Chapter 15. Oscillation

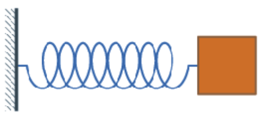
진동은 물체의 운동이 일정한 시간 후에 동일한 형태로 반복이 되는 현상을 의미한다.

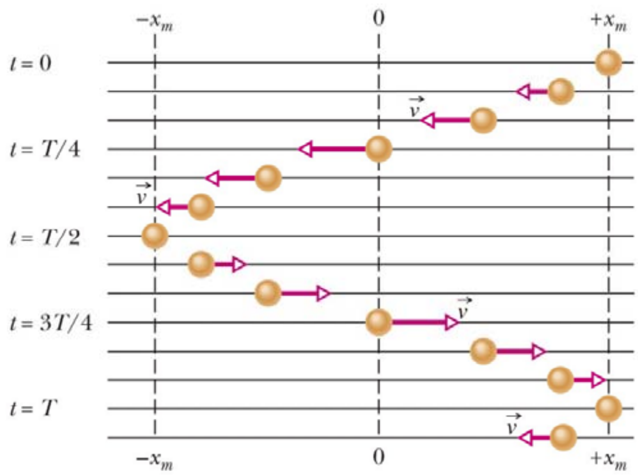
진동이 가능하려면 물체가 평형위치에서 벗어났을 때 물체를 원래의 위치로 되돌리려고 하는 복원력이 있어야 한다.

진동에서 중요한 물리량은 한번 진동을 하는데 걸리는 시간인 주기(period)다.

진동(Oscillation)

❖ 진동: 어떤 물리량이 일정 시각마다 일정한 값으로 규칙적으로 변동하는 현상.
- ✓ 물체의 위치: 용수철에 매달린 물체, 진자, 현악기의 줄, 고체 내 원자
- ✓ 전기장 및 자기장의 세기: 전자기파(가시광선, 자외선, 라디오 파, X선,…)
- ✓ 전압과 전류의 세기: 교류회로에서 전압과 전류

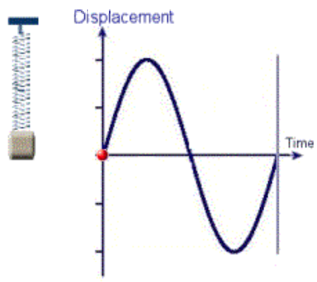




➔ 일정한 시간 간격으로 본 용수철 진동운동 :
속력은 평형위치에서 가장 빠르고, 최대 변위 지점에서는 0.

단순조화운동

- 단순조화운동(Simple Harmonic Motion, SHM): 진동의 변위가 시간에 대해서 sine이나 cosine 형태로 의존하는 운동



• 중요한 물리량

– 주기(period) : T [단위 : s] – 1회 진동에 걸린 시간

– 진동수(frequency) : $f = \dfrac{1}{T}$ [단위 : $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$] – 1초 동안 진동횟수

단순조화운동: 변위의 수학적 표현

• 단순조화운동의 변위 → 변위는 시간의 sine이나 cosine 함수

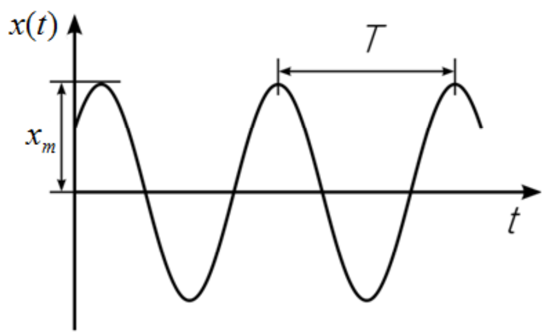
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \begin{cases} x_m : \text{진폭(amplitude)} \\ \phi : \text{위상상수(phase constant, 위상각)} \\ \omega t + \phi : \text{위상(phase)} \end{cases}$$

• SHM 의 변위는 t 의 주기함수 $\Rightarrow x(t) = x(t+T)$

$$\rightarrow x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos(\omega(t+T) + \phi) \rightarrow \underline{\omega T = 2\pi}$$

• 각진동수(angular frequency) : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ [단위 : rad/s]

;1초 동안 라디안 각 변화



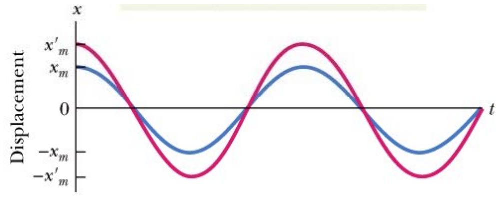
SHM

SHM의 변위를 시간의
함수로 표현하면 진폭,
위상각, 주기의 의미가
명확해짐

• 단순조화운동의 변위:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

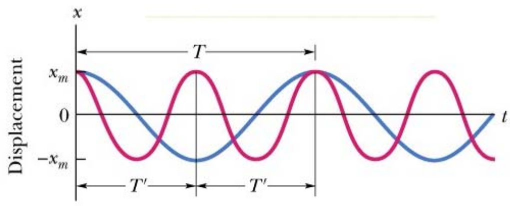
$$\begin{cases} x_m : 진폭(amplitude) \\ \omega t + \phi : 위상(phase) \\ \phi : 위상상수(위상각) \end{cases}$$



