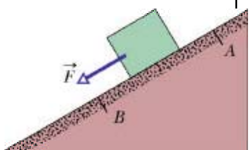
Chapter 9. Center of Mass and Linear Momentum

New Stuff

- 지금까지 다루어진 물체들은 매우 단순한 형태로 이상화시킬 수 것들만 취급함.
  - 점입자(질점): 질량만 있고 크기를 고려할 필요가 없음
  - 대칭적인 물체: 점입자로 잘 근사됨.



- 이제부터는 좀 더 복잡한 물리계에 뉴턴의 법칙을 적용할 것임.
  - 문제가 되는 점: F = ma 에서 a는 물체의 어느 지점의 가속도?
  - 즉, 크기가 있는 물체를 대표하는 지점은 어디를 의미하는가? 질량중심(Center of Mass: CM)
    - Chap 9.10에서 취급함
    - 크기가 있는 물체의 일반적인 운동 = CM-병진 + 회전 + (내부진동)
- 새로운 원리: 운동량 보존

물체의 질량분포가 단순하지 않기 때문에 복잡해짐.

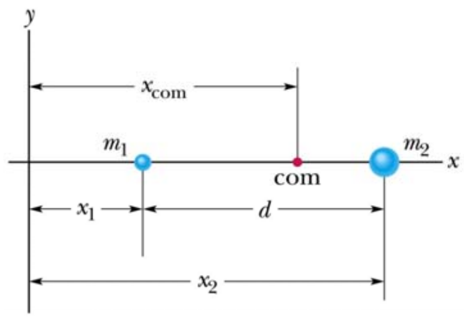
질량중심 (Center of Mass, CM)

- 정의: 물체(=입자계)를 구성하는 질량의 평균 위치를 나타낸다
  - 크기가 있는 물체에서 CM은 모든 질량이 그 지점에 뭉쳐있는 것처럼 움직이는 위치다 ~ 대략적인 물체의 위치

• (1차원) 입자 두 개로 구성된 계의 질량중심:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

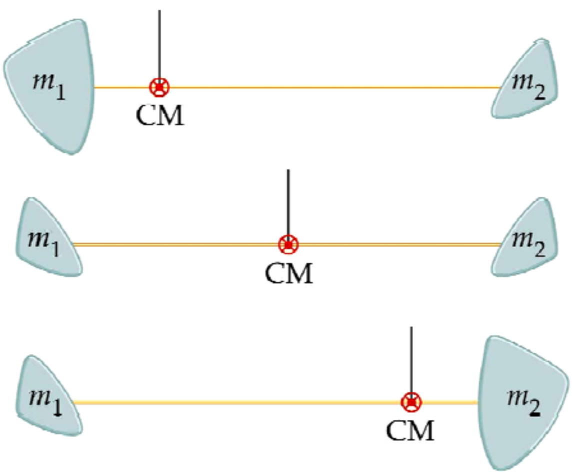
$-CM$ 은 무거운 입자 쪽에 더 가깝다.

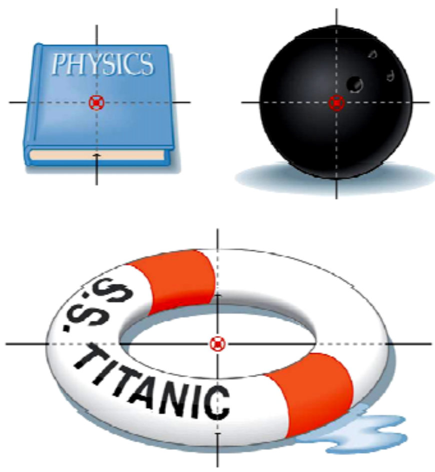


• (1차원) 입자 n 개로 구성된 계의 질량중심:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + x_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{총질량}$$

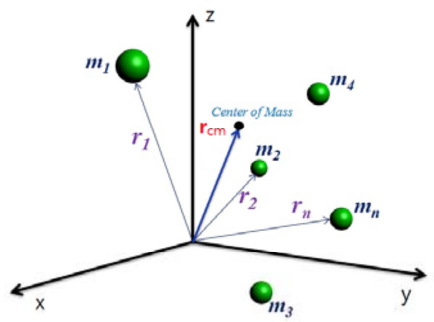




☞ CM은 물체의 내부에 있을 필요는 없다: 튜브

- ✓ 질량을 가중치로 한 평균위치 ~ 질량이 큰 쪽에 가까운 곳에 위치함
- ✓ CM이 알려진 두 물체의 CM은 각 물체를 질량중심에 모든 질량이 뭉친 점입자로 고려한 후 구한 CM 위치와 같다.

질량중심 : 입자계



- (3차원) 입자 n 개로 구성된 계:

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{전체질량}$$

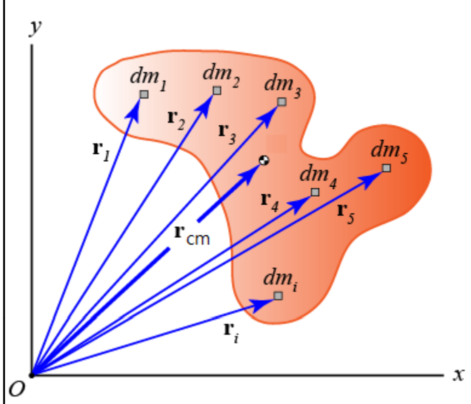
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}) = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

질량중심 : 연속적인 질량 분포



물체를 미소조각 (dm_i, i=1, 2, 3,..., n) 으로 나눈 후, 각 조각을 입자로 취급하여 CM을 구한 후 극한을 취한다 : 구분구적법 원리

- 물질이 연속으로 분포할 때 (고체): $\sum \rightarrow \int$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \longrightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

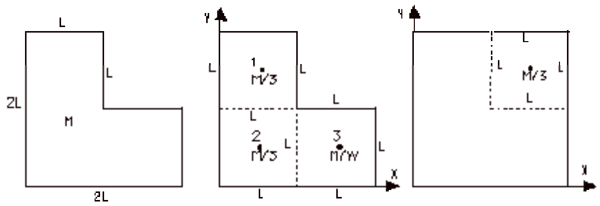
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \longrightarrow y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \longrightarrow z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \longrightarrow M = \int dm$$

미적분학2를 다 배우고 나면 이 적분은 계산할 수 있게 된다...

질량중심을 구하는 방법



Q. 왼쪽 그림처럼 생긴 판의 질량중심을 구하라

적분을 몰라도 구할 수 있다…

- ❖ 방법1: 가운데 그림처럼 3개의 같은 조각으로 나누고, 각 조각의 질량중심은 쉽게 구할 수 있으므로, 이 세조각에 의한 질량중심을 구하면 된다.
- ❖ 방법2: 3번째 그림처럼 오른쪽-상단부의 조각이 있으면 한 변의 길이가 2L인 온전한 정사각형이 된다(그리고 이 정사각형의 질량중심은 쉽게 안다). 이 정사각형의 질량중심은 원래도형과 추가된 도형(이 도형의 질량중심도 쉽다)에 의한 질량중심이라는 사실을 이용하면 된다.

구멍 뚫린 원판의 CM

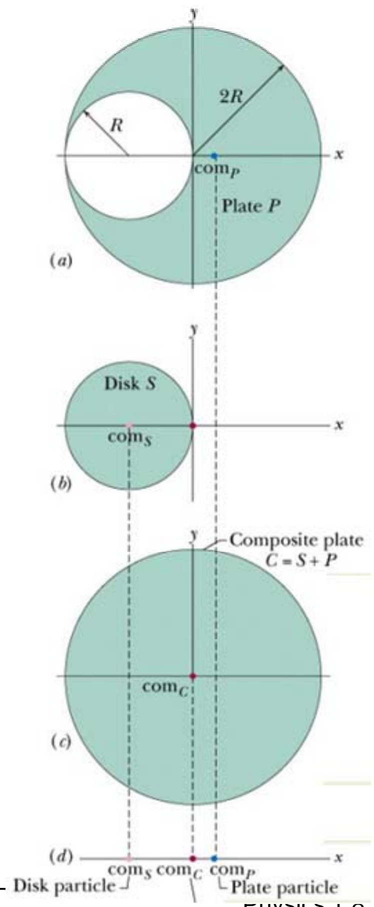
- 균일한 원판의 질량 중심 = 원판중심 → 자명
- 구멍난 원판 + 구멍 부분원판 = 온전한 원판
- 위-아래 대칭때문에 → $y_{CM} = 0$

$$\begin{cases} x_P = \text{구멍난 원판 } x_{CM} = ? \\ x_S = \text{구멍부분 원판 } x_{CM} = -R \\ x_C = \text{온전한 원판 } x_{CM} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_C = \frac{x_P m_P + x_S m_S}{m_S + m_P} = 0 \rightarrow \boxed{x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P}}$$

$$\text{note, } \frac{m_S}{m_P} = \frac{S\ area}{P\ area} = \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P} = -(-R)\frac{1}{3} = \frac{R}{3}$$



길이가 L이고 질량이 M인 막대의 질량중심 위치는?

