Physics Laboratory

Last modified : 2015-08-31

실험 1-7. 용수철 흔들이의 운동

조교 유의 사항

1) 실험 시작 시간 5분전까지 실험 준비실(25-418 또는 19-111)에서 실험실 열쇠를 받아 입실한 다음, 실험 장치

용수철 (12)

용수철용 스탠드 (12)

테프론 봉이 달린 추 받침 (12)

100 g 추 (2), 50 g 추 (1), 20 g 추 (1) (12 셋트)

실타래 (1, 공용)

전자저울 (2, 공용)

2) 다음의 유의 사항을 학생들에게 주지시킨다.

1. 추가 CCD를 통해서 보일 때 수직으로 진동하도록 CCD를 설치한다.
2. 용수철의 길이를 고정한 채 흔들이로 사용할 때, 추가 한 평면 위에서 흔들리지 않고, 점차로 타원을 그리며 도는 점에 유의하여 측정 시간을 너무 길게 잡지 않는다.
3. 추의 무게는 적혀 있는 것(이것도 오해의 소지가 있으니 주의할 것.)을 믿지 말고 꼭

저울로 직접 측정하도록 한다.
4. 이 실험에서 꼭 측정해야 할 사항이

① 추, 추 걸이, 테프론 봉 및 용수철의 질량
② 용수철 상수 k
③ 추의 질량에 따른 수직 떨기의 주기
④ 길이가 일정하게 고정된 용수철 흔들이의 추 질량과 길이에 따른 주기

임을 알린다. 이외에도 실험반의 사정에 따라 추가 실험을 권유한다.

실험 목적

평형 상태를 갖는 모든 계는 작은 변화에 대하여 복원 특성을 갖는다. 역학 계에서의 복원 특성은 복원력(restoring force)으로 나타난다. 특히 평형 상태로부터의 변화가 아주 작을 때는 복원력의 크기는 변화의 정도에 비례한다. 또한 역학계는 운동 상태를 그대로 유지하려는관성도 가지고 있다. 이 복원력과 관성이 함께 나타날 때 계는 단조화 운동(simple harmonic motion)을 하게 된다. 용수철에 매달린 물체, 진자(pendulum), LC 회로, 고체 물질이나 분자 내에서의 원자의 진동 등 많은 물리 계에서 단조화 운동이 나타나며, 따라서 물리학에서 단조화 운동은 매우 중요시되고 있다.

이 실험에서는 먼저 용수철에 추를 매달아 수직 진동자(vertical oscillator)로 사용하고 또한 길이가 고정된 실에 매달린 진자(pendulum)의 단조화 운동에 대해서 각각 조사한다. 다음 추가 매달린 용수철을 흔들이로 사용할 때의 물체의 운동에 대해서도 살펴본다. 이 경우에는 용수철의 복원력과 함께 중력이 흔들이에 또 다른 복원력으로 작용하고 있기 때문에 2 차원 평면에서 두 가지 단조화 운동이 나타나고, 더욱 이들이 서로 독립적이지 못하고 결합되기 때문에, 추의 운동은 매우 다양해진다.

단조화 운동을 하는 대부분의 역학 계는 평형 상태로부터의 변화가 아주 커지면 복원력이 더 이상 변화량에 비례하지 않고 비선형 효과(nonlinear effect)가 나타난다. 단조화 운동의 결합 방식과 비선형 효과에 대해서도 공부한다.

실험 개요

⊙ 자연계에서 단조화 운동이 일어나는 이유와 단조화 운동을 하는 물체의 운동에너지와 퍼텐셜 에너지(potential energy)의 교환을 이해한다.

⊙ 용수철 흔들이의 두 가지 단조화 운동을 따로따로 조사한다.

- 먼저 용수철의 용수철 상수를 측정하며 용수철의 복원력이 어떻게 생기는지를생각한다.
- 용수철의 질량을 무시할 때 각각의 주기는 어떻게 결정되는가?
- 용수철 자체의 질량을 감안하면 각각의 주기가 어떻게 달라지는가?

⊙ 진자의 두 가지 단조화 운동을 따로따로 조사한다.

실험 방법

실험실에는 이 실험을 위해서 다음과 같은 장치가 준비되어 있다. (괄호 안은 준비된 개수) 동영상

용수철 (1)

용수철용 스탠드 (1)

컴퓨터 (1)

CCD 카메라(1)

테프론 봉이 달린 추 받침 (1)

실타래 (1, 공용)

이외에도 더 필요한 것이 있으면 미리 담당 조교나 실험 준비실(19 동 111 호, 25 동 418 호)로 문의하거나 각자가 준비하도록 한다.

권장할 만한 표준적인 실험 방법은 다음과 같다.

1) 추의 무게에 따른 용수철의 길이 변화를 측정하여 용수철 상수 k 를 구한다. 동영상

① 용수철에 추 받침을 걸고 실험 장치가 수직이 되도록 스탠드를 조절한다.

