2016년 물리학1 2차 시험 (서울대학교)

총 3페이지 / 시험시간: 100 분: 확인______________

학과: 학번: 이름: 점수:

*문제의 의미가 모호한 경우에는 반드시 감독자에게 문의하세요.

*풀이과정이 있는 답만 점수를 부여합니다. (계산기 사용가능, 수치계산에서는 중력가속도는 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$)

*특별한 언급이 없으면 마찰이나 공기저항 등은 무시합니다.

[문제 1] 다음 질문 중 **2개를 골라** 답하라.

a. 구하라가 석천호수에 떠있는 큰 얼음덩어리 위에 용케도 올라 서 있다. 발이 물에 잠기지 않으려면 얼음덩어리는 구하라보다 몇 배 더 무거워야 되는가? ($\rho_{ice} = 920\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{water} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$)[5]

*구하라가 올라탄 얼음이 완전히 잠기는 경우보다 무거워야 한다:

얼음 부피= V; 완전히 잠기는 경우 힘의 평형= 구하라무게(mg)+얼음무게$(\rho_i g V)$=부력$(\rho_w g V)$

$$m_i = \rho_i V = \rho_i \frac{m}{\rho_w - \rho_i} \to \therefore \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho_w - \rho_i} = 11.5;$$

구하라 몸무게보다 11.5 배 이상이어야 함

b. 바닥의 면적은 같지만 입구의 넓이가 다른 플라스크에 같은 높이로 물을 채웠다. 바닥에서 압력이 같으므로 물이 플라스크의 바닥에 작용하는 힘은 모두 같다. 그런데 각 플라스크에 담긴 물의 무게가 다른데 어떻게 이것이 가능한지 설명하라.[5]

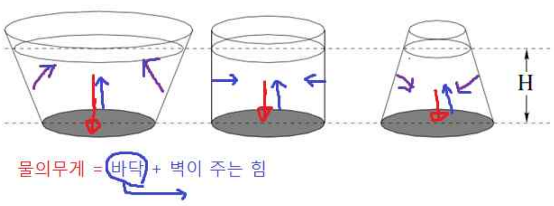
물이 받는 힘 = 바닥이 주는 힘+ 옆벽이 주는 힘 – 물의 무게 = 0 (정지)

물이 바닥에 주는 힘 = 물의 무게 – 옆벽이 주는 힘;

첫 번째: 물의 무게 일부가 옆 벽에 분산되므로 바닥이 물의 모든 무게를 받지 않는다

두 번째: 물의 무게와 – 압력에 의한 힘이 같다

세 번째: 옆 벽이 (압력을 유지되도록) 옆에서 눌러주므로 바닥에서 압력이 물이 다른 경우보다 물의 무게가 덜 나가더라도 같게 된다.



c. 아래 그림처럼 두 가지 방법으로 망치의 균형 잡기를 시도한다. 어느 쪽이 균형을 유지하기가 더 쉬운지 물리적으로 간단히 설명하라.[5]

***수직축에서 θ-각도 만큼 기울어진 경우 각가속도를 비교하면 된다; 각가속도가 작은 경우가 훨씬 다시 자세를 잡기가 쉽다.**

손가락 끝(회전축)에서 망치의 무게중심까지의 거리를 h라면 망치의 회전관성은 거의 무게중심에 모든 질량이 뭉쳐있는 것으로 계산할 수 있다;

회전운동방정식: $\sum \tau = I\alpha$; 토크를 만드는 힘은 망치의 무게(손끝이 떠받히는 힘은 토크를 생성하지 않음)

$\tau = mgh\sin\theta$; $I \simeq mh^2$ (앞에 적당한 numeric factor가 들어온다)

$$\therefore \alpha = \frac{\tau}{I} \simeq \frac{g}{h}\sin\theta$$

회전축에서 무게중심까지의 거리(h)를 멀수록 각가속도가 같은 기울어진 각에서 작으므로 훨씬 자세를 다시 바로잡기가 쉽다.