질량중심은 자명하지만, 그래도 적분을 써서 구하자

∘미소질량(dm)을 위치(x)와 미소길이(dx)로 표현하자

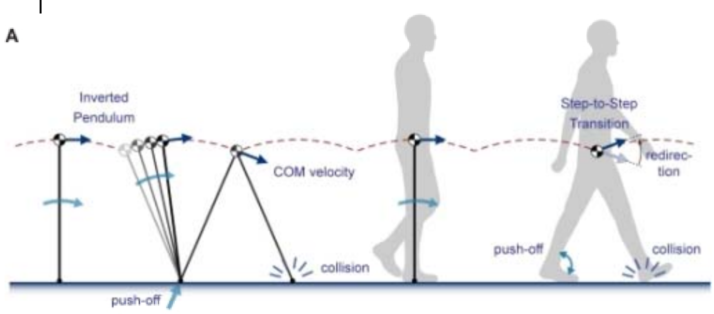
dx 부분의 질량은? 균일한 질량분포이므로 길이에 비례함;

$$dm : M = dx : L \rightarrow \boxed{dm = \left(\frac{M}{L}\right)dx}$$

$$\therefore x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\frac{M}{L}dx = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \left.\frac{x^2}{2L}\right|_0^L = \frac{L}{2}$$

질량중심 속도 및 가속도

계를 구성하는 입자가 운동을 하면 (물체가 움직이면) 계의 질량중심도 움직인다. 질량중심의 속도를 변화시키는 힘은 무엇인가?



• 질량중심이 움직이는 속도:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i, \quad M = \text{전체질량}$$

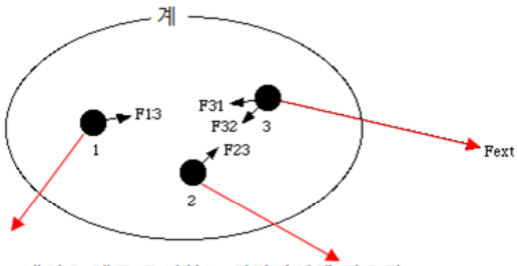
$$\Rightarrow \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$$

• 질량중심이 움직이는 가속도:

$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_i (i-\text{번째 입자가 받는 힘}) = \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}_i$$

입자계 운동에 관한 Newton의 제 2법칙

- 입자계에서 각 입자가 받는 힘 = **내력**과 **외력**으로 구별됨
  - ❖ **내력** = F_{ij} : 계의 다른 구성입자로부터 받는 힘
    - ➢ 보통 내력은 입자의 사이 간격을 일정하게 유지하는데 필요함
    - ➢ 내력의 반작용은 다른 입자가 받는 내력이 된다.
  - ❖ **외력** = F_{ext} :계의 다른 구성입자와 무관한 외부에서 받는 힘



내력은 계를 구성하는 입자사이에 작용과 반작용의 대상이 있다. 외력의 반작용은 계 밖의 대상이 받는다.

• i – 번째 입자가 받는 힘

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,외력} + \vec{F}_{i,내력}$$

• 입자계가 받는 전체힘:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{i,외력} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,내력}}_{=0} = \sum_i \vec{F}_{i,외력} = \boxed{\vec{F}_{외력}}$$

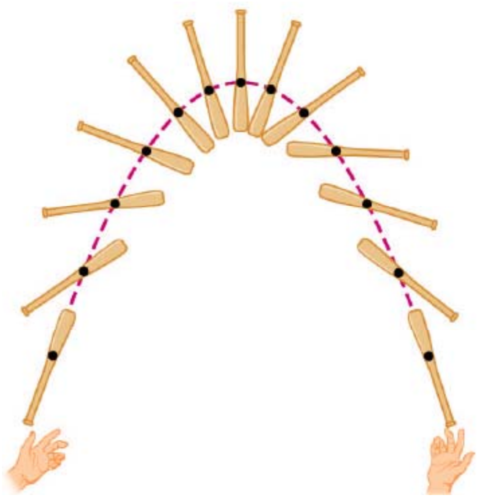
• *Note* :

$$\vec{F}_{3,내력} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

$$\therefore M\,\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{외력}$$

입자계의 CM 은 질량 M 인 점입자가 $\vec{F}_{외력}$ 를 받을 때운동과 동일하다 (내력에 무관)

Extended body: Center of mass obeys F = ma (like point particle)



$$\therefore M\,\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{외력}$$

물체의 CM 은 질량 M 인 점입자가 $\vec{F}_{외력}$ 를 받을 때운동과 동일하다 (내력에 무관)

- 물체의 각 부분의 움직임을 분석하는 것은 매우 복잡하다(내력을 알아야 함)
- 그러나 물체의 질량중심의 운동은 복잡한 내력을 알 필요가 없이 물체에 작용하는 외력만 알고 있으면 된다

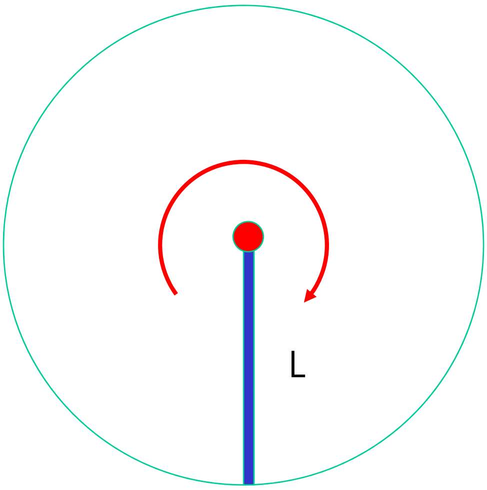
야구방망이 질량중심의 가속도

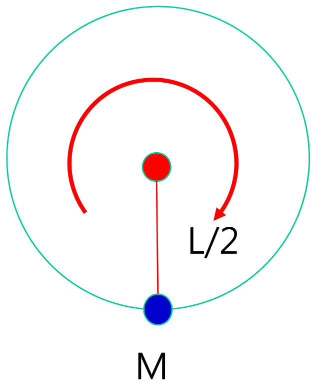
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{총외력}}{M} = \frac{Mg\,\hat{j}}{M} = g\,\hat{j}$$

$\Rightarrow$ 질량중심은 포물체 운동을 한다

길이 L, 질량 M인 막대가 회전할 때 회전축에 걸리는 힘의 크기는? (중력은 일단 무시하자)

- 회전축에 걸리는 힘이 막대에 작용하는 외력이다.
- 막대의 질량중심이 원운동하므로 이 외력이 구심력 역할을 한다
- 막대의 질량중심은 회전축에서 L/2 인 지점에 있다.





그래서 회전축에 걸리는 힘?

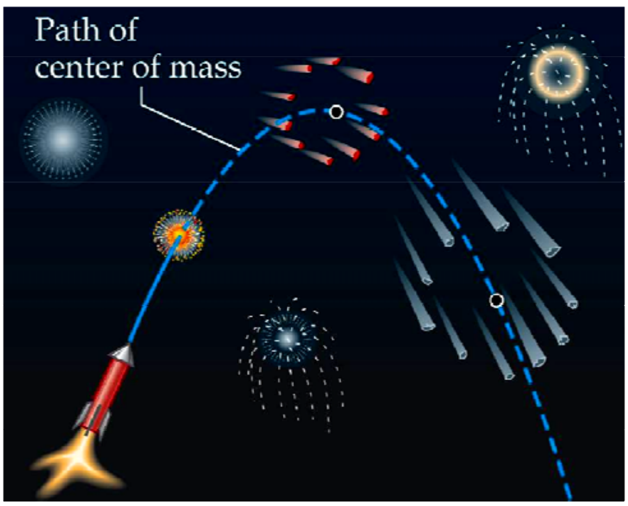
Ex. 질량중심의 운동

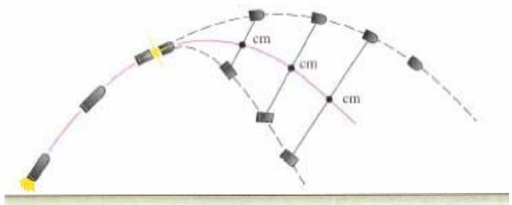
$$\bullet \text{폭발전: 폭죽(입자계)에 작용하는 외력: } F_{net} = -Mg\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow CM\text{-운동방정식:} M\,\vec{a}_{CM} = -Mg\,\hat{j} \Rightarrow \text{포물체 운동}$$

$$\bullet \text{폭발 후: 화약의 힘} = \text{내력} \longrightarrow CM \text{ 의 운동은 영향을 안 받음}$$