같은 주기, 다른 진폭

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

$$x(t) = x'_m \cos(\omega t)$$



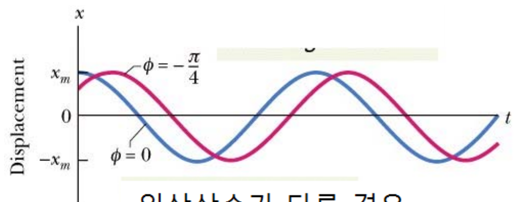
주기가 다른 경우

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi / T$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega' t)$$

$$\omega' = 2\pi / T'$$



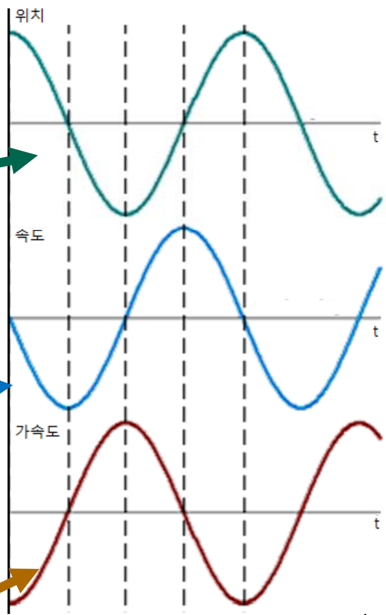
위상상수가 다른 경우

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega t - \pi/4)$$

SHM:힘

▪ SHM을 일으키는 힘의 형태는?



• SHM : 변위

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

• SHM : 속도

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

• SHM : 가속도

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)\right]$$

$$= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{a(t) = -\omega^2 x(t)}$$

$$\begin{cases} 가속도\ 크기는\ 변위\ 크기에\ 비례 \\ 가속도\ 방향은\ 변위\ 방향의\ 반대 \end{cases}$$

• SHM : $a(t) = -\omega^2 x(t)$

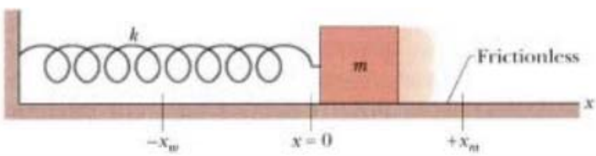
뉴턴의 제2법칙 ⇒

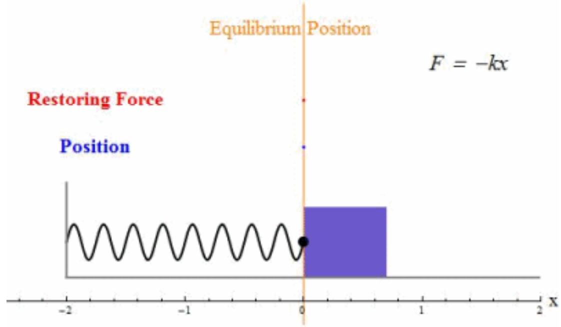
$$\boxed{F = ma = -m\omega^2 x}$$

단순조화운동을 만드는 힘:
변위(x)의 크기에 비례,
방향은 변위에 반대(“-”).

용수철 진자의 각진동수

용수철에 매달린 추의 단순조화진동





• 용수철 진자에서 힘은: $F = -k\,x$
변위에 비례하고, 변위와 반대방향
단순조화진동이 가능함!

• **용수철 진자에서 각진동수는?:**

$$SHM: a = -\omega^2 x$$

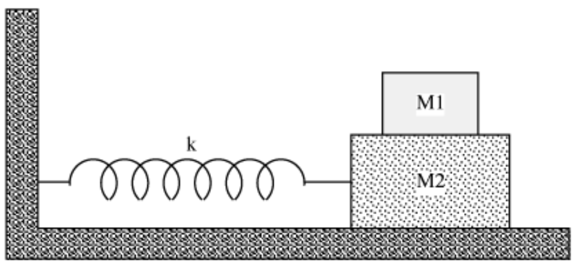
$$\to F = ma = -(m\omega^2)x$$

$$\xrightarrow{\text{용수철복원력과 비교}} m\omega^2 = k$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

단순조화운동을 하는
물리계에서 힘(F)과 변위(x)의
비례상수(=용수철 상수:k)을 알면,
각진동수(ω)를 바로 구할 수 있다.

problem



Two blocks, with masses M1 = 1.4 kg and M2 = 10.9 kg, and a spring with spring constant k = 459 N/m are arranged on a horizontal, frictionless surface as shown in the Figure. The coefficient of static friction between the two blocks is 0.21. What is the maximum possible amplitude of the simple harmonic motion if no slippage is to occur between the blocks?

• SHM의 각진동수: $\omega^2 = \dfrac{k}{M_1 + M_2}$

• 진폭이 A일 때, 최대가속도

$$|a_{\max}| = \omega^2 A = \frac{kA}{M_1 + M_2}$$

?

