



Physics Laboratory

Last modified : 2015-08-31

실험 1-4. 자이로스코프

실험 목적

토그와 각운동량을 이해하고, 자이로스코프의 세차 운동과 장동운동을 관찰한다.

실험 방법

실험실에는 이 실험을 위해서 다음과 같은 장치가 준비되어 있다.

- ①GyroscopeExperiment App.
- ②RS232-USB Cable
- ③Mass Set(100g, 200g, 300g 3Kinds)
- ④Wire
- ⑤I-CA System (For Measuring the Moment of Inertia of Disk)
- ⑥Small Stand &Pully& Support Rod & 2 Clamps (For Measuring the Moment of Inertia of Disk)
- ⑦Hooked Mass (For Measuring the Moment of Inertia of Disk)
- ⑧Vernier Calipers & Electric Balance(For Public Use)



Fig 8.Gyroscope Experiment App.

4-1. 세차운동-세차각속도측정

①RS232-USB 케이블을 사용하여 자이로스코프 실험장치를 컴퓨터에 연결한다. 전원 어댑터를 사용하여 자이로스코프 실험장치에 전원을 인가한다.

②프로그램을 설정한다. (SensorLAB)

전용프로그램(SensorLAB)의 메뉴는 다음과 같이 구성되어있다. (아래에서 설명하는 기능 이외에는 작동하지 않거나, 사용할 필요가 없다.)

1. 자이로스코프 장비의 통신상태를 연결/해제한다.
2. 데이터 기록 및 그래프 작성을 시작/종료한다.
3. 장비에서 전송되는 센서값을 실시간으로 표시한다.
4. 작성된 그래프를 표시한다.
5. 그래프 종류를 선택한다.
6. 그래프 원점의 위치를 변경한다.

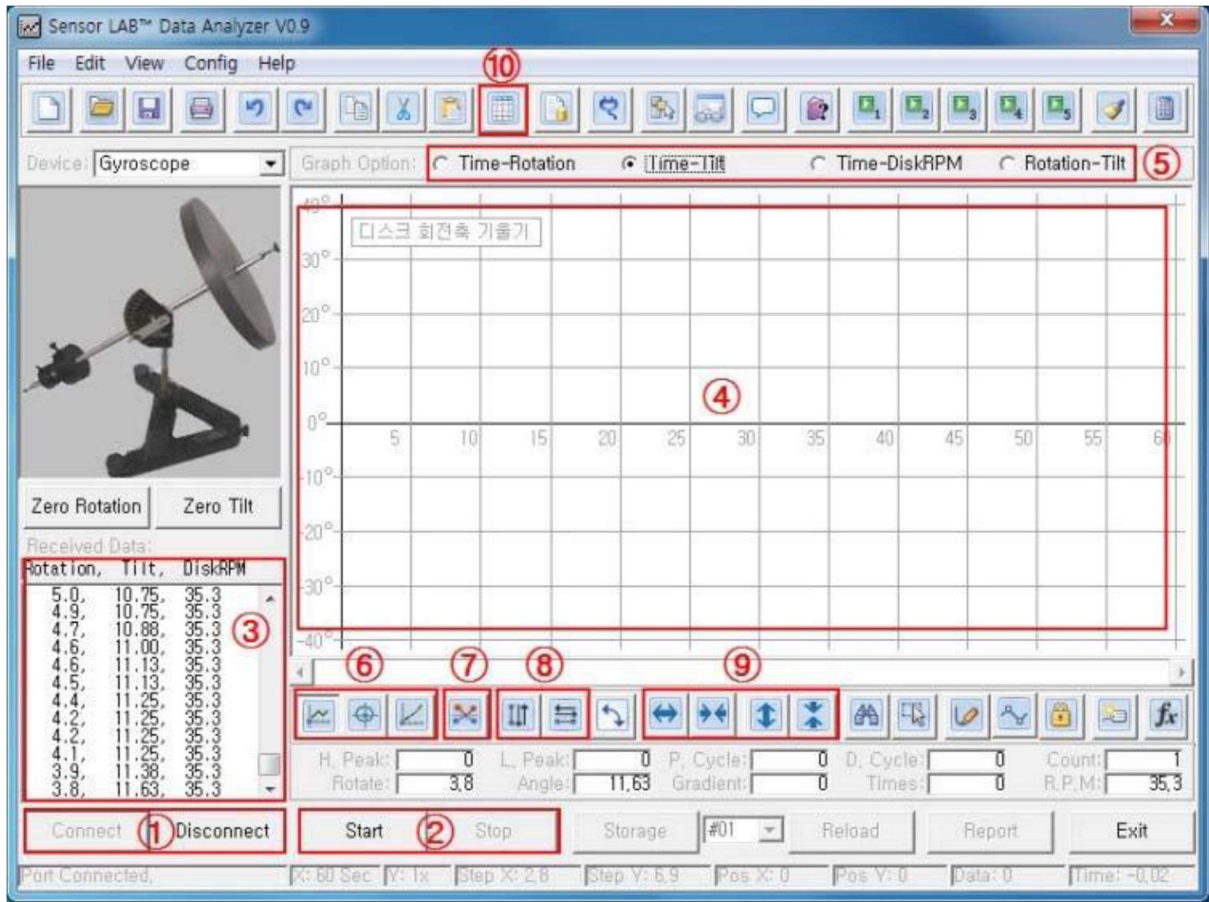


Fig 10.Display of SensorLAB

7. 그래프 원점의 위치를 변경한다.

8. 회전 센서 측정값을 실수값/절대값으로 계산한다.

9. 센서 측정값의 부호를 바꾼다.

10. 그래프 축 범위를 변경한다.

11. 측정데이터를 테이블로 표시한다.