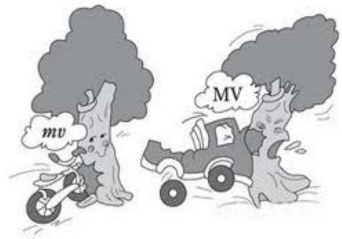
$$\Rightarrow \text{폭발 후 } CM \text{ 은 여전히 포물체 운동}$$





선운동량 (Linear Momentum)

- 물체가 무거울수록 속도를 바꾸기 위해서 더 큰 힘이 필요하고, 또 속도의 변화가 클수록 더 큰 힘이 요구된다. 따라서 (질량)x(속도)에 물리적인 의미를 부여할 수 있다

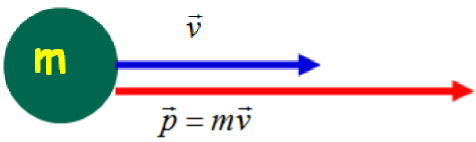


- 질량 m, 속도 **v**인 입자의 (선)운동량:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (\text{단위}: \text{kg.m/s})$$

$$\text{벡터임} \quad \begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \\ p_z = mv_z \end{cases}$$

양자물리에서는 운동량이 속도보다 더 기본적인 물리량



- 뉴턴의 제2법칙을 다시 쓰면

$$\boxed{\vec{F}_{net} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

: 물체에 작용한 힘이 운동량을 변화시킴

$$-\begin{cases} \vec{F}_{net} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \text{보다 더 일반적인 표현임} \\ \text{질량이 시간에 따라 변하는 경우도 적용} \end{cases}$$

입자계의 선운동량

- n-개의 입자로 구성된 계의 총 선운동량:

- 총선운동량 = 구성입자의 운동량 합

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\,\vec{v}_{CM}$$

; 총선운동량 = (총질량)×(질량중심 속도)

- 입자계 운동방정식: we already showed $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{외력}}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{P} = M\,\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{\text{외력}}}$$

∴ 입자계에 $\boxed{\text{외력}}$이 작용하면 $\boxed{\text{총선운동량}}$이 변한다

$(\vec{F}_{\text{외력}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} \neq \text{일정}$: 내력은 무관)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{외력}$$

선운동량 보존법칙

- 고립된 입자계(isolated system)의 선운동량
  - "고립" ⇔ 외력 = 0

$$\boxed{외력\left(\vec{F}_{외력}\right)=0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}=0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{총선운동량 : \vec{P} = \sum \vec{p}_i = \text{const}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}$$

외력이 작용하지 않는 고립계의 총선운동량은 보존된다

- 운동량은 벡터이므로 성분별로 성립한다

$\boxed{\text{외력성분이 없는 방향의 총선운동량은 보존된다}}$

$$F_{외력,x} = 0 \longrightarrow x-방향\ 총선운동량\ 보존$$

$$F_{외력,y} = 0 \longrightarrow y-방향\ 총선운동량\ 보존$$

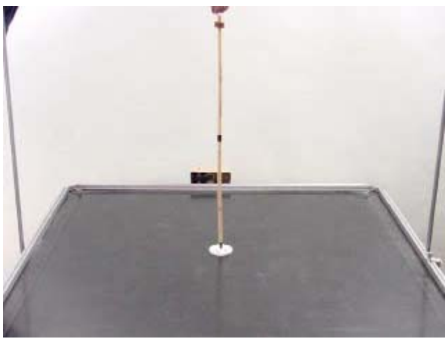
$$F_{외력,z} = 0 \longrightarrow z-방향\ 총선운동량\ 보존$$

서 있는 막대의 질량중심 운동

- $y-$방향으로 $F_{외력,y}$ = 중력이 작용 ⇒ 복잡함

But, $\boxed{F_{외력,x}=0}$ ⇒ 막대가 쓰러지는 동안 : $P_x = \text{const}$

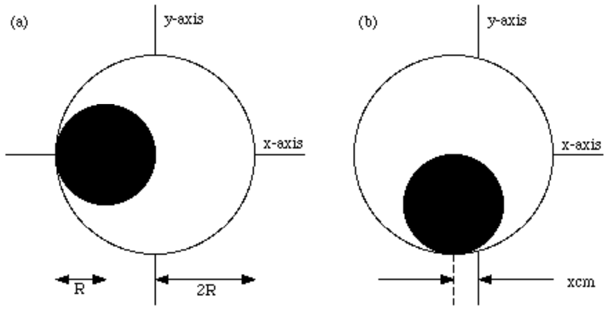
$$\xrightarrow{처음\ 정지(P_x=0)} v_{CM,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{CM} = \text{const}}$$



실험에 바닥은 공기테이블로 구성이 되어 막대의 밑부분이 받는 마찰이 없도록 하였다

두 공의 최종위치는?

A ball of mass m and radius R is placed inside a spherical shell of the same mass m and inner radius 2R. The ball is released and moves back and forth before coming to rest at the bottom of the shell. What is the displacement of the system ? (외부마찰 없음, 내부마찰=내력 있음)



- $F_{외력,y} \neq 0$ 이 있어 복잡함 :

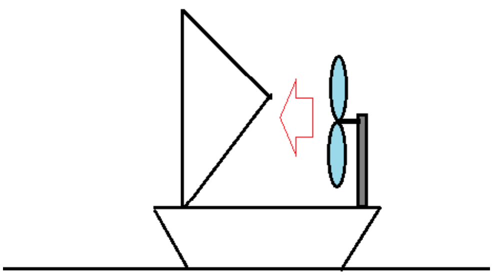
  그러나, $F_{외력,x} = 0 \rightarrow v_{CM,x} =$ 일정

  나중에 정지$(v_{CM,x} = 0) \longrightarrow x_{CM} =$ 일정

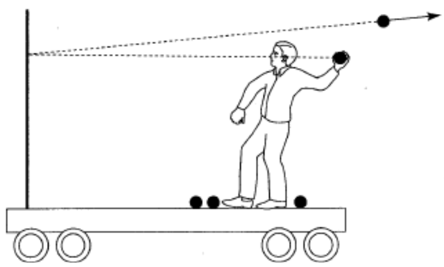
- 처음 : $x_{외부구} = 0;\ x_{내부구} = -R$

$$x_{CM} = \frac{m x_{외부구} + m x_{내부구}}{m+m} = -\tfrac{1}{2}R$$

선풍기로 배를 움직이게 할 수 있는가?



Suppose you are on a cart, initially at rest on a track with very little friction. You throw balls at a partition that is rigidly mounted on the cart. If the balls bounce straight back as shown in the figure, is the cart put in motion?



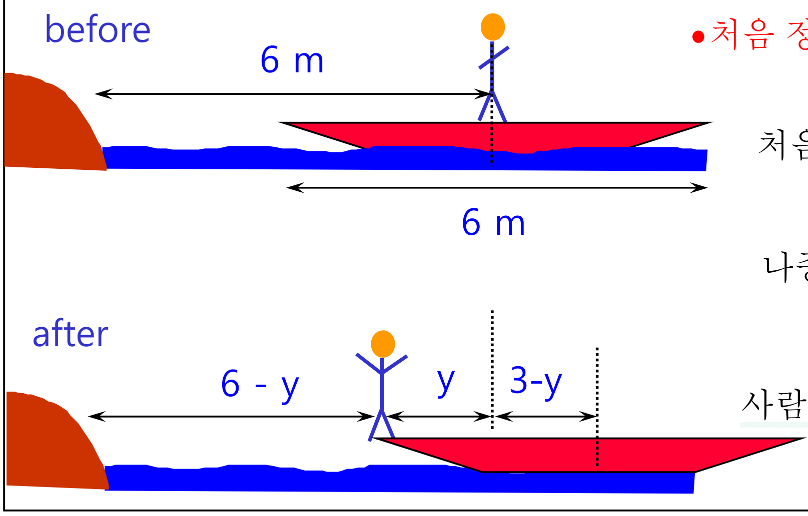
1. Yes, it moves to the right.
2. Yes, it moves to the left.
3. No, it remains in place.

Question

A woman weighs exactly as much as her 6 m long boat. Initially she stands in the center of the motionless boat, a distance of 6 m from shore. Next she walks toward the shore until she gets to the end of the boat. What is her new distance from the shore. (There is no horizontal force on the boat by the water).

