Chapter 3 Vector

벡터의 성질과 연산에 대해서 알아 본다
벡터 표시
벡터 연산
벡터 곱

Dimensional analaysis

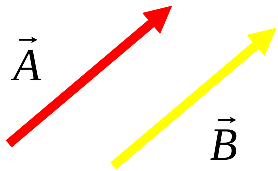
원운동하는 물체에 작용하는 구심력은
물체의 질량(m), 원운동 반지름(R), 물체의 속력(v)에
의존함이 실험적으로 알려져있다.

$F = ma \longrightarrow F$의 차원에 대한 정보

$$Try\ with:\ \ F = Cm^{\alpha}v^{\beta}R^{\gamma},\ \ C = const$$

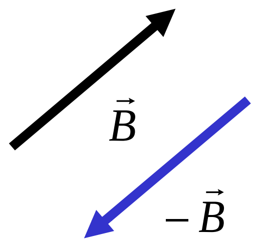
벡터의 정의

- 크기와 방향을 같은 물리량을 벡터(물리량)이라 한다.
  - ❖ 속도, 가속도, 변위, 위치… *스칼라→ 값만 있는 물리량
- 벡터의 표현:
  - ❖ 식 : 굵은 문자 또는 화살표 얹은 문자 $\boxed{\vec{v} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}}$
  - ❖ 그림: 화살표.
- 벡터의 상등: 시작 위치에 상관없이 크기와 방향이 같으면 같다.
  - ❖ 평행이동 가능



$\therefore \vec{A} = \vec{B}$

- 음의 벡터:
  - ❖ 크기는 같고 방향은 반대

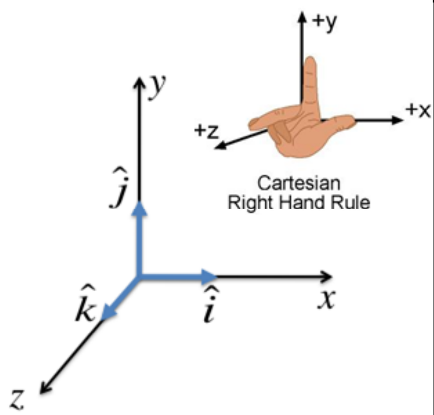


- 영 벡터: $\boxed{\vec{A} + (-\vec{A}) = 0}$

단위벡터

◆단위벡터: 크기가 1인 벡터

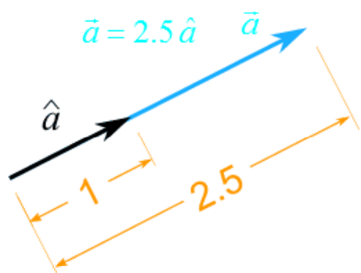
•중요한 단위벡터 $\begin{cases} x-\text{축 방향 단위벡터}: \hat{i} \ (\hat{x}) \\ y-\text{축 방향 단위벡터}: \hat{j} \ (\hat{y}) \\ z-\text{축 방향 단위벡터}: \hat{k} \ (\hat{z}) \end{cases}$



•벡터 $\vec{a}$ 의 크기 표현:

$|\vec{a}| = a$ (화살표를 떼어냄)

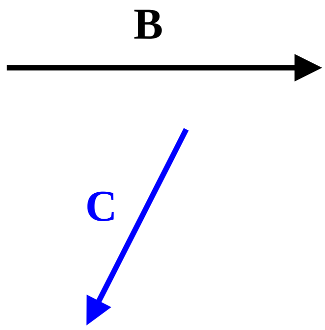
$|-3\vec{a}| = |-3||\vec{a}| = 3a$



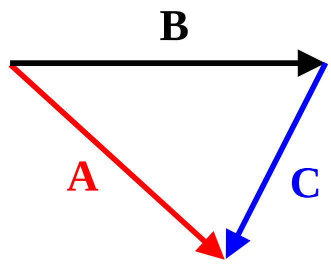
•$\vec{a}$와 같은 방향의 단위벡터:

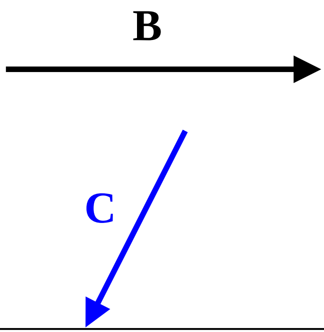
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (|\vec{a}| \neq 0)$$

기하학적인 벡터의 덧셈

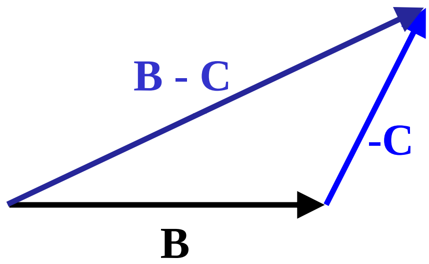


$$\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$$

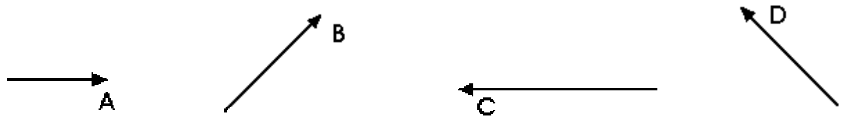




$$\vec{B}-\vec{C}=\vec{B}+(-\vec{C})$$



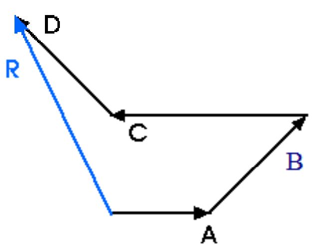
벡터의 결합법칙

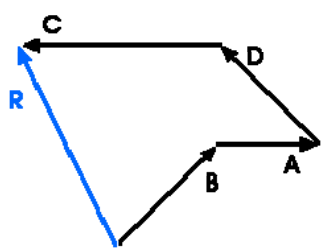


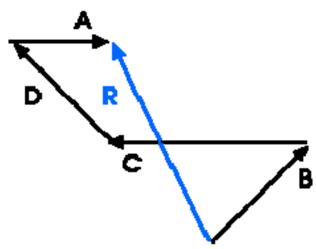
$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

$$\vec{R}=\vec{B}+\vec{A}+\vec{D}+\vec{C}$$

$$\vec{R}=\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{A}$$

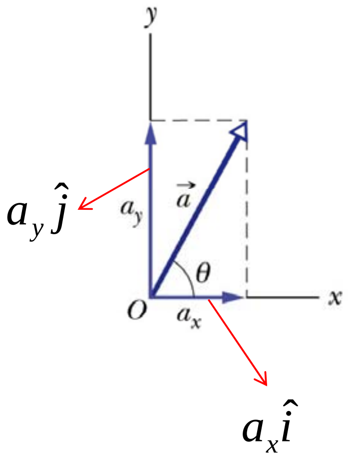






벡터의 성분

- 벡터 연산은 성분을 이용하면 쉽다.
  - 성분을 계산하기 위해서는 좌표계을 잡아야 한다.
  - 평행 이동하여 시작을 원점에 놓을 때 정사영의 **좌표값**이 성분임.
  - 각도는 x-축에서 시작해서 반시계방향 → +



