

Chapter 8. 위치에너지와 에너지 보존

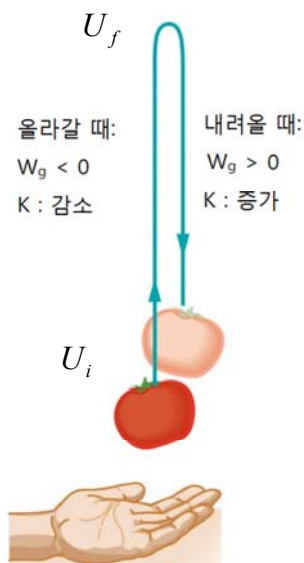
물체의 위치에너지의 성질을 규명하고
에너지 보존법칙을 알아본다.

위치 (potential) 에너지

- 정의: 일(운동)을 할 수 있는 능력(잠재력)
 - ❖ 물체끼리 주고받는 상호작용(힘) 때문에 생기는 에너지로 물체의 상대적 배치(위치)에 따라 정해짐
- 위치에너지(U)의 종류:
 - ❖ **중력 위치에너지**: 물체끼리 서로 끌어당기는 중력 때문에 생기는 에너지.
 - 지상에서 높은 곳에 있는 물체
 - ❖ **탄성 위치에너지**: 탄성체를 누르거나 늘릴 때 작용하는 탄성복원력 때문에 생기는 위치에너지.
 - 용수철 + 매달린 물체.
 - 번지점프 줄 + 사람.
 - ❖ 전기위에너지: 2학기 주제...



중력위치에너지



▶ 물체가 올라갈 때: 중력이 한 일 (W_g) < 0

물체의 운동에너지 감소: $\Delta K = W_g$

감소한 운동에너지는 어디에?: 지구-물체로 구성된 계의 **위치에너지 차이(ΔU)**로 변환

• 중력위치에너지:

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{정의}}{=} -W_g = -(\text{중력 } F_g \text{ 가 한 일})$$

왜 음수로 하나: 중력이 +일을 하면(아래로 내려감) 위치에너지가 감소하므로 위치에너지 차이와 일은 반대 부호

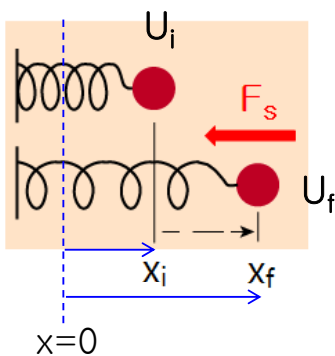
$$\Delta U = -W_g \begin{cases} \text{중력이 +일을 하면 } (W_g > 0): \text{위치 } E \downarrow (\Delta U < 0) \\ \text{중력이 -일을 하면 } (W_g < 0): \text{위치 } E \uparrow (\Delta U > 0) \end{cases}$$

Physics 1 3

탄성 위치에너지

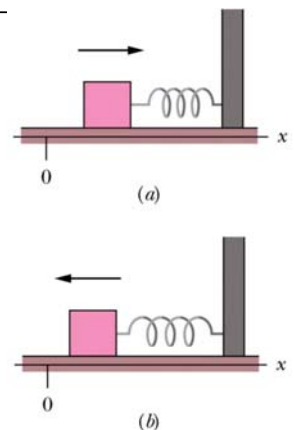
● 용수철-물체 계 → 탄성위치에너지:

- ❖ 압축: 용수철의 탄성력이 물체의 KE → 탄성 PE로 변환
- ❖ 팽창: 용수철의 탄성력이 탄성 PE → 물체의 KE로 변환



• 탄성위치에너지:

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{정의}}{=} -W_s = -(\text{탄성력 } F_s \text{ 가 한 일})$$



☞ 위치에너지에 중요한 것은 임의의 지점에서 위치에너지의 값이 아니라, 두 지점에서의 위치에너지 차이가 물리적으로 중요하다.

➔ 정의식에서 차이(ΔU)가 들어오는 이유임.

Physics 1 4

보존력, 비보존력

- 물리에서 나타나는 모든 힘들이 위치에너지를 갖는 것이 아니다.
- 위에너지를 가질 수 있는 힘은 특별한 성질을 만족한다.
- 보존력과 비보존력
 - 중력이나 용수철의 탄성력처럼 위치에너지를 가지는 힘을 **보존력 (conservative force)** 이라고 한다
 - 보존력만 있는 경우에는 힘(벡터)보다는 위치에너지(스칼라)를 이용할 수 있으므로 물체의 운동 분석이 간단해진다
 - 마찰력, 공기저항 등은 위치에너지 ⇄ 운동에너지 사이의 에너지 전환이 100% 일어나는 것을 방해한다 → **비보존력**

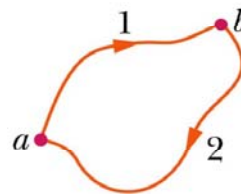
Physics 1 5

보존력의 경로 독립성

note, $W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$

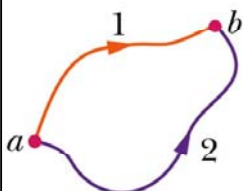
- 보존력의 판가름 방법** : “임의의 닫힌 경로를 따라 운동하는 물체에 보존력이 한 알짜 일은 0이다”
 - 중력이나 탄성력의 경우: 처음 상태로 다시 돌아오면 운동에너지 변화 = 0
→ 일-운동에너지 정리: $W_{\text{닫힌경로}} = 0$

보존력 ⇔ $W_{\text{닫힌경로}}$



보존력에 대해서
 $W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$

- 보존력의 경로 독립성**: 두 지점을 잇는 경로를 따라 움직이는 물체에 작용하는 보존력이 한 일은 물체가 움직이는 경로선택에 **무관함**



보존력: $W_{\text{닫힌경로}} = W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$
→ $W_{ab,1} = -W_{ba,2}$