• 계: 보트 – 사람,
외력 = 0 ⇒ 총운동량 보존(수평)

• 처음 정지 $(v_{CM} = 0) \Rightarrow x_{CM} =$ 일정



$$\text{처음}: x_{CM} = \frac{(M)(6) + (M)(6)}{M + M} = 6\ \mathrm{m}$$

$$\text{나중}: x_{CM} = \frac{(M)(6-y) + (M)(9-y)}{M + M}$$

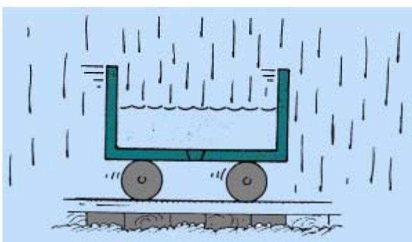
$$\therefore y \overset{?}{=} 1.5\,\mathrm{m}$$

사람은 해변에서 $6 - y = 4.5m$ 떨어짐

Question

지붕이 없는 열차가 지면에 수직으로 쏟아지는 빗속을 미끄러지고 있다(마찰은 무시한다). 다음 중 열차의 어떤 물리량이 변하지 않는가?

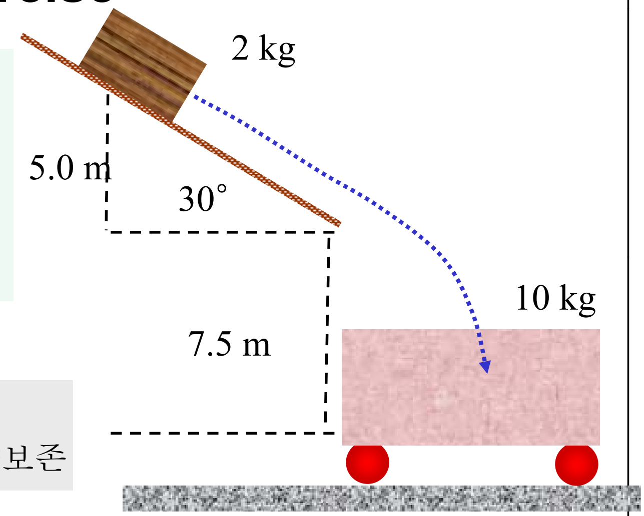
① 속도
② 운동량
③ 운동에너지
④ 이 중에 없다



Exercise

Let a 2 kg block start at rest on a 30° incline and slide vertically a distance 5.0 m and fall a distance 7.5 m into the 10 kg cart (경사면 마찰, 수레바퀴 마찰은 무시)

What is the final velocity of the cart?



• 경사면 끝에서 떨어진 다음부터:

$\text{box}-\text{cart}\,계: F_{외력,x}=0 \longrightarrow x-방향\ 운동량보존$

• 경사면 끝에서 box의 x–방향 속도성분:

$v_x(\text{box})=\sqrt{2gh}\cos 30°=\sqrt{(2)(9.8)(5)}\cos 30°=8.57\text{m/s}$

$\longrightarrow$ cart와 충돌 직전의 box의 x–방향 속도성분

• 충돌 전: $P_x=p_x(\text{box})+p_x(\text{cart})=(2\text{kg})(8.57\text{m/s})+(10\text{kg})(0)$

• 충돌 후(같이 움직임): $P'_x=(2\text{kg}+10\text{kg})V \longrightarrow V=1.43\text{m/s}$

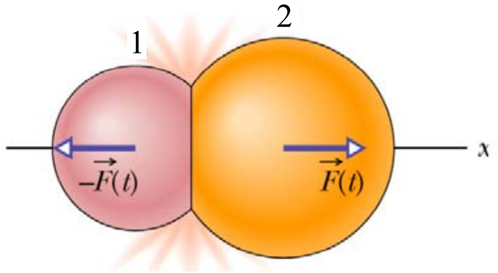
*왜 같이 움직이는가?
상자가 카트에 떨어지면 카트 바닥면과 마찰 때문임

충돌

- 충돌의 정의: 둘 이상의 물체가 순간적으로 큰 힘을 주고 받아 속도가 급격히 변하는 운동과정
  - 충돌과정에서 작용하는 내력은 매우 복잡하게 작용한다. 충돌 물체 개별의 운동을 분석하기 어렵다.
- 충돌의 기본문제:
  - 충돌한 뒤의 운동상태?
  - 충돌과정에서 주고받는 힘?
- 충돌 문제 풀이에 쓰는 도구
  - 보존법칙 (에너지, 선 운동량, 각 운동량)
  - 충돌 전후:
    - 총 선운동량 보존
    - 탄성충돌 전후: 선운동량 보존 + 운동에너지 보존
    - 비탄성충돌 전후: 선운동량 보존 (운동에너지가 보존 안됨)
      - 충돌은 짧은 시간에 일어나므로 위치에너지 변화는 대부분 무시함.

Collision

총운동량:
$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}(t)$
$\vec{F}_{21} = \vec{F}(t)$

왜 총운동량이 보존되는가?

- 충돌 현상이 일어나면 → 힘이 작용한다

$$\text{힘} = \begin{cases} \text{내력} = \text{충돌에 참여하는 물체끼리의 힘} \\ \text{외력} = \text{각 물체에 작용하는 외부힘} \end{cases}$$

- 운동량 – 충격량 정리:

물체1: $(\underbrace{\vec{F}_{ext,1}}_{\text{외력}} + \underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{내력}})\Delta t = \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i}$

물체2: $(\underbrace{\vec{F}_{ext,2}}_{\text{외력}} + \underbrace{\vec{F}_{21}}_{\text{내력}})\Delta t = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}$

$$\Rightarrow (F_{ext,1} + F_{ext,2} + F_{12} + F_{21})\Delta t$$
$$= (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) - (\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}) = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

- 내력은 서로 상쇄:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (작용 – 반작용)

$\Rightarrow \vec{F}_{ext}\Delta t = \vec{P}_f - \vec{P}_i$

If $\vec{F}_{ext} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}$:

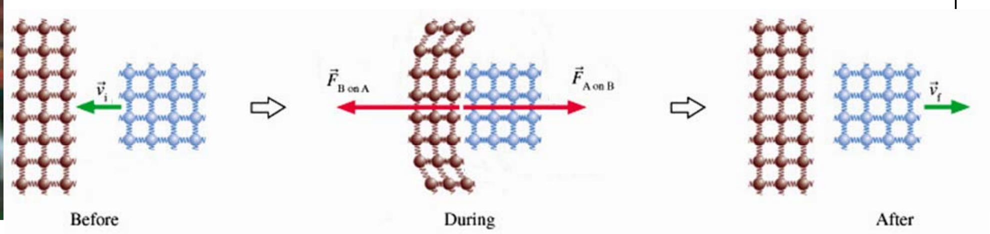
or $\boxed{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}$

;총운동량 보존

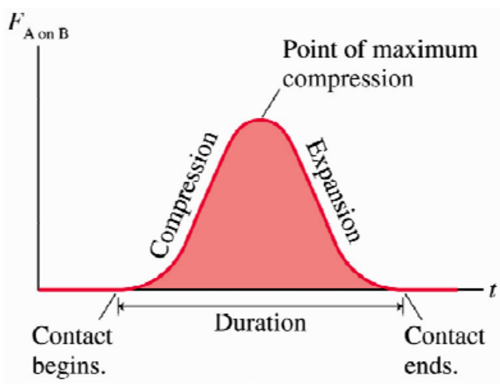
대부분의 경우 충돌은 매우 짧은 순간에 일어나서 외력이 있더라도 무시할 수 있음

Momentum and Impulse

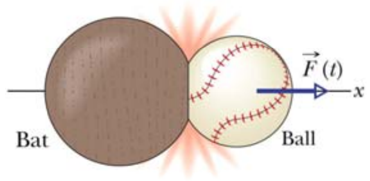
Microscopic view of a "bounce".



충돌과정에서 A가 B에 준 힘



충격량(impluse)



충돌과정에서 개별 물체의 운동량의 변화는?