• M_1은 정지마찰력이 작용; 미끄러지지 않기 위해서는 최대정지마찰력보다 작아야 함

$$f_s = M_1 a_{\max} = \frac{kAM_1}{M_1 + M_2} \le \mu_s F_N = \mu_s M_1 g$$

$$\to A_{\max} = \frac{\mu_s g(M_1 + M_2)}{k}$$

SHM: 에너지

- SHM을 하는 계는 운동에너지와 복원력에 의한 위치에너지를 갖는다.

$$\bullet \text{위치}E: U(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$\bullet \text{운동}E: K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t+\phi) = \tfrac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

• 역학적에너지:

$$E = U(t)+K(t)$$

$$= \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t+\phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

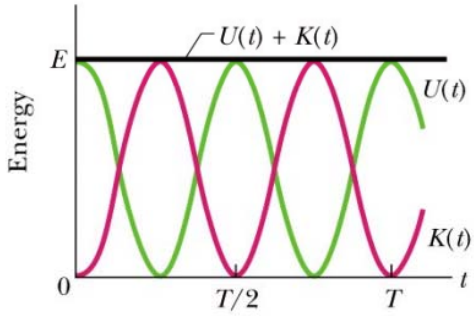
$$= \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \text{시간에 무관하게 일정}$$

(진폭)^{2}에 비례

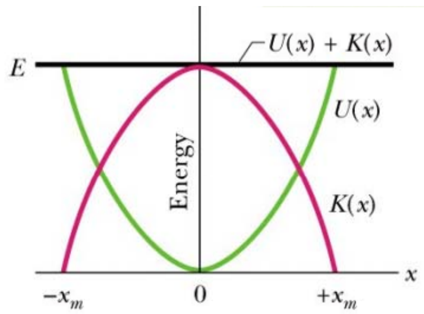
• 위치 x의 함수로 에너지를 쓰면:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

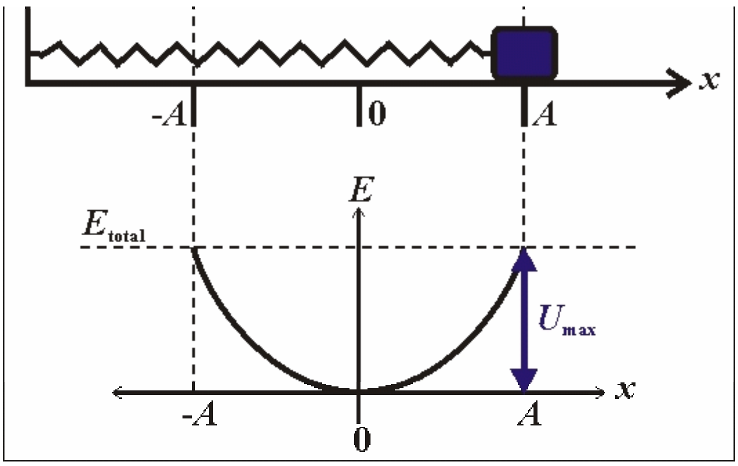
$$K = E - U = E - \tfrac{1}{2}kx^2$$



시간의 함수로 본 에너지



위치의 함수로 본 에너지



$$K + U = E_{total} = \text{일정}$$

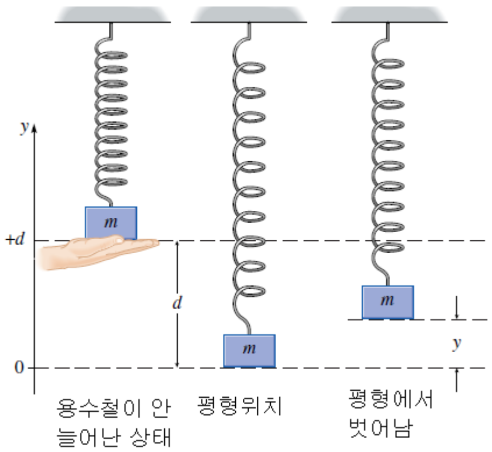
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_{total} = \text{일정}$$

조화진동자에서 각진동수는?

- 작은 진동을 가정하면 진동자가 받는 복원력은 항상 변위에 비례하고 방향은 변위와 반대임.
- 따라서 **(가속도) ∝ –(변위)** 이다. 이때 비례상수가 각속도의 제곱에 해당함

$$\textbf{SHM}: \text{가속도} = -\omega^2 \times (\text{변위})$$

수직 용수철 진자



중력의 영향 때문에 원래 길이에서 d 만큼 늘어난 위치가 평형 위치임.