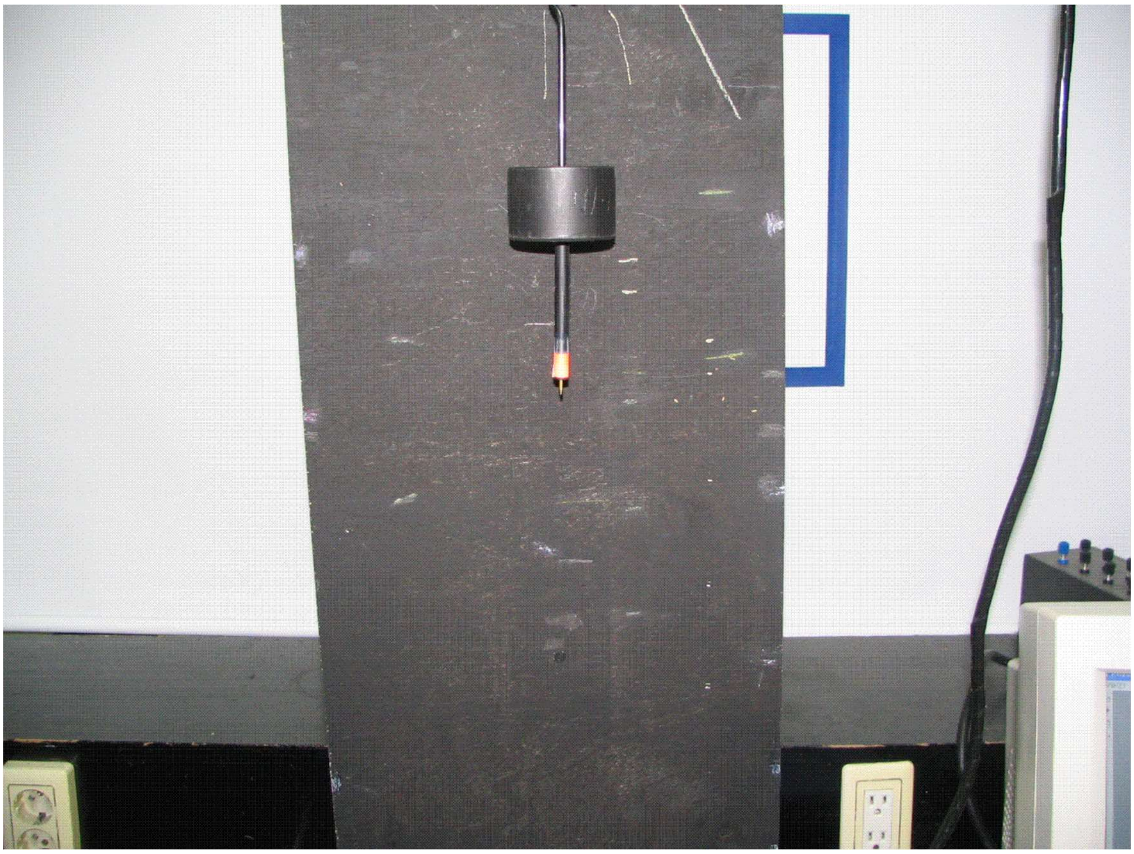
② 준비된 추들을 사용하여 여러 가지 추 무게에 대해서 용수철의 늘어난 길이(실제로는 추 받침의 어느 한 편리한 부분의 위치)를 읽는다. 이때 가능하면 용수철이 흔들리지 않도록 하고, 추 받침과 눈높이를 같게 맞춘다. [여기서 용수철의 길이를 직접 측정해야 할 필요는 없다. 왜 그런가?]

③ 추 받침에서 추를 다 덜어냈을 때 원래의 길이로 되돌아가는가 확인한다. 차이가 난다면 그 차이는 앞으로의 실험에 영향을 미칠 정도인가? 만약 그렇다면 위의 측정을 되풀이하여 평균값을 구한다.

2) 용수철에 매달린 추의 운동을 상하 운동에 국한시키고 CCD 카메라와 컴퓨터를 사용하여 추의 단조화 운동을 측정한다.

CCD 카메라의 설정법과 I-CA 프로그램의 사용법은 실험 1-1 뉴턴의 사과를 통해 충분히 숙지 했을 것이라고 생각한다. 만약 숙지 하지 못했다면 실험 1-1 의 매뉴얼을 보고 익히도록 한다.