• 충돌과정에서 $(t, t+dt)$ 동안 공의 운동량 변화:

뉴턴법칙 : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \;\;\Rightarrow\;\; d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$

$\Rightarrow \quad \int_i^f d\vec{p} = \int_i^f \vec{F}(t)dt = (F-t\ graph$ 면적)

let, $J \equiv \int_i^f \vec{F}(t)dt$: 충격량 (단위: N.s = kg.m/s)

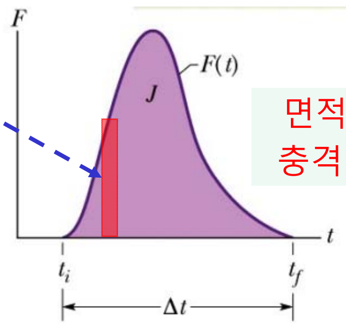
• 운동량 – 충격량 정리:

$\boxed{\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J}}$ or $\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{J}}$

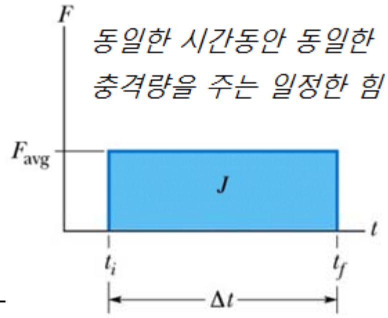
• 평균힘 정의: $\boxed{\vec{J} = \vec{F}_{avg}\Delta t}$

$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}_{avg}\,\Delta t}$

;평균힘이 클수록, 힘을 받는 시간이 길수록
운동량 변화가 크다



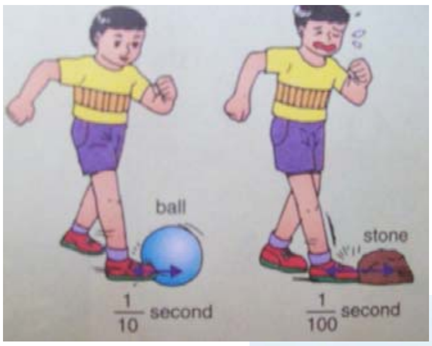
면적=
충격량

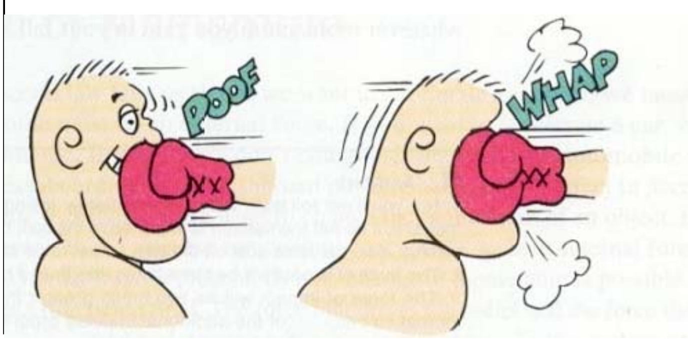


$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{avg}\,\Delta t$$

물체를 정지시킬 때 $(\Delta p = \text{fixed})$ 힘(고통)을

덜 받기위해선 $\boxed{\Delta t \text{ 를 길게}}$ 한다.





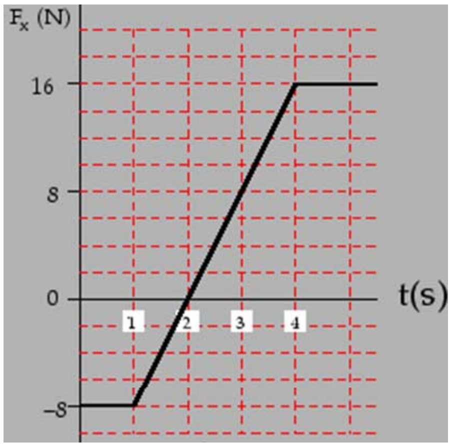
Question: 변하는 힘-충격량

- 2.0 kg 물체에 작용하는 유일한 힘이 x-방향이고, 시간에 따라 그림처럼 주어진다.
- t = 0초에서 물체의 v_x = +2.0 m/s 이면, t = 4.0초 일 때 v_x ?

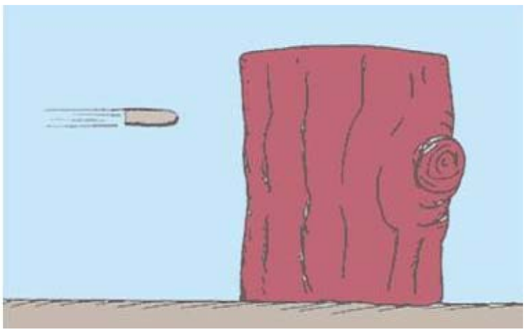
$\bullet F_x - t$ 그래프 면적 = 충격량

$$\Delta p_x = J_{0,1} + J_{1,2} + J_{2,4}$$
$$= (-8N)(1s) + \tfrac{1}{2}(-8N)(1s) + \tfrac{1}{2}(16N)(2s)$$
$$= 4N.s$$

$$\therefore \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{4\text{N.s}}{2\text{kg}} = 2\text{m/s}$$
$$\Rightarrow v_x(t=4s) = v_{0x} + 2 = 4\text{m/s}$$

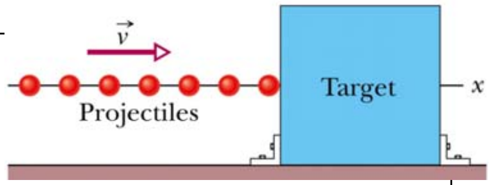


같은 질량, 같은 속도로 고무탄환과 알루미늄 탄환을 나무토막에 쏘았을 때



1. 나무토막을 더 잘 넘어뜨릴 수 있는 탄환은?
2. 나무토막에 더 많은 손상을 입힐 수 있는 탄환은?(알류미늄 탄환은 나무에 박힌다)

연속충돌



총알이 물체에 부딪치면 힘을 받아 운동량이 변한다. 총알의 운동량 변화를 알면 물체가 얼마의 힘을 받는지 알 수 있다

- $\Delta\vec{p}$ = 개별 총알의 운동량 변화

$\Rightarrow$ 목표물이 받는 총충격량:

$$\vec{J} = n \times (-\Delta\vec{p}) = -n\Delta\vec{p}$$

- n-회 충돌이 Δt 동안 일어나면:

$\Rightarrow$ 목표물이 받는 평균힘:

$$\vec{F}_{avg} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = -\frac{n\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\frac{n(m\Delta\vec{v})}{\Delta t} = -\frac{nm}{\Delta t}\Delta\vec{v}$$

- let $\Delta m = nm$ = Δt 초 동안 충돌한 총총알 질량

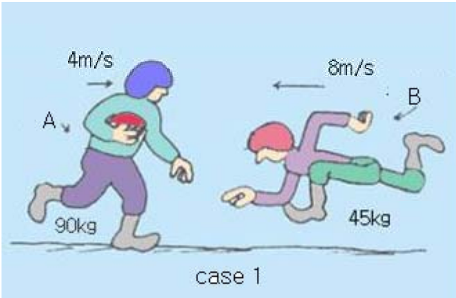
$$\vec{F}_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta\vec{v} = -(\text{매초 충돌하는 질량}) \times (\text{총알 속도변화})$$

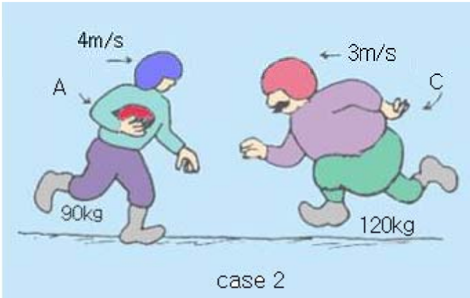
- 충돌 후 총알 정지: $\Delta\vec{v} = 0 - \vec{v} \longrightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{avg}} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}}$
- 탄성충돌하는 총알 : $\Delta\vec{v} = (-\vec{v}) - \vec{v} = -2\vec{v} \longrightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{avg}} = 2\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}}$

$\Rightarrow$ 탄성충돌일 때 목표물은 더 큰 힘을 받음

A person stands under an umbrella during a rain shower. A few minutes later the rain drops turn to hail-though the number of "drops" hitting the umbrella per time and the speed remains the same. Is the force required to hold the umbrella in the hail (a) the same as (b) more than, or (c) less than the force required in the rain?

Question





Q. 두 사람이 충돌한 후 A가 정지하는 쪽은?

1) case 1 2) case 2 3) both

Q. 두 사람이 충돌한 후 A의 뼈가 부러질 확률이 높은 쪽은?

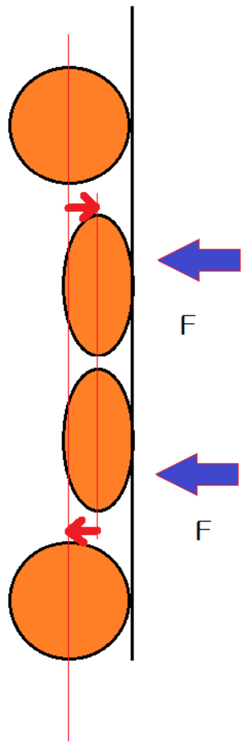
1) case 1 2) case 2 3) both

동일한 힘으로 물체를 정지시킬 때, 운동에너지가 클수록 정지하는데 필요한 거리가 크다(F.d = ΔK)

공이 벽에 탄성충돌할 때 왜 운동에너지는 변화지 않을까?

