일반통계학
제 5장
통계적 추론

통계학 2016.1학기 정혜영

1.1 점추정

-모수를 하나의 값으로 택하는 것

(1) X_1, …, X_n이 랜덤표본 일 때, x_1, …, x_n 은 관측값, θ는 모수(parameter)

(2) 추정량 : 미지의 모수 θ의 추정에 사용되는 통계량 $\hat{\theta}$ = t(X_1, …, X_n)

추정치 : 추정량에 표본 관측값을 대입한 값 t(x_1, …, x_n)

(예) $\hat{\mu} = \bar{X}$(모평균 μ에 대한 추정량) , $\bar{x}$ (모평균 μ에 대한 추정치)

(3) 표준오차 : 추정량 $\hat{\theta}$의 표준편차 S.E($\hat{\theta}$) = $\sqrt{Var(\hat{\theta})}$

(4) 평균제곱오차 (mean square error, MSE)

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

1.2 좋은 점추정량의 성질

(1) 불편성 : $E(\hat{\theta}) = \theta$ 일 때, $\hat{\theta}$은 θ의 불편추정량

(2) 효율성 : θ 에 대한 두 추정량 $\widehat{\theta_1}$과 $\widehat{\theta_2}$에 대해서 Var($\widehat{\theta_1}$) < Var($\widehat{\theta_2}$) 일 때,

$\widehat{\theta_1}$이 $\widehat{\theta_2}$보다 더 효율적인 추정량이 된다.

(3) 일치성 : $\lim_{n\to\infty} P\{|\widehat{\theta_n} - \theta| > \varepsilon\} = 0$ 일 때, $\widehat{\theta_n}$은 θ의 일치추정량

즉, 표본크기가 점차 커짐에 따라 점추정량의 값이 모수에 근접

- 모평균 μ 의 점추정량 $\hat{\mu}$ = 표본평균 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, S.E($\hat{\mu}$)=$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 모비율 p 의 점추정량 $\hat{p}$=표본비율 $\bar{P} = \frac{X}{n}$, (X : 성공의 수~B(n, p))

$$\text{S.E }(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- 모분산 σ^2의 점추정량 $\widehat{\sigma^2}$ = 표본분산 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

- 불편성 증명

$$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$E(\bar{P})=E(\frac{X}{n})=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p$$

$$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu)]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2-2n(\bar{X}-\mu)^2]\ (\because \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=n(\bar{X}-\mu))$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\bar{X}-\mu)^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n})=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2\quad,\ E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\neq\sigma^2$$

- 불편추정량에 대한 MSE

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 + E\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 + 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))\underbrace{(E(\hat{\theta}) - \theta)}_{\text{상수}}]$$

$$= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 + E\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 + 2\ (E(\hat{\theta}) - \theta)\ \underbrace{E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))}_{=E(\hat{\theta})-E(\hat{\theta})=0}$$

$$= E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 + E\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + \mathrm{Bias}(\hat{\theta}, \theta\ )$$

만약, 추정량 $\hat{\theta}$이 불편추정량 ($E(\hat{\theta})=\theta$) 이면

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) = \{S.E(\hat{\theta})\}^2$$

1.3 구간추정

- 모수 θ에 대하여 통계량 $L_\theta(X_1, \ldots, X_n)$ 과 $U_\theta(X_1, \ldots, X_n)$이 있어서

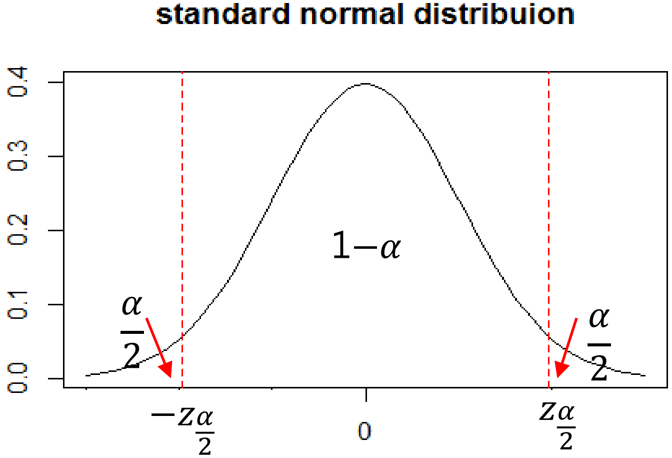
$$P(\theta \in (L_\theta,\ U_\theta)) = \mathrm{P}(L_\theta < \theta < U_\theta) = 1 - \alpha$$

일 때, 구간 $(L_\theta,\ U_\theta)$의 관측값 $(L_\theta(x_1, \ldots, x_n),\ U_\theta(x_1, \ldots, x_n))$를 θ의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간 또는 구간 추정값이라고 한다.