[문제 2] 균일한 막대(길이=ℓ, 질량=m)가 그림과 같이 한쪽 끝은 자유로이 회전할 수 있는 경첩에 연결되어 있고, 반대편 끝은 천정에 매달린 실에 연결되어 수평과 30° 기울어진 상태로 있다.

a. 실이 끊어지면 막대는 얼마의 (경첩에 대한) 회전 각가속도로 운동을 시작하는가?[4]

줄이 끊어지면 막대에 작용하는 힘은 경첩이 주는 힘(토크가 없음)과 막대의 무게(토크: $\tau = mg\frac{\ell}{2}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}mg\ell}{4}$)뿐이다; (2)

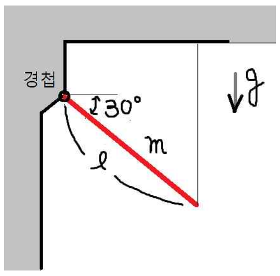
$$\sum \tau = I\alpha \to \therefore \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\frac{\sqrt{3}mg\ell}{4}}{\frac{1}{3}m\ell^2} = \frac{3\sqrt{3}\,g}{4\ell} \ (2)$$

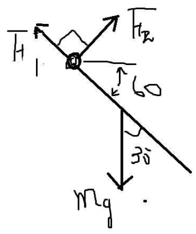
b. 회전하던 막대가 수평과 60° 기울어진 상태가 되는 순간 경첩에 작용하는 힘의 크기는?[8]

역학적 에너지가 보존되므로(경첩이 작용하는 힘은 일을 하지 않음).

60도 기울어질 때 막대의 각속력을 ω라면: $\rightarrow 0 - mg(\frac{\ell}{2}\sin 30) = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg(\frac{\ell}{2}\sin 60)$ --> $\omega^2 = \frac{3g}{2\ell}(\sqrt{3}-1)$

막대에 작용하는 외력 = 경첩이 당기는 힘(F_1 and F_2:수직분해)와 중력(mg)





**질량중심이 원운동을 한다는 사실을 쓰면 된다: 구심가속도 & 접선가속도

회전중심방향 힘(구심력): $\sum F_{중심} = F_1 - mg\cos 30$ = 구심력 = $mr\omega^2 = m(\frac{\ell}{2})\omega^2$

$\rightarrow\ F_1 = mg\cos 30 + m\omega^2\frac{\ell}{2} = \frac{mg}{4}(5\sqrt{3}-3)$; [4]

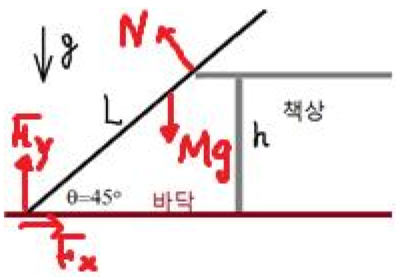
60도 기울어질 때: 경첩에 대한 회전 운동방정식 --> $\tau = I\alpha$ --> $mg\frac{\ell}{2}\sin 30 = \frac{1}{3}m\ell^2\alpha$, --> $\alpha = \frac{3g}{4\ell}$

질량중심의 접선가속도는 $a_t = \frac{\ell}{2}\alpha = \frac{3g}{8}\ell$ (시계방향:+)

접선방향힘(토크생성): $\sum F_{접선} = mg\sin 30 - F_2 = ma_t = \frac{3mg}{8}$ $\rightarrow\ F_2 = ma_t = \frac{mg}{8}$ [4]

따라서, $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = ...$ 여기까지 전개만해도 점수를 부여;