▶ [Connect]를 클릭하여 장비와 통신을 시작한다. [Received Data]에 실시간으로 표시되는 숫자는 차례대로 다음을 의미한다.

Rotation : 수직중심축회전각(°) (회전센서)

Tilt : 수평회전축기울기(°) (기울기센서)

DiskRPM : 관성바퀴RPM (각속도센서)

▶ 수직 중심축 회전각 데이터 처리 방법을 설정한다.

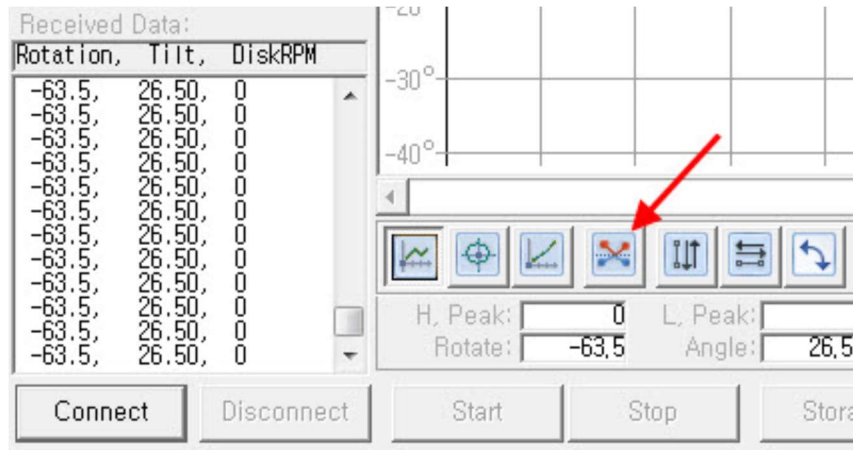


Fig 11.Settings of Data Processing Method

[Received Data]를 확인하면서, 자이로스코프를 시계방향 또는 시계반대방향으로 움직여본다. 만약, 회전방향에 상관없이 계속 증가한다면, [AbsoluteValue] 아이콘을 클릭하여 회전방향에 따라 증가/감소 할 수 있도록 설정한다.

[Absolute Value] 아이콘의 기능은 다음과 같다.

회전각의 실수값연산 (방향에 따라 증가/감소)

↔회전각의 절대값연산 (방향에 관계없이 계속증가)

▶ 수직 중심축 회전각 및 수평회전축 기울기의 부호를 결정한다.

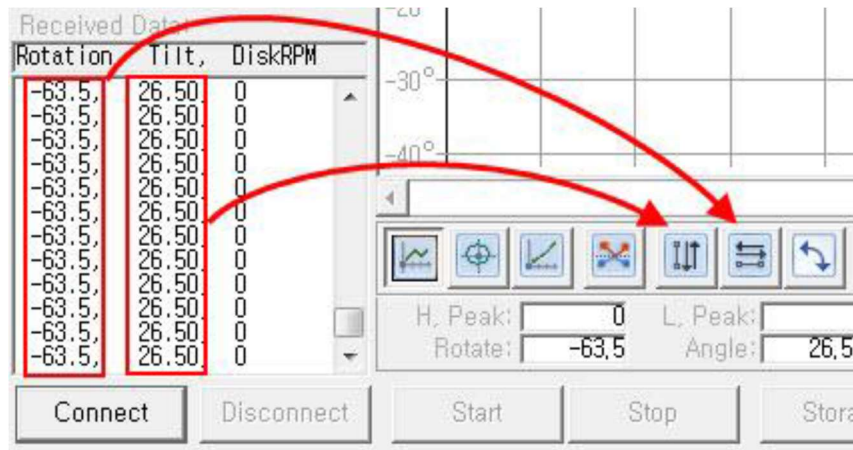


Fig 12.Determine the Sign of the Slope & Angle

[Flip Vertical] 아이콘은 수평회전축의 기울기의 부호를 결정한다. 관성 바퀴가 위로 올라갔을 때 기울기(Tilt) 값이 양수가 표시 되도록 설정한다.

[Flip Horizontal] 아이콘은 수직 중심축의 회전방향에 따른 측정값의 증감을 결정한다.

초기 설정값(아이콘이 선택되지 않은 상태)에서는, 위에서 보았을 때 자이로스코프 중심축이 시계 반대방향으로 회전할 경우 회전각이 증가한다. 만약 실험에서 중심축이

시계방향으로 회전할 때에는, [Flip Horizontal] 을 클릭한다.

▶ 그래프를 선택한다.

