<problem 1>

1. (a) $\vec{r}_{CM} = (X, Y, Z)$ 라고 하면

$$X = \frac{1}{M}\int_{-1}^{1} \pi \{f(x)\}^2 x \rho \, dx \qquad \left(M = \int_{-1}^{1} \pi \{f(x)\}^2 \rho \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{M}\int_{-1}^{1} \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos(\pi x)\right)^2 x \rho \, dx$$

$$= 0 \quad (\because \text{ odd function})$$

x축에 대해 rotationally symmetric 하므로 $Y = Z = 0$

$$\therefore \vec{r}_{CM} = (0, 0, 0)$$

(b) 반지름 R, 질량 M 인 disk 의 I_{disk} 는 (면적 밀도 σ)

$$I_{disk} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma r^2 \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}R^4 \cdot \sigma \cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^4 \sigma$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 \quad (\because M = \sigma\pi R^2)$$

$(x, 0, 0)$ 을 중심으로 갖는 두께 dx 인 disk 들로 생각하면

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\rho\pi\{f(x)\}^2\right)\{f(x)\}^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot\cos\pi x\right)^4 dx$$

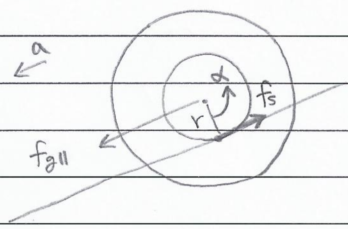
$$= \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{16}\cos^2(\pi x) - \frac{3}{8}\cos(\pi x)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{81}{256} + \frac{1}{256}\cos^4(\pi x) - \frac{6}{128}\cos^3(\pi x) + \frac{54}{256}\cos^2(\pi x) - \frac{54}{128}\cos(\pi x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi \times \frac{867}{1024} = \frac{867}{2048}\pi\rho \simeq 1.33\rho$$

(c) Rigid body 는 외부에서 힘이 가해져도 내부의 임의의 두 지점 간의 거리가 변하지 않는 물체이다. 따라서 형태가 변하지 않는 것은 사실이지만 모든 지점에서 속도가 같아야 할 이유는 없다.

(d)



중력 성분 중 경사면에 나란한 힘을 $f_{g\parallel}$ 라 하면

$$f_g = Mg\sin 30^\circ \qquad (M : 질량)$$

friction force 를 f_s 라 하면 물체가 굴러 내려가는 가속도 a 는

$$Ma = Mg\sin 30^\circ - f_s$$

이고 torque τ 는 다음과 같다.

$$\tau = r f_s \qquad (r : \text{groove 에서의 반지름})$$

각가속도 α 는 τ 와

$$\tau = I\alpha \qquad (I : \text{rotational inertia about } x \text{ axis in (b)})$$

의 관계가 있고 미끄러짐이 없으므로

$$a = r\alpha$$

가 성립한다.

$$\therefore M = \int_{-1}^{1} \pi \left[\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\cos(\pi x)\right]^2 \rho\, dx = \pi\rho \cdot \underbrace{\tfrac{19}{16}}_{[m^3]} = \tfrac{19}{16}\pi\,(2.7\times10^3\ kg/m^3) = 10072\ kg$$

$$f_g = Mg\sin 30^\circ = 10072\,kg \times 9.8\,m/s^2 \times \tfrac{1}{2} = 49352.8\ N$$

$$f_s = Mg\sin 30^\circ - Ma = M\left(\tfrac{g}{2} - a\right) = \tfrac{\tau}{r} = \tfrac{I\alpha}{r} = \tfrac{I}{r}\cdot\tfrac{a}{r} = \tfrac{Ia}{r^2}$$

$$\therefore \left(\tfrac{I}{r^2} + M\right) a = \tfrac{Mg}{2}$$

$$\therefore a = \frac{Mg}{2} \times \frac{r^2}{I + r^2 M} = \frac{Mg}{2(Mr^2 + I)} = 49352.8 \times \frac{1}{(10072 \times 0.5^2 + \underbrace{1.33\rho}_{1.33\times2.7\times10^3})} \times 0.5^2$$

$$= 49352.8 \times 0.5^2 \times \frac{1}{2518 + 3591} \cong 2\ m/s^2$$

$$\therefore f_s = \frac{Ia}{r^2} = \left(1.33 \times 2.7 \times 10^3 \times 2 \times \frac{1}{0.5^2}\right) = 28728\ N$$

$$\therefore v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 20 \times 2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} = 8.9\,m/s$$

$$s = 10/\sin 30^\circ = 20$$

<problem 2>

$1.6\times10^{3}\,kg/m^3$

2. (a) $I = \left[\int_{-1}^{1} \pi \{f(x)\}^2 \cdot \{f(x)\}^2 \rho\, dx\right] \times 10^{10} = 2.66\times10^{10}\times\rho$

$= 4.26\times10^{13}\,[kg\cdot m^2]$

(b) centrifugal acceleration 은 $r\omega^2$ (ω : angular velocity, $r = 100\,m$) 이므로

$r\omega^2 = g \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} \fallingdotseq 0.31\ rad/s$

(c) Kinetic energy 가 필요하므로

$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times(4.26\times10^{13})\times(0.31)^2 = 0.20\times10^{13}\ J$

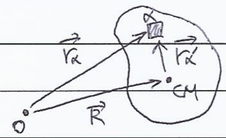
$\tau = I\alpha$ 이고 회전을 멈추는 데 걸리는 시간을 t 라 하면 $\omega = \alpha t$ 이므로

$\tau = I\frac{\omega}{t} = 0.20\times10^{13}\times\frac{0.31}{3600\times12} = 1.44\times10^{7}\ N\cdot m$