[문제 3] 균일한 막대(질량=M, 길이=L)가 책상(높이=h) 모서리에 비스듬하게($\theta = 45^\circ$) 눕혀있다. 책상 모서리에서 마찰은 없고 수직항력은 막대에 수직하게 작용한다. 막대가 미끄러지지 않고 이 상태를 유지할 수 있는 바닥과의 정지마찰계수는 어떻게 될까? (단, $\sqrt{2}h < L < 2\sqrt{2}h$)[7]



자유물체도(1)

$\sum f_x = F_x - N\sin 45^\circ = 0$, $\sum f_y = F_y - Mg + N\cos 45^\circ = 0$,

$\sum \tau_{end} = Mg(\frac{L}{2})\sin 45^\circ - N(\frac{h}{\sin 45^\circ})\sin 90^\circ = 0$

$N = \frac{MgL}{4h}$, $F_x = \frac{MgL}{4\sqrt{2}h}$, $F_y = Mg(1 - \frac{L}{4\sqrt{2}h})$, (4)

$F_x \leq \mu_s F_y \rightarrow \mu_s \geq \frac{F_x}{F_y} = \frac{L}{4\sqrt{2}h - L}$ (2)

[문제 4] 혜성 엥케(Encke)는 1786년 Pierre Mechain에 의해서 발견되었고, 1822년 Johann Encke가 주기가 3.3년임을 밝혔다. 1913년 태양에서 가장 멀리 떨어진 원일점($r_a = 6.1\times 10^{11}$ m)에 왔을 때 Mt. Wilson 천문대의 망원경에 의해서 사진이 촬영되었다, 엥케가 태양에 가장 가깝게 접근한 근일점의 거리는 $r_p = 5.1\times 10^{10}\,\mathrm{m}$이다. 태양의 질량은 $M_s = 2.0\times 10^{30}$ kg이다.

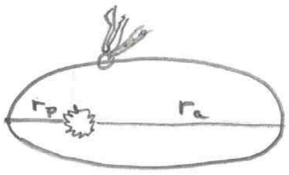
a. (태양을 기준점으로 하는) 혜성 엥케의 각운동량이 보존됨을 설명하라.(4점)

혜성은 태양의 중력을 받는다; 중력에 의한 토크를 계산하면 $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$;

태양이 혜성에 작용하는 중력은 항상 $-\vec{r}$ 방향이므로(중심력) $\vec{\tau} = 0$;

따라서 $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0$, $\therefore\ \vec{\ell} = const$

b. 근일점에서 혜성 엥케의 속력을 구하라.(6점)



근일점과 원일점의 정보가 주어졌으므로 각운동량 보존 + 역학적에너지 보존을 쓰면;

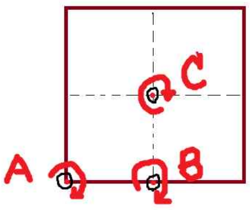
$mv_p r_p = mv_a r_a \rightarrow \; v_a = v_p (r_p / r_a)$

$\frac{1}{2}mv_a^2 - GM_s\frac{m}{r_a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - GM_s\frac{m}{r_p} \rightarrow v_p^2 - v_a^2 = 2GM_s(r_a - r_p)/r_a r_p$ (4)

식 2개; 미지수 2개(v_a, v_p); v_p를 구하면; 죽어라고 풀면;(v_a, v_p나머지항은 간단히 치환하면 쉽다)

$v_p = \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r_p(1+r_p/r_a)}} = 6.95\times 10^4 \;\; \mathrm{m/s}$ (2) ** 연습을 많이 하면 쉽게 이차방정식을 푼다;

[문제 5] 동일한 막대를 4개를 이용해서 정사각형을 구성했다. 이 정사각형이 만드는 평면에 수직인 3개의 회전축 A, B, C가 있을 때 회전시키기가 어려워지는 순으로 나열하라.(막대는 균일하다)[6]



**평행축 정리를 잘 이용하면 된다. 막대의 길이를 2a로;

$I_A = 2\times\frac{1}{3}m(2a)^2 + 2\times[\frac{1}{12}m(2a)^2 + m(5a^2)] = \frac{40}{3}ma^2;$