• 성분은 부호를 갖음:
$a_x = a\cos\theta, \quad a_y = a\sin\theta$

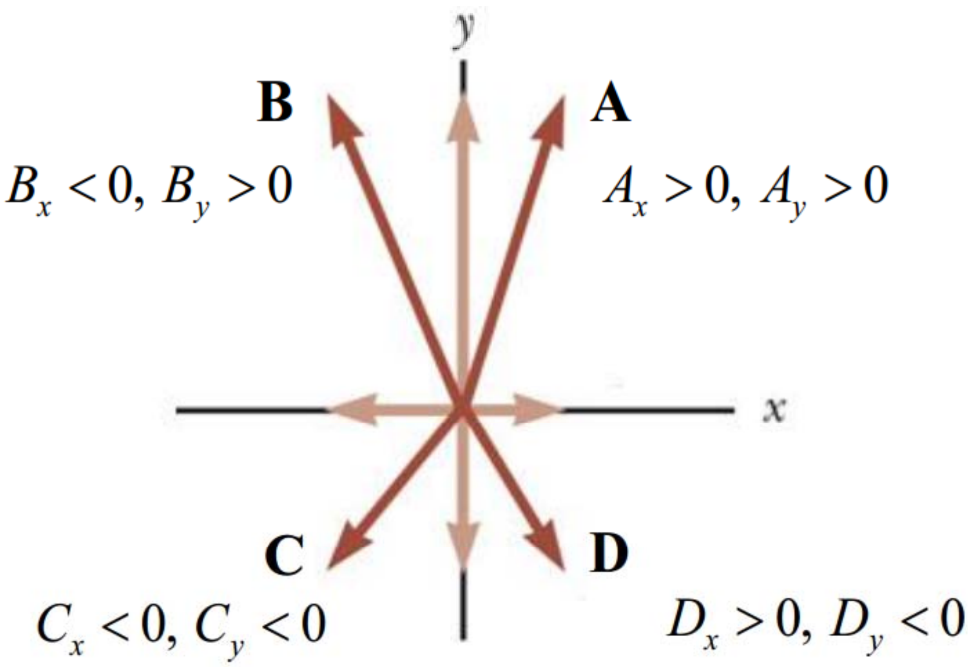
• 성분과 단위벡터를 이용한 벡터표현:
$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

• 벡터의 크기: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$,

• 기울어진 각도: $\tan\theta = \dfrac{a_y}{a_x}$

$(0 \le \theta < 2\pi, \text{ or } -\pi < \theta \le \pi)$

벡터의 성분은 부호를 가진다



3차원에서 벡터의 성분

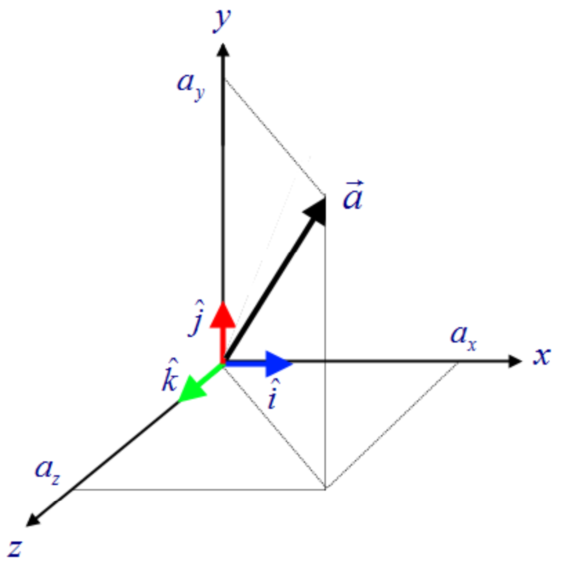
$1\text{차원}: \vec{a} = a_x \hat{i}$

$2\text{차원}: \vec{a} = (a_x, a_y)$

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

$3\text{차원}: \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$



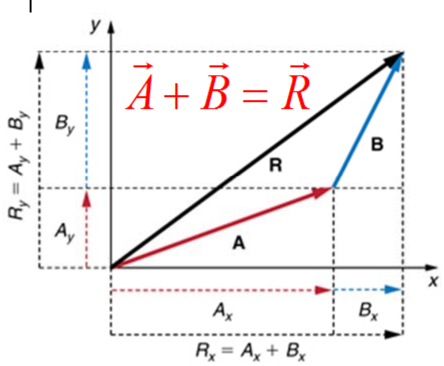
성분을 이용한 벡터의 연산

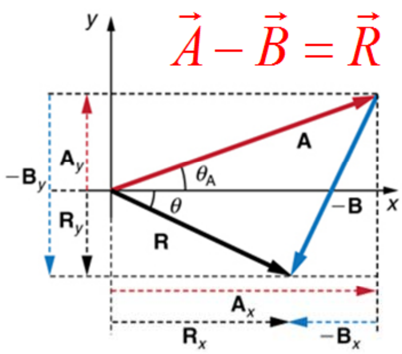
- $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ and $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