$$\bullet \text{평형위치}: F_{net} = kd - mg = 0$$

$$\rightarrow\ d = \frac{mg}{k}$$

$\bullet$ y만큼 벗어날 때 (위쪽: $+y$):

$$\text{용수철 복원력}: F = -k(y-d)$$

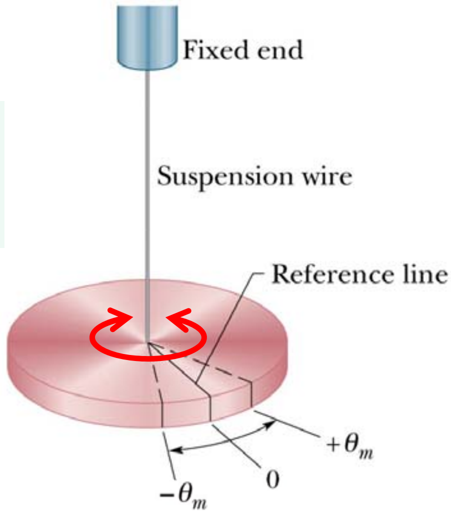
$$\Rightarrow F_{net} = -k(y-d) - mg = -ky + kd - mg = -ky$$

$$a = -(k/m)y \qquad \therefore\ \omega = \sqrt{k/m}$$

✓ 중력 때문에 평형위치가 바뀌지만, 각진동수는 중력이 없을 때와 같음
✓ 에너지 관점에서 문제를 다시 접근해보기 바람.

Angular SHM

- 줄이 비틀림을 받으면 원래로 돌아가려는 (복원)토크를 만든다.
- 이 복원토크 때문에 SHM이 가능하다.



$\bullet$비틀림 토크: $\tau = -\kappa\theta$

κ: 비틀림 상수(*torsion* constant : N.m)

원래 방향으로 복원력을 만듦

(*비교: 용수철 탄성 복원력: $F = -kx$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{비틀림 토크: } \tau = -\kappa\theta \\ Newton's\ Eq: \tau = I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}}$$

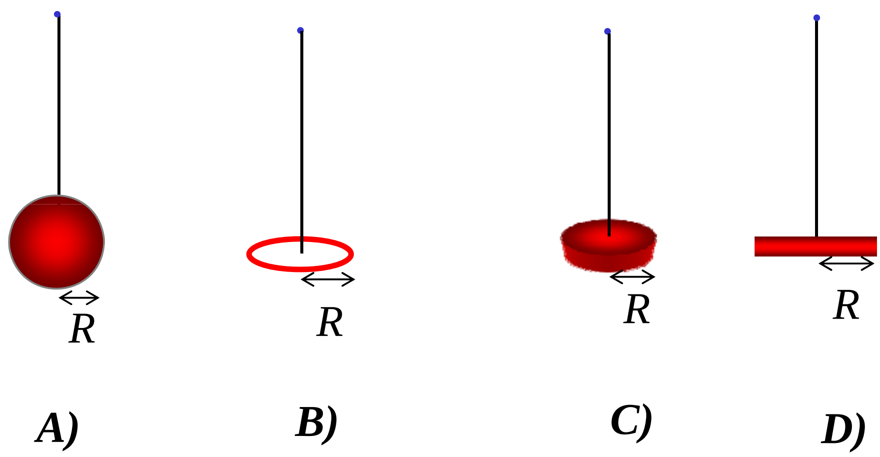
(비교: SHM $\Rightarrow$ $a = -\omega^2 x$)

주기: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

Period

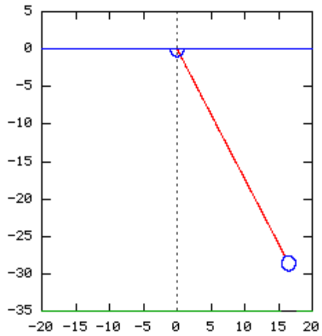
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$

- All of the following pedulum bobs have the same mass. Which pendulum rotates the fastest, i.e. has the smallest period? (The wires are identical)



단순진자

- 진자의 추가 수직방향에서 벗어나면 장력과 중력의 합력이 추를 원래의 위치로 돌아가게 하는 토크를 만든다.
- 이 복원토크때문에 SHM이 가능하게 된다.



• 토크 : 중력의 접선성분이 만듦;

$$\tau = -(F_g \sin\theta)L$$

$$:"-" = \theta \text{ 감소방향}$$

• Newton Eq : $\tau = I\alpha$,

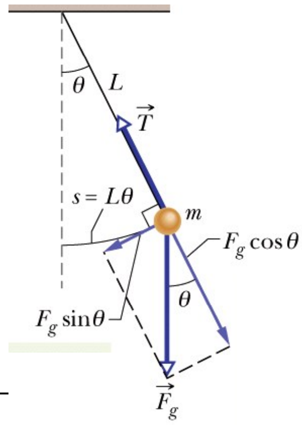
and, 작은 진동 $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \alpha = -\underbrace{\frac{mgL}{I}}_{\omega^2}\theta$$

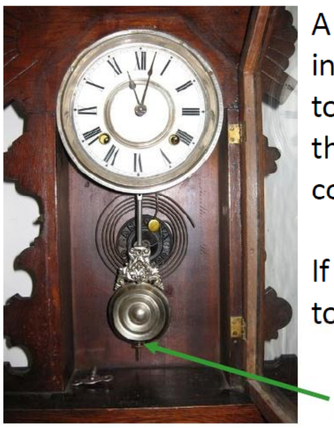
$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$

• 단순진자(추) : $I = mL^2$

$$\therefore T_{\text{단순진자}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



시계 맞추기



A simple pendulum is used as the timing element in a clock as shown. An adjustment screw is used to make the pendulum shorter (longer) by moving the weight up (down) along the shaft that connects it to the pivot.