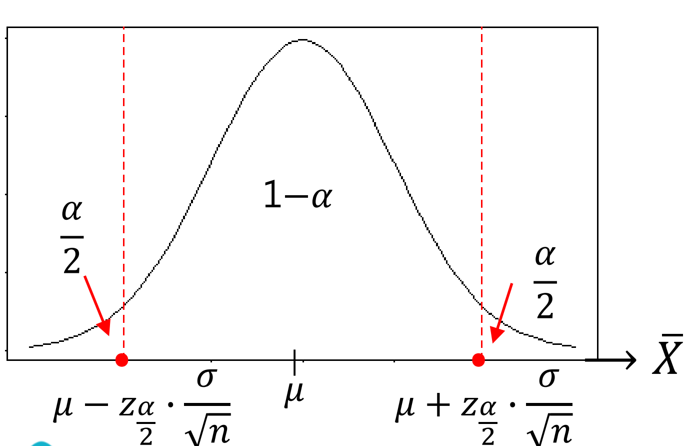
- 신뢰수준 1-α는 신뢰구간을 여러 번 반복해서 얻을 때, 100(1-α)%의 신뢰구간들이 모수 θ를 포함함을 의미한다.
- 동일한 신뢰수준하에서 신뢰구간의 길이가 짧을 수록 더욱 정교한 구간추정이 된다.

1.3 구간추정

- 모분산을 알 때 모평균 μ에 대한 100(1−α)% 신뢰구간 유도



Normal distribuion



$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

(해석: 표본평균이 구간 사이에 존재할 확률)

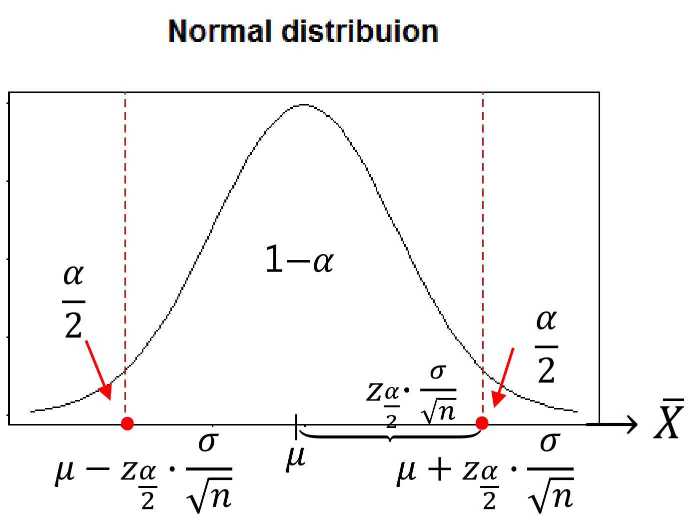
$$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

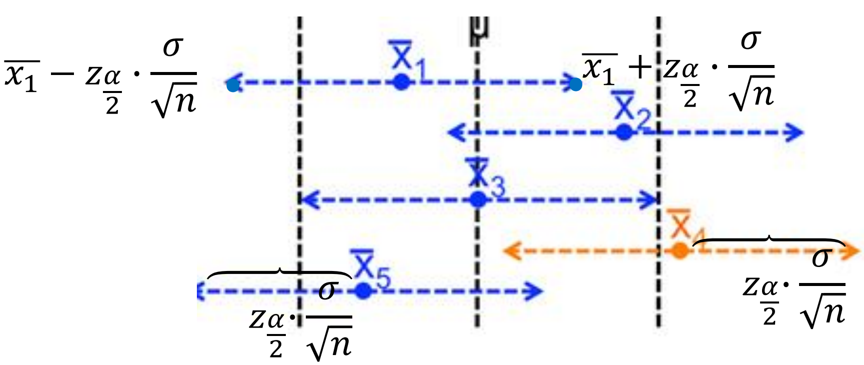
(해석: 구간이 모평균 μ를 포함할 확률)

즉, 표본평균이 1−α 구간안에 존재하면 그 표본평균으로 구한 확률구간은 모평균을 포함하게 된다. => 우리가 원하는 구간추정의 의미를 갖게 됨.