$I_B = \frac{1}{12}m(2a)^2 + 2\times[\frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a^2)] + [\frac{1}{12}m(2a)^2 + m(4a^2)] = \frac{28}{3}ma^2$

$I_C = 4\times[\frac{1}{12}m(2a)^2 + ma^2] = \frac{16}{3}ma^2;$

각 2점;

● 또는 정사각형 전체의 질량중심을 지나는 축이 C이므로 B는 a 만큼 평행이동, A는 $\sqrt{2}a$만큼 평행이동이므로
$I_A = (4m)(2a^2) + I_C, \; I_B = (4m)(a^2) + I_C; \quad C < B < A$이다.

[문제 6] 중심축에 대해서 자유롭게 회전할 수 있는 원판 중앙에서 구하라가 균일한 막대(길이=ℓ, 질량=m) 양 끝에 무거운 추(각각, 질량 M)를 매단 상태(A)로 1초에 1회전 하고 있다. ~~구하라와 원판의 중심축에 대한 회전관성은 I_0 이다.~~ 그림 A의 전체 회전관성은 I_A이다.

a. 막대를 당겨서 B처럼 되게 하면 회전 각속력은 얼마인가?[5]

회전축 방향의 각운동량이 보존된다(1)

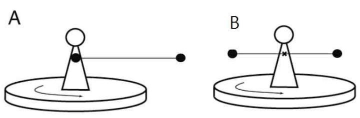
$I_A = (I_0 + \frac{1}{3}m\ell^2 + M\ell^2 + M.0); \rightarrow L_i = I_A\omega_i = I_A(2\pi)$

$I_B = I_0 + \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{2}M\ell^2 = I_A - \frac{1}{4}m\ell^2 - \frac{1}{2}M\ell^2$

$L_f = I_B\omega_f = (I_A - \frac{1}{4}m\ell^2 - \frac{1}{2}M\ell^2)\omega_f;$

$\therefore \; \omega_f = \frac{8\pi I_A}{4I_A - m\ell^2 - 2M\ell^2}$

b. 이 과정에서 구하라가 한 일은 얼마인가?[5]

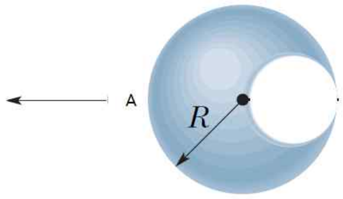


일-운동에너지 정리에 의해서 운동에너지의 차이만큼 구하라가 일을 한다.

$W = \Delta K = \frac{L_f^2}{2I_B} - \frac{L_i^2}{2I_A} = \frac{L_i^2}{2}\frac{I_A - I_B}{I_A I_B} = 2\pi^2 I_A \frac{m\ell^2 + 2M\ell^2}{4I_A - m\ell^2 - 2M\ell^2} \;\; > 0$

[문제 7] Darth Vader는 우주공격기지를 만들기 위해서 반지름 R인 소행성의 내부에 그림과 같이 구형의 빈공간을 만들었다.

빈공간을 만들기 전 소행성 질량은 M이었고 물질 분포는 균일했다. 이 소행성 기지에 은밀하게 잠입한 Hans Solo가 표면 A-지점에서 Millennium Falcon을 이용해서 탈출을 시도한다. 소행성의 중력 영향권에서 벗어나려면 Millennium Falcon의 발사속력은 얼마나 되어야 하는가? (소행성은 Falcon보다 매우 무거워서 발사 영향을 무시할 수 있다)[7]



역학학 에너지 보존 법칙: 발사속력은 탈출속력이상이 되어야 한다; 탈출속력을 구하기 위해서

$K_A + U_A = 0$;