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \neq 0$$

$$\Delta K = W_{net} = 0$$



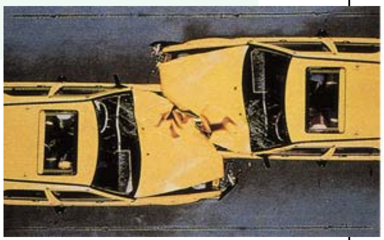
벽에 접근: 공은 음의 일을 받음 -> 운동에너지 감소;

벽서 후퇴: 공은 양의 일을 받음 -> 운동에너지 증가

알짜일 = 0

1차원 완전비탄성 충돌

- 정지한 나무블록(M)에 총알(m)이 v 속도로 수평으로 날아와서 박힌 후 함께 앞으로 V 속도로 움직였다.
  - 1차원 문제이므로 벡터기호를 쓸 필요는 없다!



- 운동량이 보존된다:

$$mv + 0 = (m+M)V$$

$$\Rightarrow \text{충돌 후 속도}: V = \frac{m}{m+M}v$$

- 충돌 전 KE: $\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2$
- 충돌 후 KE: $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}$

- 블록의 운동에너지 → 감소

$$\Rightarrow \Delta K = -\frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) < 0$$

충돌과정에서 CM의 속도

- 충돌과정에서 총 운동량 보존은 충돌하는 물체들의 질량중심이 움직이는 속도가 일정함을 의미한다 ($P= M_{tot}\, v_{cm}$)
  - 외력이 작용하지 않는다.

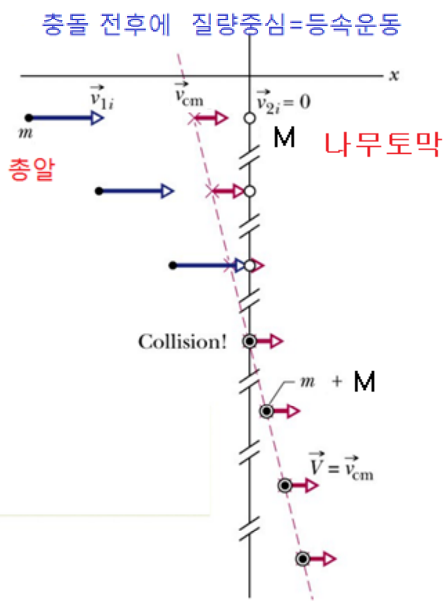
- 총알 (m) – 나무토막 (M) 의 CM – 속도:

$$\text{총운동량} = \vec{P} = M_{tot}\vec{v}_{CM} = (m+M)\vec{v}_{CM}$$

$$= \text{일정}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{m+M} = \text{일정}$$

$$\therefore \boxed{CM - \text{운동}: \text{등속운동}}$$

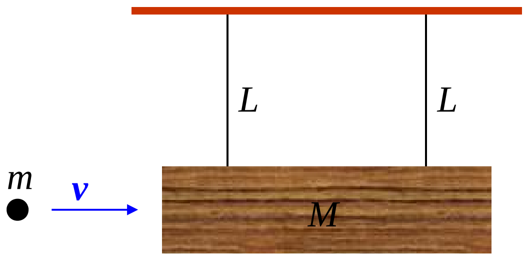


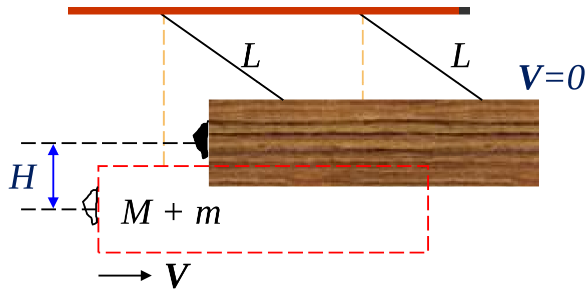
Note: 완전비탄성 충돌에서

질량중심 속도 = 충돌 후 두 물체 속도

충돌진자 : 총알의 속도를 측정

속도 v로 발사된 총알(m)이 진자(M)에 박혔다. 총알이 박힌 진자는 H 높이까지 올라간다. 총알의 발사속도 v는?





• 충돌 직전 – 직후 : 운동량보존

$$x-dir : 0+mv=(m+M)V$$

$$\rightarrow v=\frac{m+M}{m}V$$

• 충돌 후 진자운동 ⇒ 역학적 에너지 보존

$$\tfrac{1}{2}(m+M)V^2+0=0+(m=M)gH$$

$$\rightarrow V=\sqrt{2gH}$$

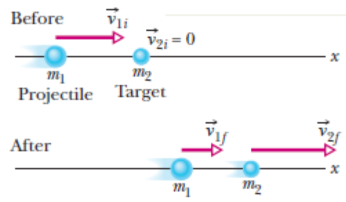
• 충돌과정 : 완전비탄성 충돌

(충돌은 순간적으로 일어나야 한다. Why?)

?

$$\therefore \text{총알속도} : v=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gH}$$

1차원 탄성충돌



- 정지한 물체에 충돌한 경우 ($v_{2i}=0$) :
  - 미지수: v_{1f}, v_{2f}

• $COM: m_1v_{1i}+0=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$

• $COE: \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+0=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$

$$\therefore \boxed{v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i},\quad v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}}$$

(1) 같은 질량($m_1=m_2$):

$v_{1f}=0$(정지), $v_{2f}=v_{1i}$

: 운동량과 에너지를 완전히 전달.

ex. 당구공 정면충돌,

원자로 감속재 원리

(2) 매우 무거운 물체에 충돌 : $m_1<<m_2$

$v_{1f}\approx -v_{1i}$: 반대로 떵겨나옴.

$v_{2f}\approx \frac{2m_1}{m_2}v_{1i}$: 매우 작은 속도.

ex. 티코가 대형트럭에 충돌 :

(3) 매우 가벼운 물체와 충돌 : $m_1>>m_2$

$v_{1f}\approx v_{2f}$: 충돌에 영향을 안 받음.

$v_{2f}\approx 2v_{2i}$: 2배 속도로 앞으로 나감

ex. 대형트럭이 티코에 충돌 ⇒ 위험

1차원 탄성 충돌

- 움직이는 물체(m_2)와 충돌:
  - 미지수 : v_{1f}, v_{2f}

$\bullet COM : m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

$\bullet COE : \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

•충돌후 $\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}, \\ v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$

•충돌전 CM속도: $v_{cm} \equiv \dfrac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$

•충돌후 CM속도: $v'_{cm} = \dfrac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}$

$\rightarrow \boxed{v'_{cm} = v_{cm}}$

(∵두 물체에 작용하는 외력이 없음

$P_{tot} = M v_{cm} =$ 일정 $\longrightarrow v_{cm} =$ 일정)

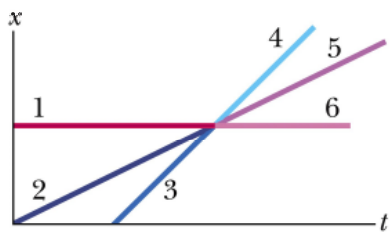
•충돌전 상대속도: $u \equiv v_{1i} - v_{2i}$

•충돌후 상대속도: $u' \equiv v_{1f} - v_{2f}$

$\rightarrow \boxed{u' = -u}$

;탄성충돌의 특징

탄성충돌을 하는 두 물체의 위치와 CM의 위치를 시간의 함수로 표현한 그래프다



1. 처음에 정지한 물체는?

2. 질량중심의 운동에 해당하는 그래프는?

3. 충돌 전 더 빠르게 움직인 물체는 다른 물체보다 더 무거운가?

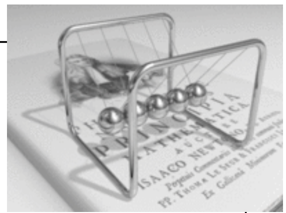
CM과 같이 움직이는 좌표계에서는 충돌현상의 분석이 좀 더 쉬워질 수 있다.