1.3 구간추정

- 모분산을 알 때 모평균 μ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간$=(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$





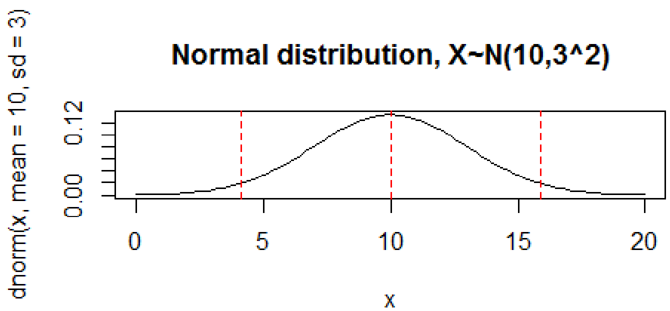
< 95% 신뢰구간의 의미 >

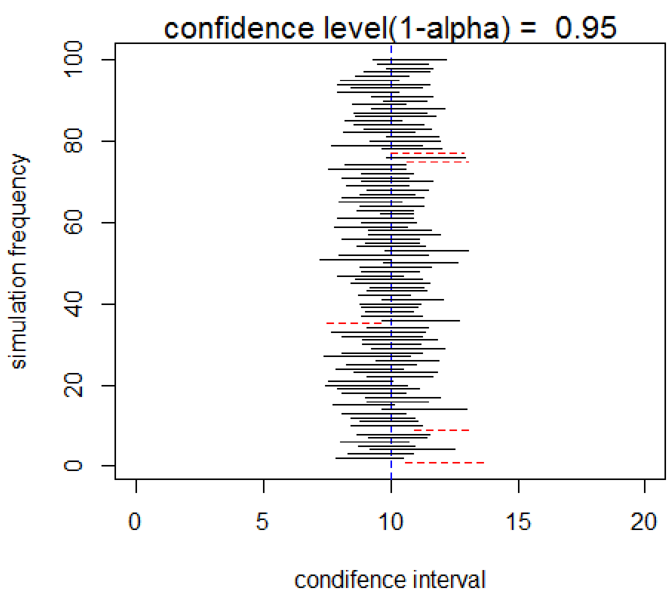
: 100번의 실험결과 표본평균 100개가 얻어지는데 이것으로 만든 신뢰구간 중 95개는 모평균을 포함하고 5개는 모평균을 포함하지 않는데 이 100개의 구간 중 1개를 의미.

(즉, 100개의 표본평균 중 95개는

$(\mu - z_{\frac{0.05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{0.05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 구간 안에 있고 5개는 구간 밖에 있는데 그 100개 중 1개의 표본평균을 얻었다.)

1.3 구간추정





- 모수는 우리가 모르긴 하지만 불변의 값인 반면, 신뢰구간은 표본에 따라 달라질 수 있으므로, '모수가 신뢰구간에 포함될 비율'이 아니라, 여러 번 표본을 뽑아 신뢰구간을 구하였을 때 '<u>신뢰구간이 모수를 포함할 비율</u>'을 고려하는 것 ⇒ 그 비율이 신뢰수준
- $100(1-\alpha)\%$ 신뢰수준을 갖는 신뢰구간

  $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$: 이 구간이 모평균 μ를 포함한다고 신뢰할 만한 수준이 $100(1-\alpha)\%$ 다.
- 오차한계 : $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\underbrace{|\bar{x} - \mu|}_{\text{오차}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right.$가 될 것이라 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰할 만 한다.)

1.3 구간추정

- 표본크기 : 100(1−α)% 오차한계를 d 이하로 혹은 신뢰구간의 길이를 2d 이하로 하기 위한 표본의 크기는 (즉, $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le d$)

$$n \ge (z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma / d)^2$$

- 표본의 크기를 늘이면 같은 신뢰수준하에서 오차한계를 줄일 수 있다. 즉, 신뢰구간의 길이를 줄여서 더 정교한 구간추정이 가능하다.

예제) σ=30일 때, 95% 오차한계를 5이하로 만들기 위해 필요한 표본크기는?

$$n \ge (z_{\frac{0.05}{2}} \cdot 30/5)^2 = 138.2976$$

설문지 응답자가 139명 이상은 되어야 설문지 결과로 얻은 표본평균의 값이 실제 모평균과 ±5이내에 있다고 95%정도 신뢰할 수 있다.