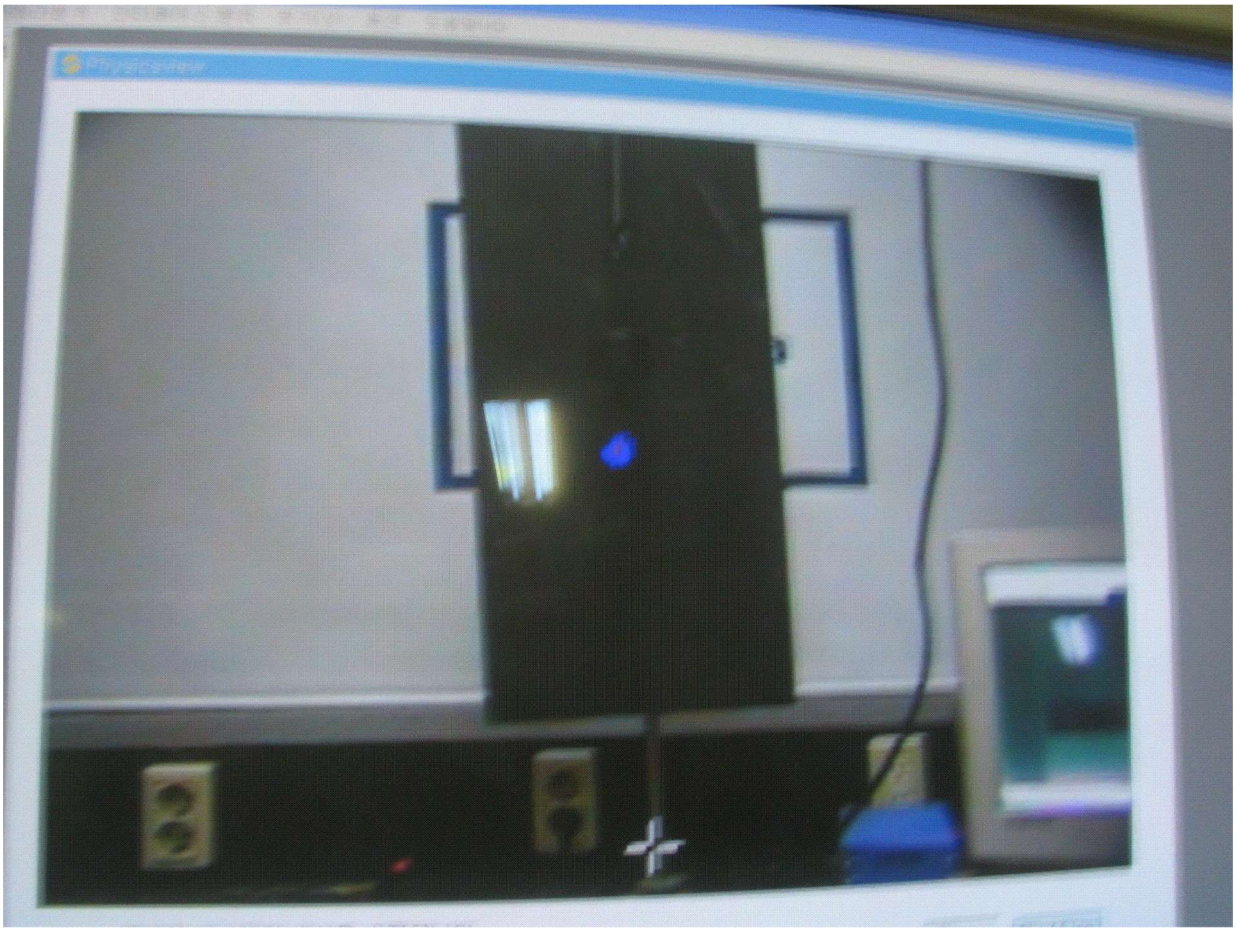
프로그램 사용법과 CCD 화면조정법을 참고 하여 초기 실험 장치 설정을 마친다. PC 카메라의 위치를 조정하여 실험기구가 화면상에 적당한 위치에 나오도록 한다. (기구전체가 화면에 나올 필요가 없다. 즉 추받침에 매달린 공의 운동이 화면에 나올 수 있게 충분히 근접하여 촬영하면 된다. *주의 : 실험하기 전 수평-수직을 잘 맞춘다.)



② 원하는 무게의 추를 얹고 평형위치에서 안정될 때 까지 기다린 후 데이타 저장 경로를 지정하고 화면 캡쳐를 시작한다.

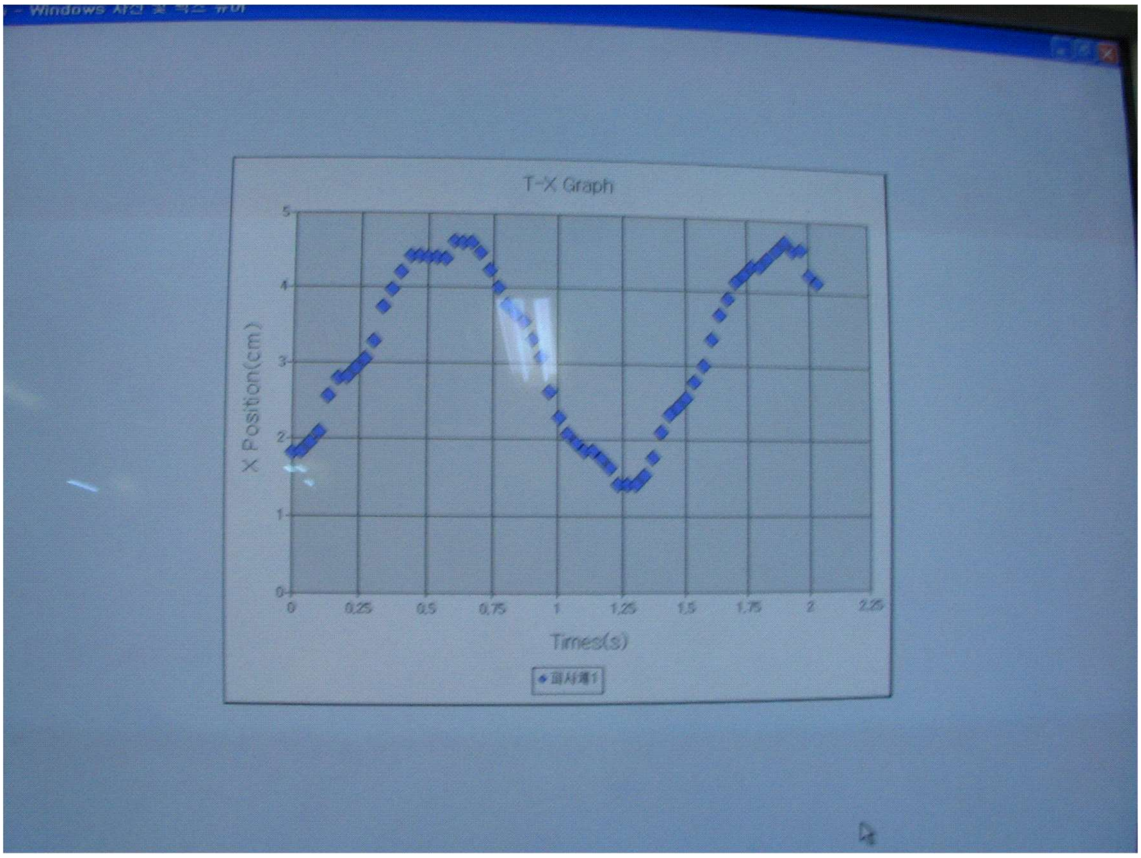
용수철을 평형 위치에서 약간 아래로 당겼다가 가만히 놓아 수직진동을 하게 한다. 동영상측정을 시작한다. Data 저장이 끝나면 [사진–화면 분석] 을 선택하여 저장된 자료를 분석한다. 먼저 Data 가 저장된 경로를 지정해 준 후, 분석할 처음 프레임과

