

### Quiz 3 (5월 2일 금 3,4 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]  
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점)  $\mathbb{R}^3$ 에서 서로 직교하는  $\mathbf{0}$ 이 아닌 세 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 는 일차독립임을 증명하시오.
2. (5점)  $x + 2y + 3z = 1$ 을 만족하는  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여  $3x^2 + 2y^2 + z^2$ 의 최솟값과 최솟점  $(x, y, z)$ 를 구하시오.
3. (5점)  $\mathbb{R}^n$  공간 속의 한 점  $Q$ 에서 평면  $\alpha : \mathbf{n} \cdot (X - P) = 0$ 에 내린 수선의 발  $H$ 를 구하시오. (단,  $Q$ 는 평면  $\alpha$  위에 있지 않다.)
4. (5점) 원점에서  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$  방향으로 진행하던 빛이 평면  $x + y + z = 6$ 에 반사되어 나가고 있다. 반사된 빛이  $xy$ -평면과 만나는 점을 구하시오.

### Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시

1. 만일  $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  이라면

$$\begin{aligned} (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Rightarrow a_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i &= 0 \text{ 이고 } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \Rightarrow a_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \text{ 즉, } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \text{는 일차 독립이다. (5점)} \end{aligned}$$

(부분 점수 없음)

2.  $((\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{2}y)^2 + z^2)((\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2) \geq (x + 2y + 3z)^2 = 1^2$

$$\therefore 3x^2 + 2y^2 + z^2 \geq \frac{3}{34}.$$

따라서 최솟값은 등호가 성립할 경우이므로  $\frac{3}{34}$  이다. (2점)  
최솟점은 다음과 같다.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{34}, \frac{3}{34}, \frac{9}{34}\right)$$

(5점)

3.  $\overrightarrow{QH} = H - Q$ 는  $\overrightarrow{QP} = P - Q$ 의  $\mathbf{n}$  방향으로의 정사영이므로

$$\overrightarrow{QH} = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

$$\text{따라서 } H = Q + \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}. \quad (5점)$$

(부분 점수 없음)

4.  $\mathbf{v}$  방향으로 원점에서 발사된 빛의 식은  $(0, 0, 0) + t\mathbf{v} = (0, t, t)$ 이고,  
이 빛이 평면  $x + y + z = 6$ 과 만날 때는  $0 + t + t = 6$ , 즉  $t = 3$ .  
따라서 빛과 평면의 교점은  $(0, 3, 3)$ 이다. (1점)

평면에 수직인 방향은  $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 이고, 반사광의 방향  $\mathbf{v}^*$ 의 방향은

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \\ &= (0, 1, 1) - 2 \frac{(0, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) = \left( -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).\end{aligned}$$

(3점)

따라서 반사광의 식은  $(0, 3, 3) + s \left( -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$ 이고,  
반사광이  $xy$  평면과 만날 때는  $3 - \frac{1}{3}s = 0$ . 즉  $s = 9$ .

따라서 구하는 교점은  $(0, 3, 3) + 9 \left( -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) = (-12, 0, 0)$ . (5점)