일의 정의로 부터 → $W_{ab,2} = -W_{ab,1}$



∴ $W_{ab,1} = W_{ab,2}$
보존력이 한 일은 시작과 끝이 같으면 한 일은 경로에 무관

Physics 1 6

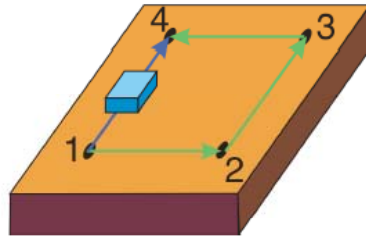
비보존력의 특징

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- 닫힌 경로를 따라서 물체가 움직일 때, 비보존력이 한 일은 0이 아니다.
 - ❖ 어떤 경로를 경유했는가에 따라 한 일이 달라짐

Non-conservative forces

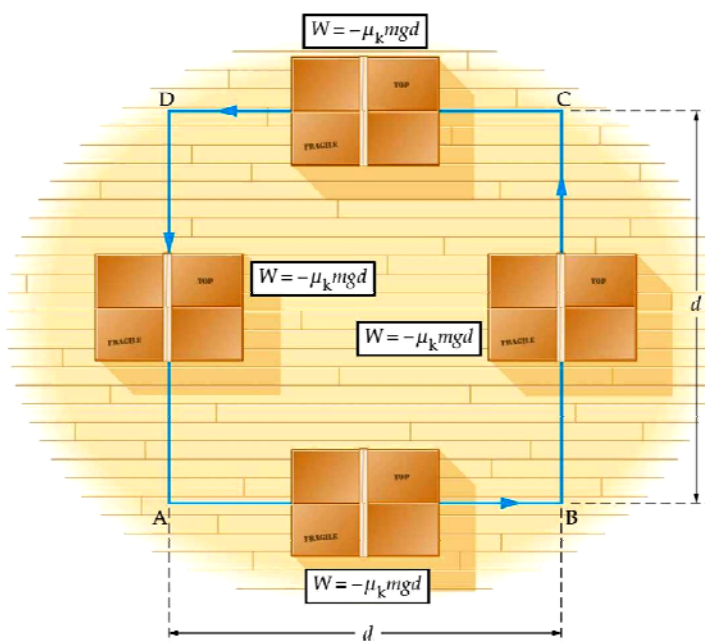
- kinetic frictional force
(noise, heat,...)



비보존력: $W_{1 \rightarrow 4} \neq W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4}$

Physics 1 7

닫힌 경로를 따라 움직이는 물체에 작용하는
마찰력이 한 알짜일은 0 이 아니다



$$\begin{aligned} W_{ABCD A} &= W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} \\ &= -4\mu_k mgd \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

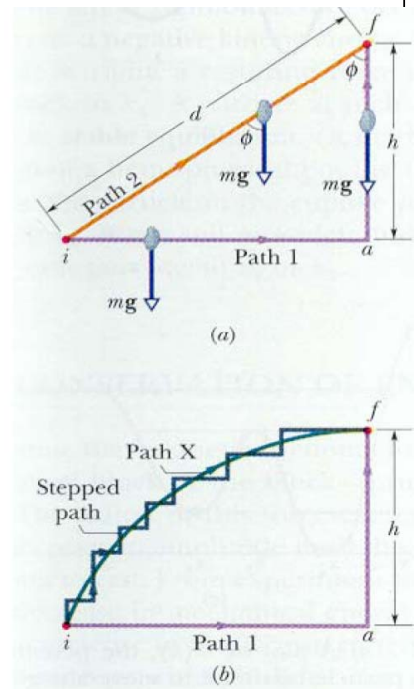
- 닫힌 경로를 따라
마찰력이 한 일 $\neq 0$
↓
마찰력 = 비보존력

Physics 1 8

중력이 한 일의 경로 독립성

◆ 물체가 두 지점을 움직이는 동안 중력이 한 일을 다음의 3가지 경로에 대해서 살펴보면:

- ① 똑바로 위로 h 만큼 올리는 경우(경로1)
 - 수평이동 구간: $W_g = 0$
- ② 경사면을 따라서 올리는 경우(경로2)
- ③ 일반적인 곡면을 따라 올리는 경우(경로X)
 - 곡면: 수평-수직으로 된 계단으로 분해
 - 수평이동 구간에서 $W_g = 0$;
 - 수직이동 구간에서만 기여함.



중력이 한 일은 중간에 움직인 경로에 무관하고 처음과 나중의 높이 차이에만 의존함 → 중력은 보존력임

Physics 1 9

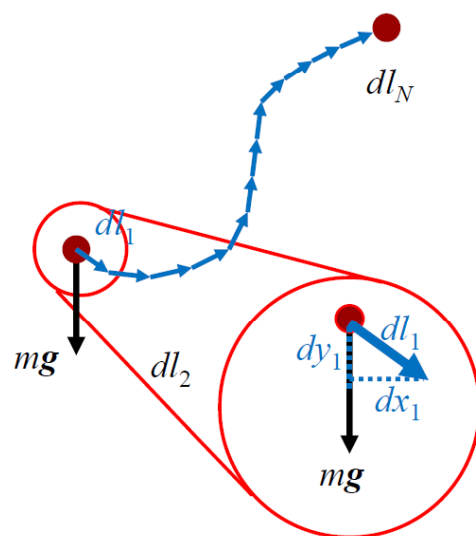
중력위치에너지는

두 지점의 위치에너지 차이
= - (중력이 한 일)

$$\begin{aligned}
 \text{중력이 한 일: } (\text{중력: } \vec{F}_g = -mg\hat{j}) \\
 W_g &= (-mg\hat{j}) \cdot d\vec{l}_1 + (-mg\hat{j}) \cdot d\vec{l}_2 + \dots + (-mg\hat{j}) \cdot d\vec{l}_N \\
 &= -mgdy_1 - mgdy_2 - \dots - mgdy_N \\
 &= -mg(dy_1 + dy_2 + \dots + dy_N) \\
 &= -mg(y_f - y_i)
 \end{aligned}$$

$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

어떤 중간경로를 선택하더라도 같음.



