Quiz 4 (12월 2일 금 5, 6 교시)

[2011년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 곡선 C 는 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 을 꼭지점으로 하는 정사각형이고, 그 향이 시계 반대 방향으로 주어져 있을때, 다음 적분을 계산하시오.
$$\int_C (e^y + \sqrt{1+x^3})\,dx + (2xe^y + \sin(y+y^2))\,dy$$

2. (5점) 다음 곡면의 넓이를 구하시오.
$$S \;:\; z = xy + 2, \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

3. (5점) 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -2x, z)$ 와 곡면
$$S \;:\; z = 2 - 2x^2 - y^2, \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$
에 대하여 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 을 계산하시오. (단, S 의 향을 정하는 단위 법벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(0,0,2)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 주어진다.)

4. (5점) S 는 $\mathbf{R}^3$ 의 단위구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이고,
$$\mathbf{F}(x,y,z) = ((y-x)e^y,\ e^y + \sin x,\ z^3 + \sin(x^2y^3))$$
일때, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 계산하시오.

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1. 주어진 정사각형의 내부와 경계의 합집합을 D 로 두면 $\partial D = C$ 이고, 그린 정리에 의해

$$\begin{aligned} & \int_C (e^y + \sqrt{1+x^3})\,dx + (2xe^y + \sin(y+y^2))\,dy \\ = \;& \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2xe^y + \sin(y+y^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(e^y + \sqrt{1+x^3})\,dV_2 \qquad (3점) \\ = \;& \iint_D e^y\,dV_2 = \int_0^1 \int_0^1 e^y\,dydx = e-1 \qquad (2점) \end{aligned}$$

2. $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ 라고 두고, S 를 $X(x,y) = (x,y,xy+2)$ 로 매개화 하면, $|X_x \times X_y| = |(-y,-x,1)|$ 이므로, (2점)
곡면의 넓이는

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{y^2+x^2+1}\;dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\;rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\;d\theta \\ &= \frac{(4\sqrt{2}-2)\pi}{3} \qquad (3점) \end{aligned}$$

3. 곡면 S 를 $X(x,y) = (x,y,2-2x^2-y^2)$, $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ 로 매개화 하면, $\mathbf{N} = X_x \times X_y = (4x, 2y, 1)$ 이므로 (2점)
$(0,0,2)$ 에서 $\mathbf{N}$ 과 $\mathbf{n}$ 의 방향이 일치한다. 그러므로 (1점)

$$\begin{aligned} & \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2-2x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} - y^2\right) dy = 1 \qquad (2점) \end{aligned}$$

4. $R:\ x^2+y^2+z^2 \le 1$ 로 두고, 발산정리를 사용하면,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_R 3z^2\, dV && \text{(2점)}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 3\rho^2\cos^2\varphi\ \rho^2\sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta\\
&= \left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} 3\cos^2\varphi\ \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\\
&= \frac{2\pi}{5}\left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{5} && \text{(3점)}
\end{aligned}$$