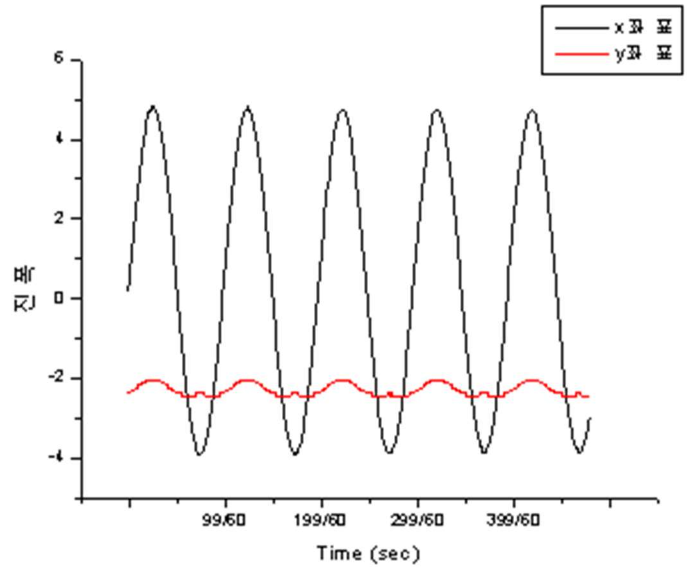
마지막 프레임을 결정하고, 피사체의 기준점을 결정해 준다. (아래의 그림을 참고)



분석을 시작한다. 분석이 끝나고 Data 를 저장하면 분석에 사용한 image file 과 피사체의 위치 정보 file 이 화면상에 나타난다.(시간에 따른 x1, x2 좌표와 y1, y2 좌표)

불러오려면 먼저 Excel 로 data 를 열고 파일형식을 [텍스트(탭으로 분리)]을 선택하여 저장한 뒤 불러오면 된다.)



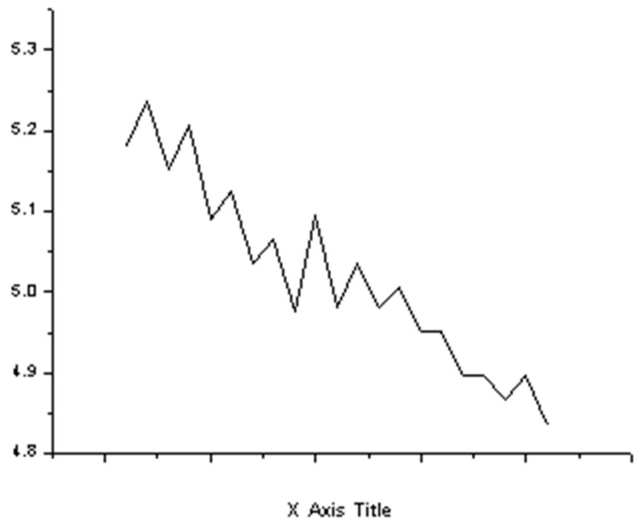


③ Excel 을 사용하여 얻은 그래프를 그릴 수 있다.(Origin 을 사용하여 data 를 불러오려면 먼저 Excel 로 data 를 열고 파일형식을 [텍스트(탭으로 분리)]을 선택하여 저장한 뒤 불러오면 된다.)

④ 추의 운동을 단조화 운동이라고 할 수 있겠는가? 그렇지 않다면 그 이유를 찾고 실험 방법을 개선하도록 한다.(위 결과와 같이 y 방향 운동이 나타나는 이유는 무엇이고, 결과에는 어떤 영향을 미칠지 생각해 보아라) 주기 T 를 3 가지 이상의 추 무게에 대해서 측정한다. [주의: 이때 추가 너무 가벼우면 용수철이 떨기 운동을 할 때 추가 추 받침에서 뜨는 경우가 생긴다. 이는 또 다른 흥미로운 현상이지만 일단 여기서는 제외시킨다.]

⑤ 공용의 저울을 이용하여 사용한 추 받침 및 용수철의 무게를 각각 측정한다.