Problem

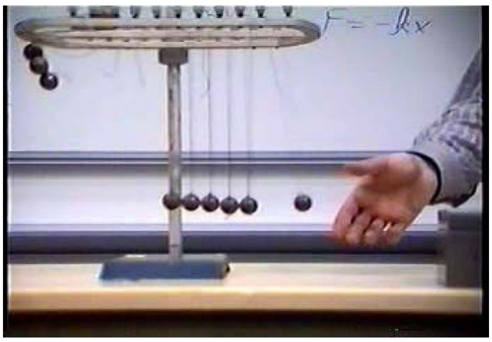
용수철로 연결된 정지한 두 공(B,C)에 같은 질량의 공이 v_A의 속도로 탄성충돌한다.

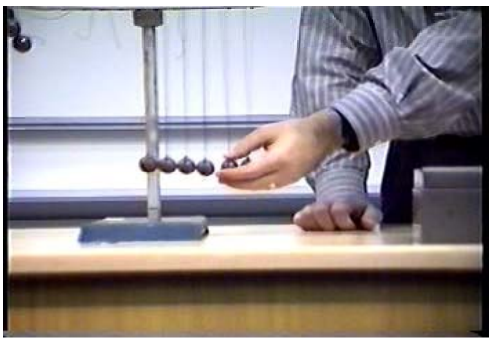
$\bullet\, A-B$의 충돌과정에서 용수철은 작용하지 않음;
탄성충돌이므로 충돌 직 후 : $A-$정지, B는 v_A로 움직임

$\bullet\, B$가 받은 운동량이 mv_A이고, $B-C$의 질량중심은
$v_{CM} = \dfrac{mv_A}{m+m} = \dfrac{1}{2}v_A$로 움직임;



Newton's Cradle





(거의) 탄성충돌임

Q. 두 개를 이용하는 경우, 충돌 후 왼쪽 공이 2개 올라가는 대신 하나가 2배의 속력으로 올라가는 것은 불가능한가?

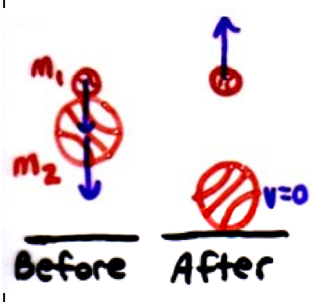
운동량 보존 :
$$mv + mv = m(2v)$$

에너지 보존 :
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv \neq \frac{1}{2}m(2v)^2$$

Why science teachers should not be given playground duty.

농구공 위의 테니스 공

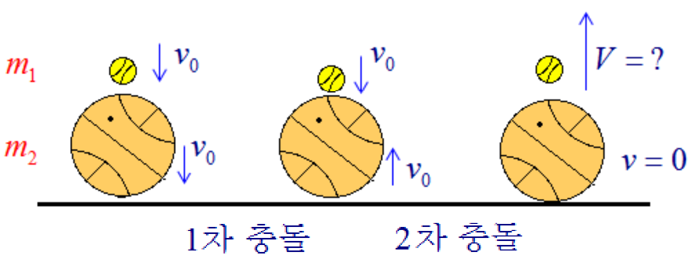
농구공과 테니스 공이 그림과 같이 (약간 떨어진 상태) 낙하시키는 경우 (충돌은 탄성충돌이라 가정함)



- 두 번의 충돌이 있다:

1. 같은 높이를 내려왔다 → 충돌 직전의 두 공 속도: $-v_0\hat{j}$
2. 충돌1: 농구공이 바닥에 $-v_0\hat{j}$로 충돌 후 $+v_0\hat{j}$ 튀어 오름
3. 충돌2: 테니스공($-v_0\hat{j}$)와 농구공($+v_0\hat{j}$)의 충돌

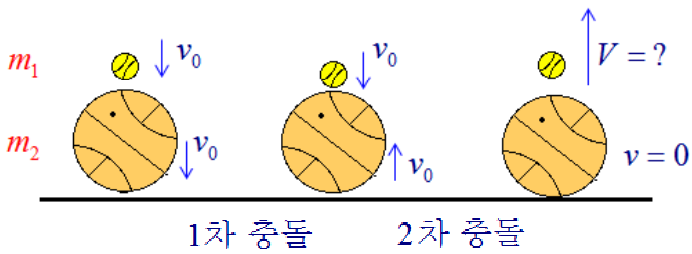
Question: 충돌2 직후 농구공이 멈출 조건은?



- Note:

충돌이 h만큼 낙하한 후 일어났다면: $v_0 = \sqrt{2gh}$

농구공 위의 테니스 공



• 2차 충돌과정에서:

Let 충돌 직후 테니스 공 속도 $= +V\,\hat{j}$ CM

$$\begin{cases} COM: m_2 v_0 + m_1(-v_0) = m_1 V + m_2 .0 \quad ...(1) \\ COE: \frac{1}{2} m_2 v_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 .0^2 ...(2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (1)\ V = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1} v_0 \\ (2)\ \boxed{m_2 = 3m_1} \end{cases}$$

$\rightarrow V = 2v_0$

• 테니스공 높이(바닥에서): ?

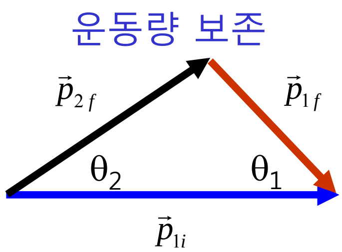
$$h = \frac{V^2}{2g} = 4 \times \frac{v_0^2}{2g} = 4h_0$$

2차원 탄성충돌 : 당구공 충돌

- 운동량 보존, 운동에너지 보존:
  - 미지수: v_{1fx}, v_{1fy}, v_{2fx}, v_{2fy}
- 정지한 물체에 충돌($\mathbf{v}_{2i}=0$):
  - 속력(v_{1i}, v_{1f}, v_{2f})과 각도(θ_1, θ_2)로 표현

$$\bullet COM \begin{cases} \text{x-dir}: \ m_1 v_{1i} + m_2 .0 = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ \text{y-dir}: \ m_1 .0 + m_2 .0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\bullet COE: \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 .0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$



▪방정식 3개, 미지수 4개 → undertermined!!

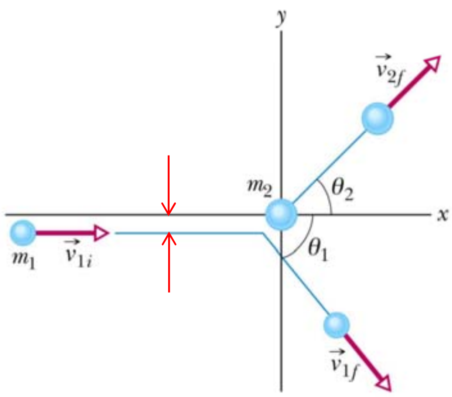
$$\bullet \text{if} \quad m_1 = m_2 = m$$

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m(\vec{v}_{1i})^2 = \frac{1}{2} m(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f})^2 = \frac{1}{2} m(v_{1f})^2 + \frac{1}{2} m(v_{2f})^2$$

$$\rightarrow \vec{v}_{1f} \bullet \vec{v}_{2f} = 0 \rightarrow \boxed{\theta_1 + \theta_2 = 90°}$$

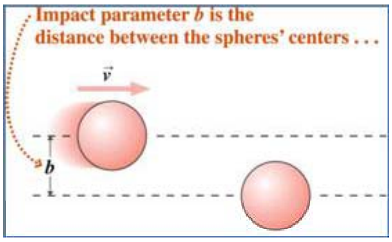
질량이 같으면 충돌 후 직각으로 나감



What is the missing information in 2-d elastic collision?

- 미지수는 4개 : 충돌 후 각 입자의 속도벡터
- 방정식: 운동량 보존→2개, 에너지 보존 1개
- 미결정 문제임...부족한 정보는?
- 뒤에서 배울 각운동량 보존법칙이 있다: 정지한 공에 대해서 입사구의 각운동량은 impact parameter인 b와 운동량에 의해서 결정된다.

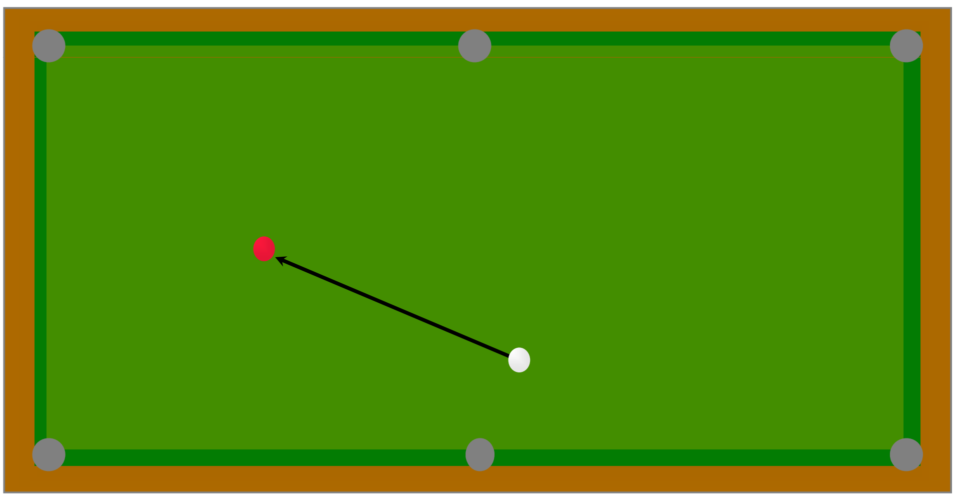
- 각운동량 보존 법칙까지 더 하면 2차원 탄성충돌문제는 완전하게 풀 수 있다.