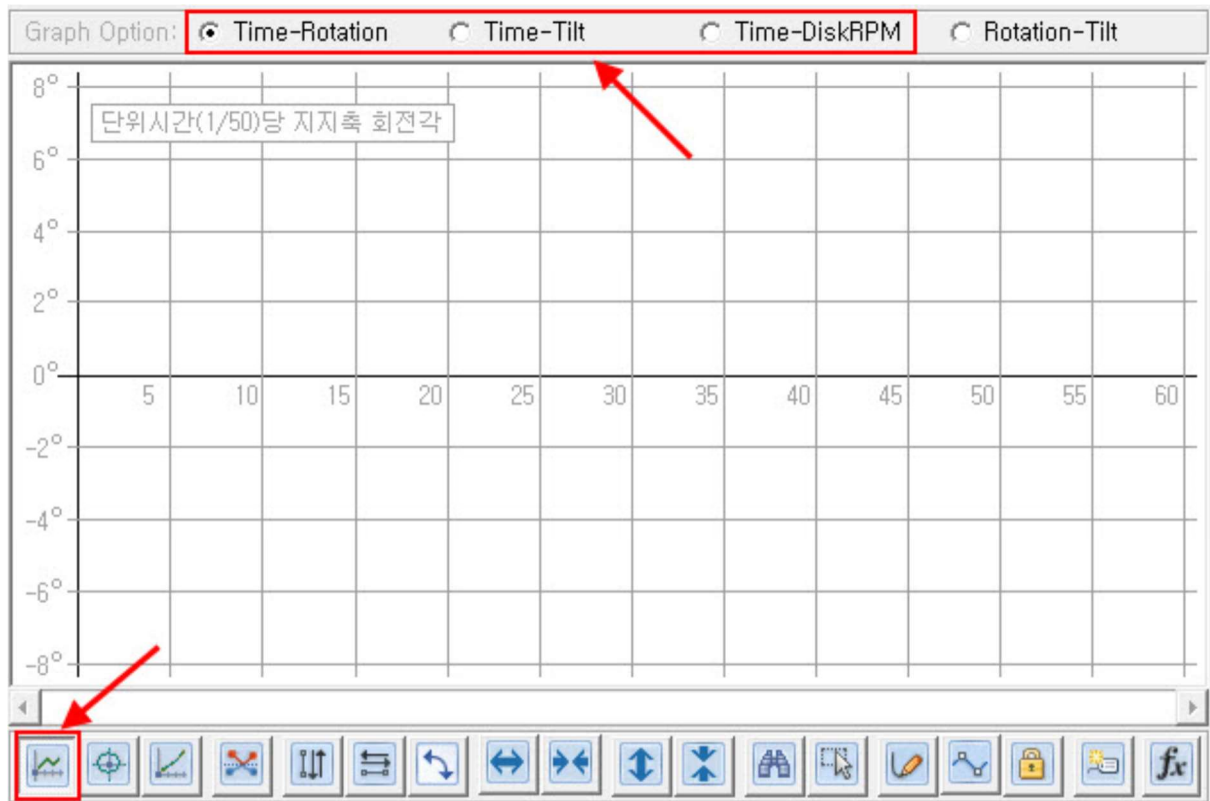


Fig 13.Graph Option

[Graph Option] 에서 [Time-Rotation], [Time-Tilt], [Time-DiskRPM] 중 한가지를 선택한다.

측정 시 그래프가 우측 끝에 도달하면 자동으로 측정이 종료되는데, [Rotation-Tilt] 그래프는 상대적으로 짧은 시간에 종료되므로 추천하지 않는다. ([Rotation-Tilt] 그래프는 장동운동실험시 사용한다.)

그래프형태는 [Flow mode] 를 선택한다.

▶ 그래프 축범위를 설정한다.

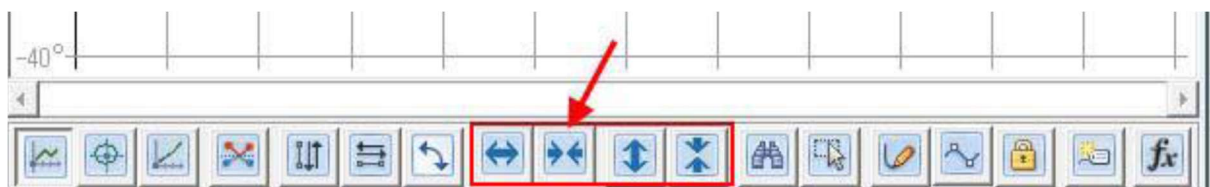


Fig 14.Settings of Graph Range

그래프의 범위를 적절하게 설정한다. 시간 축은 60 초(최대)로 설정한다. (60 초 측정 후 자동 종료된다.)

③자이로스코프 장치의 수평을 맞춘다. 먼저, 그림15의 왼쪽과 같이 균형추를 수평회전축 끝에 고정하여 회전축을 기울어진 상태로 만든다. 그 상태에서 가만히 두었을 때, 중력에 의해 수직중심축이 서서히 회전하면 장비 전체가 기울어져있는 상태이므로 수평을 맞추어야 한다. A 형 베이스의 수평 조절볼트를 사용하여 중심축이 회전하지 않도록 조절한다.



Fig 15.Leveling of Gyroscope App.

④회전축을 토크 평형상태로 조정한다. 균형추를 사용하여, 중심점을 기준으로 수평회전축 좌우의 무게균형을 맞춘다. 힘을 가하지 않은 상태에서 회전축이 최대한 기울지 않게 한다. (관성 바퀴를 포함한 모든 부품에 대해 토크 평형상태로 만든다.)
 ⑤관성 바퀴를 회전시킨다. 줄의 고리를 관성 바퀴드르래의 핀에 걸어서 감아준 다음, 부드럽게 줄을 당겨 관성바퀴를 회전시킨다. (넘어지지 않도록 한 손으로는 축을 잡고

돌린다. 장비가 파손될 수 있으므로 너무 빠르게 당기지 않는다.)

⑥토크를 가한다. 무게 추100g을 회전축 제일 안쪽 거치대에 끼운다. (고정점에서 거치대까지 거리는 각각0.15, 0.17, 0.19, 0.21m 이다. 그림16 도면 참조)

⑦세차운동을 확인한다. 관성바퀴를 회전시키고 회전축을 가만히 놓으면, 토크의 작용에 의해 자이로스코프가 회전하는 세차운동을 한다.그런데, 수평평면상에서 세차운동을하는 이상적인 자이로스코프와는 달리, 수직방향의 운동을 포함한 장동운동을 할 것이다. 이 현상은 세차운동에 의한 각 운동량의 수직성분, 회전축상의 균형추를 포함한 각 중 부품의 관성, 베어링의 마찰에 의한 영향이 복합적으로 작용 하기 때문에 발생한다.

따라서, 세차운동만 관찰하기 위해서는 자이로스코프가 장동운동을 하지않는 적절한 속력으로 축을 강제로 회전시켜주어야 한다. 회전축을 손끝으로 살짝 잡은 후, 자이로스코프의 회전력을 손으로 느끼면서, 장동운동을 하지 않도록 적절한 속력으로 부드럽게 밀어준다. (몇 번 시도하면 감을잡을 수 있을 것 이다.) 장동운동을 하지 않는 조건을 잡은 후에 데이터측정을 시작한다.