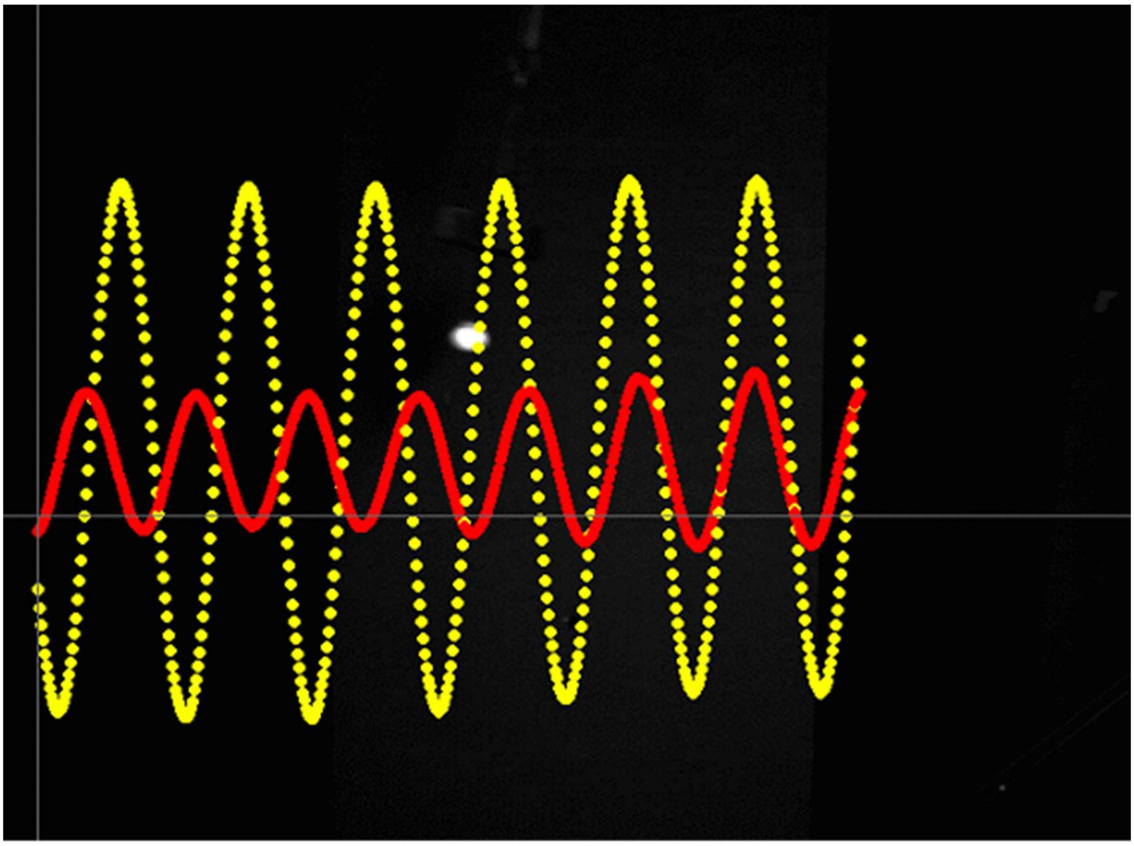
⑥ 결과를 앞 (1)에서 구한 용수철 상수를 써서 이론식으로부터 계산한 주기와 비교하고, 차이가 있는지 살펴본다. 차이가 난다면 그 원인을 검토한다. 진폭이 최대 최소인 곳에서의 복원력의 크기와 방향 속도 및 가속도의 크기와 방향에 대해 생각해 보아라. 실험결과에서 공기의 저항에 의한 진폭의 감쇠를 관찰할 수 있는가?(실험결과 그래프에서는 진폭의 최고, 최저점이 envelop 형태를 보여줄 것이다. 이는 왜 그럴까? 이런 결과가 나온 경우 공기의 저항효과를 보기위해 (최고+최저 진폭)/2 값이 시간에 따라 어떻게 변하는지를 그려본다.)



3) 적절한 길이의 실에 추를 달고, 흔들이로 사용하여 그 주기를 측정한다.

① 적당한 길이의 실을 사용하여 흔들이를 만든다.

② 추를 평형 위치로부터 적당한 각도로 기울였다가가만히 놓아서, 수직 면상에서 흔들이 운동을 하게 한 뒤 측정을 시작한다. [주의: 진자의 흔들이 운동에서는 한 수직 면상에서 운동이 이루어지지 않고, 옆 돌기(세차 운동)가 생길 수 있으므로 가능한 한 떨기의 너비(각도)가 너무 크지 않도록 적당한 각도를 고른다.]

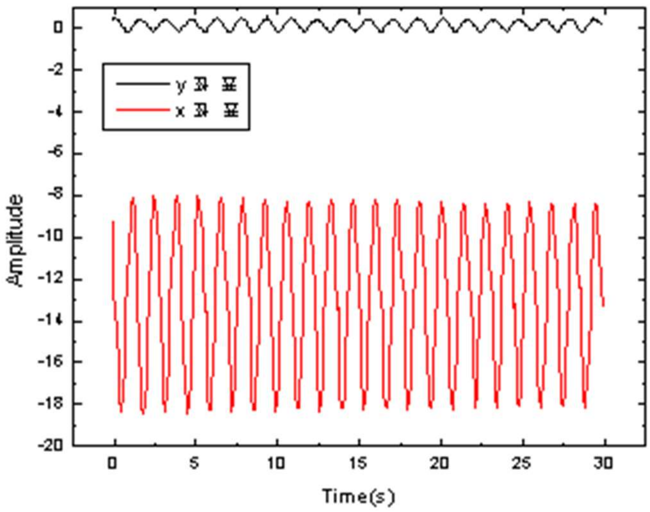


③ 수평면과 수직면의 주기는 같은가? 그 이유는? (같은 경우에 대해 또는 다른 경우에 대해)

3 가지 이상 추 무게를 바꿔 가면서 측정하여 추의 무게에 따라 측정한 주기가 달라지는지 조사하고, 그래프 처리 프로그램을 사용하여 시간에 따른 위치변화 그래프를 그린 후 주기를 구하여 비교해 본다.

④ 이 측정을 3 가지 이상의 실의 길이에 대해 반복한다. 실의 길이에 따른 중력가속도 값은 어떻게 변하는가? 그 이유는?

⑤ (2)의 ⑥과 같은 분석을 해 보아라.