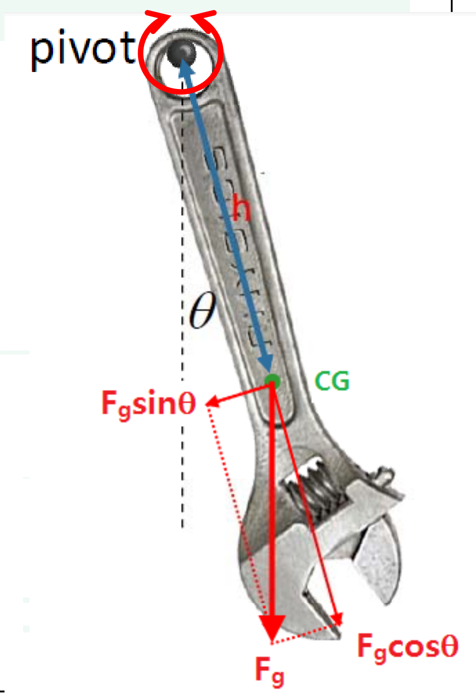
If the clock is running too fast, the weight needs to be moved A) Up B) Down

회전관성을 크게 하면 회전이 쉽지 않아 주기가 길어진다.

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$

물리진자

- CG가 아닌 지점을 통과하는 축에 대해서 자유롭게 회전할 수 있는 강체를 연직방향에서 벗어나게 하면 강체에 작용하는 중력이 강체를 원래 위치로 보내려는 토크를 만든다.
- 이 복원토크 때문에 SHM이 가능하게 된다.



• 토크 : 중력의 접선성분이 만듬

$$\tau = -\left(F_g \sin\theta\right)h$$

$$:"-" = \theta \text{ 감소방향}$$

$$h = \text{회전축에서 } CG\text{까지 거리}$$

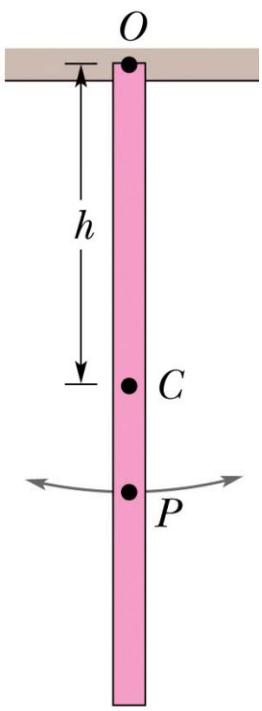
• Newton Eq : $\tau = I\alpha$,

and, 작은 진동 $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \alpha = -\underbrace{\frac{mgh}{I}}_{\omega^2}\theta \quad \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

막대진자를 이용한 g 측정



• 고정축에 대해서 자유롭게 회전할 수 있는 막대는 물리진자의 한 예임

• 막대 끝 축에 대한 회전관성:

$$CM \text{ 위치: } h = \tfrac{1}{2}L$$

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + M\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2$$

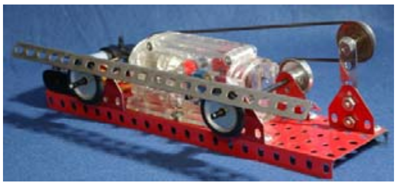
$$\Rightarrow \text{주기: } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}},$$

• $\boxed{g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}}$

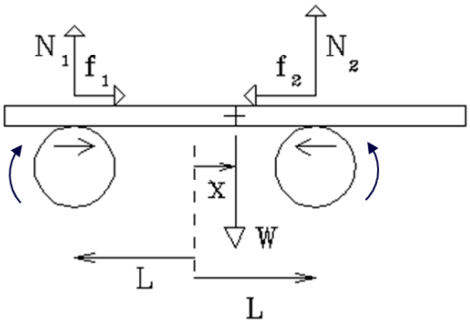
L, T 를 재면 자유낙하가속도를 측정할 수 있음.
(막대질량에 무관함)

- 막대진자와 동일한 주기를 갖는 단순진자(simple pendulum)의 길이는?

일정한 각속도로 서로 반대로 회전하는 두 롤러 위에 놓인 막대



막대는 회전하는 롤러로부터 운동마찰력을 받는다 (1은 오른쪽, 2는 왼쪽)



• x – 만큼 벗어난 경우
막대의 수직항력 (N_1, N_2) 은?

• $\sum F_y = N_1 + N_2 - W = 0$

• torque – 평형: 막대중심을 회전축으로

$$\sum \tau(ccw+) = -N_1(L+x) + N_2(L-x) = 0$$

• N_1 & N_2 에 대해서 풀면;

$$N_1 = \frac{W(L-x)}{2L}, \quad N_2 = \frac{W(L+x)}{2L}$$

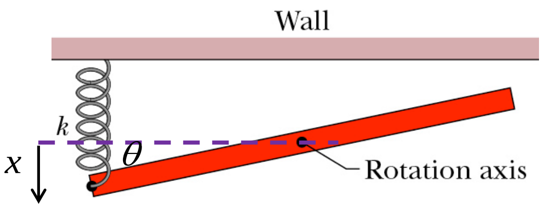
•수평운동: 마찰력 작용

$$ma = f_1 - f_2 = \mu_k N_1 - \mu_k N_2$$

$$ma = -\frac{\mu_k W}{L} x\text{: 복원력}$$

$$a = -\frac{\mu_k g}{L} x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{L}}$$

In an overhead view, a long uniform rod of length L and mass m is free to rotate in a horizontal axis through its center. A spring with force constant k is connected to the rod and the fixed wall. When the rod is in equilibrium, it is parallel to the wall. What is the period of small oscillations that results when the rod is rotated slightly and released?