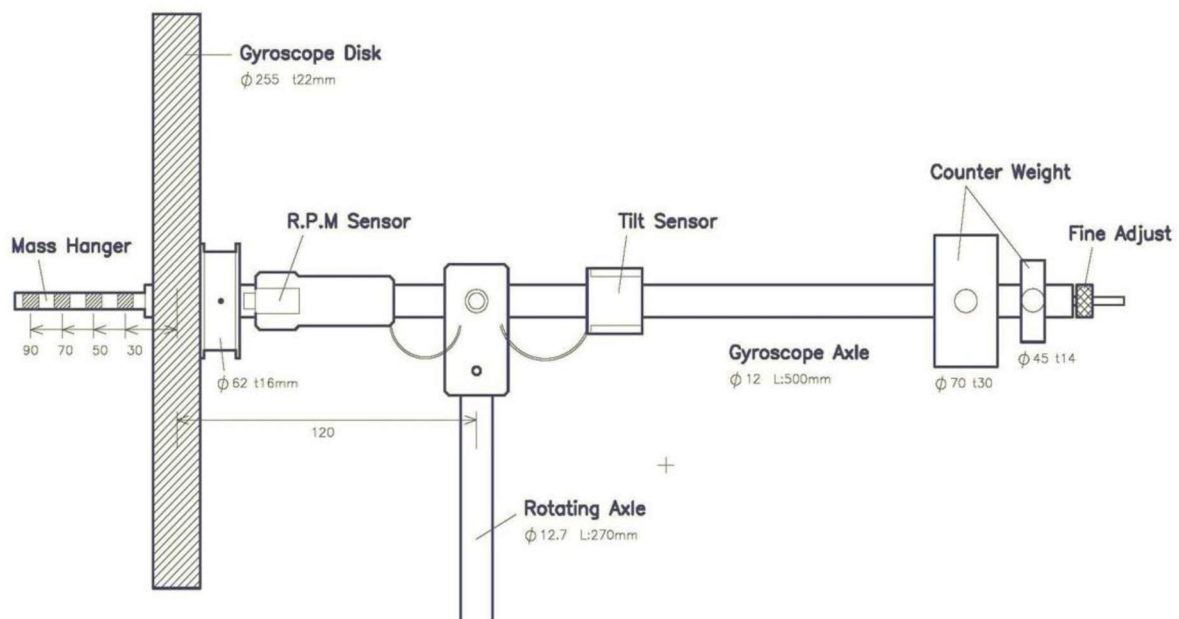


Fig 16.Drawing of Gyroscope App.

⑧데이터 측정을 시작한다. [Start]를 클릭하면 시작시점을 기준으로 회전각을 0° 로 계산하여 데이터 기록 및 그래프작성이 시작된다. (이 실험에서 그래프는 큰 의미가 없으므로, 정상적으로 측정되고 있는지 여부만 확인한다.)

②의 그래프 축 범위설정에서 설정한 시간 범위에 따라(그래프가 우측 끝에 도달하면)

자동으로 측정이 종료된다.

⑨데이터 테이블을 확인하고 저장한다.

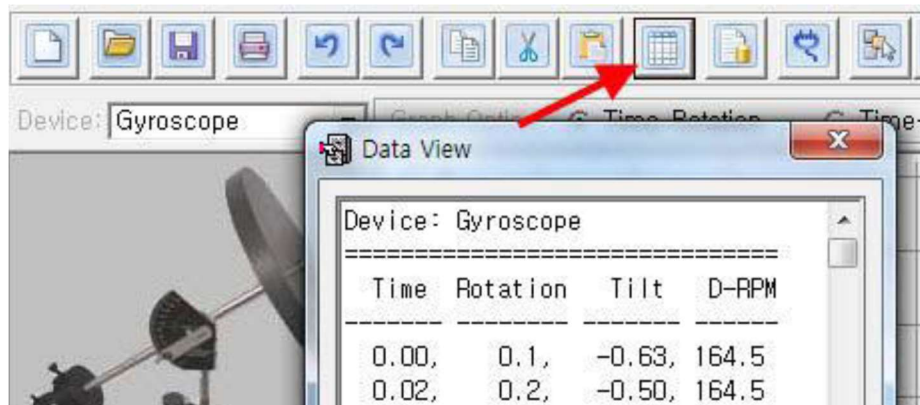


Fig 17.Save of Datas

메뉴 아이콘 중에서 [Datasheet]을 클릭하면 그림과 같이 측정된 데이터 테이블이 표시된다. 좌측부터 차례대로 시간, 중심축회전각도($^{\circ}$), 회전축의 기울기($^{\circ}$), 관성바퀴의 분당회전수(rpm)를 의미한다.

[Save]를 클릭하여 데이터를 텍스트(*.txt) 파일로 저장한다.

⑩저장된 데이터를 엑셀 등의 프로그램을 이용하여 분석한다.

⑪측정한 결과를 식(10)과 비교한다.

⑫다른 조건에서 실험을 반복한다. 자이로스코프에 작용하는 토크가 동일한 조건(추의질량 M 과, 작용점으로부터의 거리 R 이 동일한 조건)에서 관성바퀴의 회전속도를 변경하여 실험을 3회 이상 반복한다.

4-2. 장동운동

실험4-2 와 동일한 토크를 작용하여, 다양한 장동운동을 관찰한다.[Graph Option]을 [Rotation-Tilt]로 변경하여, X 축을 수직중심축의 회전각, Y 축을 수평회전축의 기울기로 설정한다.

