Homework 4

3.3.2.

$$f : A \to B$$

가 증가하는 전단사 함수이므로, 증가함수의 정의에 의해

$$x \le y \implies f(x) \le f(y)$$

임은 자명하다.

여기서, f가 전단사함수이므로,

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

이고, 이는

$$x < y \implies f(x) < f(y) \tag{1}$$

이다.

이제 $f(x) \le f(y) \implies x \le y$임을 보이자.

pf. 대우명제인

$$x > y \implies f(x) > f(y)$$

를 보이는 것과 같은데, 이는 (1)에 의해 성립함을 안다. □

따라서,

$$x \le y \iff f(x) \le f(y)$$

이다.

3.3.6.

1. $\alpha \le \alpha$**을 보이자**

$$\alpha = \alpha$$

이므로 성립한다.

2. $(\alpha \le \beta) \wedge (\beta \le \alpha) \implies \alpha = \beta$**을 보이자**

$$\begin{aligned} &(\alpha \le \beta) \wedge (\beta \le \alpha) \\ \iff &((\alpha < \beta) \vee (\alpha = \beta)) \wedge ((\beta < \alpha) \vee (\beta = \alpha)) \end{aligned}$$

이다. 여기서, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ 중에서 오직 하나만 성립한 사실을 알면,

$$((\alpha < \beta) \vee (\alpha = \beta)) \wedge ((\beta < \alpha) \vee (\beta = \alpha)) \iff \alpha = \beta$$

임을 안다.

3. $(\alpha \le \beta) \wedge (\beta \le \gamma) \implies \alpha \le \gamma$**을 보이자**

$\alpha = \beta$이면, $\alpha = \beta \le \gamma$임을 알고,

$\beta = \gamma$이면, $\alpha \le \beta = \gamma$임을 안다.

따라서,

$$(\alpha < \beta) \wedge (\beta < \gamma) \implies \alpha \le \gamma$$

을 보이면 충분하다.

pf. $ord(A) = \alpha$, $ord(B) = \beta$, $ord(c) = \gamma$인 정렬집합 A, B, C를 생각하자.

$$\begin{aligned} &(\alpha < \beta) \wedge (\beta < \gamma) \\ \implies &(A\text{가 } B\text{의 절편과 순서동형}) \wedge (B\text{가 } C\text{의 절편과 순서동형}) \\ \implies &(A\text{가 } C\text{의 절편과 순서동형}) \\ \implies &\alpha < \gamma \implies \alpha \le \gamma \end{aligned}$$

이므로 성립한다.

결론. 1., 2., 3.이 성립하므로, 서수들 사이의 순서가 잘 정의됨을 안다. □

3.4.1.

1. $(g \circ f)((m, n)) = (m, n)$

$$f(m, n) = \frac{1}{2}\left[(m+n)^2 + 3m + n\right]$$

이고,

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) \le f(m,n) < \frac{1}{2}(m+n+1)(m+n+2)$$

이므로,

$$\begin{aligned} &g(f(m,n)) \\ =&\Bigg(f(m,n) - \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1), \\ &(m+n) - \left[f(m,n) - \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)\right]\Bigg) \\ =&\left(\frac{1}{2}(2m), (m+n) - \frac{1}{2}(2m)\right) \\ =&(m,n) \end{aligned}$$

이다.

2. $(f \circ g)(y) = y$

자연수 y에 대해, $x \in \mathbb{N}$를 다음과 같이 잡자.

$$\frac{1}{2}(x)(x+1) \le y < \frac{1}{2}(x+1)(x+2)$$

그러면,

$$g(y) = \left(y - \frac{1}{2}x(x+1), x - \left[y - \frac{1}{2}x(x+1)\right]\right)$$

$$
\begin{aligned}
f(g(y)) =& f\left(\left(y - \frac{1}{2}x(x+1), x - \left[y - \frac{1}{2}x(x+1)\right]\right)\right) \\
=& \frac{1}{2}\left[x^2 + x + 2y - x(x+1)\right] \\
=& y
\end{aligned}
$$

이다.

따라서, f와 g는 서로 역함수 관계이다.

3.5.3.