2.1 가설검정 용어 정리

-가설검정 : 표본으로부터 주어진 정보를 이용하여, 모수에 대한 예상, 주장 또는 단순한 추측 등의 옳고 그름을 판정하는 과정

(1) 가설 (hypothesis): 어떤 법칙을 설명하는 기술

• 귀무가설 (null hypothesis: H_0)
-반증을 찾기 위해 상정된 가설 또는 기존의 가설

• 대립가설 (alternative hypothesis: H_1)
- 자료로부터의 강력한 증거에 의하여 입증하고자 하는 가설
-양측가설과 단측가설이 있다.

예) 기존 공정에서 전구의 수명에 대한 평균이 120시간이고 표준편차가 10이다. 새로운 공법에 대하여 표본 25개를 뽑아 표본평균을 구해보니 124였다.

a. 새로운 공법이 평균을 증가시켰다고 말할 수 있는가?

$$H_0: \mu = 120 \;\; vs \; H_1: \mu > 120 \text{ (단측 가설)}$$

b. 새로운 공법과 기존의 공법의 평균 수명이 다르다고 할 수 있는가?

$$H_0: \mu = 120 \;\; vs \; H_1: \mu \neq 120 \text{ (양측 가설)}$$

(2) 가설검정 : 귀무가설의 반증에 대한 강도를 제공하여 귀무가설의 기각 여부를 판정하는 것. 귀무가설을 기각할만한 증거를 대라!

(3) 검정통계량 (test statistic) : 가설검정에 사용되는 통계량, 검정하려는 모수의 점추정량이 되기도 하고, 이 점추정량을 표준화 한 것을 사용하기도 함

(4) 검정오류

	H_0 **참**	H_1 **참**
H_0 채택	옳은 결정 $(1-\alpha)$	제2종 오류(β)
H_0 기각	제1종 오류(α)	옳은 결정 $(1-\beta)$

2 가설검정

- 제 1종 오류 (Type I error, α $=P(H_0$ 기각 | H_0가 참) : 검정의 **유의수준)**

: 귀무가설이 맞는데도 잘못하여 이를 기각하고 대립가설을 채택할 확률

- 제 2종 오류 (Type II error, β= $P(H_0$ 채택 | H_1이 참))

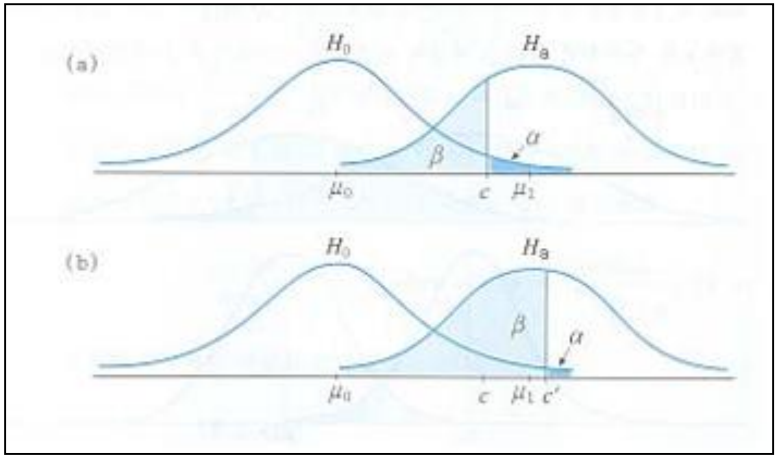
: 대립가설이 사실임에도 불구하고 귀무가설을 채택하게 되는 확률

- 검정력 (1-β) $=P$ (H_1 채택 | H_1가 참)= $P(H_0$ 기각|H_0가 거짓)

: -대립가설이 참일 때 대립가설을 선택 (귀무가설이 거짓일 때 귀무가설 기각)

-검정력이 클수록 좋은 검정 방법임.