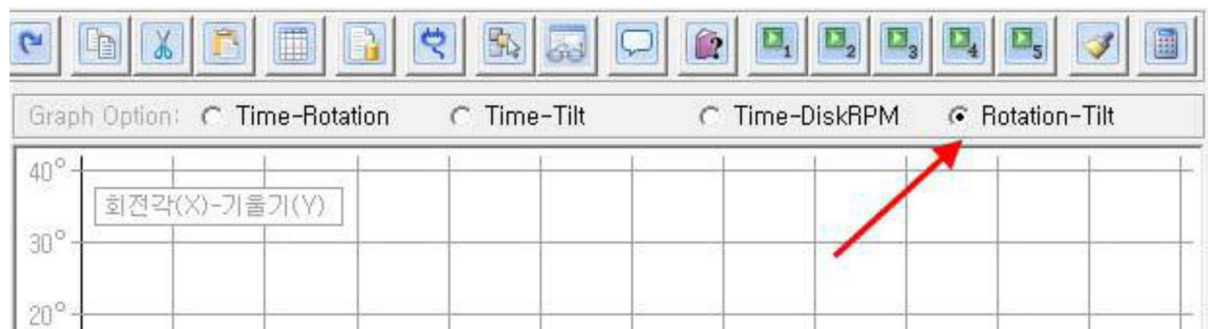


Fig 18.Graph Option of Nutation

관성바퀴를 적절한 속력으로 회전시킨 후, 다음의 세가지 조건에서 장동운동을 관찰하고 그래프를 확인한다. 초기 운동조건에 따른 장동운동의 형태를 구별하고, 원인에 대해 토의한다.

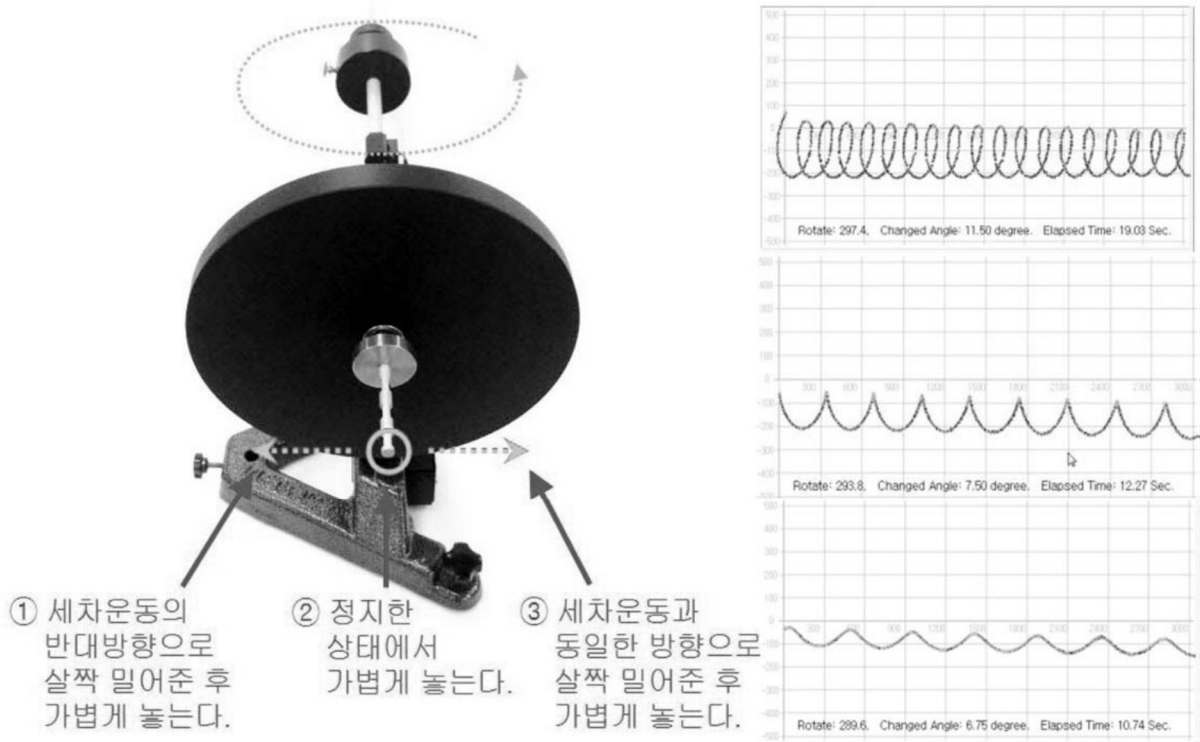


Fig 18.Graph Option of Nutation

5. 측정값

5-1. 관성바퀴의 관성모멘트 측정

- Mass of Hanger(m) = (kg)
- Radius of Axis of Rotation(r) = (m)

Div1	1	2	3	Average
Equation of Trendlines(I-CA)				
$a(m/s^2)$				
I식(11)				

5-2. 세차운동

Div	M	R	I	w	MgR/Iw	Ω	Error
1							
2							
3							
...							

5-2. 장동운동

6. 분석 및 토론

실험 과정에서 주의할 점이 무엇이 있는지 생각해 보고 실험결과가 이론치와 차이가 있다면 오차를 주는 원인에 대해 토론해 보자.

