

이다. 위 식의 N_e를 이용하면,

$$\forall e \in P_{\mathbb{Q}}, \exists N = N_e \in \mathbb{N} \Big| i, j \geq N \implies |(-\alpha(i)) - (-\alpha(j))| < e$$

이므로, $-\alpha$도 코시수열이다.

Additive Inverse $(-\alpha)$

$$\begin{aligned}[\alpha] + [-\alpha] =& [\alpha + (-\alpha)] = [0^*] \\ =& [(-\alpha) + \alpha] = [-\alpha] + [\alpha]\end{aligned}$$

이므로 $-\alpha$는 α의 덧셈에 대한 역원이다.

2.5.2.

$\sup S = \alpha, \sup T = \beta$라 하자.
먼저 $S, T \subset P_F$이므로, $\alpha > 0$, $\beta > 0$이다.

이제

$$\sup(ST) = \alpha\beta$$

임을 보이자.

pf. 일단, $\forall s \in S, \forall t \in T$에 대해

$$st \leq \alpha\beta$$

이므로, $\alpha\beta$는 ST의 상계임을 알 수 있다.

이제 $\alpha\beta$가 ST의 최소 상계임을 보이면 되는데, 이는

$$\forall \gamma < \alpha\beta \implies \gamma\text{가 } ST\text{의 상계가 아니다.}$$

를 보이면 된다.

pf. $\epsilon = \alpha\beta - \gamma > 0$라 하자.

$$x = \alpha - \frac{\epsilon}{2\beta} < \alpha$$

라 하면, α가 S의 최소 상계이므로,

$$\exists s \in S \Big| s > \alpha - \frac{\epsilon}{2\beta}$$

인 $s \in S$가 존재한다. 비슷하게

$$t = \beta - \frac{\epsilon}{2\alpha} < \beta$$

라 하면, β가 T의 최소 상계이므로,

$$\exists t \in T \Big| t > \beta - \frac{\epsilon}{2\alpha}$$

인 $t \in T$가 존재한다.

여기서

$$\begin{aligned}\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2\beta}\right)\left(\beta - \frac{\epsilon}{2\alpha}\right) =& \alpha\beta - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4\alpha\beta} \\ >& \alpha\beta - \epsilon = \gamma\end{aligned}$$

이다. 이를 이용하면,

$$\gamma = \alpha\beta - \epsilon < \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2\beta}\right)\left(\beta - \frac{\epsilon}{2\alpha}\right) < st < \alpha\beta$$

이므로, γ는 ST의 상계가 아니다. □

2.5.3.

$$\forall x, y \in F, f(xy) = f(x)f(y)$$

임을 보이기 위해서 먼저

$$\forall x, y \in P_F, f(xy) = f(x)f(y)$$

을 보이자.

1. $(x \in P_F$ **and** $y \in P_F)$**인 경우**

정리 2.5.3.의 증명과정의 notation을 그대로 따르겠다.

$$B_x = A_x \cap P_G$$

라 하자. 정리 2.5.2.에 의해서 $0_G < \gamma(r) < x$를 만족하는 $r \in P_{\mathbb{Q}}$가 존재하므로,

$$(\delta(r) \in A_x) \land (\delta(r) \in P_G) \implies B_x \neq \varnothing$$

이다. 또한, 아르키메데스 법칙에의해 $n \cdot 1_F > x$인 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$을 잡으면 $\delta(n) = n \cdot 1_G$가 B_x의 상계가 된다.

그러므로, G가 완비순서체이므로, B_x는 상한을 가지고 이는 $f(x)$와 같다는 것을 알 수 있다.

