Quiz 1 (3월 22일 금 7, 8 교시)

[2013년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (4점) $0 < s \leq 1$ 일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 이 발산함을 보이시오.

2. (7점) $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴함을 보이시오.

3. (4점) 특이적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 의 수렴, 발산을 판정하시오.

4. (5점) n^2 을 3으로 나눈 나머지를 a_n 라 할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{a_n} \frac{2^n n!}{n^n}$ 의 수렴, 발산을 판정하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. $0 < s \le 1$ 인 s 에 대하여 $n^s \le n$ 이고, $\dfrac{1}{n^s} \ge \dfrac{1}{n}$ 이다.

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. [비교판정법] 에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$.

   따라서, $0 < s \le 1$ 인 s 에 대하여 주어진 급수는 발산한다. (4점)

2. $\displaystyle a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x+n\pi)}{x+n\pi} dx = \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{\sin x}{x+n\pi} dx$

   $\displaystyle b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx$ 이라 하면, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

   (i) $0 < x < \pi$ 에 대해 $\sin x > 0$ 이므로 $b_n > 0$. (1점)

   (ii) $\displaystyle b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. (2점)

   (iii) $\displaystyle b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx \ge \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+(n+1)\pi} dx = b_{n+1}$. (3점)

   * 세 조건을 증명없이 언급만 한 경우, 각각 1점

   따라서, [교대급수 정리] 에 의해서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다. (+1점)

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 이라고 하면 $f(x)$ 는 $x \ge 1$ 에서 연속이고 감소함수이며 $f(x) > 0$ 이다. (+1점)

   [적분판정법] 에 의해서 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ 의 수렴 여부는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ 의 수렴 여부와 같다.

또한, 자연수 n 에 대해서 $\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$

따라서, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ 는 수렴한다. (3점)

4. $b_n = (-1)^{a_n}\frac{2^n n!}{n^n}$ 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e}$ (4점)

[비율 판정법] 에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 은 수렴한다.

절대 수렴하는 수열은 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{a_n}\frac{2^n n!}{n^n}$ 도 수렴한다. (5점)