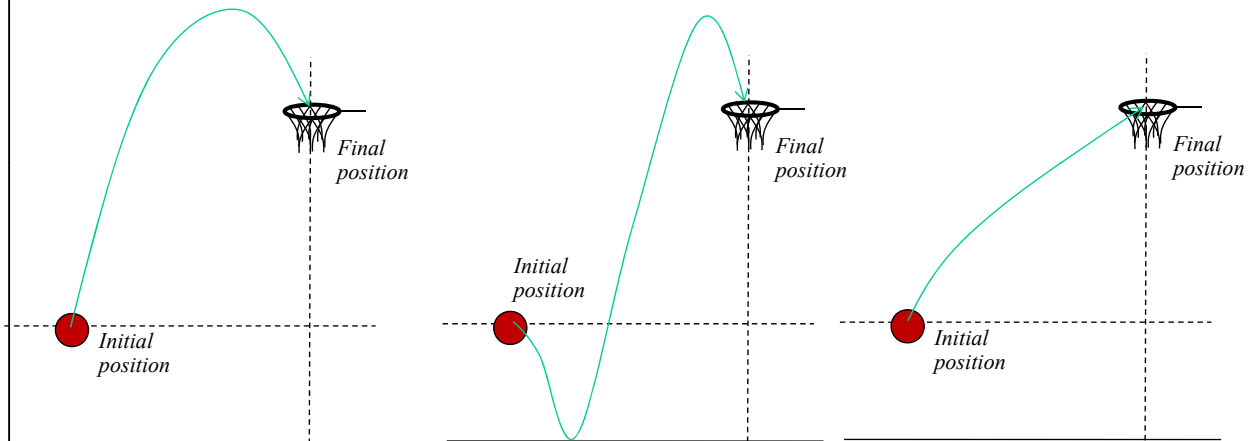
- 중력위치에너지 정의: $\Delta U = -W_g$
 $\Rightarrow U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$

- 바닥 ($y=0$)에서 $U(0)=0$ 이라면,
 중력위치에너지: $U(y) = mgy$

Physics 1 10

중력이 한 일의 경로 독립성

경로가 복잡해도 처음과 끝의 위치에만 의존



3가지 경로 모두 처음-끝의 위치가 동일:

$$W_g(\text{path}_1) = W_g(\text{path}_2) = W_g(\text{path}_3)$$

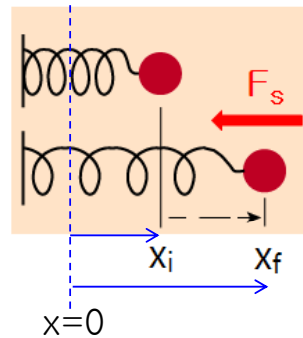
탄성위치에너지는

- 물체가 $x_i \rightarrow x_f$ 움직일 때 탄성력이 한 일:

$$\text{탄성력: } F_s = -kx$$

$$W_s = \int_i^f F_s dx = \int_i^f (-kx) dx$$

$$W_s = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2$$

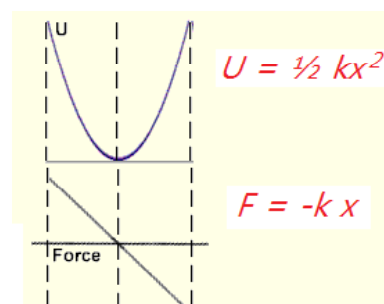


- 탄성위치에너지 정의: $\Delta U = -W_s$

$$\Rightarrow U_f - U_i = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

- 평형위치($x=0$)에서 $U(0)=0$ 이라면,

$$\therefore U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



역학적 에너지

- 보존력만이 있을 때 (보존력이 아닌 힘이 일을 안할 때)

- 일-운동에너지 정리: $\Delta K = W$

- 일은 보존력이 하므로: $W = -\Delta U$

$$\rightarrow \Delta K = -\Delta U \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow K + U = \text{const}$$

- 물리계의 역학적 에너지: $E \equiv K + U$

(보존력이 여러개 관여할 때: $E = K + U_1 + U_2 + \dots$)

- 역학적 에너지 보존법칙(보존력만 일을 할 때):

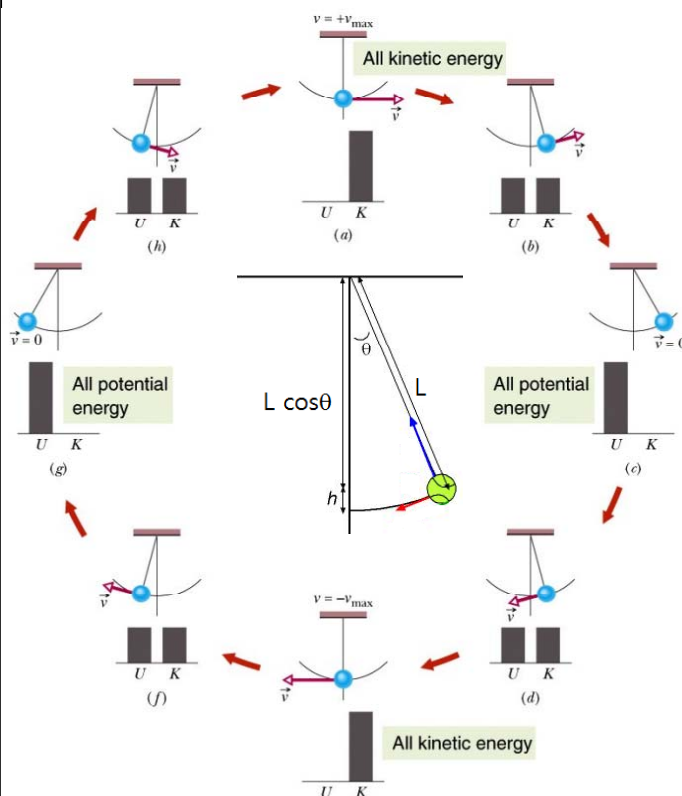
$$\Delta E = 0 \Leftrightarrow E_i = E_f$$

$$\Leftrightarrow K_i + U_i = K_f + U_f \Leftrightarrow K + U = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

