Quiz 1 (3월 25일 화 7.5, 8.5 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 급수의 수렴 발산을 판단하고 그 근거를 제시하시오.

   (a) (4점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!e^n}$

   (b) (4점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{2^n}$

2. (6점) 다음 급수의 수렴여부와 절대수렴여부를 판단하고 그 근거를 제시하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

3. (6점) $p > 0$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$이 수렴하는 p의 범위를 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!e^n}$ 이라고 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!e^{n+1}}}{\frac{n^n}{(2n)!e^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{2e(2n+1)} = 0 < 1$$

(2점)

따라서, 비율판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다. (4점)

(b) 모든 자연수 n 에 대해서 $0 < \dfrac{n\log n}{2^n} < \dfrac{n^2}{2^n}$ 이다.

$a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

(2점)

따라서, 비율판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$은 수렴하고 비교판정법에 의하여 주어진 급수도 수렴한다. (4점)

2. $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$ 이라 하자. 그러면 a_n은 감소하는 양항 수열이다.

$\left(\because\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\right.$ 이라면 $\left.f'(x) = \frac{-2x}{(x+1)^3} < 0,\quad (\forall x \geq 1)\right)$

따라서 교대급수정리에 의하여 주어진 급수는 수렴한다. (3점)
(단, $f(x)$ 가 감소함수인 이유를 명확하게 밝히지 않으면 1점 감점)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty$$

(5점)

이고, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$은 발산하므로, 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \right|$ 은 발산한다. 즉, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다. (6점)

3. $f(x) = x(\log x)^p$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 라고 하자.
$x \geq 2$이면 $g(x) > 0$ 이고 $f'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$는 감소함수이다.

$$\int_2^{\infty} g(x)\ dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^p}\ dt \qquad (\text{단, } t = \log x)$$

(1) $p = 1$ 이면, $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\log x]_{\log 2}^{\infty} = \infty$ (1점)

(2) $p > 1$ 이면, $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^p} dt = [\frac{1}{1-p} t^{1-p}]_{\log 2}^{\infty} < \infty$ (4점)

(3) $0 < p < 1$ 이면, $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^p} dt = [\frac{1}{1-p} t^{1-p}]_{\log 2}^{\infty} = \infty$ (6점)

따라서, (1),(2),(3) 과 적분판정법에 의해서 주어진 급수가 수렴하는 p 의 범위는 $p > 1$ 이다.