•변위: $x = \frac{L}{2}\sin\theta \approx \frac{1}{2}L\theta$ for small θ

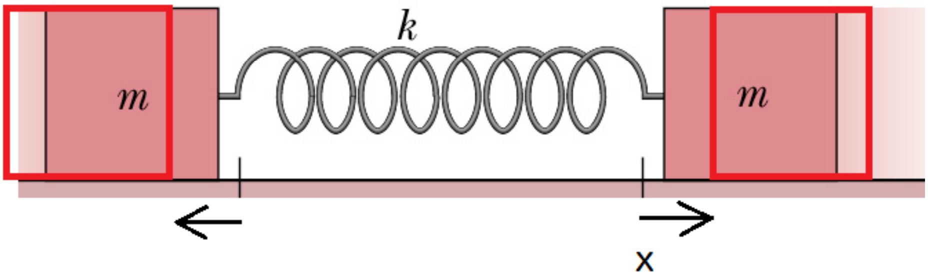
⇒용수철에 의한 토크:

$$\tau = (kx)\frac{L}{2}\sin(\theta + 90°) \approx -\frac{kL^2}{4}\theta = I\alpha$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{kL^2}{4I} = \frac{kL^2}{4(ML^2/12)} = \frac{3k}{M}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{3k}{M}}$$

진동의 주기는?

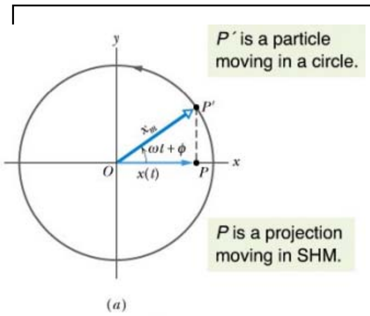


- 외력=0 → 질량중심의 움직임이 없다

- 오른쪽 질량 변위: x
  용수철 변형: $2x$
  $\Rightarrow F_x = -k(2x) = -2kx$

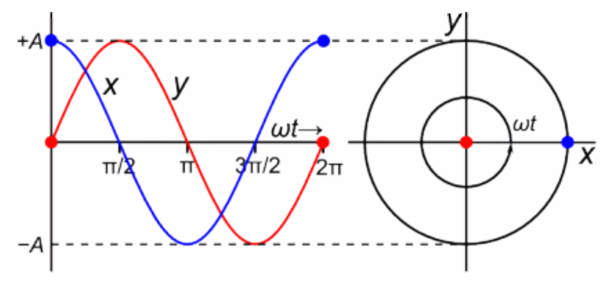
- 운동방정식: $F_x = ma_x$
  $$a_x = -\frac{2k}{m}x$$
  $$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

등속 원운동과 SHM의 관계



- 등속원운동하는 입자의 x, y축상의 그림자 위치

$$\theta = \omega t + \phi \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), & x_m = \text{반지름} = r \\ y(t) = x_m \sin(\omega t + \phi), \end{cases}$$



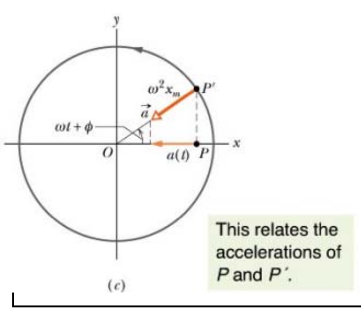
- 등속원운동 속도: $v = r\omega = x_m\omega$ 접선방향)

$$\Rightarrow \text{그림자 속도} \begin{cases} v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi), \\ v_y(t) = \omega x_m \cos(\omega t + \phi), \end{cases}$$

- 등속원운동 가속도 = 구심가속도

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega^2 x_m \quad (\text{중심방향})$$

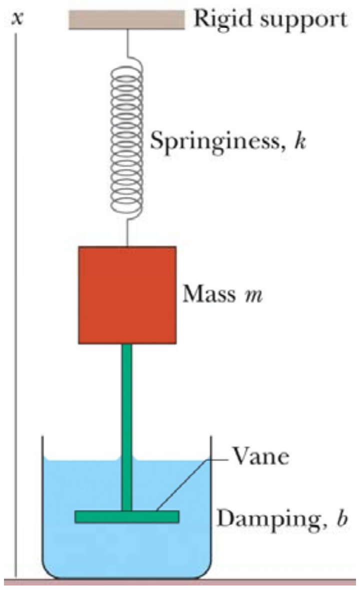
$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{그림자} \\ \text{가속도}\end{matrix} : \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t), \\ a_y(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 y(t), \end{cases}$$



- SHM은 등속원운동을 하는 물체의 x축 또는 y축에 비친 그림자의 운동과 같다.

