**Quiz 4 (5월 23일 금 3, 4 교시)**

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (6점) 선형사상 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 가

$$T\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\\7\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\3\\-12\end{pmatrix}$$

   을 만족할 때, 선형사상 $T$ 에 대응되는 행렬을 구하시오.

2. (4점) 다음 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$\begin{pmatrix}101 & 102 & 104\\203 & 205 & 209\\304 & 309 & 321\end{pmatrix}$$

3. (6점) 점 $P(9,3,-3)$ 에서 세 점 $Q(1,4,9)$, $R(1,3,7)$, $S(0,2,1)$ 을 지나는 평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오.

4. (4점) 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 을 점 $(-2,0)$ 을 지나고 기울기가 $t$ 인 직선과의 교점을 이용하여 매개화하시오.

**Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시**

1. $4 \times 2$ 행렬 $(T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2))$ 를 구하면 된다. 선형사상의 성질을 이용하기 위해, $a(1,-2)+b(-2,3) = \mathbf{e}_1$, $c(1,-2)+d(-2,3) = \mathbf{e}_2$ 인 $a$, $b$, $c$ 그리고 $d$ 를 구하자.방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

을 만족하는 $a$, $b$, $c$ 그리고 $d$ 를 구하면

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. (2점)

따라서 구하고자 하는 행렬은

$$(T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_1)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

이다. (6점)

2. 행렬식의 성질을 이용하여 행렬식을 구하면,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 101 & 102 & 104 \\ 203 & 205 & 209 \\ 304 & 309 & 321 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 101 & 102 & 104 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

이다. (5점)

(부분 점수 없음)

3. $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = (4, 2, -1)$ (2점)
따라서, 점 $Q, R, S$ 를 지나는 평면의 식은

$$\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} \cdot (x, y-2, z-1) = 0,$$

곧

$$4x + 2(y-2) - (z-1) = 0$$

이다. 이제 $P$ 에서 평면에 내린 수선의 발을 $T = (a, b, c)$ 라 하면,

$$\overrightarrow{PT} = (a-9, b-3, c+3) = \alpha(4, 2, -1)$$

인 $\alpha$ 가 존재한다. 또 $T$ 는 주어진 평면 위의 점이므로

$$\begin{aligned} 0 &= 4a + 2(b-2) - (c-1) \\ &= 4(4\alpha+9) + 2(2\alpha+3-2) - (-\alpha-3-1) \\ &= 21\alpha + 42 \end{aligned}$$

이고, 따라서 $\alpha = -2$ 이고, 수선의 발은

$$T = (a, b, c) = (4\alpha+9, 2\alpha+3, -\alpha-3) = (1, -1, -1)$$

이다. (6점)

4. 점 $(-2, 0)$ 을 지나고 기울기가 $t$ 인 직선은 $y = t(x+2)$ 이므로, 직선과 주어진 타원의 교점을 구하면,

$$1 = \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{x^2}{4} + t^2(x+2)^2$$

에서, $x = \dfrac{-8t^2+2}{4t^2+1}$ 또는 $x = -2$ 를 얻는다. 이제 $x = \dfrac{-8t^2+2}{4t^2+1}$ 인 경우 $y = \dfrac{4t}{4t^2+1}$ 이고, $x = -2$ 인 경우 $y = 0$ 이다. 한편

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{-8t^2+2}{4t^2+1} = -2, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{4t}{4t^2+1} = 0$$

이므로, 주어진 타원은

$$X(t) = \left( \frac{-8t^2+2}{4t^2+1}, \frac{4t}{4t^2+1} \right)$$

로 매개화된다. (5점)
(부분 점수 없음, 매개화 식을 맞게 얻으면 감점하지 말 것)