$g(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$이므로,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \{0,1\}, \quad D_0 = \{1,2\} \\
C_1 &= \{3,4\}, \quad D_1 = \{4,5\} \\
C_2 &= \{6,7\}, \quad D_2 = \{7,8\}
\end{aligned}
$$

꼴로 이루어지므로,

$$C = \mathbb{N} \setminus \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

이다. 이를 이용하여 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 정의하면,

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & x \in C \\ x-2 & x \in A \setminus C \end{cases}$$

이고, 다시 써보면

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & x \in \{0,1,3,4,6,7,\cdots\} \\ x-2 & x \in \{2,5,8,11,14,\cdots\} \end{cases}$$

꼴의 함수임을 살펴 볼 수 있다.

3.5.4.

$$a = \mathrm{card}(A), \quad b = \mathrm{card}(B), \quad c = \mathrm{card}(C), \quad d = \mathrm{card}(D)$$

을 만족하는 집합 A, B, C, D을 생각하자.

$0 < a \leq c$이므로, $A \neq \varnothing, C \neq \varnothing$임을 안다.

그리고, $a \leq c$이므로, 단사함수

$$f : A \to C$$

가 존재하고, $b \leq d$이므로, 단사함수

$$g : B \to D$$

가 존재한다.

3.에서 g의 역함수를 이용하려 하는데, 보다 엄밀한 정의를 위해 다음 함수를 정의하자.

$$g_+ : B \to g[B]$$

이 함수는, g에서 공역을 치역인 $g[B]$로 바꾼 함수이다. 따라서, 전단사함수가 되고 역함수

$$g_+^{-1} : g[B] \to B$$

가 존재한다.

1. $a + b \leq c + d$

함수

$$h_1 : A \sqcup B \to C \sqcup D$$

를

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

와 같이 정의하면 h_1은 두 단사함수를 disjoint하게 합친 함수이므로, 단사함수가 된다. 보다 자세히 설명하면,

$$
\begin{aligned}
h_1(x) = h_1(y) &\implies \begin{cases} f(x) = f(y) & x, y \in A \\ g(x) = g(y) & x, y \in B \end{cases} \\
&\implies x = y
\end{aligned}
$$

이므로, 단사함수이다.

따라서, $a + b \leq c + d$임을 알 수 있다.

2. $ab \leq cd$

함수

$$h_2 : A \times B \to C \times D$$

를

$$h_2((a,b)) = (f(a), g(b))$$

와 같이 정의하면 h_2은 각각의 인자를 단사함수에 대입한 함수이므로, 단사함수가 된다. 보다 자세히 설명하면

$$
\begin{aligned}
h_2((a,b)) = h_2((c,d)) &\implies (f(a), g(b)) = (f(c), g(d)) \\
&\implies (f(a) = f(c)) \wedge (g(b) = g(d)) \\
&\implies (a = c) \wedge (b = d) \\
&\implies (a,b) = (c,d)
\end{aligned}
$$

이므로, 단사함수이다.

따라서, $ab \leq cd$임을 알 수 있다.

3. $a^b \leq c^d$

함수

$$h_3 : A^B \to C^D$$

를 $n : B \to A$에 대해 $m : D \to C$을 정의해보려 한다. 일단, $C \neq \varnothing$이므로, $\exists k \in C$를 하나 잡자.

$$m(d) = \begin{cases} k & d \in D \setminus g[B] \\ f(n(g_+^{-1}(d))) & d \in g[B] \end{cases}$$

이제, h_3를

$$h_3(n : B \to A) = (m : D \to C)$$

꼴로 정의하자. 이제 단사함수임을 보이려 한다.

$$\begin{aligned} h_3(n_1) = h_3(n_2) &\implies m_1 = m_2 \\ &\implies f(n_1(g_+^{-1}(d))) = f(n_2(g_+^{-1}(d))) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (d \in g[B]) \\ &\implies f(n_1(b)) = f(n_2(b)) \qquad (b \in B) \\ &\implies n_1(b) = n_2(b) \qquad (f\text{는 단사함수}) \\ &\implies n_1 = n_2 \end{aligned}$$

이므로, h_3은 단사함수이다.

따라서, $a^b \le c^d$임을 알 수 있다.

3.5.6.

1. 단사함수 $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 존재

$$f(a : \mathbb{N} \to \{0,1\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{a(i)}{3^i}$$

라 하자. 일단 $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a(i)}{3^i} \in \mathbb{R}$을 보이자.

pf.

$$\alpha(k) = \sum_{i \in 0}^{k} \frac{a(i)}{3^i}$$

라 하면, 임의의 유리수 $e > 0$에 대해,

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \middle| e > \frac{1.5}{3^n}$$

라 하자. 그러면, $N = n$이라고 하면

$$i, j \le N = n \implies |\alpha(i) - \alpha(j)| < \frac{1.5}{3^n} < e$$

이므로, α는 코시수열이고, 실수이다.