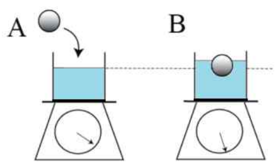
A지점에서 위치에너지는 온전한 소행성에 의한 위치에너지 – 파낸 부분에 의한 위치에너지 (중첩의 원리)

파낸 부분 질량: 반지름의 3 승에 비례: $M_c = M(1/2)^3 = M/8$;

$$U_A = -\frac{GMm}{R} - \left(-\frac{G(M/8)m}{3R/2}\right) = -\frac{11GMm}{12R}$$

따라서, $v_A = \sqrt{\frac{11GM}{6R}}$ 이 속력보다는 크게 발사해야 한다. 그리고 발사방향은 중력이 보존력이므로 상관없음.

[문제 8] 밑면적이 $0.04\ \mathrm{m}^2$인 비커(원통이라 생각하라)에 물을 채워서 저울 위에 올려놓았더니 눈금이 $24\,\mathrm{kg}$을 가리킨다(A). 이 상태에서 공을 넣었더니 공은 물 위에 뜨고 저울의 눈금은 $27.3\,\mathrm{kg}$이 되었다. 물의 밀도는 $1000\,\mathrm{kg/m^3}$이다. 공을 넣은 후 수면은 공을 넣기 전 수면에 대해서 얼마나 올라가는가?[6]



공의 질량 = 저울눈금 차이= 3.3kg

공의 무게 = 부력 = $\rho_w g V$ --> 공이 밀어낸 물의 부피→ $V = \frac{m}{\rho_w}$ $h = \frac{m}{\rho_w A} = 0.0825\,\mathrm{m} = 8.25\,\mathrm{cm}$

[문제 9] 둘레에 가는 실이 감겨있는 균일한 실린더(질량=M, 반지름=R)가 있다. 실 끝을 일정한 힘 F로 오른쪽으로 당겨서 실린더가 미끄러짐이 없이 구르고 있다.

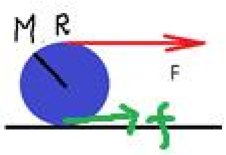
a. 실린더에 작용하는 마찰력의 방향을 운동방정식의 직접적인 풀이 없이 설명하라.[4]

질량중심에 대한 병진운동과 회전운동으로 보면;

마찰이 사라지면 실린더와 F가 만드는 토크에 의해서 바닥과의 접촉지점은 왼쪽으로 미끄러지므로 마찰은 이 미끄러짐을 방해하는 방향으로 작용해야 한다. 따라서 오른쪽 방향이다.

(** 마찰이 없는 경우 운동방정식을 보면 실린더의 회전관성이 $I = 1/2MR^2$이므로 접촉점의 속도를 구해보면 오른쪽 성분보다 왼쪽 성분이 더 크다. 따라서 이 미끄러짐을 방지하기 위해서는 오른쪽 방향의 마찰력이 작용해야 한다)

b. 실린더에 감긴 실이 d 만큼 풀렸을 때 속력을 구하라?[7]



$$\sum F_x = F + f = ma,\ \sum \tau_{cm} = (F - f)R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha,\quad \alpha = a/R\ (no\ slipping)$$

$a = \frac{4F}{3m}$ (note $>$ F/m) :등가속도 운동 (3)

실이 d만큼 풀리면 중심은 d만큼 이동한다; (2)

$v^2 = 2ad = \frac{8Fd}{3m} \rightarrow v = \sqrt{\frac{8Fd}{3m}}$ (2)