이제 $B_{xy} = B_x B_y$임을 보이자.

pf.

a. $B_{xy} \supset B_x B_y$

$\delta(r) \in B_x, \delta(s) \in B_y$라 하자. 그러면 $\gamma(r) < x, \gamma(s) < y$이다. 따라서,

$$\delta(r)\delta(s) = \delta(rs), \gamma(rs) = \gamma(r)\gamma(s) < xy$$

이므로, $\delta(r)\delta(s) \in B_{xy}$이다.

b. $B_{xy} \subset B_x B_y$

$\delta(t) \in B_{xy}$라 하자. 그러면 $\gamma(t) < xy$이다. 정리 2.5.2.를 이용하면

$$s \in P_{\mathbb{Q}} \middle| \frac{\gamma(t)}{y} < \gamma(s) < x$$

인 $s \in P_{\mathbb{Q}}$가 존재한다. 그러면,

$$\gamma(s) < x, \gamma\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(s)} < y$$

이므로,

$$\delta(t) = \delta(s)\delta\left(\frac{t}{s}\right) \in (B_x B_y)$$

이다.

결론. a., b. 에 의해 $B_{xy} = B_x B_y$이다. □

이제 책의 식 (2.34)에 의해 (혹은 문제 2.5.2.의 결론에 의해)

$$\sup B_{xy} = \sup B_x \sup B_y$$

이고, 이는

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

를 의미한다.

2. $(x \in P_F$ **and** $y \in P_F)$**가 아닌 경우**

a. $f(0_F) = 0_G$**이다.**

$\delta(r) \in A_{0_F}$라 하면, $(r \notin P_{\mathbb{Q}}) \land (r \neq 0)$이므로, $r < 0$이다.

따라서, $\delta(r) < 0_G$이고 0_G가 A_{0_F}의 상계임을 알 수 있다.

이제 0_G가 최소 상계임을 보이자.

$$\forall a \in G, a < 0_G \implies (\exists r \in \mathbb{Q} \mid (a < \delta(r) < 0_G) \land (\delta(r) \in A_{0_F}))$$

을 보이면 충분하다. 이는 정리 2.5.2.에 의해서

$$\exists r \in \mathbb{Q} \mid a < \delta(r) < 0_G$$

인 r이 존재함을 알 수 있고,

$$r < 0 \implies \gamma(r) < 0_F \implies \delta(r) \in A_{0_F}$$

이므로 성립한다. □

b. $\forall x \in P_{\mathbb{Q}}, f(-x) = -f(x)$**이다.**

$-f(x)$가 A_{-x}의 상계임을 보이자.

$$\begin{aligned}
\delta(r) \in A_{-x} &\implies \gamma(r) < -x \implies -\gamma(r) > x \\
&\implies \gamma(-r) > x \implies \delta(-r) \notin A_x \\
&\implies \delta(-r) \geq f(x) \qquad (1) \\
&\implies -\delta(r) \geq f(x) \implies \delta(r) \leq -f(x)
\end{aligned}$$

이므로, $-f(x)$는 A_{-x}의 상계이다. 위 과정중 (1)의 증명은 아래와 같다.

pf. [귀류법] 만약 $\delta(-r) < f(x)$라면, $\delta(-r)$은 A_x의 상한이 아니므로,

$$\exists \delta(s) \in A_x \middle| \delta(-r) < \delta(s) < f(x)$$

인 $s \in \mathbb{Q}$가 존재하고,

$$\delta(s) \in A_x \implies \gamma(s) < x$$

$$\delta(-r) < \delta(s) \implies -r < s \implies \gamma(-r) < \gamma(s) < x$$

이므로, $\delta(-r) \in A_x$이고 이는 $\delta(-r) \notin A_x$에 모순이다. □

이제 $-f(x)$가 A_{-x}의 상한임을 보이자.

어떤 $t \in G \middle| t < -f(x)$가 존재하면, $t < \delta(q) \in A_{-x}$를 만족하는 $q \in \mathbb{Q}$가 존재함을 보이면 충분하다.

