Quiz 2 (10월 8일 금 3, 4교시)

[2010년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 원점에서 함수 $f(x,y) = e^{x\sin y}$ 의 2차 테일러다항식을 구하라.

2. (6점) 상수 a, $b > 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ 가 주어져 있을 때,
타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 함수
$$f(x,y) = \alpha x + \beta y$$
의 최댓값과 최솟값을 라그랑즈 승수법을 이용하여 구하라.

3. 모든 점에서
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$
이 성립하는 이급함수 f 를 '조화함수'라고 한다.

   (a) (4점) 함수 $f(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ 가 조화함수임을 보이라.

   (b) (5점) 점 P 가 조화함수 $f(x,y)$ 의 임계점이고 $f''(P) \neq O$ 이면, 점 P 는 안장점임을 보이라.

Quiz 2 모범답안 및 채점기준 예시

1.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{x\sin y}, & f(0,0) &= e^0 = 1,\\
D_1 f(x,y) &= e^{x\sin y}\sin y, & D_1 f(0,0) &= 0,\\
D_2 f(x,y) &= e^{x\sin y} x\cos y, & D_2 f(0,0) &= 0,\\
D_1^2 f(x,y) &= e^{x\sin y}\sin^2 y, & D_1^2 f(0,0) &= 0,\\
D_1 D_2 f(x,y) &= e^{x\sin y}\cos y + e^{x\sin y} x\sin y\cos y, & D_1 D_2 f(0,0) &= 1,\\
D_2^2 f(x,y) &= e^{x\sin y}(x\cos y)^2 - e^{x\sin y} x\sin y, & D_2^2 f(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

(3점)

$$\therefore \quad T_2 f(x,y) = 1 + \frac{1}{2!}(2xy) = 1 + xy. \qquad (5\text{점})$$

2. 라그랑즈 승수법에 의하여 극점 (x,y) 에서는 다음 관계를 만족하는 실수 λ 가 존재한다 :
grad $g(x,y) = (\frac{2}{a^2}x, \frac{2}{b^2}y) = \lambda(\alpha,\beta) = \lambda\,\mathrm{grad}\ f(x,y)$.
따라서 $x = \frac{\lambda a^2\alpha}{2}, y = \frac{\lambda b^2\beta}{2}$ 이고, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda^2 a^2\alpha^2}{4} + \frac{\lambda^2 b^2\beta^2}{4} = 1$.

$$\therefore \quad \lambda^2 = \frac{4}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \qquad \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}$$

그러므로 주어진 함수 $f(x,y) = \alpha x + \beta y$ 의 최댓값은

$$\alpha\cdot\frac{a^2\alpha}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}} + \beta\cdot\frac{b^2\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}} = \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}} = \sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2},$$

최솟값은

$$\alpha\cdot\left(-\frac{a^2\alpha}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\right) + \beta\cdot\left(-\frac{b^2\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\right) = -\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}} = -\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}$$

이다.

3. (a) 직접 계산을 통하여 주어진 함수 $f(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ 가 조화함수임을 보이면 된다.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) + e^{x^2-y^2}(-2y\sin(2xy)) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) + e^{x^2-y^2}(-2x\sin(2xy)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 4x^2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy) \\
&\quad - 4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy) - 4y^2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 4y^2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy) \\
&\quad + 4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy) - 4x^2e^{x^2-y^2}\cos(2xy)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

(b) 조화함수의 헤세 행렬은 $f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{pmatrix}$ 이고 $f''(P) \neq O$ 이므로 $\det f''(x,y) = -(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})^2 - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 < 0$ 이 된다. 따라서 헤세판정법에 의하여 점 P 는 안장점이다.