Quiz 1 (3월 21일 금 5, 6 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.
   (a) (5점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2}\right)$
   (b) (5점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

2. (5점) $s > 0$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 이 수렴하는 s 의 범위를 구하시오.

3. (5점) 급수
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$$
는 수렴함을 설명하고 그 근사값을 오차 $\dfrac{1}{50}$ 이내에서 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준

1. (a) 자연수 n 에 대해서 $\log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2}\right) > 0$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2}\right) > \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) > 2\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{N=1}^{n} (\log(N+1) - \log N) = \infty \qquad (3점)$$

따라서, 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2}\right)$ 은 발산한다. (5점)

(b) $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ 이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad (3점)$$

따라서, 비교판정법에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 절대수렴하므로 수렴한다. (5점)

2. $f(x) = \frac{1}{x^s}$ 라고 하면 $f(x)$ 는 연속,감소함수 이며 $x > 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx$$

에 대해

(1) $s = 1$ 이면, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^{\infty} = \infty$ (1점)

(2) $s > 1$ 이면, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = [\frac{1}{1-s}x^{1-s}]_1^{\infty} < \infty$ (3점)

(3) $0 < s < 1$ 이면, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = [\frac{1}{1-s}x^{1-s}]_1^{\infty} = \infty$ (5점)

따라서, (1),(2),(3) 과 적분판정법에 의해서 주어진 급수가 수렴하는 s 의 범위는 $s > 1$ 이다.

3. $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ 이라고 하자.
자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고 감소하는 수열이며 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.
따라서 교대급수 정리에 의하여 주어진 급수는 수렴한다. (3점)

수렴하는 교대급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 과 n 항 까지의 합의 차는 $|a_{n+1}|$ 을 넘지 않고 $\dfrac{1}{4^3} < \dfrac{1}{50}$ 이다.
따라서, 오차 $\dfrac{1}{50}$ 이내에서의 근삿값은 $1 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27}$ 이다. (5점)