Homework 1

1.1.8.

어떤 양수 $e > 0$에 대해서는 임의의 자연수 N에 대하여 $n \geq N \rightarrow \frac{1}{n} < e$가 성립하지 않는다.

즉, 어떤 양수 $e > 0$에 대해서는, 임의의 자연수 N에 대하여, 어떤 $n \geq N$이 존재하여 $\frac{1}{n} \geq e$를 만족한다.

1.1.12.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\\
\Rightarrow &\exists a \in I | x \in A_a\\
&\exists b \in J | x \in B_b\\
\Rightarrow &x \in A_a \cap B_b\\
\Rightarrow &x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)
\end{aligned}$$

2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \supset \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)\\
\Rightarrow &\exists a \in I, \exists b \in J | x \in A_a \cap B_b\\
\Rightarrow &x \in A_a, x \in B_b\\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)\\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ 또는 } x \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)\\
\Rightarrow &x \forall i \in I, \forall j \in J | x \in A_i \cup B_j\\
\Rightarrow &x x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)
\end{aligned}$$

2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \supset \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

$$\begin{aligned}
&x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)\\
\Rightarrow &\forall i \in I, \forall j \in J | x \in A_i \cup B_j
\end{aligned}$$

만약,

$$\begin{aligned}
&x \notin \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ 라면}\\
\Rightarrow &\exists a \in I, x \notin A_a\\
\Rightarrow &\forall j \in J | x \in A_a \cup B_j\\
\Rightarrow &x \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

비슷하게

$$\begin{aligned}
&x \notin \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Rightarrow x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\\
\therefore &x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}$$

1.2.4.

(가)

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

라고 한다면 함수 g가 단사이므로,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

또한 함수 f가 단사이므로,

$$x_1 = x_2$$

따라서, $g \circ f$는 단사이다.

$$f(x_1)) = f(x_2)$$

라고 한다면 양변에 함수 g를 취하면,

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

함수 g ∘ f가 단사이므로,

$$x_1 = x_2$$

따라서 f는 단사함수이다.

(나)

$$g(f(x)) = z, (\forall z \in Z)$$

에서 $x \in X$가 존재하는지 확인해보자. 함수 g가 전사이므로

$$g(y) = z$$

인 $y \in Y$가 존재한다. 마찬가지로 함수 f가 전사이므로

$$f(x) = y$$

인 $x \in X$가 존재한다. 따라서 함수 $g \circ f$는 전사함수이다.

$$g(y) = z, (\forall z \in Z)$$

에서 $y \in Y$가 존재하는지 확인해보자. 함수 $g \circ f$가 전사이므로

$$(g \circ f)(x) = z$$

인 $x \in X$가 존재한다. 이제 y를

$$y = f(x)$$

로 잡으면 $g(y) = z$을 만족하는 것을 알 수 있다. 따라서 함수 g는 전사이다.

(다)

f와 g가 전사이고, 단사이므로 (가), (나)에 의해서 $g \circ f$가 전단사함수임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
&(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\
=&g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
=&g \circ 1_Y \circ g^{-1} \\
=&g \circ g^{-1} \\
=&1_Z
\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}
&(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\
=&f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\
=&f^{-1} \circ 1_Y \circ f \\
=&f^{-1} \circ f \\
=&1_X
\end{aligned}$$

따라서 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$임을 알 수 있다.

1.2.11.

$\exists f : X \to 2^X$가 전사함수라고 가정하자.

집합 $Y \in 2^X$를 다음과 같이 정의하자. $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$

그러면 $f(a) = Y$를 만족하는 $a \in X$가 존재하지 않는다.

pf. 귀류법 $\exists a \in X \mid f(a) = Y$라 하자.

그러면 Y의 정의에 따라 $a \in f(a) = Y \iff a \notin f(a) = Y$ 이므로 모순이다. □

따라서, X에서 2^X로 가는 전사함수는 존재하지 않는다.

1.2.12.

1)

모든 $A \in 2^X$에 대해 생각해보자.

먼저, $x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$ 이다.

