# 고급수학 및 연습 2 중간고사

(2015년 10월 17일 오후 1:00-3:00)

| 학번: | 이름: |
|---|---|

**모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)**

**문제 1.** [30점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (10점) $D_1 f(0,0)$ 와 $D_2 f(0,0)$ 를 구하시오.

(b) (10점) 함수 $f$ 가 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

(c) (10점) 조건 $D_1 D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y)$ 를 만족시키는 $(x,y)$ 를 모두 구하시오.

**문제 2.** [20점] 함수 $f(x,y,z) = ze^x \sin y$ 와 곡면 $f(x,y,z) = 1$ 위의 점 $P = \left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (10점) 점 $P$ 에서 함수 $f$ 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 구하시오.

(b) (10점) 점 $P$ 에서 곡면 $f(x,y,z) = 1$ 에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

**문제 3.** [20점] 3차원 공간에서 정의된 함수

$$f(x,y,z) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sin\left(\frac{z}{2}\right)$$

를 집합 $S = \{(x,y,z) \,|\, x+y+z = \pi, \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ 에 제한하였을 때 최댓값을 구하시오.

**문제 4.** [15점] 원점에서 함수 $f(x,y) = e^{xy} \sin y$ 의 3차 근사다항식을 구하시오.

**문제 5.** [20점] 함수

$$f(x,y) = \int_0^1 (\sqrt{t} - x - yt)^2 \, dt$$

의 임계점을 모두 구하고 그것이 극댓점인지 극솟점인지 혹은 안장점인지 판정하시오.

**문제 6.** [20점] 다변수 벡터함수

$$F(x,y) = (e^x \cos y, \ e^x \sin y), \quad G(u,v) = (u + 2v, \ -u + v)$$

와 좌표평면의 영역

$$D(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

에 대하여

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\text{Area}\,((G \circ F)(D(r)))}{r^2}$$

를 구하시오. (단, $\text{Area}\,((G \circ F)(D(r)))$ 는 $(G \circ F)(D(r))$ 의 넓이)

**문제 7.** [20점] $(x,y)$ 에 대한 함수 $z$ 가 식 $x^3 - 2y^2 + z^2 = 0$ 을 만족시킬 때, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ 과 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ 을 구하시오.

**문제 8.** [20점] 좌표평면에서, 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2, y)$$

와 영역 $D = \{(r,\theta)\,|\,0 \le r \le 1+\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi\}$ 의 경계를 따라 반시계 방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $X$ 에 대하여

$$\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

를 구하시오.

**문제 9.** [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)$$

가 $\mathbb{R}^3$ 에서 잠재함수를 가질 필요충분조건이 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

가 대칭행렬임을 증명하고, 이 때 $\mathbf{F}$ 의 잠재함수를 구하시오.

(b) (10점) 함수 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 이 연속함수이면, 원점이 빠진 $n$-공간 $\mathbb{R}^n - \{O\}$ 에서 벡터장

$$\mathbf{F}(X) = f(|X|)X$$

의 잠재함수가 존재함을 증명하시오.

**문제 10.** [15점] 영역 $U = \mathbb{R}^2 - \{\ (x,0)\ |\ x \le 0\ \}$ 에서 정의된 각원소 벡터장

$$\mathbf{a}(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$

를 생각하자. 그리고 $(1,0)$ 과 주어진 영역 위의 점 $(x,y) \in U$ 를 잇는 선분을 $C$ 라고 하자. 즉,

$$C(t) = (1,0) + t(x-1,y), \qquad 0 \le t \le 1$$

이다. 이 때 아래와 같이 정의된 함수

$$\varphi(x,y) = \int_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} \qquad (x,y) \in U$$

가 주어진 영역 $U$ 에서 $\mathbf{a}$ 의 잠재함수가 됨을 보이시오.