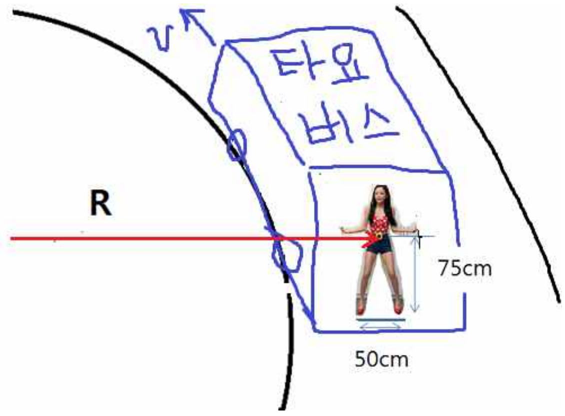
****

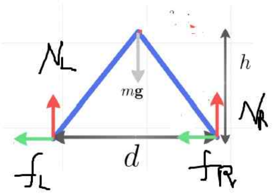
또는 결국 힘이 한일 $W = F(2d)$이고, 이것이 운동에너지를 증가시키므로

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 2Fd \rightarrow \frac{3}{4}mv^2 = 2Fd \rightarrow v = \sqrt{\frac{8Fd}{3m}}$$

[문제 10] 구하라를 태운 버스가 원형 커브길($R = 40\,\mathrm{m}$: 커브 중심에 구하라 무게중심까지)을 일정한 속력으로 돌고 있다. 구하라의 무게중심은 지면에서 $75\,\mathrm{cm}$ 높이에 있고, 두 발의 간격은 $50\,\mathrm{cm}$이다. 손잡이를 잡고 않은 구하라가 안전하게 서 있을 수 있는

버스의 최대속력은? 단, 버스 바닥의 마찰은 충분히 커서 구하라는 미끄러지지 않는다. [8]





** 너무 속력이 빠르면 바깥으로 넘어진다. 이 경우에 안쪽 다리의 수직항력이 0이 된다. 수직항력이 0이 넘어지는 기준이 된다.

구하라의 두 발에 작용하는 마찰력이 구심력 역할을 한다;

$\sum F_x(\text{왼쪽}+) = f_L + f_R = m\frac{v^2}{R}$, $\sum F_y = N_L + N_R - mg = 0$

질량중심에 대한 토크 평형조건;

$\sum \tau_{cm} = (f_L + f_R)h + (N_L - N_R)\frac{d}{2} = 0$ (4)

미지수가 f_L, f_R, N_L, N_R이고, 식이 3개지만 수직항력 N_L, N_R을 구할 수 있다; 죽어라고 풀면;

$N_L = \frac{mg}{2} - \frac{mv^2}{R}\frac{h}{d}$, $N_R = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2}{R}\frac{h}{d}$

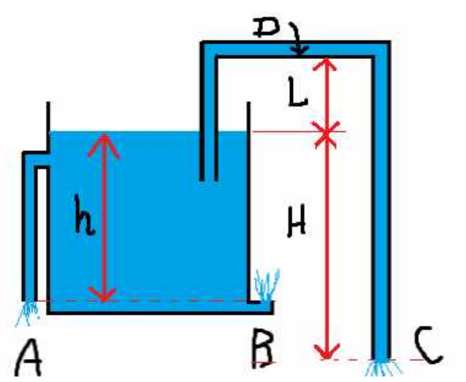
안넘어지면 수직항력이 있어야 하므로; $N_L \geqq 0$ 에서 $v \leqq \sqrt{\frac{Rgd}{2h}}$ = 11.83m/s = 42.6 km/h (4)

[문제 11] 물탱크에 담긴 물을 그림처럼 3가지 방법으로 배출하려고 한다. 관의 단면적은 모두 같고, 물탱크의 입구는 관의 단면적에 비해서 매우 크다. (물의 밀도: ρ_w, 대기압: P_o). 수면에서 관의 입구까지 높이차가 h일 때 A 지점과 B 지점에서 나오는 물의 각각 속력을 각각 구하라.[6]

수면과 출구를 비교하면 A나 B모두 같다;

연속방정식에서 $Av = const$ 관의 출구 면적이 물통의 면적보다 매우 작으면 수면이 내려가는 속력은 무시할 수 있다;

따라서 $P_0 + 0 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 \rightarrow v = \sqrt{2gh} = v_A = v_B$



