

고급수학 및 연습 1 기말고사

(2015년 6월 6일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 좌표공간 \mathbb{R}^3 의 두 벡터 \mathbf{a}, \mathbf{b} 는 서로 수직이 아니고, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 을 만족한다고 하자. 이때 세 벡터 $\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 는 일차독립임을 보이시오.

문제 2. [20점] 3차원 공간에서 세 점 $A(1, 2, 3), B(2, 4, 5), Q(3, 4, 6)$ 를 지나는 평면에 대하여 평면 밖의 한 점 P 에서 이 평면에 내린 수선의 발이 Q 라고 한다. \overrightarrow{AP} 의 길이가 8일 때, \overrightarrow{AP} 와 \overrightarrow{AB} 가 이루는 각의 크기 θ 를 구하시오.

문제 3. [10점] 가역행렬 G 에 대하여 다음 등식을 만족시키는 행렬 A 의 행렬식을 구하시오.

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

문제 4. [30점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 일 때, $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저임을 보이시오.

(b) (10점) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 로 표현되는 선형사상을 L_A 라고 두자. $L_A(\mathbf{i}), L_A(\mathbf{j}), L_A(\mathbf{k})$ 를 기저 \mathcal{B} 의 원소들의 일차결합으로 각각 나타내시오.

(c) (10점) 기저 \mathcal{B} 에 관한 L_A 의 행렬표현 B 를 구하시오.

(즉, 행렬 B 는 \mathbb{R}^3 의 원소 $x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3$ 에 대해 $L_A(x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3) = x'\mathbf{a}_1 + y'\mathbf{a}_2 + z'\mathbf{a}_3$ 라 할 때,

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

을 만족하는 행렬을 뜻한다.)

문제 5. [20점] 평면 $x + y + z = 1$ 위의 네 점 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 1, 1), D(1, -1, 1)$ 를 밑면의 네 점으로 하고 $E(2, 2, 2)$ 를 나머지 꼭지점으로 하는 사각뿔의 부피를 구하시오.

문제 6. [10점] 곡선 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, x \geq 0, y \geq 0$ 의 밀도함수가 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ 으로 주어졌을 때, 곡선의 질량을 구하시오.

문제 7. [25점] 좌표평면 위의 영역 $\{(x, y) \mid x > 2y\}$ 에서 정의된 곡선 $e^{x-2y} = 4(x-y)^2 - x^2$ 을 $t = x - 2y$ 로 매개화하고 $t = 1$ 일 때 속도벡터를 구하시오.

문제 8. [25점] 곡선 $X(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi$ 의 길이를 구하고, 점 $(1, 0, 1)$ 로부터 켄 곡선의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 점에서 곡률벡터를 구하시오.

문제 9. [20점] 현수선 $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) 를 호의 길이로 매개화하시오. 이때, 매개변수의 범위도 구하시오.

문제 10. [20점] 극좌표계에서 식

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

으로 주어진 곡선 X 의 개형을 그리고, 이 곡선에 의해 나뉘어진 영역 중에서 점 $(-2, 0)$ 을 포함하는 영역의 넓이를 구하시오.