# Quiz 3 (5월 2일 금 5, 6 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 공간에서 $(-1, 1, 2)$ 방향으로 진행하던 빛이 평면 $2x + y - z = 1$ 에 반사되어 나가는 방향을 구하시오.

2. (5점) 공간에서 크기가 2 인 벡터 $\mathbf{x}$ 가 표준 단위 벡터 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 와 이루는 각을 각각 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \theta$ 라 할 때, 벡터 $\mathbf{x}$ 를 구하시오. (단, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$)

3. (5점) 일차독립인 세 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 세 벡터 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 가 일차종속인지 혹은 일차독립인지 판정하시오.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$

4. (5점) 공간의 두 벡터 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 에 대하여

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| < |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

이면 두 벡터는 일차독립임을 보이시오.

**Quiz 3 모범답안 및 채점기준 예시**

1. 빛의 진행방향을 $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$, 평면에 수직인 벡터를 $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$, 그리고 반사되어 나가는 방향을 $\mathbf{v}^*$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \mathbf{v} - 2p_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} \\ &= (-1, 1, 2) - 2\frac{(2,1,-1)\cdot(-1,1,2)}{(2,1,-1)\cdot(2,1,-1)}(2, 1, -1)\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 방향은 $\mathbf{v}^* = (1, 2, 1)$ 이다. (5점)

(부분 점수 없음)

2. 방향코사인의 성질에 의해,

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\theta = 1$$

이므로,

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = -\frac{1}{2}$$

(2점)

이다. 그런데 $|\mathbf{x}| = 2$ 이므로,

$$\mathbf{x} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\theta\right) = (1, \sqrt{2}, -1)$$

이다. (5점)

3. $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$ 을 만족하는 $a, b, c$ 는 $(2b + c)\mathbf{v}_1 + (a - 2c)\mathbf{v}_2 - (2a + b)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ 을 만족하므로, 다음의 연립방정식의 해이다.

$$2b + c = 0, \qquad a - 2c = 0, \qquad 2a + b = 0.$$

그런데 위 연립방정식은 유일한 자명해 $(0, 0, 0)$ 를 가지므로 세 벡터 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 는 일차 독립이다. (5점)

(부분 점수 없음)

4. 두 벡터 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 가 이루는 각을 $\theta$ 라 하면,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos\theta| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

이므로, "$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ 이면 두 벡터 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 는 일차종속이다"를 보이면 충분하다. 이 경우 $\cos\theta = \pm 1$ 이므로, $\theta = 0$ 또는 $\pi$ 가 된다. 따라서 두 벡터는 나란하고 일차 종속이다. (5점)

(부분 점수 없음)