이제,

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies [f(a) \times 3^i] \equiv [f(b) \times 3^i] \mod 3 \quad (i \in \mathbb{N}) \\ &\implies a(i) = b(i) \qquad (i \in \mathbb{N}) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

이므로, f는 단사함수 임을 알 수 있다.

2. 단사함수 $g : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ 존재

집합 $A = \left\{ q \in \mathbb{Q} \middle| 0 < q < 1 \right\}$라 하자. 함수

$$p : \mathbb{R} \to A$$

를

$$p(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$$

라고 정의하자.

$$\begin{aligned} p(x) = p(y) &\implies \frac{1}{1+2^x} = \frac{1}{1+2^y} \\ &\implies 1 + 2^x = 1 + 2^y \\ &\implies 2^x = 2^y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

이므로 단사함수이다.

함수

$$h : A \to 2^{\mathbb{N}}$$

를

$$i \in \mathbb{N}, \quad (h(x))(i) = [x \times 2^{i+1}] \mod 2$$

라 정의하자.

이제, $x \ne y \implies h(x) \ne h(y)$임을 보이자.

pf. 일반성을 잃지 않고 $x < y$라 하자. 그러면

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \middle| \frac{1}{2^n} < \frac{1}{k} < y - x$$

이다.

이제

$$(h(x))(i) = (h(y))(i), \quad i \le n-1, i \in \mathbb{N}$$

일 수 없음을 보이자.

pf. [귀류법]

$$(h(x))(i) = (h(y))(i), \quad i \le n-1, i \in \mathbb{N}$$

라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} y - x &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(([y \times 2^{i+1}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i+1}} \right) \\ &\quad - \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(([x \times 2^{i+1}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i+1}} \right) \\ &= \sum_{i \ge n} \left(([y \times 2^{i+1}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i+1}} \right) \\ &\quad - \sum_{i \ge n} \left(([x \times 2^{i+1}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i+1}} \right) \\ &= \sum_{i \ge n+1} \left(([y \times 2^{i}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i}} \right) \\ &\quad - \sum_{i \ge n+1} \left(([x \times 2^{i}] \mod 2) \times \frac{1}{2^{i}} \right) \\ &\le \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

이므로, $\frac{1}{2^n} < y - x$임에 모순이다. □

따라서, $x \ne y \implies h(x) \ne h(y)$이고, 이는 h가 단사함수임을 의미한다.

함수 $g : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$를

$$g = p \circ h$$

로 정의하면, 두 단사함수의 합성이므로 g 역시 단사함수이다.

결론. 1., 2.에 의해 $2^{\mathbb{N}}$와 $\mathbb{R}$사이의 단사함수 f, g가 존재하므로, 3.5.2. 베른슈타인 정리에 의해서

$$2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$$

임을 알 수 있고, 이는

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

을 의미한다.

3.5.7.

(가) $\aleph_0$

유한부분집합 전체의 집합은 $k \in 2^{\mathbb{N}}$의 원소(k)중에서

$$k(n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 n이 유한개인 원소들을 모아놓은 집합과 같다.

위 집합을 X라 하자. X의 임의의 원소는 어떤 자연수 m의 이진수 표현 일대일 대응이라는 것을 알 수 있다. 예를 들어,

$$k(0) = 1, k(1) = 0, k(2) = 1, k(3 \leq i) = 0 \implies 101_{(2)}$$

$$k(0) = 1, k(1) = 1, k(2) = 0, k(3) = 1 k(4 \leq i) = 0 \implies 1011_{(2)}$$

등과 대응할 수 있다. 이 사실을 상기하여, 함수

$$f : \mathbb{N} \to X$$

를

$$f(n) = (n\text{의 이진수 표현에 대응 되는 } 2^{\mathbb{N}}\text{의 원소})$$

라 하고, 함수

$$g : X \to \mathbb{N}$$

을

$$g(x) = (\text{함수 } x\text{로 표현되는 이진수의 자연수 값})$$

으로 정의하면,

$$f \circ g, \quad g \circ f$$

는 항등함수이고, f와 g는 서로 역함수 관계임을 안다.

따라서, 위 집합의 기수는 $\aleph_0$이다.

(나) $2^{\aleph_0}$

(가)와 비슷하게, 무한부분집합 전체의 집합은 $k \in 2^{\mathbb{N}}$의 원소 (k)중에서

$$k(n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 n이 무한개인 원소들을 모아놓은 집합과 같다.