(d) Angular momentum $\vec{L}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\vec{L} = \sum_\alpha dm_\alpha\, \vec{r_\alpha}\times\vec{v_\alpha}$ (α : 물체를 구성하는 미소 성분들의 index)

$= \sum_\alpha dm_\alpha (\vec{R} + \vec{r_\alpha})\times\vec{v_\alpha}$



$= \vec{R}\times\underbrace{(\sum_\alpha dm_\alpha \vec{v_\alpha})}_{\parallel\ M\vec{V}_{CM}} + \sum_\alpha dm_\alpha\, \vec{r_\alpha}\times\vec{v_\alpha}$

$\vec{R}$: 무게 중심의 위치 vector
$\vec{r_\alpha}$: 무게 중심으로 부터 α 까지의 위치 vector

($\because X_{CM} = \frac{1}{M}\sum_\alpha dm_\alpha x_\alpha$)

$= \underbrace{M\vec{R}\times\vec{V}_{CM}}_{} + \underbrace{\sum_\alpha dm_\alpha\, \vec{r_\alpha}\times\vec{v_\alpha}}_{}$

→ 무게 중심을 원점으로한 물체의 angular momentum

→ 물체의 무게 중심에 물체와 같은 질량의 질점이 $\vec{V}_{CM}$ 으로 운동하는 경우의 angular momentum

이를 이용하면

$L = MRV_{CM} + I\omega$ (R : 지구 중심에서 물체의 무게 중심까지의 거리

$= MR(R\Omega) + I\omega$ I : (a) 에서 구한 rotational inertia

ω : (b) 에서 구한 angular velocity)

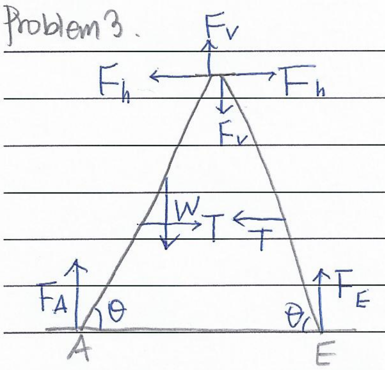
(Ω : 1 revolution/day 에 해당) $\frac{2\pi}{86400}$ [rad/s]

$M = \int_{-1}^{1} 2\pi f(x)\cdot\rho\, dx \times 10^6 = 2\pi\rho\times10^{16}\times\frac{3}{2} = 3\pi\times10^{16}\times(1.6\times10^3) = 15.1\times10^{19}\ kg$

$\therefore L = (15.1\times10^{19}\times(6700\times10^3)^2\times\frac{2\pi}{86400}) + (4.26\times10^{13}\times0.31)$

$= 49294\times10^{25} + 1.32\times10^{13} \approx 49294\times10^{25}\ kg\cdot m^2/s$

Problem 3.



- For the left side of the ladder

$F_v + F_A - W = 0$

$T - F_h = 0$ } ~~ladder is eq.~~

$\Sigma\tau = 0$: $F_A L\cos\theta - W(L-d)\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

d : distance from the bottom of the ladder

- For the right side of the ladder

$F_E - F_v = 0$

$F_h - T = 0$

$F_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

$\therefore$ $F_v + F_A - W = 0$ ··· ①

$T - F_h = 0$ ··· ②

$F_A L\cos\theta - W(L-d)\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$ ··· ③

$F_E - F_v = 0$ ··· ④

$F_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$ ··· ⑤

(a) ① → $F_A = W - F_v$

④ → $F_v = F_E$

③ → $(W - F_v)L\cos\theta - W(L-d)\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

$\therefore WL\cos\theta - F_E L\cos\theta - W(L-d)\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

⑤ → $F_E = T(L/2)\sin\theta / L\cos\theta = (T/2)\cdot\tan\theta$

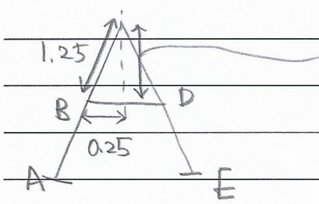
③ & ⑤ : $-F_E L\cos\theta + Wd\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

$-(T/2)L\cos\theta\cdot\tan\theta + Wd\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

$-(T/2)L\sin\theta + Wd\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$

$\therefore -TL\sin\theta + Wd\cos\theta = 0$

$\therefore T = \dfrac{Wd}{L\tan\theta}$



$\sqrt{(1.25)^2 - (0.25)^2} = 1.22\,m$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1.22}{0.25} = 4.88$, $T = \dfrac{(900N)(2m)}{(2.5m)(4.88)} = 148N$

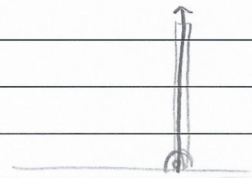
(b) $F_V = F_E = (T/2)\tan\theta = (Wd/L\tan\theta)\cdot(\tan\theta/2) = Wd/2L$

$F_V + F_A - W = 0$

$\therefore F_A = W - F_V = W\left(1 - \frac{d}{2L}\right) = (900N)\left(1 - \frac{2m}{2(2.5m)}\right) = 540N$

(c) $F_E = Wd/2L = (900N)\cdot\frac{2m}{2(2.5m)} = 360N$

Problem 4.



Positive

Net torque : $FL\sin 90° - Th\sin 65° = 0$

$L = 3.2m$
$h = 1.6m$
$F = 50N$

$\therefore T = \frac{FL}{h\sin 65°} = \frac{(50N)(3.2m)}{(1.6m)\sin 65°} = 110N$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{px} = T\cos 25° - F$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{py} = T\sin 25° + W$

$W = 80N$

$F_{px} = 110(\cos 25°) - 50 = 50N$: rightward

$F_{py} = 110\cdot(\sin 25°) + 80 = 126N$: upward