Quiz 4 (5월23일 금요일 7, 8교시)

[2014 년 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) $P_{\mathbf{v}}(X)$를 삼차원 공간에서 벡터 $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$에 대한 $X \in \mathbb{R}^3$의 정사영이라할때 다음을 구하시오.
   (a) (3점) $P_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 가 선형사상임을 보이시오.
   (b) (4점) 선형사상 $P_{\mathbf{v}}$에 대응되는 행렬 A 를 구하고 A 의 행렬식을 구하시오.

2. (6점) 벡터 $(1, x, x), (x, 1, y), (y, y, 1)$ 이 일차독립이기 위한 x, y의 조건을 구하시오.

3. (7점) 극좌표계에서 $r = r(\theta)$ 로 주어진 평면 곡선은 직교좌표계로는

$$X(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$$

   로 표현된다. (단, $r(\theta)$는 θ에 관한 미분가능함수라고 하자.) 이 때, 원점과 점 $X(\theta_0)$ 을 잇는 직선이 점 $X(\theta_0)$ 에서의 곡선 $X(\theta)$ 의 접선과 이루는 사이각의 코사인 값을 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준 예시

1. (a) $P_{\mathbf{v}}(X) = (X \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$를 이용하여 $P_{\mathbf{v}}(X+Y) = P_{\mathbf{v}}(X) + P_{\mathbf{v}}(Y)$와 $P_{\mathbf{v}}(cX) = cP_{\mathbf{v}}(X)$을 보이면 된다. (3점)

   (b) $P_{\mathbf{v}}(e_1) = (e_1 \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6})$
   $P_{\mathbf{v}}(e_2) = (e_2 \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6})$
   $P_{\mathbf{v}}(e_3) = (e_3 \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = 2\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = (\frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6})$
   이므로 주어진 선형사상에 대응되는 행렬 A 는

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

(2점)

   그리고 $\det A = 0$이다. (4점)

2. 세 벡터가 일차독립일 필요충분조건은 세 벡터를 열벡터로 하는 행렬의 행렬식이 0이 아닌 것이다.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & y \\ y & y & 1 \end{pmatrix} = 1 - y^2 - x^2 + xy^2 + x^2y - xy = (1-x)(1-y)(1+x+y)$$

(3점)

   따라서, 원하는 조건은 다음과 같다. $x \neq 1, y \neq 1, x + y \neq -1.$ (6점)

3. $X(\theta)$ 의 속도벡터는

$$X'(\theta) = r'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + r(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$$

(3점)

   두 벡터 $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 가 서로 수직이므로
   $|X'(\theta)| = \sqrt{r^2 + (r')^2}$ 이고 $X(\theta) \cdot X'(\theta) = r(\theta)r'(\theta)$ 이다.
   따라서, 구하고자 하는 사이각의 코사인 값은

$$\frac{X(\theta_0) \cdot X'(\theta_0)}{|X(\theta_0)||X'(\theta_0)|} = \frac{r'(\theta_0)}{\sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta_0)^2}}$$

(7점)