보존력만 일을 할 때 역학적 에너지 보존법칙은 복잡한 상황의 물리문제 해결에 매우 강력한 수단을 제공한다

진자에서 역학적 에너지 보존



진자운동에 관여하는 힘
= 중력(보존력)
+ 장력(일을 안 함)
→ 역학적 에너지
보존 성립

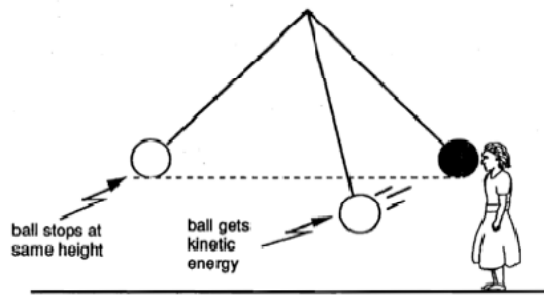
$$U = mgh = mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\bullet E = U + K = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2 = \text{일정}$$

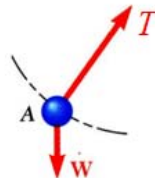
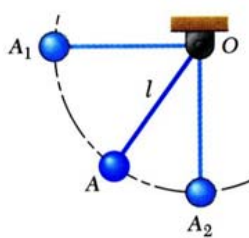
- ✓ 에너지 보존이 모든 것을 해결하지 않음.
- ✓ 물체의 위치 $x(t)$ 를 시간의 함수로 알아내기 위해서 뉴턴법칙을 써야 함.

볼링공이 얼굴을 강타할까?



Physics 1 15

진자 줄의 장력은?

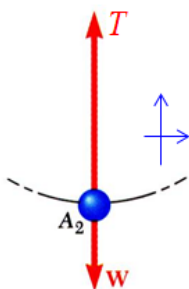


$$\bullet E(A_1) = mgl$$

$$E(A_2) = \frac{1}{2} m(v_2)^2$$

$$\rightarrow \text{At } A_2 : v_2 = \sqrt{2gl}$$

- ✓ 가속도를 구한 후 적분하지 않고도 속도를 구할 수 있음.
- ✓ 모두 스칼라 물리량만 관여함.
- ✓ 일을 하지 않는 힘(장력)을 고려할 필요가 없어짐.



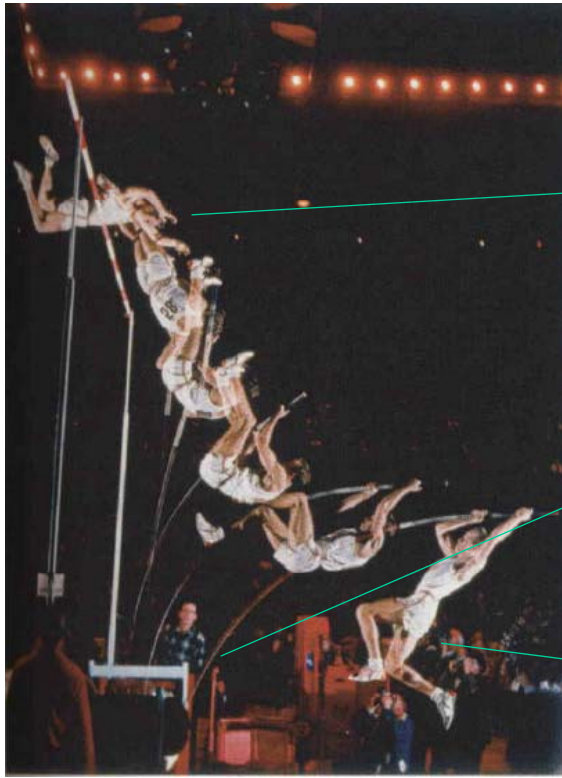
Q. 바닥에서 장력은?