감쇠조화진동

실제의 진동자는 마찰(저항) 때문에 진폭이 시간이 지나면서 줄어든다 (감쇠현상,damping)



• 진동자가 받는 힘:

$$\begin{cases} \text{용수철}: F_{\text{복원력}} = -kx \\ \text{마찰력}: F_{\text{마찰}} = -bv \quad (b = \text{감쇠상수}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad F_{net} = -kx - bv$$

• 운동방정식: $ma = -bv - kx$

$$ma + bv + kx = 0 \quad \left(v = \frac{dx}{dt},\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

$$\rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

• $x(t)$에 대한 이차미분방정식

How to solve it? → 수리물리, 공업수학

감쇠조화진동 해

• 운동방정식:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

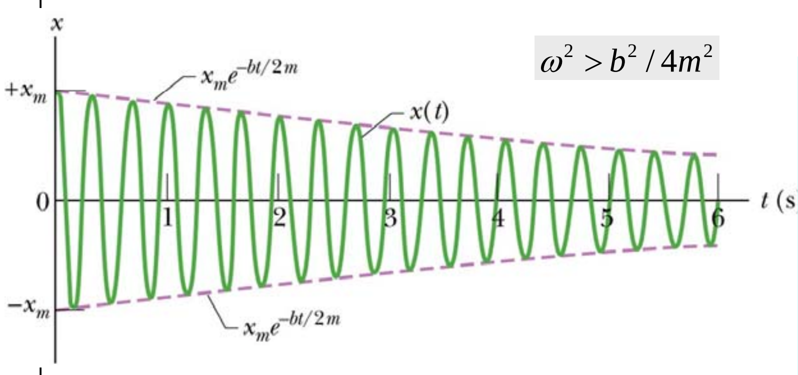
• 진동하는 해 (방정식에 대입해보면 확인된다):

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)}, \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

• 감쇠상수(b)가 있으면 진동수(ω')가 *SHM* 의 고유진동수 ω와 달라진다.

if $b << \sqrt{2km} \rightarrow \omega' \approx \omega$

$\omega^2 > b^2/4m^2$



• 역학적에너지:

시간이 지나면서 줄어듬

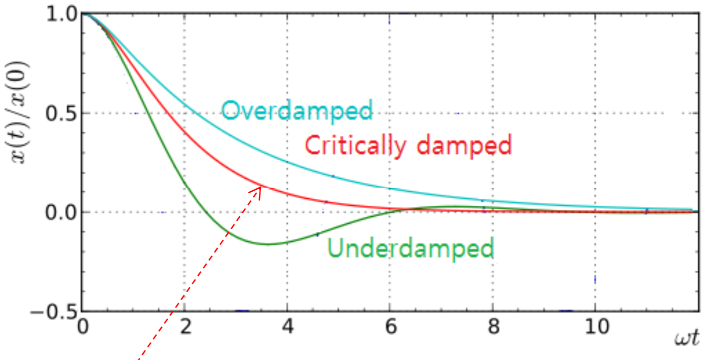
$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad \text{(no damping)}$$

$$\downarrow$$

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m} \quad \text{(small damping)}$$

- $\omega^2 - \dfrac{b^2}{4m^2}$ 의 부호에 따라서 3 종류의 해가 존재한다.

$$\begin{cases} underdamped: \omega^2 > \dfrac{b^2}{4m^2} \\ critically\ damped: \omega^2 = \dfrac{b^2}{4m^2} \\ overdamped: \omega^2 < \dfrac{b^2}{4m^2} \end{cases}$$



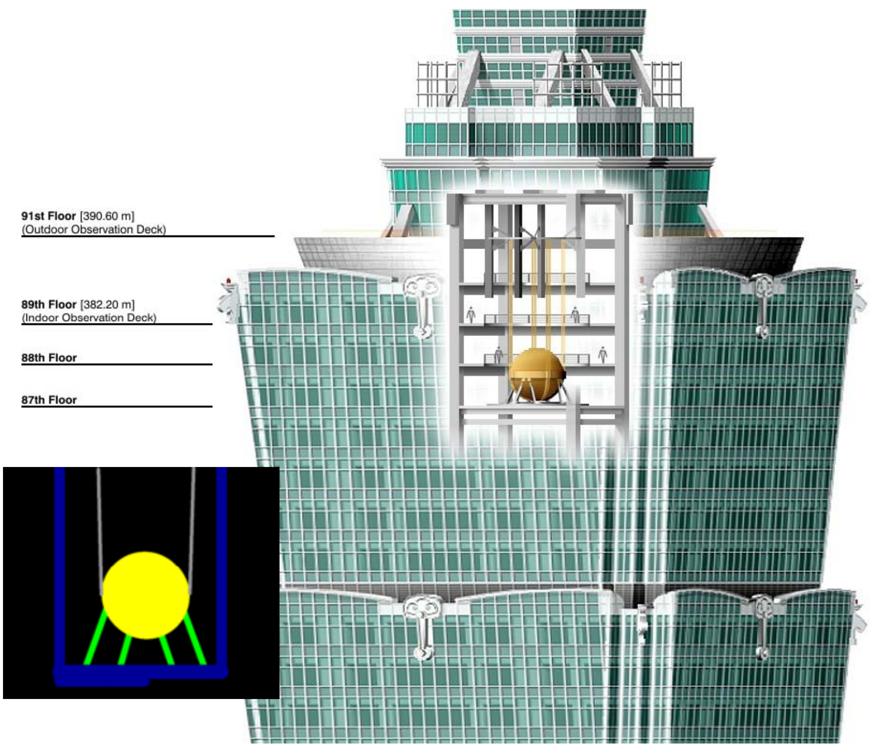
임계감쇠가 되도록 설정해야 한번에 문이 닫힌다.