Ex: Pool Shark

- 흰 공을 빠뜨리지 않고, 빨강 공을 포켓 안으로 밀어 넣을 수 있을까? (Ignore spin and friction)

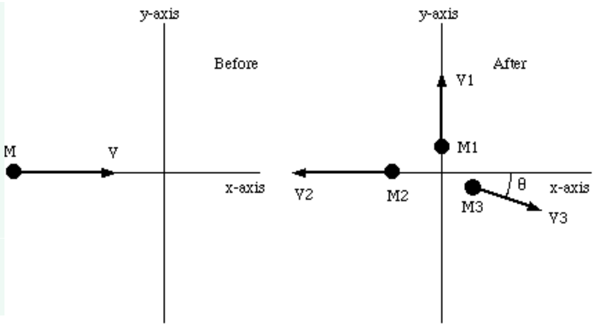
(A) Yes (B) No (C) More info needed



2차원 운동량 보존: Explosion

A 20 kg body is moving in the direction of the positive x-axis with a speed of 200 m/s when, owing to an internal explosion, it breaks into three parts. One part, whose mass is 10 kg, moves away from the point of explosion with a speed of 100 m/s along the positive y-axis. A second fragment, with a mass of 4 kg, moves along the negative x-axis with a speed of 500 m/s.

a). What is the speed of the third (6 kg) fragment ?



- 운동량 보존 적용

$$x : MV = m_3 v_3 \cos\theta_3 - m_2 v_2$$
$$y : 0 = m_1 v_1 - m_3 v_3 \sin\theta_3$$

- 에너지 손실(비탄성 과정)

$$\Delta E = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3 v_3^2 - \tfrac{1}{2} MV^2$$
$$= 3.23\text{MJ}$$

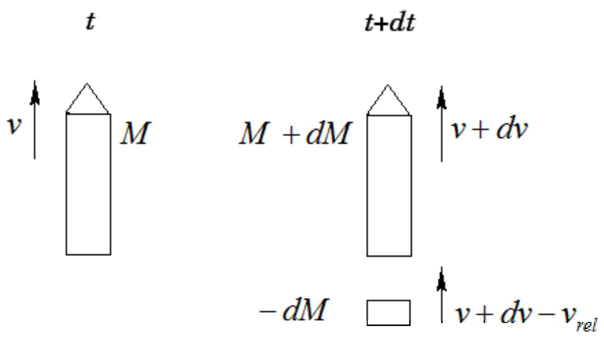
- θ_3을 소거하면;

$$(m_3 v_3)^2 = (MV + m_2 v_2)^2 + (m_1 v_1)^2$$
$$\rightarrow v_3 = 1014\text{m/s}$$

외력의 작용이 없으므로 CM은 폭발 전이나 폭발 후 일정하게 움직인다(x-축 방향).

질량이 변하는 계

- 로켓: 로켓과 뒤로 분사된 연료기체를 하나의 계로 생각 (왜: 로켓과 분사된 기체 사이에는 복잡한 힘 작용: 한 계로 생각하면 내력이 취급할 수 있어서 전체 운동량이 보존됨을 이용할 수 있음) → 로켓의 속도는?
  - 로켓은 기체분사로 질량이 변한다. 그러나 기체와 로켓의 총 운동량은 변함없다.
  - 로켓에 대해서 일정한 상대속도 v_{rel}로 기체를 분사하면, 로켓속도는 v 에서 $v+dv$ (지상기준)로 증가
  - 로켓의 질량변화를 dM (< 0)이라면, 분사된 가스의 질량은 $-dM$ (> 0).
  - 분사된 가스의 속도(지상기준) : $U = v + dv - v_{rel}$



$$\vec{U} = (v + dv - v_{rel})\hat{i}$$

- COM : P_i(분사 직전) $= P_f$(분사 직후)

$$\underbrace{Mv}_{\text{로켓}} = \underbrace{(-dM)U}_{\text{기체}} + \underbrace{(M+dM)(v+dv)}_{\text{로켓}}$$
$$= (-dM)(v + dv - v_{rel}) + (M+dM)(v+dv)$$
$$= -dMv_{rel} + Mv + Mdv$$

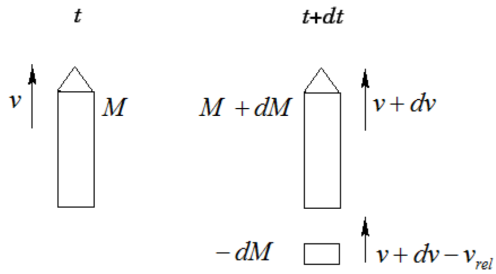
$$\Rightarrow -dMv_{rel} = Mdv$$
$$\therefore M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} v_{rel}$$

질량이 변하는 계

$$M\frac{dv}{dt}=-\frac{dM}{dt}v_{rel}$$

$=$(초당가스분출량)(가스상대속도)

로켓엔진 설계는 추력(thrust)=R 값과 v_{rel}를 조절하도록…



초당 가스 분출량(= thrust): $R\equiv -dM/dt\ (>0)$

$\Rightarrow$ 로켓방정식: $\boxed{M\frac{dv}{dt}=Rv_{rel}}$

- v 를 M 의 함수로:

$$dv=-v_{rel}\frac{dM}{M}\quad\Rightarrow\quad\int_i^f dv=-v_{rel}\int_i^f\frac{dM}{M}$$

$$\therefore v_f-v_i=v_{rel}\ln\frac{M_i}{M_f}$$

질량이 줄어들수록 속도가 빨라짐

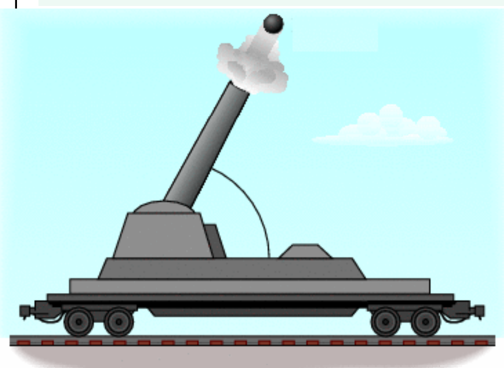
- If $M_i=M_{body}+m_{fuel}$,

$\rightarrow$ 연료소진: $M_f=M_{body}$

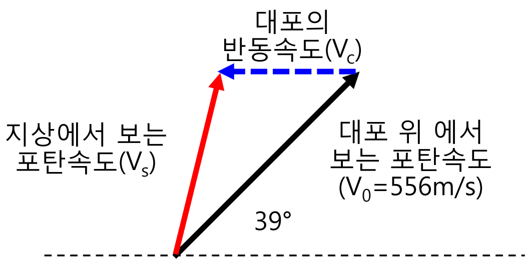
$$v_f-v_i=v_{rel}\ln\left(1+\frac{m_{fuel}}{M_{body}}\right)$$

* $v_{rel}<5000\text{m/s}$ Apollo

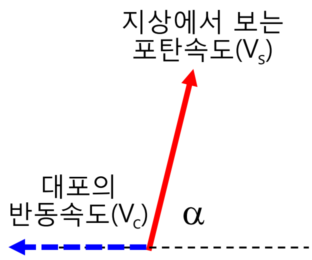
A 1400 kg cannon, which fires a 70 kg shell with a muzzle speed of 556 m/s, is set at an elevation of 39deg. above the horizontal. The cannon is mounted on frictionless rails, so that it recoils freely. (a) What is the speed of the shell with respect to the earth ? (b) At what angle with the ground is the shell projected ?



포탄이 포신 내부를 움직이는 동안, 대포는 뒤로 밀린다. 포탄이 포신에서 떠나는 순간, 대포에 대해서 39도로 출발하지만, 대포가 밀리므로 지상관찰자는 더 높은 고도로 발사되는 것처럼 보인다.



- 상대속도를 이용하면:



summary