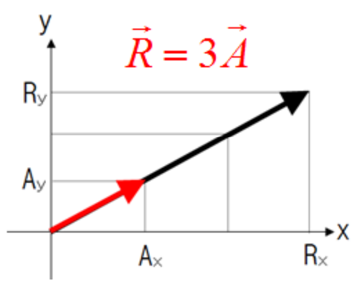
$$\text{덧셈}: \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \;\Downarrow\; R_x = A_x + B_x,\; R_y = A_y + B_y,\; R_z = A_z + B_z$$

$$\text{뺄셈}: \vec{R} = \vec{A} - \vec{B} \;\Downarrow\; R_x = A_x - B_x,\; R_y = A_y - B_y,\; R_z = A_z - B_z$$

$$\text{스칼라 배}: \vec{R} = 3\vec{A} \;\Downarrow\; R_x = 3A_x,\; R_y = 3A_y,\; R_z = 3A_z$$







벡터를 이용한 물리법칙 표현

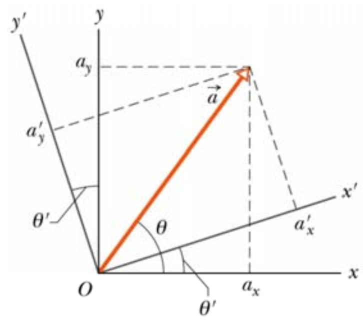
- 벡터는 좌표축을 잡는 방법에 따라 성분이 달라질 수 있다.

•동일한 벡터도 좌표계를 다르게 잡으면 성분이 달라진다: $a_x \neq a_x'$ and $a_y \neq a_y'$

•그러나, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 스칼라곱 등은 좌표계에 선택에 무관한다:

예: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\Rightarrow$ 성분은 달라져도 등호는 변하지 않음.



•벡터의 크기는 좌표계의 회전에 무관한 값이다:

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(a_x')^2 + (a_y')^2}$

$e.g. (x, y)$좌표계에서 $d = a_x^2 + a_y^2$로 주어지면 (x', y')좌표계의 $d' = (a_x')^2 + (a_y')^2$와 같은 값을 갖음

•벡터 물리량을 이용해서 공식을 만들 때, 특정한 성분만 들어가면 올바른 물리공식이 될 수 없다.

$e.g.\ c = a_x + a_y \rightarrow c$값은 좌표계에 따라 달라짐

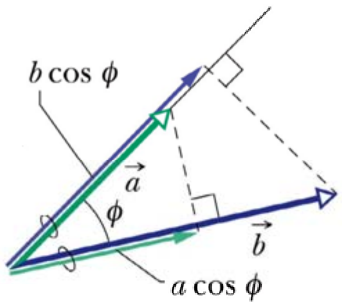
;올바른 물리공식은 좌표계 선택에 무관함.

