Quiz 3 (11월 5일 금 3, 4 교시)

[2010년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 포물면 $z = x^2 + y^2$ 아래, xy-평면 위, 원기둥면 $x^2 + y^2 = 2x$ 안쪽에 놓여 있는 입체 도형의 부피를 구하시오.

2. (7점) 꼭지점이 $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$, $(0, -1)$ 인 사다리꼴 영역을 R 이라고 할 때, 다음 적분값을 구하시오.

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\ dxdy$$

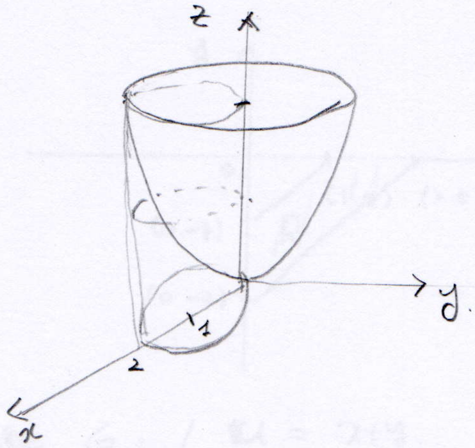
3. (6점) 좌표평면의 영역 D 가 세 직선 $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ 로 둘러싸인 부분일 때, 이 영역 D 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xe^y\ \mathbf{i} - e^y\ \mathbf{j}$$

에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds$$

1. 주어진 영역은 $E : \{ 0 \le z \le x^2+y^2 \quad x^2+y^2 \le 2x. \}$



표준직교 좌표계 (x, y, z) 를

원기둥 좌표계로 치환하여.

$$G : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \\ z = z \end{cases} \qquad |\det G'| = r.$$

$$0 \le z \le x^2+y^2 \Rightarrow 0 \le z \le r^2.$$

$$x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow r^2 \le 2r\cos\theta.$$

$$r(r-2\cos\theta) \le 0.$$

$$0 \le r \le 2\cos\theta.$$

$$\iiint_E 1.\, dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2} r.\ dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^3\ dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cdot 16\cos^4\theta\ d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\ d\theta$$

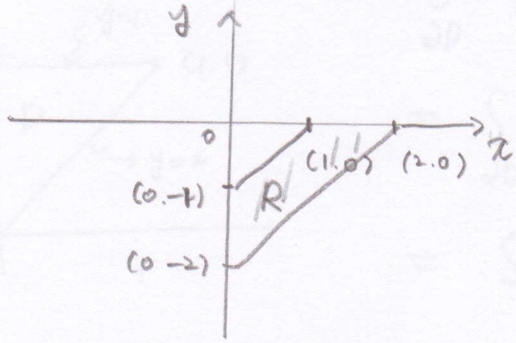
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{8}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\ d\theta$$

$$= 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\ d\theta$$

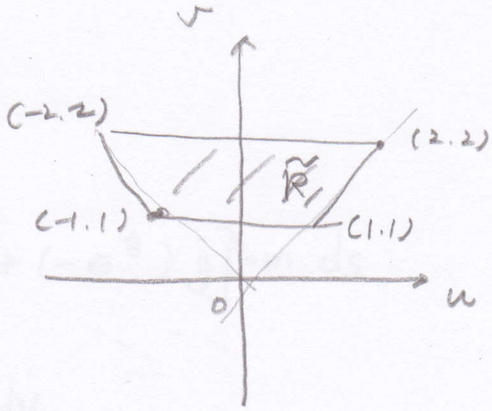
$$= 2\left[\ \frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

2.



$$\xrightarrow{G} \qquad \xleftarrow{G^{-1}=T}$$



변환 $G : \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ 를 생각하면 $T = G^{-1} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$

$$T' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dx\,dy = \iint_{\tilde{R}} e^{\frac{u}{v}} \times \left(\frac{1}{2}\right) du\,dv$$

$\tilde{R} = \{ (u, v) \mid 1 \le v \le 2, \quad -v \le u \le v \}$ 이므로.

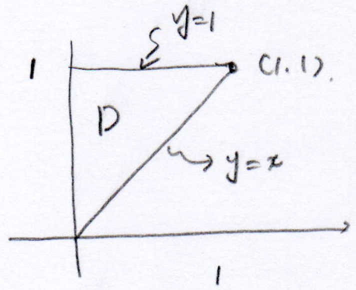
$$\frac{1}{2}\iint_{\tilde{R}} e^{\frac{u}{v}}\, du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[v e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 v\left(e - \frac{1}{e}\right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

3.



$$\left\{ \begin{array}{l} x \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot \mathbb{n}\, ds$$

$$= \int_{\partial D} \left[(2xe^y)\mathbb{i} + (-e^y)\mathbb{j} \right] \cdot \mathbb{n}\, ds$$

$$= \iint_D \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV_2$$

$$= \iint_D (2e^y + (-e^y))\, dV_2$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 e^y \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 [e^y]_x^1 dx = \int_0^1 e - e^x \, dx$$

$$= [ex - e^x]_0^1$$

$$= 1 \ ▨$$