Quiz 1 (3월 20일 목 7.5, 8.5 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.

   (a) (4점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

   (b) (4점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$

   (c) (4점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

   (d) (4점) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$

   (e) (4점) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n\sqrt{(\log n)^2-1}}$

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $a_n = e^{-n^2}$ 이라 하면,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 < 1$$

(2점)

멱근판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. (4점)

(b) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 이라 하면

$|a_n| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ 이고, $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$ 이다. (2점)

따라서, 주어진 급수는 절대수렴함을 알 수 있다. (4점)

(c) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n!}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = 0 < 1$$

(2점)

따라서, 비율판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. (4점)

(d) $a_n = \dfrac{n}{(\log n)^n}$ 이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\log n} = 0 < 1$$

(2점)

따라서, 멱근판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. (4점)

(e) $f(x) = \dfrac{dx}{x\log x\sqrt{(\log x)^2 - 1}}$ 이라 하자.

그러면, $f(x)$ 는 연속, 감소함수이며 $x \geq 3$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x\log x\sqrt{(\log x)^2 - 1}} = \int_{\log 3}^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} \ (t = \log x \text{ 로 치환})$$

$t \geq 2$ 에 대해 $t^2 - 1 > \dfrac{t^2}{2}$ 이므로

$$\int_{\log 3}^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} \leq \int_{\log 3}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} + \int_2^\infty \frac{\sqrt{2}dt}{t\sqrt{t^2}} < \infty \qquad (2\text{점})$$

따라서, 적분판정법에 의해서 주어진 급수는 수렴한다. (4점)