$$\bullet F_{\text{net},y} = T - mg = \text{구심력} = m \frac{(v_2)^2}{\ell}$$

$$\therefore T = mg + m \frac{(v_2)^2}{\ell} = 3mg$$

Physics 1 16

Changing work into energy in real world



pole의
탄성위치에너지가
선수의 위치에너지로
전환이 됨

pole을 변형시켜서
운동에너지를
탄성위치에너지로
전환함

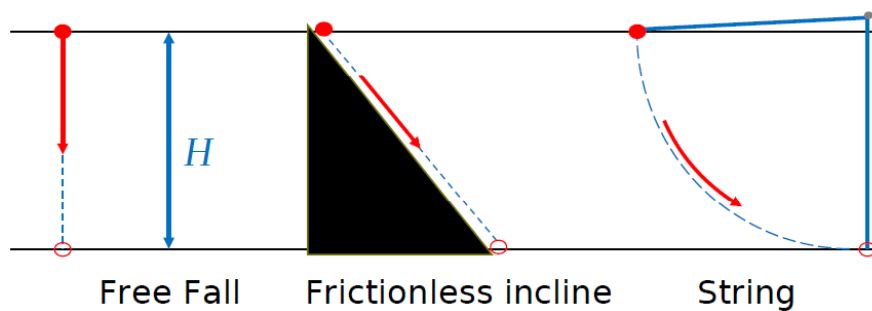
선수가 지상에
대해서 미는 일을
하여 운동에너지를
얻음

Physics 1 17

Question

- 질량이 같은 물체를 그림과 같이 세가지 방법으로 바닥으로 떨어뜨린다 (마찰은 무시). **바닥에서 속력이 제일 큰 경우는?**

(A) $1 > 2 > 3$ (B) $3 > 2 > 1$ (C) $3 = 2 = 1$ (D) Can't tell

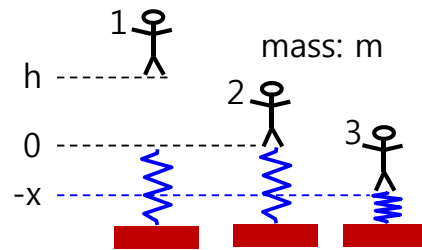


Physics 1 18



Energy (with spring & gravity)

위치에너지 = 중력위치E + 탄성위치E



최고점: $E(\text{at } 1) = U_g + U_s + K = mgh + 0 + 0$

당기 직전: $E(\text{at } 2) = U_g + U_s + K = 0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2$

최저 점: $E(\text{at } 3) = U_g + U_s + K = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + 0$

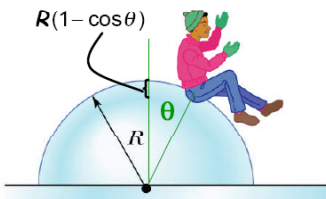
• 최고높이 h 를 알 때 용수철이 압축되는 길이 $= x$?
 $E(\text{at } 1) = E(\text{at } 3)$

최고높이 h 를 알 때 용수철을 떠나는 순간 사람이 속도가 0?
 $E(\text{at } 1) = E(\text{at } 2) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$

처음에 에너지가 저장되지 않으면 사람이 용수철(용수철의 변)이 분리되지 않고 길이 진동을 한다 (230015 진동)

Exercise

Boy starts at top of semispherical mound of ice (no friction) and slides down. What angle with vertical when he leaves the ice?



에너지 보존을 쓰지 않으면 매우 까다로운 문제가 된다.

(1) 미끄러지는 동안 (등속력이 아닌) 원운동을 한다.

중심방향 알짜힘 $= -F_N + mg \cos \theta \rightarrow$ 구심력역할

$$-F_N + mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (\text{중심방향})$$

(2) 얼음에서 벗어나는 순간 동안: $F_N \geq 0$

$$mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R} \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \geq \frac{v^2}{Rg}$$

(3) COE :

$$mgR + 0 = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2$$

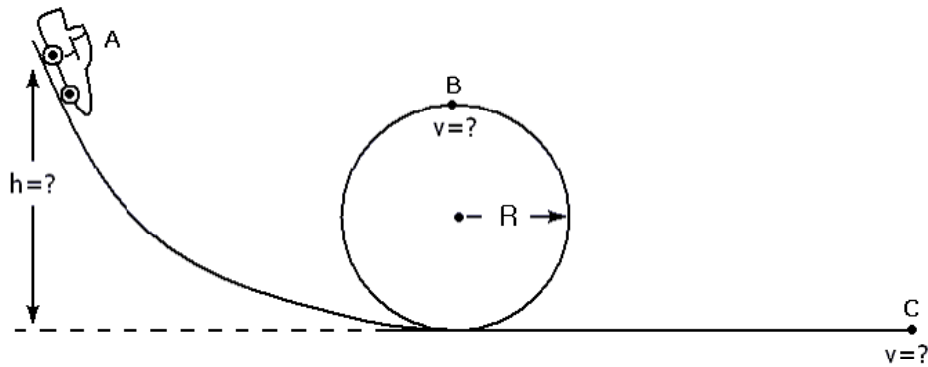
$$\Rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

벗어나는 각도:

$$\cos \theta = ? (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \therefore \theta = 48.2^\circ$$

Roller Coaster Design



• initial : $E_{\text{initial}} = K + U = 0 + mgh = mgh$

• 원형 궤도 꼭대기(B) : $E_B = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R)$

minimum condition : $v_{\text{min}} = \sqrt{gR}$ ← from where?

$$E_B = \frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 + mg(2R) = \frac{5}{2}mgR$$

- ✓ 처음 출발 속도가 0이 아니면 달라짐
- ✓ 설계를 할 때 승객수를 고려해야 할까?

위치에너지와 힘

- 미시세계에서 작용하는 힘들은 보존력으로 주어진다
 - ❖ 벡터인 힘보다 스칼라인 위치에너지를 사용하는 것이 여러 면에서 유용함.
- 위치에너지 함수에서 힘 구하기:
 - ❖ Δx 이동할 때 보존력이 한 일 = - (두 지점간의 위치에너지 차이)

$$\Delta U = -W = -\int_a^b F(x) dx \cong -F(x)\Delta x \quad (\text{for small, } \Delta x = x_b - x_a)$$