위 집합을 Y라 하고, 이 집합의 기수를 y라 하자. 그러면,

$$X \cup Y = 2^{\mathbb{N}}, \quad X \cap Y = \varnothing$$

임을 안다. 이를 이용하면,

$$\text{card}(X) + \text{card}(Y) = \text{card}(2^{\mathbb{N}})$$

$$\aleph_0 + y = 2^{\aleph_0}$$

이다. 여기서, $y \leq \aleph_0$라 하면,

$$\aleph_0 = \aleph_0 + y = 2^{\aleph_0}$$

인데,

$$\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$$

이므로 모순이다. 따라서, $\aleph_0 < y$임을 안다.

이를 이용하면,

$$y = \aleph_0 + y = 2^{\aleph_0}$$

이므로, 위 집합의 기수는 $2^{\aleph_0}$임을 알 수 있다.

(다) $2^{\aleph_0}$

$\mathbb{N}$사이에 정의된 순증가함수 전체의 집합(A라 하자.)과 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 함수 전체의 집합은 대등함을 보이자.

먼저,

$$f : A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

를 항등함수로 정의하면 단사함수이다. 이제, 함수

$$g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A$$

를 단사함수로 정의하려한다.

$a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$에 대해,

$$(g(a))(0) = a(0)$$

$$(g(a))(i) = (g(a))(i-1) + a(i) + 1, \quad 1 \leq i$$

라 하면, $g(a)$는 순증가함수이다. 또한,

$$\begin{aligned}
g(a) = g(b) &\implies (a(0) = b(0)) \wedge && (1 \leq i) \\
&\quad (g(a)(i) - g(a)(i-1) = g(b)(i) - g(b)(i-1)) \\
&\implies (a(0) = b(0)) \wedge (a(i) + 1 = b(i) + 1) && (1 \leq i) \\
&\implies (a(0) = b(0)) \wedge (a(i) = b(i)) && (1 \leq i) \\
&\implies a = b
\end{aligned}$$

이므로, g는 단사함수이다.

f, g가 단사함수이므로, 베른슈타인 정리에 의해,

$$A \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

이고, (마)에 의해 A의 기수는 $2^{\aleph_0}$이다.

(라) $2^{\aleph_0}$

$\mathbb{N}$사이에 정의된 전단사함수 전체의 집합(B라 하자.)과 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 함수 전체의 집합은 대등함을 보이자.

먼저,

$$f : B \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

를 항등함수로 정의하면 단사함수이다. 이제, 함수

$$g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$$

를 단사함수로 정의하려한다.

$a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$에 대해,

$$(g(a))(0) = a(0)$$

$$(g(a))(i) = \left(\mathbb{N} - \left\{(g(a))(j) \middle| j < i, j \in \mathbb{N}\right\}\right) \text{의}$$
$$a(i) + 1 \text{ 번째 원소} \qquad (1 \leq i)$$

라 할 수 있다. 왜냐하면, 위의 집합이 유한집합이 아닌 정렬집합이므로, 자연수 번째의 원소를 고를 수 있기 때문이다.

정의에 의해 $g(a)$는 전단사함수이다. 또한,

$$g(a) = g(b) \implies (a(0) = b(0))$$

이고, $a(i) = b(i), \quad i \leq k$이면 g의 정의에 의해 $a(k+1) = b(k+1)$을 얻을 수 있다. 즉, 수학적 귀납법에 의해

$$a(i) = b(i), \quad i \in \mathbb{N}$$

임을 알 수 있으므로,

$$g(a) = g(b) \implies a = b$$

를 얻고, g는 단사함수임을 안다.

f, g가 단사함수이므로, 베른슈타인 정리에 의해,

$$B \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

이고, (마)에 의해 A의 기수는 $2^{\aleph_0}$이다.

(마) $2^{\aleph_0}$

집합 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 함수 전체의 집합은

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

과 같고, 기수의 정의에 의해 이 집합의 기수는

$$\aleph_0^{\aleph_0}$$

이다. 더 서술해보면,

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$$

이고,

$$\aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

이므로,

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

이다.

따라서, 위 집합의 기수는 $2^{\aleph_0}$이다.

3.5.8.

(마), (라), ((가), (나), (다)) 순서로 보는 것을 추천한다.

