**Quiz 4 (5월 23일 금 5, 6교시)**

[2014 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 공간 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 에 대해 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 을

$$T(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 3 & 4 \\ x_3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   이라 정의할 때, $T$ 가 선형사상임을 보이고, $T$ 에 대응하는 행렬을 구하시오.

2. (8점) 네 점 $O(0,0,0)$, $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,4)$, $P_3(1,3,9)$ 와 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 2 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   에 대응되는 선형사상 $L_A$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

   (a) (4점) 네 점 $O, P_1, P_2, P_3$ 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

   (b) (4점) 네 점 $L_A(O), L_A(P_1), L_A(P_2), L_A(P_3)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피를 구하시오.

3. (6점) 직교좌표에서 방정식 $y^2 = 2x^3 - x^2, (x \neq 0)$ 으로 주어진 곡선 $X$ 를 매개화하시오.

**Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시**

1. 행렬식은 각 열벡터에 대해 선형이다. (직접 보여도 좋다.) (3점)

   $T(\mathbf{e}_1) = 4$, $T(\mathbf{e}_2) = -2$, $T(\mathbf{e}_3) = -2$ 이므로 $1 \times 3$ 행렬 $(4 \ \ -2 \ \ -2)$ 이다. (6점)

2. (a) 세 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ 가 이루는 평행육면체의 부피를 $\mathbf{Vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ 라고 하자. 주어진 네 점을 꼭지점으로 하는 사면체의 부피는

$$\frac{1}{6}\mathbf{Vol}(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3})$$

이므로, 원하는 답은 다음과 같다.

$$\frac{1}{6}\mathbf{Vol}(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}) = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3})| = \frac{1}{3}$$

(4점)

   (b) $L_A(O), L_A(P_1), L_A(P_2), L_A(P_3)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체의 부피는

$$\frac{1}{6}\mathbf{Vol}(L_A(\overrightarrow{OP_1}), L_A(\overrightarrow{OP_2}), L_A(\overrightarrow{OP_3}))$$

이고

$$\mathbf{Vol}((L_A(\overrightarrow{OP_1}), L_A(\overrightarrow{OP_2}), L_A(\overrightarrow{OP_3}) = |\det A|\mathbf{Vol}(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3})$$

에서 구하려는 사면체의 부피는 $\frac{5\sqrt{6}-3}{3}$ 이다. (4점)

3. 원점을 지나고 기울기가 $t$ 인 직선 $y = tx$ 와 주어진 곡선의 교점을 구하면
   $t^2x^2 = 2x^3 - x^2$ 에서 $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ 이다.
   따라서, $y = tx = \frac{1}{2}(t^3 + t)$ 이고, 주어진 곡선은

$$X(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1, t^3 + t)$$

   으로 매개화된다. (6점)
   (부분점수 없음, 매개화식을 맞게 얻으면 감점 없음)