⇒ 위치에너지의 미분 → 힘

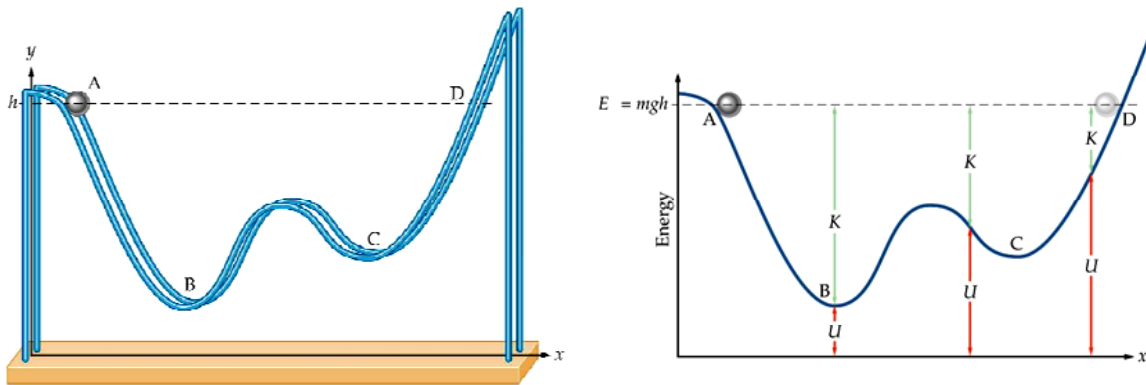
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (1\text{-dim})$$

힘의 방향은 위치에너지가 감소하는 방향(-)

eg. $\left\{ \begin{array}{l} \text{중력: } U(y) = mgy \rightarrow F(y) = -\frac{dU}{dy} = -mg \\ \text{탄성력: } U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx \end{array} \right.$

위치에너지를 보면
힘(보존력)을 알 수
있다.

Roller Coast의 곡선은 물체의 중력 위치에너지 곡선과 같다



A지점에서 정지상태에서 출발하면 A지점 보다 높은 곳에는 올라가지 못하고, 낮은 지점에서는 운동에너지가 증가한다.

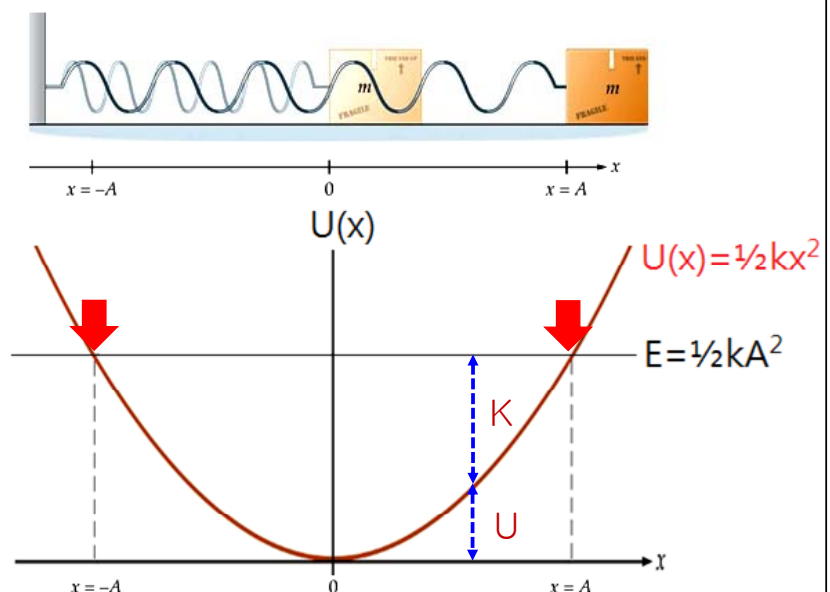
역학적 에너지 = mgh

$$K + U = E = \text{일정}$$

Physics 1 23

용수철-물체: 탄성위치에너지 곡선

용수철이 최대로
늘어나는 길이가 A이면
역학적에너지 = $\frac{1}{2} kA^2$

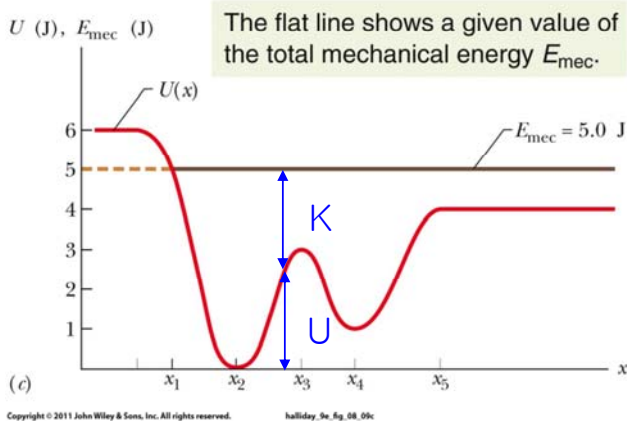


$$K + U = E = \text{일정}$$

Physics 1 24

위치에너지 곡선 읽기

- (보존력만 있을 때) 물체의 운동을 분석하는 데 위치에너지 곡선을 이용할 수 있다.
- 보존력만 있을 때, 역학적 에너지 $E = \text{일정}$ 이므로 위치에너지 곡선에서 $K = E - U \geq 0$ 인 지점에서만 운동이 가능하다.

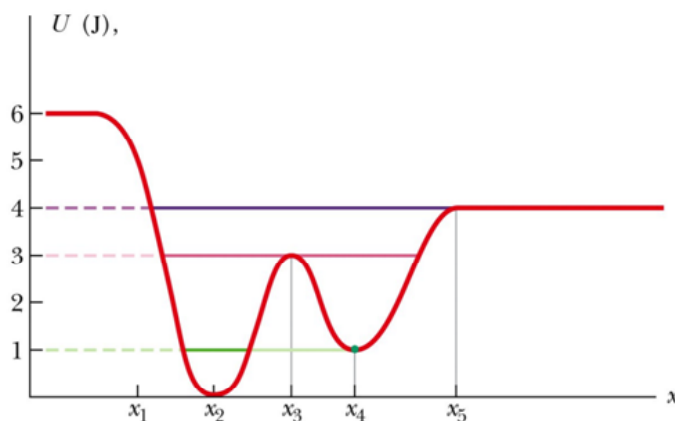


- 전환점(turning point): 운동의 방향이 바뀌는 지점: 운동가능지점 $K = E - U(x) \geq 0 \Rightarrow K = 0$ 인 곳에서 물체의 운동방향이 바뀐다
- ex) $E_{mech} = 5 \text{ J} \rightarrow x_1 = \text{전환점}$
- $x < x_1: K < 0 \rightarrow \text{접근불가 영역}$
- $x > x_5: K = E_{mech} - U = 1 \text{ J} \rightarrow \text{등속구간}$
- $x \geq x_1: K \geq 0$ 이므로 물체의 운동구간

Physics 1 25

역학적 에너지에 따른 운동범위

위치에너지 곡선을 보면 주어진 역학적 에너지에서 어떤 운동이 가능한지를 쉽게 알 수 있게 해준다.