(가), (나), (다) $\mathfrak{c}$

각각에서 정의한 집합을 K라 하고, (라)에서 정의한 연속함수의 집합을 A라 하자.

각각에서 정의한 집합은 모두 연속함수이므로, $K \subset A$임을 안다.

1. card$(\mathbb{R}) \leq$ **card**(K)

함수 f를

$$f : \mathbb{R} \to K$$

$$(f(x))(y) = x$$

로 정의하면 상수함수이므로 연속함수이고,

$$f(x) = f(y) \implies f(x)(0) = f(y)(0) \implies x = y$$

이므로 단사함수이다.

따라서,

$$\text{card}(\mathbb{R}) \leq \text{card}(K)$$

이다. □

2. card$(K) \leq$ **card**(A)

함수 g를

$$g : K \to A$$

를 항등함수로 정의하면

$$g(x) = g(y) \implies x = y$$

이므로 단사함수이다.

따라서,

$$\text{card}(K) \leq \text{card}(A)$$

이다. □

결론. 1., 2., (라)의 결론에 의해

$$\mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R}) \le \text{card}(K) \le \text{card}(A) = \mathfrak{c}$$

이므로,

$$\mathfrak{c} = \text{card}(K)$$

이다.

(라) $\mathfrak{c}$

$\mathbb{R}$사이에 정의된 연속함수 전체의 집합을 A라 하자.

1. $\mathfrak{c} = \textbf{card}(\mathbb{R}) = \textbf{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}})$

pf.

$$\begin{aligned}\text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}) =& \text{card}(\mathbb{R})^{\text{card}(\mathbb{Q})}\\ =& \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}\\ =& 2^{\aleph_0\times\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\\ =& \mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

□

2. $\textbf{card}(\mathbb{R}) \le \textbf{card}(A)$

함수 f를

$$f : \mathbb{R} \to A$$

$$(f(x))(y) = x$$

로 정의하면 상수함수이므로 연속함수이고,

$$f(x) = f(y) \implies f(x)(0) = f(y)(0) \implies x = y$$

이므로 단사함수이다.

따라서,

$$\text{card}(\mathbb{R}) \le \text{card}(A)$$

이다. □

3. $\textbf{card}(A) \le \textbf{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}})$

함를 g를

$$g : A \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$

$$(g(a))(q) = a(q), \quad q \in \mathbb{Q}$$

로 정의하자.

이제 단사함수임을 보여야한다. 먼저

$$g(a) = g(b) \implies (g(a))(q) = (g(b))(q), \quad (q \in \mathbb{Q})$$

이다. 임의의 실수 $r \in \mathbb{R}$를 잡으면, 실수가 코시수열의 동치류로 생각하고 r에 대응하는 코시수열 α를 생각하자. 유리수를 실수로 확장해서 생각하면, (완3)에 의해서 코시수열 α는 실수에서 수렴한다. (그 값은 r일 것이다.)

해석학에서 함수 f가 연속함수이면, r로 수렴하는 수열 $n(i)$에 대해서, 수열 $m(i) = f(n(i))$은 $f(r)$로 수렴함을 안다.

따라서, 수열 β를 $\beta(i) = f(\alpha(i))$로 잡으면 수렴하고, 정리 2.4.1. 에의해 수렴하는 수열은 코시수열이므로 β는 코시수열이다.

이제 다시 돌아와서, $\beta_a(i) = a(\alpha(i))$라 하고, $\beta_b(i) = b(\alpha(i))$라 하면, $(g(a))(q) = (g(b))(q), \quad (q \in \mathbb{Q})$이므로

$$\beta_a = \beta_b$$

이고, 둘은 같은 값으로 수렴한다.

즉, $\forall r \in \mathbb{R} \big| a(r) = b(r)$임을 알 수 있다.

따라서, g는 단사함수이고 이는

$$\text{card}(A) \le \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}})$$

을 의미한다. □

결론. 1., 2., 3.에 의해

$$\mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R}) \le \text{card}(A) \le \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}) = \mathfrak{c}$$

임을 알 수 있으므로,

$$\mathfrak{c} = \text{card}(A)$$

이다.

(마) $2^{\mathfrak{c}}$

집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 함수 전체의 집합은

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

과 같고, 기수의 정의에 의해 이 집합의 기수는

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \left(2_0^{\aleph}\right)^{2^{\aleph_0}}$$

이다. 더 서술해보면,

$$2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}}$$

이고,

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \le (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

이므로,

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

이다.

따라서, 위 집합의 기수는 $2^{\mathfrak{c}}$이다.

