Quiz 2 (10월 14일 금 5, 6 교시)

[2011년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ 의 임계점을 구하고, 극대인지, 극소인지, 안장점인지 판별하라.

2. (7점) 함수 $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 는 $\mathrm{grad}g(1,0) = (3,4)$ 및 $D_{(a,b)}h(1,0) = 2a - b$ (a, b 는 임의의 실수) 를 만족하는 미분가능한 함수라고 한다. 곡선 $G(u,v) = (e^u, 2\sin v)$ 와 $F(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$ 에 대해 다음 값을 구하여라.

$$(F \circ G)'(0,0)$$

를 구하시오.

3. (8점) 좌표평면의 영역 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 \le 3xy\,, x \ge 0\,, y \ge 0\}$ 은 유계이고 닫힌 집합이라고 한다. 이 영역에서 정의된 함수 $f(x,y) = xy$ 의 f 의 최댓값을 구하시오.

1. $\mathrm{grad} f(x,y,z) = (0,0,0)$ 인 점은 원점 뿐이다. (2점) $(0,0,0)$ 에서의 함숫값은 0 인데, 원점 근방에서 x-축 방향으로 이동하면 양수이고, z-축 방향으로 이동하면 음수이므로, 안장점이다. (3점)

2. 연쇄법칙으로부터

$$F'(G(0,0))G'(0,0) = F'(1,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

을 구하면 된다. (3점)

$$F'(1,0) = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

이므로 (3점)
$\begin{pmatrix}3 & 8\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ 이 답이다. (1점)

3. f 는 연속함수이므로, 최대-최소 정리에 의해 이 영역에서 최대와 최소를 갖는다.(1점)
$\mathrm{grad} f(x,y) = (y,x) = (0,0)$ 인 점은 영역의 내부에 없다. 따라서, 영역의 경계에서 최대와 최소가 존재한다.(1점)

$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 가 경계인데, $P = (x,y)$ 에서 최대라면, 라그랑즈 승수법에 의해

$$(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = 3\lambda(y,x)$$

인 λ 가 존재한다. 따라서, $x^2 = (\lambda+1)y$, $y^2 = (\lambda+1)x$ 가 성립한다. $(0,0)$ 과 $(x,y) = (\lambda+1, \lambda+1)$ 인데, 이 중에서 $g(x,y) = 0$ 을 만족하는 것은 $(0,0)$ 과 $(x,y) = (3/2, 3/2)$ 이다. (5점)
$(0,0)$ 에서 최소이고, $(3/2, 3/2)$ 에서 최댓값 $9/4$ 를 갖는다. (1점)