일단 $\exists q \in \mathbb{Q} \middle| t < \delta(q) < -f(x)$인 q가 존재한다.
이제 $\delta(q) \in A_{-x}$를 보이자.

$$\begin{aligned}
\delta(q) < -f(x) &\implies -\delta(q) > f(x) \\
&\implies \gamma(-q) > x \qquad (2) \\
&\implies -\gamma(q) > x \implies \gamma(q) < -x \\
&\implies \delta(q) \in A_{-x}
\end{aligned}$$

따라서, $-f(x)$은 A_{-x}의 상한이고,

$$-f(x) = f(-x)$$

라 할 수 있다. 위의 과정중 (2)의 증명은 아래와 같다.

pf. [귀류법] 만약 $\gamma(-q) \leq x$라 하자.

먼저 $\gamma(-q) = x$인 경우를 생각하면 $x = \gamma(-q) = (-q)_F$이고, $\delta(-q) = (-q)_G$이다. A_x의 정의에 의해서

$$A_x = \left\{ \delta(r) \in G \middle| r \in \mathbb{Q}, r < (-q) \right\}$$

가 되므로, $f(x) = (-q)_G$가 되고, 이는 $\delta(q) < -f(x)$에 모순이다.

$\gamma(-q) < x$인 경우는 $\delta(-q) \in A_x$가 되고, 상한의 정의에 의해 $\delta(-q) \leq f(x)$가 되므로, 마찬가지로 $\delta(q) < -f(x)$에 모순이다.

따라서, $\gamma(-q) > x$일 수 밖에 없다. □

c. 결론

앞선 a., b.의 결과를 이용하면,

$$f(xy) = \begin{cases} 0_G = f(x)f(y), \\ (\text{when } x = 0_F \vee y = 0_F) \\ f(x)f(y) \\ (\text{when } x \in P_F \wedge y \in P_F) \\ -f(x(-y)) = f(x)(-f(-y)) = f(x)f(y) \\ (\text{when } x \in P_F \wedge y \in -P_F) \\ -f((-x)y) = (-f(-x))f(y) = f(x)f(y) \\ (\text{when } x \in -P_F \wedge y \in P_F) \\ f((-x)(-y) = (-f(x))(-f(y)) = f(x)f(y) \\ (\text{when } x \in -P_F \wedge y \in -P_F) \end{cases}$$

이므로,

$$\forall x, y \in F, f(xy) = f(x)f(y)$$

이다.

3.1.1.

1. 순서집합 X의 최대원소는 극대원소가 된다.

X의 최대원소를 M이라 하자.

$$\forall x \in X, x \leq M$$

이다. 이것을 이용하면,

$$\begin{aligned} \forall x \in X, x \geq M &\implies (x \leq M) \wedge (x \geq M) \\ &\implies x = M \end{aligned}$$

이다. 따라서 M은 극대원소이다.

2. 극대원소가 하나뿐이지만 이 원소가 최대원소가 아닌 순서집합

$$X = \mathbb{Z} \cup \{a\}$$

라 하자. 여기서 $a \notin \mathbb{Z}$이다.

이 집합 관계를 정의할 것이다. 정수들 끼리에서는 $\mathbb{Z}$에서 순서관계를 포함하고, a와 $z \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$와 a의 관계는 포함하지 않을 것이다. a와 a은 이 관계에 포함할 것이다. 그러면 이 관계는 순서관계가 된다.

여기서 a보다 크거나 같은 원소는 a 뿐이므로 a는 극대원소이다.

하지만 $\forall z \in \mathbb{Z}$인 z에 대해 a와 z, z와 a의 관계가 없으므로, a는 최대원소가 아니다.

3.1.2.

순서집합 X의 모든 사슬을 모은 집합을 $C(X)$라 하자.

먼저 $C(X) \subset 2^X$이다. 그리고, 다음 두 성질을 증명하겠다.

1. $A \in C(X), B \subset A \implies B \in C(X)$이다.