- 평형점: $F = 0$ 인 지점

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0$$

- stable: $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$

- unstable: $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$

- neutral: $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$

(1) $E_{mech} = 4 \text{ J}$

운동범위: $x_1 \leq x \leq x_5$

전환점: x_1, x_5

$x > x_5$: 중립적 평형

(2) $E_{mech} = 3 \text{ J}$

x_3 : 불안정 평형점

(3) $E_{mech} = 1 \text{ J}$

$x = x_4$: 정지 \rightarrow 안정 평형점

(약간 벗어나게 밀리면 다시 원위치로 돌아옴)

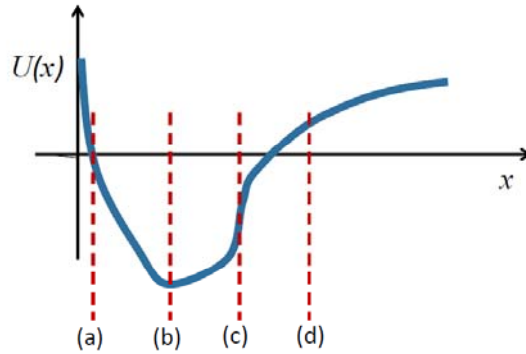
Physics 1 26

Question

Suppose the potential energy of some object U as a function of x looks like the plot shown below.

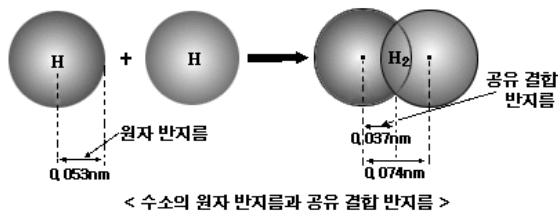
Where is the force on the object in the $+x$ direction?

- A) To the left of (b) B) To the right of (b) C) Nowhere



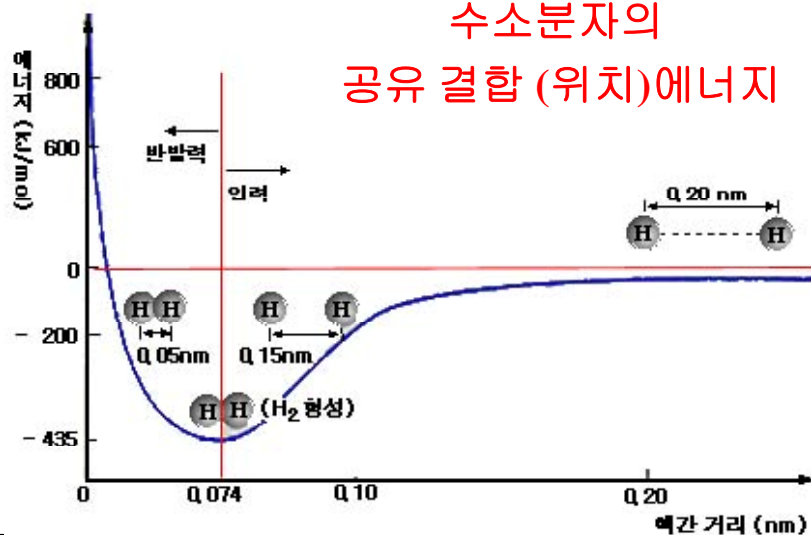
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Physics 1 27



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

수소분자의
공유 결합 (위치)에너지



Physics 1 28

물리계에 외력이 작용할 때

- ❖ 외력이 한 일을 통해서 물리계로 에너지가 전달되거나 방출된다.
- ❖ 외력이 일을 하면 계의 역학적 에너지가 변한다.

• $W_{\text{외력}} = \text{외력이 한 일}$

계에 해진 알짜일: (마찰이 없을 때)

$$W_{\text{net}} = W_{\text{외력}} + W_{\text{보존력}} = W_{\text{외력}} - \Delta U$$

• 일-운동에너지 정리:

$$\text{알짜일} = \Delta K$$

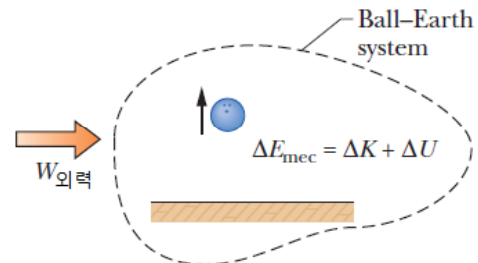
↓

$$W_{\text{외력}} - \Delta U = \Delta K$$

$$\text{or } W_{\text{외력}} = \Delta K + \Delta U$$

$$W_{\text{외력}} = \Delta E_{\text{mech}} \quad (\text{마찰없을 때})$$

외력이 계의 역학적 에너지를 변하게 함



지상의 공을 들어올리는 경우

외력=사람이 가한 일

계 = 지구+공

마찰이 작용하는 계

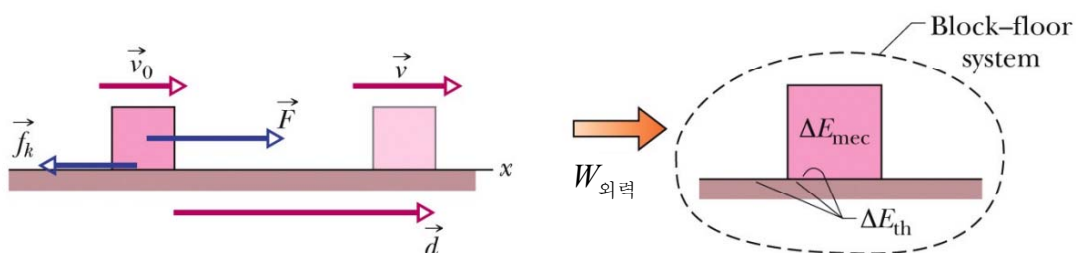
- 마찰이 있는 경우 → 마찰력도 계의 역학적 에너지를 변화시킴

❖ $W_{\text{외력}} + W_{\text{마찰}} = \Delta E_{\text{mech}} : (W_{\text{마찰}} < 0)$

❖ 마찰은 계의 에너지를 계와 주변의 열에너지 ($=\Delta E_{\text{th}}$)로 방출된다:
 $\Delta E_{\text{th}} = -W_{\text{마찰}} : (W_{\text{마찰}} < 0 \rightarrow \Delta E_{\text{th}} > 0)$

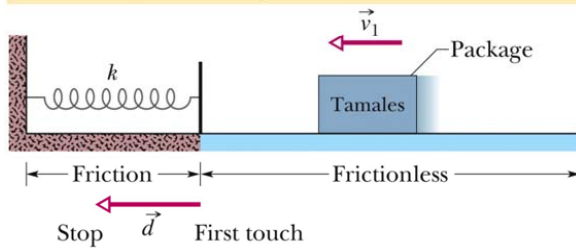
$$W_{\text{외력}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{th}} \quad (E_{\text{th}} = -W_{\text{마찰}})$$

마찰이 작용하는 계에 외력이 작용하면 역학적 에너지를 변하게 하고, 일부는 열로 방출된다



용수철의 최대 압축거리는?

$m = 2.0\text{kg}$, $v_1 = 4.0\text{m/s}$, F_f (슬립힘) $= 15\text{N}$, $k = 10,000\text{N/m}$



타말레 포장박스가 v_1 의 속도로 용수철에 접근한다. 용수철은 얼마나 압축이 될까?

$$W_{\text{외력}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{th}}$$

- 마찰면에 들어선 이후 최대압축까지: $W_{\text{외력}} = 0$

최대압축 시: $v = 0$

$$\Delta E_{\text{th}} = -W_{\text{마찰}} = -F_f d \cos(180^\circ) = F_f d$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mech}} &= \left(\frac{1}{2} m \cdot 0 + \frac{1}{2} k d^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} k d^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{th}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 + F_f d - \frac{1}{2} m v_1^2 &= 0 \\ 5000 d^2 + 15 d - 16 &= 0 \\ d &= 5.5\text{cm} \end{aligned}$$

되돌아나올 때 속력은?

(마찰영역을 나올 수 있나?)

Physics 1 33

에너지 보존

- 외부에서 물리계에 일이 제공되면,
 - ❖ **외부일 = (역학적 에너지 변화) + (열 에너지) + (계의 내부에너지 변화)**
 - ❖ **내부에너지**: 물체(크기가 있거나, 기체, 액체등...)를 구성하는 개별 분자들의 진동/회전 등에 관련된 에너지 → Chap. 19에서 다룸

$$\text{일반화: } W_{\text{외력}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}$$

- **고립계 (isolated system)**: 외부에서 제공된 일이 없을 때 ($W_{\text{외력}}=0$) → 계의 전체 에너지는 변하지 않고, 형태만 바꾼다.

$$\text{고립계: } 0 = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} \Leftrightarrow E_{\text{mech}} + E_{\text{th}} + E_{\text{int}} = \text{const}$$

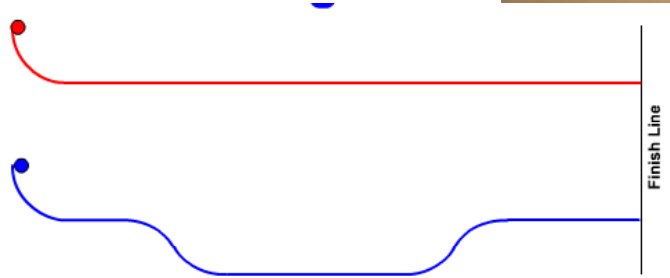
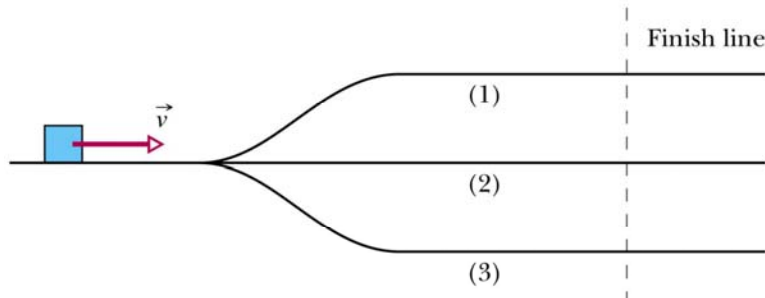
- 계에 외력이 작용하면 에너지가 변한다. Δt 동안에 계의 에너지 변화(ΔE)가 일 때, 힘(외력)의 일률은

$$\text{평균일률: } P_{\text{avg}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (\text{단위: } W = \text{J/s})$$

$$\text{순간일률: } P = \frac{dE}{dt}$$

Physics 1 34

어느 경로로 가는 것이 가장 빨리 도달하는가?



The acceleration due to gravity is down, approximately constant, and equal for both tracks.

