Quiz 1 (3월 21일 금 3, 4 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하고, 수렴하는 경우 수렴값을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

2. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.

   (a) (5점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

   (b) (5점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}e^n}$

   (c) (5점) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\log n}$

Quiz 1 모범답안 및 채점기준

1. $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}\frac{n+1}{n} = 0 < 1$$

(2점)

따라서, 비율판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. (3점)

구체적으로 수렴값을 구하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)!}\right) = 1\end{aligned}$$

(5점)

2. (a) $n \le (2n-1), 2n \le (2n+1)$ 이므로

$$\frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \le \frac{40n}{n^2(2n)^2} = \frac{10}{n^3}$$ (3점)

따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^3} < \infty$$

(4점)

비교판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. (5점)

(b) 자연수 n 에 대하여 $\log n \le n$ 이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}e^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$

$a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$ (3점)

따라서, 멱근판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$ 은 수렴하고 비교판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}e^n}$ 은 수렴한다. (5점)

(c) $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$이므로,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\log n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

(3점)

여기서

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty$$

이므로, 적분판정법에 의하면

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$$

(4점)

이다.

따라서, 비교판정법에 의하여 주어진 급수는 발산한다. (5점)