

Quiz 4 (11월 28일 금 5, 6 교시)

[2014년 2학기 수학 및 연습 2]

(시간은 20분이고, 20점 만점입니다.)

\* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (7점) 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

와 영역

$$R : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

에 대하여 그린정리가 성립함을 보이시오.

2. (7점) 곡면  $x^2 + y^2 - z = 0$  을 평면  $z = 4$  로 잘랐을 때 이 평면 아래에 있는 부분의 넓이를 구하시오.

3. (6점) 영역  $D$  는  $r = 1 + \cos \theta$  의 내부와  $r = 1$  의 외부의 교집합일때 벡터장  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y + 2x, -xy^2)$ 에 대하여 다음을 구하시오.

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

(단,  $\mathbf{n}$  은  $D$  의 경계에서  $D$  외부로 향하는 단위법벡터장이다.)

#### Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1.  $M := \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $N := \frac{x}{x^2 + y^2}$  이라고 하자. 그러면  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  이다.

따라서  $\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dV_2 = 0$  이다. (3점)

한편  $R$ 의 경계  $C$ 는 반지름이 1과  $\frac{1}{2}$ 인 두 개의 원  $C_1, C_2$ 로 구성되어 있다. ( $C_1, C_2$ 는 양의 방향으로 향이 주어져 있다.) 그러므로

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi - 2\pi = 0$$

이다. 따라서 그린정리가 성립한다. (7점)

2.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ 으로 두면  $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ 이 된다. 따라서 구하고자 하는 부분의 넓이  $A$ 는

$$A = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dxdy$$

이 된다. (3점)

치환적분을 이용하여 주어진 적분을 구하면  $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$ 이 된다. (7점)

3.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2xy + 2 - 2xy = 2$ 이므로, (3점) 발산정리에 의하여,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV_2 \\ &= \iiint_D 2 \, dV_2 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+\cos \theta} 2r \, dr d\theta - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta - \pi \\ &= 4 + \frac{\pi}{2} \quad (6\text{점}) \end{aligned}$$