

Quiz 3 (5월 1일 목 7.5, 8.5 교시)

[2014년 1학기 수학 및 연습 1]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) \mathbb{R}^n 상의 점 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 에 대하여, $a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + na_n^2 = 1$ 일 때 $f(\mathbf{a}) = a_1 + \dots + a_n$ 의 최댓값과 최댓점 \mathbf{a} 를 구하시오.
2. 세 벡터 $\mathbf{v}_1 = (1, -8, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 10, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 14, -6)$ 에 대하여 다음을 구하시오.
 - (a) (5점) 세 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.
 - (b) (5점) 세 점 $(0, 0, 0)$, $(1, -8, 0)$, $(-1, 10, -2)$ 를 지나는 평면을 α 라고 하자. 점 $(1, 1, 1)$ 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 구하시오.
 - (c) (5점) $(0, -1, 2)$ 방향으로 진행하던 빛이 (b)의 평면 α 에 반사되어 나가는 방향을 구하시오.

Quiz 1 모범답안 및 채점기준

1. CBS부등식에 의하여

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + (\sqrt{2}a_2)^2 + \cdots + (\sqrt{n}a_n)^2)(1 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \cdots + (\frac{1}{\sqrt{n}})^2)$$

이므로 $f(\mathbf{a})$ 의 최댓값은 위 부등식의 등호가 성립할때이다. 따라서 최댓값은 $\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ 이다. (2점)

최댓점은 다음과 같다.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}} (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n})$$

(5점)

2. (a) $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ 를 만족하는 a_1, a_2, a_3 를 구하자.

$$a_1 - a_2 - a_3 = 0, -8a_1 + 10a_2 + 14a_3 = 0, -2a_2 - 6a_3 = 0$$

이므로 $a_1 = -2a_3, a_2 = -3a_3$ 이다. 따라서 일차종속이다. (5점)

(부분 점수 없음)

(b) 점 $(0, 0, 0), (1, -8, 0), (-1, 10, -2)$ 을 포함한 평면을 구하면 된다.
 $ax + by + cz = d, d = 0, a - 8b = d, -a + 10b - 2c = d$ 을 만족하는 a, b, c 를 구하면 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$8x + y + z = 0$$

(2점)

따라서, 수선의 발은 다음과 같다.

$$(1, 1, 1) + \frac{-(1, 1, 1) \cdot (8, 1, 1)}{66} (8, 1, 1)$$

(5점)

(c)

$$(0, -1, 2) - 2 \frac{(0, -1, 2) \cdot (8, 1, 1)}{|(8, 1, 1)|^2} (8, 1, 1)$$

(5점)

(부분 점수 없음)