Tuned mass damper

Door closer에서 처럼 damping을 잘 컨트롤하면 공학적으로 매우 유용한 현상이 된다.

This video demonstrates the effects of damping systems on high rise buildings.

Location of Taipei 101's largest tuned mass damper(TMD)



강제진동과 공진

- 감쇠때문에 진동운동은 무한히 반복할 수 없다. 진동을 유지하려면 외부에서 힘을 지속적으로 주어야 한다.

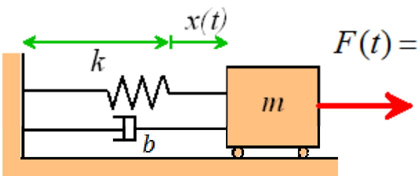
- 그네(단진자)를 일정한 간격으로 힘을 가해서 강제로 흔들면 그네의 흔들림은 외부힘의 주기에 맞추어서 진동을 하게 된다.
- 흔드는 각진동수 ω_d가 그네의 고유 각진동수 ω 와 비슷해지면 진폭이 매우 커지게 된다.
- 이 현상을 공진 (resonance, or 공명) 이라고 한다

• 그네(단순진자)의 고유진동수:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

강제진동과 공진

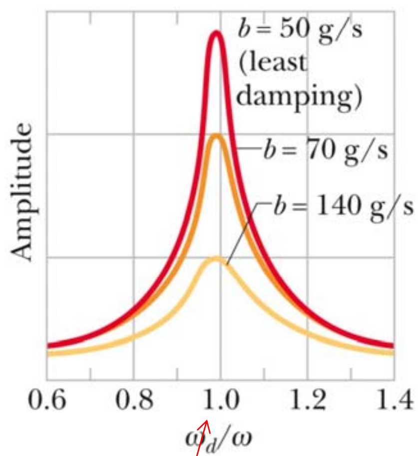
고유진동수 ω인 진동자를 외부에서 진동수 ω_d로 강제진동을 시키면 어떤 조건에서 공진이 일어나는가?



$$F(t) = F_m \sin(\omega_d t)$$

외부강제
진동

운동방정식: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dfrac{dx}{dt} + F(t)$



• 강제 진동자 변위: 정상상태

$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega_d t + \phi)}$ $\phi =$ 위상차가 있음

$\mapsto$ 고유진동수 $\omega = \sqrt{k/m}$가 아니라 ω_d로 진동함!

• 진폭: ω_d 의 함수로 주어짐

$$x_m(\omega_d) = \frac{F_m / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2 / m^2}}$$

✓$\omega_d = \omega$일 때 진폭이 가장 커진다

✓감쇠상수(b)가 작을 때 진폭은 더 커진다

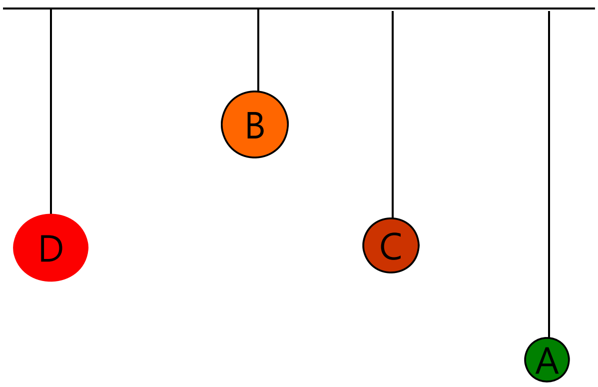
resonance

강제진동의 진동수와 진동자의 진동수가 같을 때 가장 크게 흔들린다.

$$\omega \sim \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Resonant Motion

- Consider the following set of pendulums all attached to the same string



If I start bob D swinging which of the others will gain the most mechanical energy (assuming virtually no friction) ?

(A) (B) (C)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} : independent\ of\ \ mass$$

강제공진 **DEMO**

다른 고유진동수를 가지는 구조물의 강제진동

Tacoma bridge

다리를 가로지르는 바람의 출렁이는 진동수(외부진동수,ω_d)가 다리의 흔들림 고유진동수와 일치하면 다리를 위험하게 만들 수 있다.

따라서 건축물을 설계하는 공학자는 항상 건축물의 고유진동수가 자연에서 흔히 나타나는 진동수와 일치하지 않도록 재료의 선택이 구조설계에 반영해야 한다.

유리잔의 공진