7. 응용 및 확장

배경 이론

물체에 작용하여 물체를 회전시키는 원인이 되는 물리량을 토크 $\vec{\tau}$ 라고한다. 그림1에서 토크 τ 는 물체에 작용하는힘 F 와 회전중심으로부터 힘이 작용하는 연장선까지의 수직거리 l 을 곱한 값과 같다.

$$\tau = Fl = rF\sin\phi \quad (1)$$

식(1)을 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2)$$

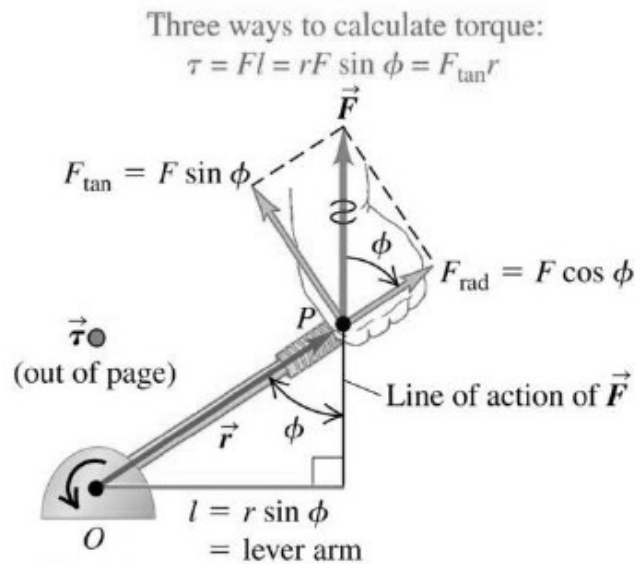


Fig 1. Three ways to calculate the torque of the force \vec{F} out the point O . In this figure, \vec{r} and \vec{F} are in the plane of the page and the torque vector $\vec{\tau}$ points out of the page toward you.

병진운동의 선운동량 $\vec{p} = m\vec{v}$ 에 대응하는 회전운동의 물리량을 각운동량 \vec{L} 이라고 한다. \vec{L} 과 \vec{p} 의 관계는 토크와 힘의 관계 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ 와 동일하며, 다음과 같이 정의한다.

전류는 운동하는 전하의 모임이며, 이 전류가 길이 l 인 도선을 따라 흐른다면 식(1)은

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (3)$$

물체에 힘 \vec{F} 가 작용할 때 물체의 속도와 선운동량이 변하는 것 과 마찬가지로 토크 $\vec{\tau}$ 가 작용할 때 각운동량이 변하게 된다. 각운동량 \vec{L} 과 토크 $\vec{\tau}$ 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (4)$$

한편, 그림2와 같이 xy 평면상에 놓인 얇은 강체가 z 축을 중심으로 각속도 ω 로 회전한다고 하면, 강체를 구성하는 입자는 원점을 중심으로 원운동을 한다. 입자의 순간속도벡터 \vec{v}_i 는 위치벡터 \vec{r}_i 에 수직이다.

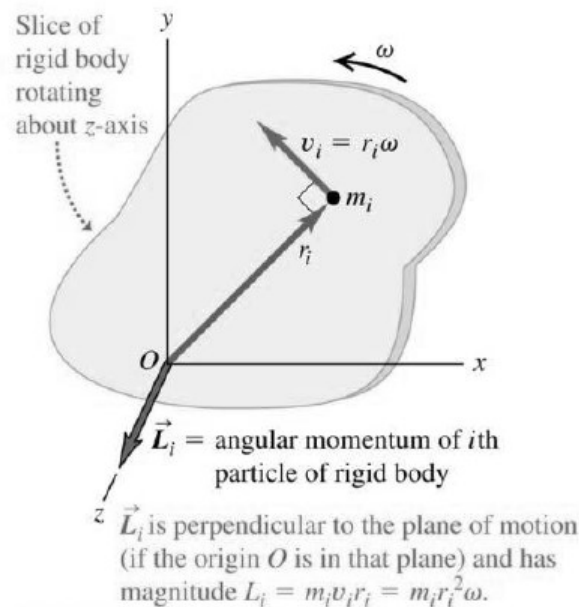


Fig 1.Calculating the angular momentum of a particle of Mass m_i in a rigid body rotating at angular speed ω

원점 O 에서의 거리 ri 에 있는 질량 mi 인 입자의 속력은 $vi = ri\omega$ 이다. 따라서 각운동량의 크기 Li 는 다음과 같다.

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_ir_i^2\omega \quad (5)$$

따라서 xy 평면상에 놓인 얇은 강체의 총 각운동량 L 은 다음과 같다.

$$L = \sum L_i = (\sum m_ir_i^2)\omega = I\omega \quad (6)$$

여기서 I 는 강체의 관성모멘트라 불리는 양이다. 이를 더 일반화하여 계산하면 다음과 같이 각운동량 \vec{L} 과 각속도 $\vec{\omega}$ 사이의 관계식을 구할 수있다.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (7)$$

회전하는 물체의 회전축의 방향이 바뀔 때, 직관적으로 쉽게 이해할 수 없는 신기한 물리적 현상이 발생한다. 이를 보여주는 대표적인 사례가 자이로스코프이다.

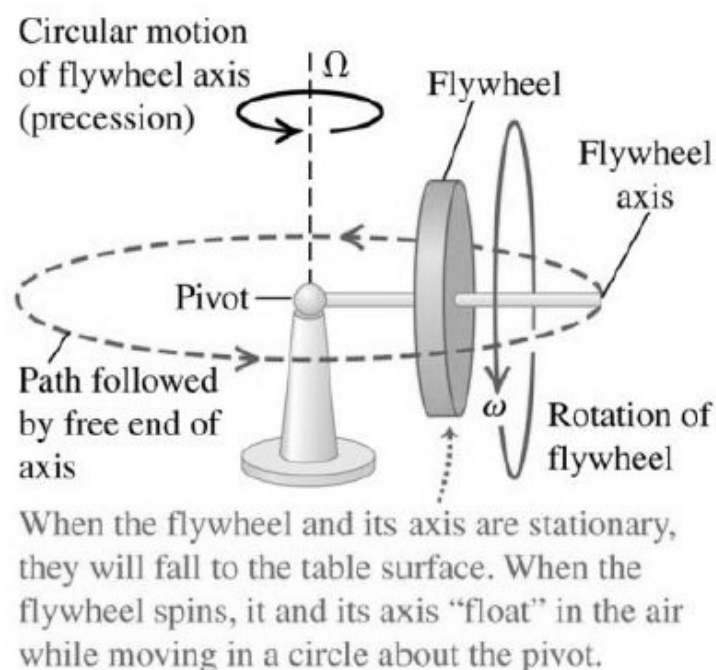
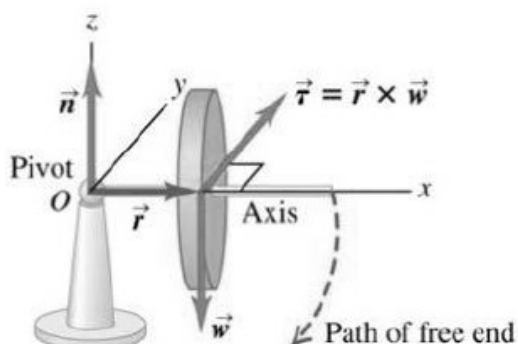