벡터의 내적

- 두 벡터를 써서 스칼라를 만든다:
  - 일, flux… 정의에서 쓰임

∘$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적$\Rightarrow$새로운 스칼라:

$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\phi}$



∘기하학적 의미:

$\vec{a}$의 크기(a)와 $\vec{b}$의 $\vec{a}$방향으로 정사영$(b\cos\phi)$의 곱

∘교환법칙: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

∘배분법칙: $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

∘$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Rightarrow \cos\phi = 1 \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = ab$

∘$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

∘벡터 크기: $a = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

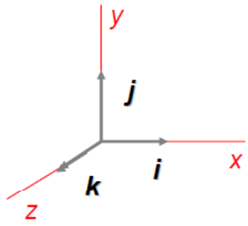
∘일 정의: $W = \vec{F} \bullet \vec{d} = Fd\cos\phi$

성분을 이용한 내적

∘단위벡터사이의 내적

$\hat{i}\perp\hat{j}\perp\hat{k}\perp\hat{i}\Rightarrow\hat{i}\bullet\hat{j}=\hat{j}\bullet\hat{k}=\hat{k}\bullet\hat{i}=0$

크기가 1인 벡터 $\Rightarrow\hat{i}\bullet\hat{i}=\hat{j}\bullet\hat{j}=\hat{k}\bullet\hat{k}=1$



∘단위벡터를 이용한 내적의 표현:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\bullet(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\boxed{\vec{a}\bullet\vec{b}=\sum_{i=x,y,z}a_ib_i}$$

$$\circ\, a=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}$$

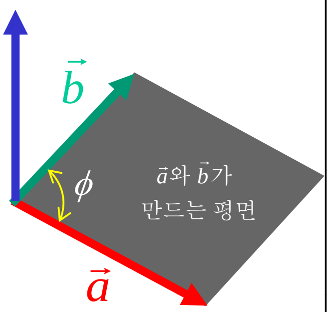
벡터의 외적

- 두 벡터로 새로운 벡터를 만듦:
  - Torque, 각운동량, 자기력… 정의에 쓰임

$\bullet\,\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 외적 $\Rightarrow$ 새로운 벡터 $\vec{c}$:

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}}$$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$



•크기: $c=ab\sin\phi=\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 만드는 평행사변형 면적

•방향: $\vec{a}$와 $\vec{b}$만드는 평면에 수직, 오른손 법칙

• $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\quad(\text{교환법칙}\Rightarrow No!)}$

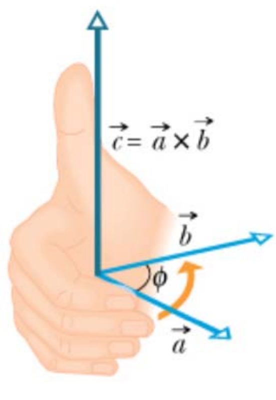
• $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$\circ\,\vec{a}\,//\,\vec{b}\Rightarrow\sin\phi=0\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$

$\circ\,\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\sin\phi=1\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=ab$

$\circ\,\vec{a}\times\vec{a}=0$

$$\bullet\,\text{ex}\begin{cases}\text{각운동량}:\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}\\ \text{토크}:\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}\end{cases}$$



성분을 이용한 외적

- 단위벡터 사이의 외적

$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

$\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{i}=\hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{j}=\hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{k}=\hat{j}$

• 성분을 이용한 외적 표현:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_x=a_yb_z-a_zb_y\\ c_y=a_zb_x-a_xb_z\\ c_z=a_xb_y-a_yb_x\end{cases}$$

*행렬식 표현:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j}\\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y\\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y\end{vmatrix}$$

$-\quad-\quad-\qquad\qquad+\quad+\quad+$

$+a_yb_z\hat{i}+a_zb_x\hat{j}+a_xb_y\hat{k}$

$-a_yb_x\hat{k}-a_zb_y\hat{i}-a_xb_z\hat{j}$

Ex. 벡터 연산

• $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j},\ \vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{k}$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=?,\ \vec{a}\times\vec{b}=?,$

내적: $\vec{a}\bullet\vec{b}=(3)(-2)+(-4)(0)+(0)(3)=-6$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j}\\ 3 & -4 & 0 & 3 & -4\\ -2 & 0 & 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=-12\hat{i}-8\hat{k}-9\hat{j}$$

$-8\hat{k},\ 0,\ -9\hat{j}\qquad -12\hat{i},\ 0,\ 0$