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$ 이므로

$$\therefore f^{-1}(f(A)) \supset A \qquad (1)$$

는 항상 성립한다.

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2 \in X \mid f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\
\iff &[f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A] \\
\iff &\left[x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow x \in A\right] \\
\iff &f^{-1}(f(A)) \subset A \qquad (2)
\end{aligned}$$

결론 (1)과 (2)에 의해 함수 f가 단사일 필요충분조건은

$$f^{-1}(f(A)) = A \qquad A \in 2^X$$

이다.

2)

모든 $B \in 2^Y$에 대해 생각해보자.

먼저, $y \in f(f^{-1}(B)) \iff [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y]$이다.

$$
\begin{aligned}
y \in f(f^{-1}(B)) &\Rightarrow [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y] \\
&\Rightarrow [y = f(x) \in B]
\end{aligned}
$$

이므로,

$$\therefore f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad (1)$$

는 항상 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&\forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y \\
\iff & \big[y \in B \Rightarrow [\exists x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = y]\big] \\
\iff & \big[y \in B \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))\big] \\
\iff & f(f^{-1}(B)) \supset B \qquad (2)
\end{aligned}
$$

결론 (1)과 (2)에 의해 함수 f가 전사일 필요충분조건은

$$f(f^{-1}(B)) = B \qquad B \in 2^Y$$

이다.

1.2.15.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

pf.

$$
\begin{aligned}
&x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \\
\iff & f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \\
\iff & \exists i \in I \mid f(x) \in B_i \\
\iff & \exists i \in I \mid x \in f^{-1}(B_i) \\
\iff & x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)
\end{aligned}
$$

□

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

pf.

$$
\begin{aligned}
&x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \\
\iff & f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \\
\iff & \forall i \in I \mid f(x) \in B_i \\
\iff & \forall i \in I \mid x \in f^{-1}(B_i) \\
\iff & x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)
\end{aligned}
$$

□

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

pf.

$$
\begin{aligned}
&y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
\iff & \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(x) = y \\
\iff & \exists i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\
\iff & \bigcup_{i\in I} f(A_i)
\end{aligned}
$$

□

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \qquad (1)$$

pf. 네번째 줄로 넘어갈 때 $\iff$ 가 아닌 $\Rightarrow$임에 유의하라.

$$
\begin{aligned}
&y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
\iff & \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i \mid f(x) = y \\
\iff & [\exists x \mid \forall i \in I, x \in A_i] \mid f(x) = y \\
\Rightarrow & \forall i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\
\iff & \bigcap_{i\in I} f(A_i)
\end{aligned}
$$

□

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

의 필요충분조건을 찾는 것은

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

의 필요충분조건을 찾는 것과 같다. ($\therefore$ 식 (1))

$$\begin{aligned} & f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \\ \iff & \forall i \in I \mid [\exists x \in A_i \mid f(x) = y] \\ & \Rightarrow [\exists x \mid \forall i \in I, x \in A_i] \mid f(x) = y \\ \iff & [f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2] \end{aligned}$$

이므로,

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \iff [f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2]$$

즉, 함수 f가 단사인 것과 필요충분조건이다.

1.3.1.

(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ $\neg$(3)

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,c) \in R$이지만 $(a,c) \notin R$이다.

$\neg$(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3)

$R = \{(c,c)\}$
$(a,a) \notin R$이다.

(1) $\wedge$ $\neg$(2) $\wedge$ (3)

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$
$(a,b) \in$이지만 $(b,a) \notin R$이다.

1.3.2.

$$\begin{aligned} \exists(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \\ (x,y) \in R, (y,x) \in R \Rightarrow (x,x) \in R \end{aligned}$$

주장은 위와 같다. 하지만 결국 $(x,x) \in R$이 만족하기 위해서는 $(x,y) \in R$이어야 한다. 즉, R에서 (x,y)꼴의 원소가 없다면 (x,x)가 R의 원소일 보장은 없다.

예를 들어, 원소 세 개인 집합 $X = \{a,b,c\}$에서 $R = \{(c,c)\}$인 경우가 있다.