3.6.1.

(가)

1. α^+는 서수이다.

$$\xi \in \alpha^+ \setminus \{\alpha\} \implies \xi \in \alpha \implies S_\xi = \xi$$

이고,

$$(\xi \in \{\alpha\} \implies S_\xi = \xi) \iff S_\alpha = \alpha$$

이다. $S_\alpha = \alpha$를 증명하자.

pf.

$$x \in S_\alpha \iff x < \alpha \iff x \in \alpha$$

이므로 $S_\alpha = \alpha$이다. □

따라서, α^+에 대해

$$\xi \in \alpha^+ \implies S_\xi = \xi$$

가 성립하으로 α^+는 서수이다.

2. $\alpha^+ = \alpha + 1$이다.

$$\mathrm{ord}(\{\alpha\}) = \mathrm{ord}(\{0\}) = 1$$

이므로,

$$\alpha^+ = \mathrm{ord}(\alpha \cup \{\alpha\}) = \mathrm{ord}(\alpha) + \mathrm{ord}(\{\alpha\}) = \alpha + 1$$

이다.

(나)

절편의 정의에 의해

$$x \in S_\beta \implies x \in A$$

이므로

$$S_\beta \subset \alpha$$

이다. 이를 이용하면

$$\xi \in S_\beta \implies \xi \in \alpha \implies S_\xi = \xi$$

이므로, S_β는 서수이다.

그리고, (가)의 정리에 의해 $\beta = S_\beta$이므로, β도 서수이다.

3.6.5.

대우명제를 보이자.

$$\begin{aligned} \alpha \geq \beta &\implies \alpha \supset \beta \\ &\implies \beta\text{에서 } \alpha\text{로 가는 단사함수 존재} \\ &\implies \beta \preceq \alpha \\ &\iff \mathrm{card}(\alpha) \geq \mathrm{card}(\beta) \end{aligned}$$

3.6.6.

$$\omega \approx \omega$$

이다.

$$\omega^2 \approx \omega$$

이다.

$$\omega^k \approx \omega, \quad 2 \leq k$$

라 하면,

$$\omega^{k+1} \approx \omega \times \omega \approx \omega$$

이므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 $1 \leq n$에 대해

$$\omega^n \approx \omega$$

이다.

위와 열거한 서수들 중 어느 부분부터 $\mathbb{N}$과 대등하지 않은지는 모르겠다.

3.6.7.

1. $\implies$

임의의 무한 기수, 즉 시작서수를 A라 하자. A는 극한서수임을 다음과 같이 보일 수 있다.

pf. [귀류법] A가 극한서수가 아니라고 모순을 보이자. 즉, 어떤 서수 B가 존재하여,

$$B = A + 1$$

이다.

일단 무한 기수이므로, $w \subset A$이다.

함수

$$f : B \to A$$

를

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n \in B \setminus A \\ n & n \in A \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

는 전단사함수이다. 따라서, B와 A가 대등하고 이는 A가 대등한 기수들중 가장 작은 기수라는 것에 모순이다. □

따라서, A는 극한서수이다.

2. $\Longleftarrow$ 는 성립하지 않는다.

$\omega \cdot 2$는 극한 서수이지만, 시작서수는 아니다.

왜냐하면 $\mathrm{card}(\omega \cdot 2) = \omega$이기 때문이다.

3.6.8.

문제에서 주어진 집합을

$$A = \{\xi : \xi \approx \aleph_0\}$$

라 하자.

정의에 의해서

$$\aleph_0 < \mathrm{card}(\aleph_1) \leq 2^{\aleph_0}$$

이다.

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \approx \aleph_0 \implies \mathrm{card}(x) = \aleph_0 \\ &\implies \mathrm{card}(x) = \aleph_0 < \mathrm{card}(\aleph_1) \\ &\implies x < \aleph_1 \qquad\qquad (\text{문제 } 3.6.5.) \end{aligned}$$

이므로, $\aleph_1$는 A의 상계이다.

이제 상한임을 보이자. 임의의 서수 $a < \aleph_1$에 대해

$$\mathrm{card}(a) \leq \aleph_0$$

이다.

또한, $a \approx a^+$이므로,

$$\mathrm{card}(a^+) \leq \aleph_0$$

이다.

즉, $a < a^+$인데 $a^+ \in A$이므로, a는 A의 상계가 아니다.

따라서, $\aleph_1$는 A의 상한이다. $\square$