[문제 12] 총알(질량=m)의 속력을 측정하기 위해서 그림과 같은 천장에 매달린 균일한 나무막대(질량=M, 길이=L)의 중간부분을 향하게 총을 쏘았다. 나무막대는 천정의 회전축에 대해서 자유로이 회전할 수 있다. 총알과 나무막대의 충돌은 순간적으로 일어난다고 생각할 수 있다.

a. 충돌과정에서 아래 나열된 물리량 중에서 보존이 되는 것을 골라라. 보존되는 이유와 안되는 이유를 명시해야 한다.[6]

"총알-막대 총운동량", 총알-막대 총각운동량", "총알-막대 총운동에너지"

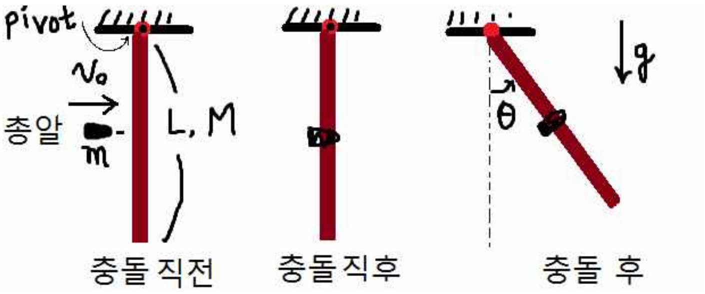
총운동량은 보존이 안된다: 충돌과정에서 경첩에 의한 외력이 작용한다(중력도 작용하지만 충돌이 순간적으로 일어나므로 같은

자리여서); (2)

총각운동량은 보존이 된다(회전축): 왜냐면 경첩이 작용하는 외력은 모멘트 팔=0 이어서 토크 없음. (중력을 고려하더라도 $\vec{r} // \vec{W}$이어서 없음) (2)

총운동에너지: 총알이 박히는 과정에서 마찰이 작용하므로 에너지 손실이 생겨서 안됨: 비탄성충돌 (2)

b. 총알이 박힌 막대가 회전한 최대각도가 $\theta = 90^\circ$ 라면 총알의 속력은 주어진 물리량으로 어떻게 표현되는가?[7]



충돌직전 각운동량(경첩기준): $\ell = mv(\frac{L}{2}) = \frac{mvL}{2}$(총알)

충돌직후 막대-총알의 경첩에 대한 회전관성: $I = \frac{1}{3}ML^2 + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1+\frac{4M}{3m}}{4}mL^2$

충돌직후 역학적 에너지: $E = K = \frac{\ell^2}{2I}$ (막대질량 중심: 중력위치에너지 기준)

최고점에서 역학적에너지 $E = U = (m+M)g\frac{L}{2}$

따라서, $\ell = \sqrt{(m+M)gLI} = \sqrt{\left(1+\frac{M}{m}\right)mgLI}$;

$v = \sqrt{\left(1+\frac{M}{m}\right)\left(1+\frac{4M}{3m}\right)gL}$

유용한 공식:

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$,

$a_c = m\frac{v^2}{r}$, $a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$, $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

$I = \sum r_i^2 m_i$, $I_p = I_{cm} + Mh^2$,

막대 : $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, $I_{end} = \frac{1}{3}ML^2$, 원판 : $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ($\tau = rF\sin\theta = r_\perp F = rF_\perp$), $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$, $\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$ ($\ell = mvr\sin\phi$), $L = I\omega$,

$\tau = I\alpha$, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$,

$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$, $U_g = -\frac{GMm}{r}$, 만유인력 상수: $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}$, 케플러의 3법칙: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{sun}}$

$\rho = \frac{M}{V}$, $P = P_0 + \rho gh$, $F_B = \rho_f gV$

$Av = \mathrm{const}$, $\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho gy = \mathrm{const}$

$-end-$