1.3.7.

$$k \in \mathbb{N}, m \sim n \iff k \mid m - n$$

1)

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}, k \mid x - x \\ \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{Z}, x \sim x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x \sim y \Rightarrow & k \mid x - y \\ \Rightarrow & k \mid -(x-y) \\ \Rightarrow & k \mid y - x \\ \Rightarrow & y \sim x \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} x \sim y, y \sim z \Rightarrow & k \mid x - y, k \mid y - z \\ \Rightarrow & k \mid (x-y) + (y-z) \\ \Rightarrow & k \mid x - z \\ \Rightarrow & x \sim z \end{aligned}$$

결론 따라서 $\sim$은 동치관계이다.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/\sim &= \{[m] \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[0],[1],\cdots,[k-1]\} \end{aligned}$$

1.3.12.

1)

$x, y \in V/W \Rightarrow x + y \in V/W$이고,
$x \in V/W, a \in \mathbb{R} \Rightarrow ax \in V/W$ 이므로 V/W는 벡터공간이다.

2)

$\phi, \widetilde{\phi}$는 선형사상이다.

$\phi : V \to Z$에 대하여 $\widetilde{\phi} \circ q = \phi$를 만족하는 $\widetilde{\phi} : V/W \to Z$가 존재 할 필요충분조건은

$$x \sim_W y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

이다. 한편,

$$x \sim_W y \iff x - y \in W \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) & \iff \phi(x) - \phi(y) = 0 \\ & \iff \phi(x-y) = 0 \qquad (\because \phi\text{는 선형사상}) \\ \therefore \phi(x) = \phi(y) & \iff \phi(x-y) = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

인 것을 확인할 수 있다. 이를 이용하면,

$$\begin{aligned} &[x \sim_W y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)] \\ \iff &[x - y \in W \Rightarrow \phi(x - y) = 0] \qquad (\because (1), (2)) \\ \iff &[x \in W \Rightarrow \phi(x) = 0] \end{aligned}$$

따라서, $x \in W \Rightarrow \phi(x) = 0$은 필요충분조건이다.

1.4.1.

집합 $X = \{a, b, c\}$에 대해 관계 $R \subset X \times X$를 생각하자.

(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ $\neg$(3)

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,c) \in R$이지만 $(a,c) \notin R$이다.

$\neg$(1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3)

$R = \{(c,c)\}$
$(a,a) \notin R$이다.

(1) $\wedge$ $\neg$(2) $\wedge$ (3)

$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$
$(a,b) \in R$ $(b,a) \in R$이지만 $a \neq b$이다.

1.4.5.

$$\forall A \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcap \mathbb{A} \subset A$$

이므로, $\bigcap \mathbb{A}$는 $\mathbb{A}$의 하계이다.
만약 $I \in 2^X$가 $\mathbb{A}$의 하계라면, $\forall A \in \mathbb{A}, I \subset A$이므로,

$$\begin{aligned} x \in I \Rightarrow &\forall A \in \mathbb{A}, x \in A \\ \Rightarrow &x \in \bigcap \mathbb{A} \\ \therefore I \subset &\bigcap \mathbb{A} \end{aligned}$$

따라서, $\inf \mathbb{A} = \bigcap \mathbb{A}$

1.4.7.

$$\forall c \in \mathbb{F}(C), c \subset C$$

이고,

$$\begin{aligned} &\exists S \in \mathbb{F}(C) \mid \forall c \in \mathbb{F}(C), c \subset S \\ \iff &C \subset S \end{aligned}$$

이므로,

$$\sup \mathbb{F}(C) = C$$

$$\forall c \in \mathbb{F}(C), c \supset \varnothing$$

이고,

$$\begin{aligned} &\exists I \in \mathbb{F}(C) \mid \forall c \in \mathbb{F}(C), c \supset I \\ \iff &\varnothing \supset I \end{aligned}$$

이므로,

$$\inf \mathbb{F}(C) = \varnothing$$

1.4.9.

$$\begin{aligned} F \vee G = \sup\{F, G\} = F \cup G \\ F \wedge G = \inf\{F, G\} = F \cap G \end{aligned}$$