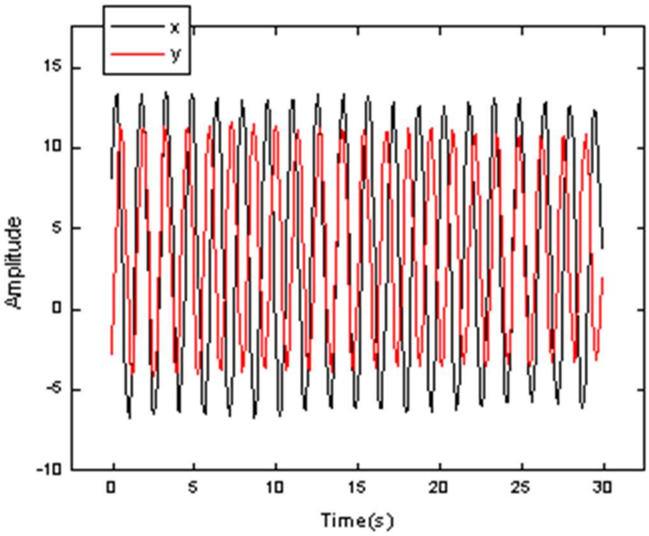


4) 질량을 알지 못하는 추를 사용하여 진자의 흔들이 운동 실험을 한다.

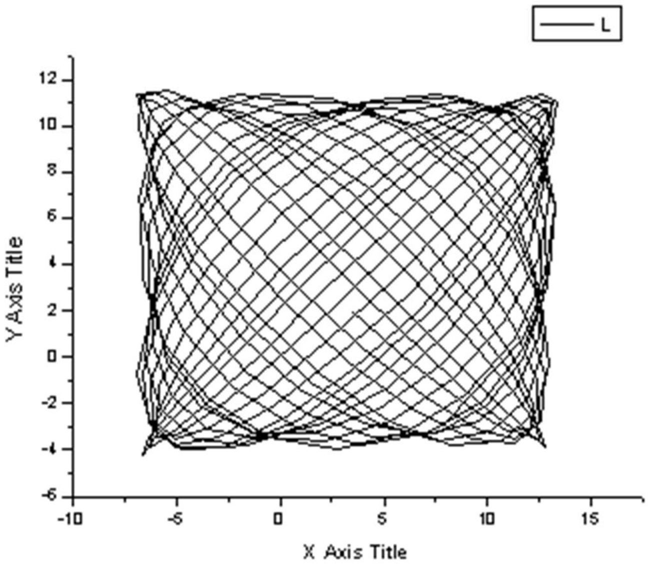
① 추에는 코드번호가적혀있는데 실험 조교들은 이 코드로 질량을 알 수 있으나 학생들에게는 가르쳐 주지 않는다. 실험하는 학생들은 질량을 모르는 2 개의 추에 대하여도 위에서 한 것과 같은 실험을 실행해서 이론적인 계산에 따라 추의 질량을 얻어내고 리포트에는 코드번호와 함께 적어 제출한다. (질량을 구한 과정을 채점에 반영한다.)

5) 리쟈주 도형 그려보기.

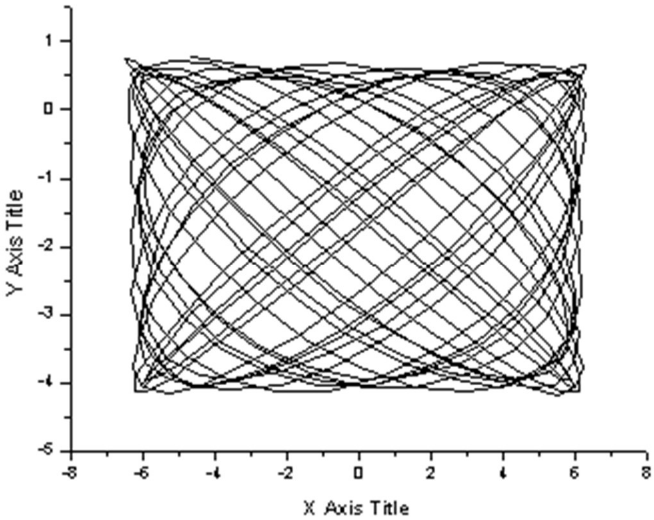
① 용수철에 매달린 추를 아래로 어느 정도 당기고, 수평 위치에서 일정한 각도로 이동시켜 운동을 시킨다. 각 축에 대해 주기 운동을 하게 된다.
얻어진 결과를 이용하여 리쟈쥬 도형을 그려 보자. 각 구간 마다 그려보면 위상에 따라 도형의 모양이 어떻게 달라지는지 볼 수 있다.