Fig 3.A gyroscope supported at one end. The horizontal circular motion of the flywheel and axis is called precession. The angular speed of precession is Ω .

그림3과 같이 자이로스코프의 회전축 한 쪽끝을 고정점에 얹은후, 회전축을 수평으로 유지한 상태에서 가만히 놓으면, 관성 바퀴가 회전하지 않을 경우, 회전축의 반대쪽은 중력에 의해 아래로 떨어지게 된다.

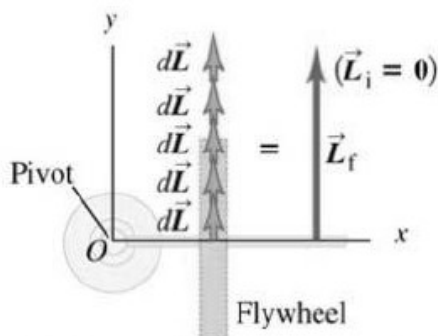
그런데, 관성바퀴가 회전하고 있을 경우에는 완전히 다른현상이 일어난다. 회전축이 수평을 유지한 상태에서 고정점을 중심으로 지속적인 원운동을 한다. 이러한 회전축의 운동을 세차 운동(precession)이라고 한다. 이 현상은 식(4) $\vec{r} = d\vec{L}/dt$ 를 사용하여 설명할 수 있다. 그림 4와 같이 자이로스코프 회전축의 고정점을 원점 O 으로 정하고, 회전축의 초기 위치는 x 축상에 있다고정한다. 관성 바퀴의 질량은 M 이고 회전축에 대한 관성 모멘트는 I 이다. 자이로스코프에 작용하는 외력은, 원점 O 에 작용하는 법선방향의 힘 \vec{n} 과, 원점 O 에서 r 만큼 떨어진 관성 바퀴의 질량 중심에 작용하는 무게 \vec{w} 이다. 원점 O 를 기준으로 볼 때, \vec{n} 에 의한 토크는 0이며, 무게 \vec{w} 에 의한 토크 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ 가 y 축방향으로 작용한다. 관성 바퀴가 회전하지 않을 때, 최초 각 운동량은 $L_i=0$ 이다.

(a) Nonrotating flywheel falls



When the flywheel is not rotating, its weight creates a torque around the pivot, causing it to fall along a circular path until its axis rests on the table surface.

(b) View from above as flywheel falls



In falling, the flywheel rotates about the pivot and thus acquires an angular momentum \vec{L} . The direction of \vec{L} stays constant.

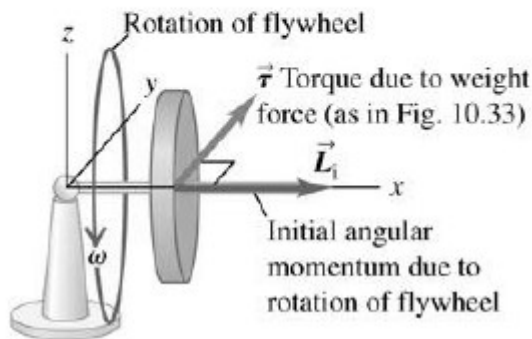
Fig 4.(a) If the flywheel in Fig 3 is initially not spinning, its initial angular momentum is zero (b) In each successive time interval dt , the torque produces a change $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ in the angular momentum. The flywheel acquires an angular momentum \vec{L} in the same direction as $\vec{\tau}$ and the flywheel axis falls.

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt \quad (8)$$

$d\vec{L}$ 은 토크 $\vec{\tau}$ 와 동일한 y 축방향이다. 작용하는 토크의 방향이 항상 일정하므로, 시간 dt 가 경과할 때마다 그림 4(b)와 같이 y 축방향으로 $d\vec{L}$ 이 더해지며 각 운동량 \vec{L} 이 지속적으로 증가한다. 즉, 관성 바퀴가 회전하지 않을 때에는, 자이로스코프가 바닥에 닿을 때까지 y 축을 중심으로 점점 빠르게 회전하며 떨어진다. 관성 바퀴가 회전하고 있을 때에는 그림 5(a)와 같이 자이로스코프의 회전축 방향으로 초기 각 운동량 \vec{L}_i 이 존재한다. 관성 바퀴에 작용하는 토크 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ 가 회전축에 수직이므로 순간 각 운동량의 변량 $d\vec{L}$ 은 \vec{L}_i 와 수직이다. 시간 dt 가 경과한 후 각 운동량은 $\vec{L}_i + d\vec{L}$ 이 된다. 그 결과, 그림 5(b)와 같이 \vec{L} 의 크기는 변하지 않고 방향이 바뀐다. \vec{L} 의 방향이 항상 xy 평면 위에 있으므로 $\vec{L}_i + d\vec{L}$ 도 xy 평면 위에 있다. 따라서, 아래쪽 방향으로 힘 \vec{w} 가 작용하면, 회전축은 아래로 떨어지지 않고 xy 평면상에서 세차 운동을 하게 된다.