A가 X의 사슬이므로 A의 임의의 두 원소 a, b를 고르면 $(a \leq b) \vee (b \leq a)$이다.

여기서, $x \in B \implies x \in A$이므로, B도 X의 사슬이다. 이를 이용하면, B의 임의의 두 원소 c, d를 고르면, $c, d \in A$이므로, $(c \leq d) \vee (d \leq c)$이다.

따라서 $B \in C(X)$이다.

2. $K \in C(C(X)) \implies \bigcup K \in C(X)$이다.

임의의 $S, T \in \bigcup K$를 생각하자, 합집합의 정의에 의해 $K_0, K_1 \in K$가 존재하여, $S \in K_0$, $T \in K_1$이다.

여기서 K가 사슬이므로, $(K_0 \subset K_1) \vee (K_1 \subset K_0)$이다.

$(K_0 \subset K_1)$라 하자. 그러면 $S, T \in K_1$이고, K_1도 사슬이므로 $(S \subset T) \vee (T \subset S)$이다. 비슷하게, $(K_1 \subset K_0)$일 때도 $(S \subset T) \vee (T \subset S)$임을 알 수 있다.

따라서 $\bigcup K$의 임의의 두 원소 S, T에 대해 $(S \subset T) \vee (T \subset S)$가 성립하므로, $\bigcup K \in C(X)$은 사슬이다. 따라서,

$$\bigcup K \in C(X)$$

이다.

위 두 성질 1., 2.를 만족하므로 도움정리 3.1.3.에 의해서 $C(X)$는 극대원소를 가진다. 이 원소를 $P \in C(X)$라고 하면, P보다

크거나 같은 원소 $Q \in C(X)$가 존재하면 $Q = P$이다. 따라서 P는 X의 극대 사슬이다.

3.1.3.

1. $(A, G) \le (A, G)$

$$A \subset A, G \subset G, x \in A, y \in (A \setminus A) \implies (x, y) \in G$$

를 보이면 된다. 첫 번째와 두 번째 명제는 자명히 성립하고, 세 번째 명제는 $\varnothing = A \setminus A$이므로 성립한다.

2. $((A, G) \le (B, H)) \wedge ((B, H) \le (A, G)) \Rightarrow (A, G) = (B, H)$

가정에 의해 아래 두 명제가 성립한다.

$$A \subset B, G \subset H, x \in A, y \in (B \setminus A) \implies (x, y) \in H$$

$$B \subset A, H \subset G, x \in B, y \in (A \setminus B) \implies (x, y) \in G$$

이다. $A \subset B \subset A, G \subset H \subset G$이므로, $A = B, G = H$이다. 따라서,

$$(A, G) = (B, H)$$

이다.

3. $((A, G) \le (B, H)) \wedge ((B, H) \le (C, I)) \Rightarrow (A, G) \le (C, I)$

가정에 의해 아래 두 명제가 성립한다.

$$A \subset B, G \subset H, x \in A, y \in (B \setminus A) \implies (x, y) \in H$$

$$B \subset C, H \subset I, x \in B, y \in (C \setminus B) \implies (x, y) \in I$$

이다. 이를 이용하면

$$A \subset B \subset C$$

이고,

$$G \subset H \subset I$$

이다. 이제

$$x \in A, y \in (C \setminus A) \implies (x, y) \subset I$$

를 보이면 된다. **pf.** $C \setminus A = (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$이므로, $(y \in C \setminus B) \vee (y \in B \setminus A)$이다.

$y \in C \setminus B$이면, $x \in A \subset B$이므로 $(x, y) \in I$이다.

$y \in B \setminus A$이면, $x \in A$이므로 $(x, y) \in H \subset I$이다. 즉, $(x, y) \in I$이다.

따라서, $x \in A, y \in (C \setminus A) \implies (x, y) \subset I$이다. □

위 세 조건을 만족하므로,

$$(A, G) \le (C, I)$$

이다.