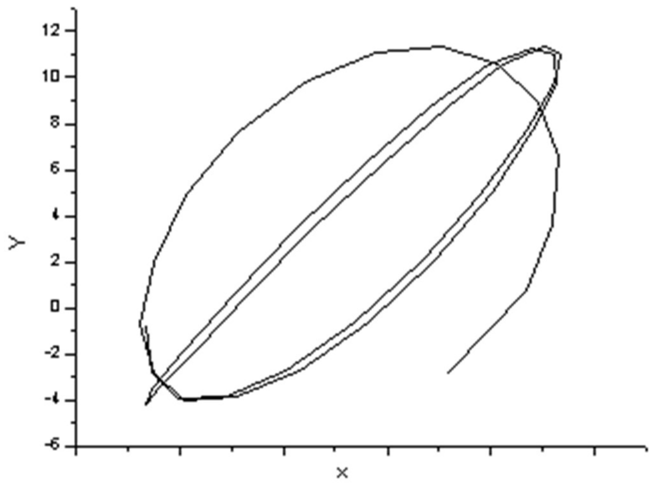


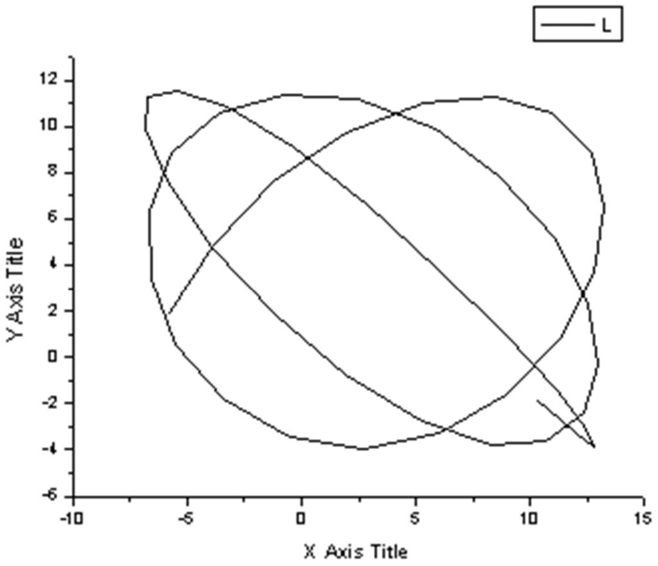
x
y
Amplitude
Time(s)



L
Y Axis Title
X Axis Title


Y Axis Title
X Axis Title
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


Y
X
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6



배경 이론

먼저 중력 하에서 용수철에 매달린 물체의 상하 운동을 살펴본다. 중력 가속도를 g, 용수철 상수를 k, 물체의 질량을 m, 늘어난 길이를 x 라고 하면 용수철이 물체에 미치는 복원력은 -kx 이고, 또한 중력에 의해 힘을 받고 있으므로 물체에 가해진 알짜 힘은 역시 뉴톤의 제 1 법칙으로부터 구할 수 있다.

$$F = mg - kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

이 미분방정식의 일반해는 아래와 같다.(아래의 (2)식이 위 2계미분방정식의 해가 됨은 다음과 같이 확인할 수 있다. (2)식을 좌변에 그리고 (2)식을 두 번 미분하여 우변에 대입하여 보면 등호가 성립함을 알 수 있다.)

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k} \qquad (2)$$

여기서 각속도 ω와 주기 T 는 각각

$$\omega = (k/m)^{1/2} \qquad (3)$$

$$T = 2\pi(M/k)^{1/2} \qquad (4)$$

이고, 진폭 x_m 과 위상 ϕ는 초기 조건(즉, t = 0 에서의 늘어난 길이 x 와 속력 v)으로부터 정할 수 있다.

$$x(t=0) = x_m \cos\phi + \frac{mg}{k} \qquad (5)$$

$$v_x(t=0) = x_m\, \omega \sin\phi \qquad (6)$$

그러나 이상의 결과는 용수철의 질량을 무시하고 또, 용수철에 매달린 물체를 질점(입자)으로 간주할 경우에 적용된다. 이 가정을 없애면 위의 결과는 어떻게 달라지겠는가?)

용수철의 질량의 영향은 다음과 같이 다룰 수 있다. 질량이 M 인 균일한 용수철을 생각하면 질량 m 인 추를 수직으로 매달았을 때 용수철의 늘어난 길이는 위치에 따라 달라져

$$x(y) = (g/k)[m + M(L-y)/L] \qquad (7)$$

이고, 여기서 k, L, y 는 각각 중력이 없었을 때의 용수철 상수, 용수철의 길이, 용수철을 매단 곳으로부터의 거리이다. 윗 식은 마치 질량이 없으나 위치에 따라 용수철 상수가 변하는 용수철의 경우로 간주할 수 있다. 즉, 이 가상적인 용수철의 용수철 상수는

$$k'(y) = km/[m + M(L-y)/L] \qquad (8)$$

라고 할 수 있다. 또, 이 용수철의 평균 용수철 상수는

$$k_{avg} = \frac{1}{L}\int_0^L k'(y)dy = \frac{km}{L}\int_0^L \frac{dy}{\left[m + \frac{M(L-y)}{L}\right]} = k\frac{m}{M}\ln\left(1 + \frac{M}{M}\right) \qquad (9)$$

이고, M << m 인 경우에는 윗 식은

$$k_{avg} \simeq k\left[1 - \frac{M}{(2m)}\right] \qquad (10)$$

로 근사 되고, 따라서 질량이 M 인 용수철에 수직으로 매달린 질량 m 인 추의 각진동수와 주기도 각각

$$\omega \simeq \left(\frac{k_{avg}}{m}\right)^{1/2} \simeq [k/m + M/2)]^{1/2} \qquad (11)$$

$$T \simeq 2\pi\left[\frac{(m + M/2)}{k}\right]^{1/2} \qquad (12)$$

이 되어, 추의 질량 m에의 의존도가 약간 달라짐을 알 수 있다.

[주 : 더 정확한 계산을 하면

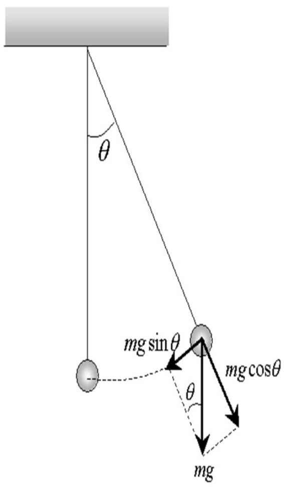
$$T \simeq 2\pi\left[\frac{(m+M/3)}{k}\right]^{1/2} \qquad (13)$$

에 가까우며 실제 문제는 매우 복잡하다. 관심이 있는 사람은 J. M. Nunes da Silva, Am. J. Phys. 62, 423 (1994) 와 그 안의 참고문헌들을 참조하기 바람.]