(a) Rotating flywheel

When the flywheel is rotating, the system starts with an angular momentum \vec{L}_i parallel to the flywheel's axis of rotation.



(b) View from above

Now the effect of the torque is to cause the angular momentum to precess around the pivot. The gyroscope circles around its pivot without falling.

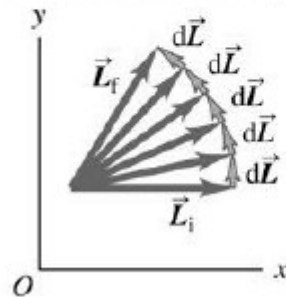


Fig 5.(a) The flywheel is spinning initially with angular momentum \vec{L}_i . The forces (not shown) are the same as those in Fig 4(a). (b) Because the initial angular momentum is not zero, each changed $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ in angular momentum is perpendicular to \vec{L} . As the result, the magnitude of \vec{L} remains the same but its direction changes continuously.

In a time dt , the angular momentum vector and the flywheel axis (to which it is parallel) precess together through an angle $d\phi$.

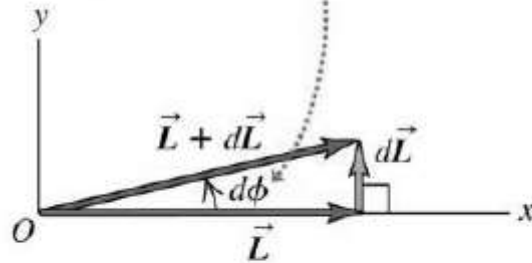


Fig 6.Detailed view of past of Fig 5(b)

시간 dt 동안 자이로스코프 회전축이 움직인 각도는, 그림 6과 같이 $d\phi = |d\vec{L}| / |\vec{L}|$ 이다. 따라서 자이로스코프의 세차 각속도 Ω 는 다음과 같다.

$$\Omega = d\phi/dt = |d\vec{L}| / |\vec{L}| dt = \tau z L z = \omega r I \omega \quad (9)$$

따라서, 세차 각속도 Ω 는 관성 바퀴의 회전각 속도 ω 에 반비례한다. 만약, 베어링의 마찰등의 외부 요인에 의해 관성 바퀴 회전속도가 줄어들면 세차 각속도는 증가 한다.

식(9)는 이상적인 조건에서 관성 바퀴의 무게에 의해서만 토크가 작용할 때 적용할 수 있다. 그러나, 실제로 실험에서 사용하는 자이로스코프장치에는 데이터 측정과 여러 조건의 실험을 진행하기 위한 부가적인 장치들이 부착되어있기 때문에 다양한 토크가 작용한다. 게다가, 각장치들의 질량과 질량 중심의 위치를 정확히 알 수없기 때문에, 작용하는 토크를 계산하기가 어렵다. 따라서, 이상적인 자이로스코프와 다른 방법으로 실험을 진행한다. 먼저, 균형 추의 위치를 조절하여, 수평회전축상의 모든 물체가 중심점에 대해 축을 회전시키려는 토크가 평형을 이루게 한다. 그후, 회전축끝에 무게 추를 걸어 주면, 결과적으로 무게 추에 의한 토크 이외의 것을 고려할 필요가 없기 때문에 실험 결과를 계산하기 쉽다. 따라서, 식(9)를 다음과 같이 수정하여 적용한다.

$$\Omega = \tau L = MgRI\omega(10)$$

I : 관성 바퀴의 관성 모멘트

ω : 관성 바퀴의 회전각 속도

M : 무게 추(거치형)의 질량

g : 중력 가속도

R : 고 정점 - 무게 추거리

지금까지 자이로스코프의 운동을 분석할 때, 관성 바퀴의 회전에 의한 영향만 고려하여 각 운동량 \vec{L} 이 평면상에서 움직인다고 가정하였다. 그러나, 실제로는 자이로스코프의 세차 운동에 의한 각 운동량의 수직적 성분도 존재한다. 세차 운동이 관성 바퀴의 회전운동에 비해 매우 느린 조건에서는 이를 무시할 수 있으나, 그렇지 않을 경우에는 회전축이 수평방향으로 회전하면서 동시에 위아래로 움직이는 장동 운동을 하게 된다.

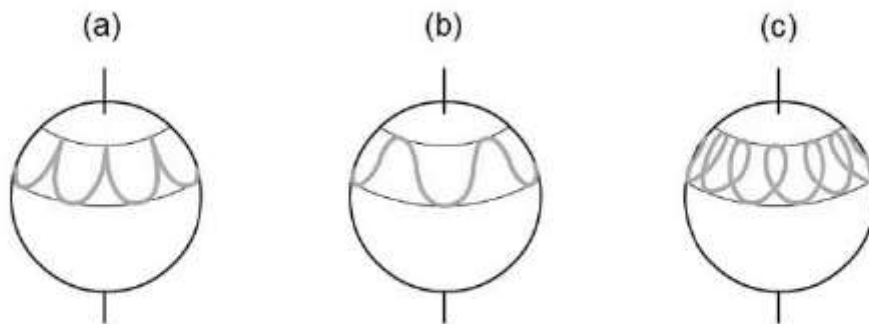


Fig 7. Nutation (a) released from rest (b) released with forward speed (c) released with backward speed

참고사항

- University Physics, 13th edition by Young & Freedman
- 10.1 Torque (p.308~311)
- 10.5 Angular Momentum (p.322~325)
- 10.7 Gyroscopes and Precession (p.328~330)

- Experimental Manual 1-08, Gyroscope, YOUNSEI University