한편 길이 L 이 일정한 흔들이의 경우 수직 방향으로부터 각도 Θ만큼 기울어진 질량 M 인 추의 복원력은

$$F = - Mg\sin\Theta \qquad (14)$$

로서 반지름이 L 인 원호의 접선 방향이다.



각도 Θ가 작을(Θ<<1) 때 운동법칙은

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \simeq mg\theta \qquad (15)$$

이므로, 이 미분방정식의 해는($\omega' = \sqrt{g/L}$)

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega' t + \phi') \qquad (16)$$

이다. 여기서 각속도 ω'과 주기 T' 은 각각

$$\omega' = (g/L)^{1/2} \qquad (17)$$

$$T' = 2\pi(L/g)^{1/2} \qquad (18)$$

이고, 진폭 Θ_m과 위상 ϕ'은 초기 조건(즉, t = 0 에서의 기울어진 각도 Θ와 각속도 dΘ/dt)에서 구할 수 있다. 즉 각도 Θ가 작을(Θ<<1)때 진자의 운동을 변수 Θ에 비례하는 운동으로 근사하여 해를 구할 수 있다.

$$\theta(t=0) = \theta_m \cos\phi' \qquad (19)$$

$$\frac{d\theta}{dt}(t=0) = \theta_m \omega' \sin\phi' \qquad (20)$$

식(17)와 (18)의 각속도와 주기는 질량 m 에는 무관하다.

그러나 이 결과는 실의 질량을 무시하고 또, 용수철에 매달린 물체를 질점(입자)으로 간주할 경우에 적용된다. 물체에서와 같이 질량이 한 점에 모여 있지 않은 진자를 physical pendulum이라고 부른다. 주기는 일반적으로

$$T = 2\pi(I/mgh)^{1/2} \qquad (21)$$

로 주어지며, 여기서 I은 진자가 매어진 곳에 대한 흔들 운동에 따른 관성모멘트이고 h는 흔들이의 매어진 곳에서부터 질량 중심까지의 거리이다.

보존계에서 마찰등과 같은 다른 요인이 없을 때 역학적 에너지는 보존된다. 단순조화 운동에서 퍼텐셜에너지와 운동에너지는 다음과 같다.

$$U = (1/2)kx^2 \qquad (22)$$

$$K = (1/2)mv^2 = (1/2)m(d^2x/dt^2)^2 \qquad (23)$$

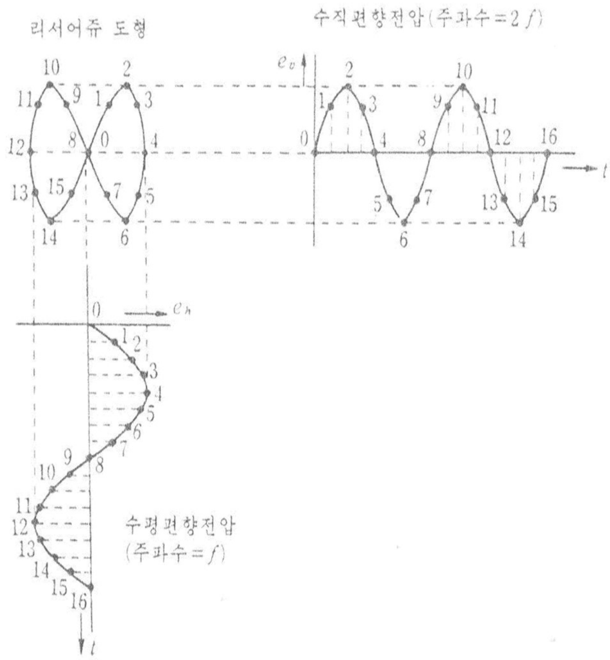
총 역학적 에너지는 보존된다.

$$E = U + K \qquad (24)$$

수직으로 일어나는 두 단조화 운동을 합성하면 리사쥬 도형(Lissajous figures)을 볼 수 있다.

$$x(t) = A_x\cos(\omega_x t + \phi_x) \qquad (25)$$

$$y(t) = A_y\cos(\omega_y t + \phi_y) \qquad (26)$$



만약 두 조화 운동의 진동수(frequency)와 위상(phase)이 같다면 (25), (26)에서 t를 소거하여 다음을 얻을 수 있다.

$$y = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)x \qquad (27)$$

즉 두 조화 운동의 합성은 직선으로 나타나게 된다. 하지만 위상이 달라지면 원과 타원으로 나타나게 된다.

마지막으로 공기에 대한 쓸림힘 효과를 생각해 보자. 역시 간단하게 속도에 비례하는 공기의 쓸림힘을 받는다고 가정하면 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$x(t) = Be^{-bt}\cos(\omega t + \phi) \qquad (26)$$

참고사항

- 측정 데이터 처리 방법

- 그래프에 의한 분석 방법
- 크리스찬 호이겐스 – 흔들이 시계를 발명한 파동학의 선구자
- 흔들이의 간단한 역사
- 흔들이에서의 비선형 효과
- 관성모멘트

※단순 조화 운동에 대한 다양한 애플릿이 있는 site

http://www.scienceall.com/content/c072/physics/mechanical_energy.htm

http://www.scienceall.com/content/c072/physics/oscillation_spring_horizon.htm

http://www.scienceall.com/content/c072/physics/oscillation_spring_vertical.htm

http://www.scienceall.com/content/c072/physics/oscillation.htm

※리쟈쥬 도형데 대한 애플릿이 있는 site

http://www.scienceall.com/content/c072/algorithm/lissajous.htm