2 가설검정

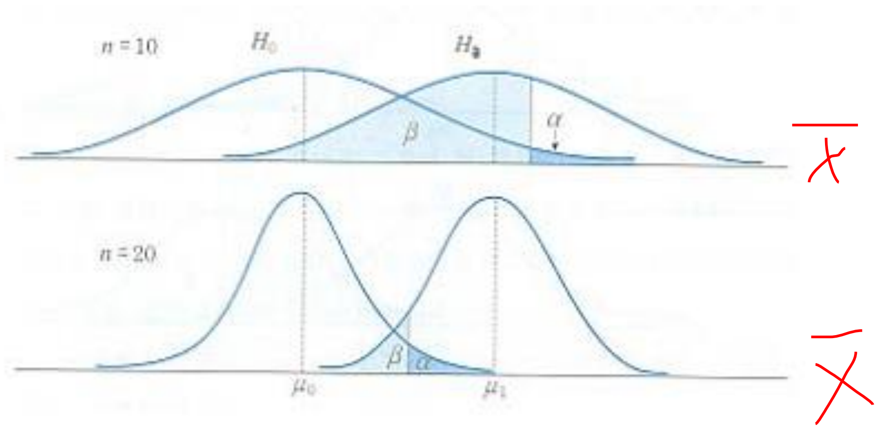


- 두 가지 검정오류인 α 와 β를 최소로 하는 기각역을 구하는 것이 최선 ⇒ 그러나 α 를 너무 작게 하려다 보면 β가 너무 커지는 모순관계가 있음.

B는 u_1, c에 대한 함수(2종 오류는 대립가설분포에서 찾음), A는 u_0, c에 대한 함수(1종 오류는 귀무분포에서 찾음)

- 이상적 목표는 α 와 β를 동시에 작게 하는 것이나, β는 수학적으로 다루기 매우 어렵다 ⇒ 실제문제에서는 주어진 α를 만족시키는 기각역 중에서 β를 최소로 하는 기각역을 선택 (=주어진 α 에 대하여 1-β를 크게 하는 검정을 선호)
- 검정통계량을 사용하여 검정하는 경우, 대립가설이 정의된 방향으로 기각역을 구하면 검정력이 가장 큰 최선의 기각역이 됨 (단측검정은 정의된 방향, 양측검증은 양쪽으로 기각역 구함)

<고정된 α에 대하여 표본수 증가에 따른 β의 변화>



- 표본의 수에 의해 두 검정오류를 동시에 줄이는 것이 가능하므로 표본수도 중요함.
- 적정한 검정오류를 만족시키는 표본의 수를 구하는 공식을 이용하여 적정한 표본수 산정 가능.

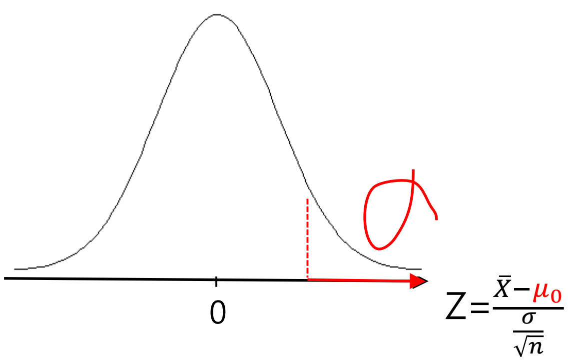
(5) 기각역

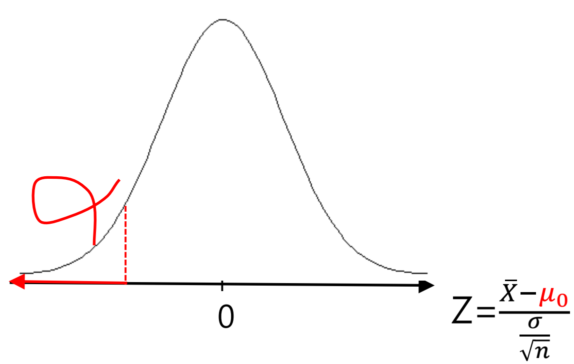
- 귀무가설 H_0가 참일 때, 검정통계량이 따르는 확률분포에서 귀무가설을 기각하게 되는 영역

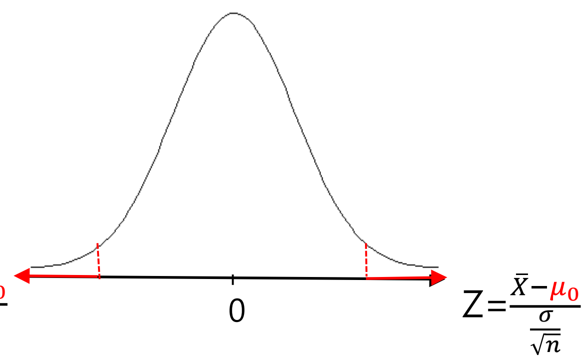
-대립가설에 따라 결정됨 (대립가설에 따라서 방향이 결정됨)

-기각역상에서의 확률=유의수준=제 1종 오류 α

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$ 　 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$ 　 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$







α=P($\bar{X} \geq r | \mu = \mu_0$)
=P($Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_\alpha$)

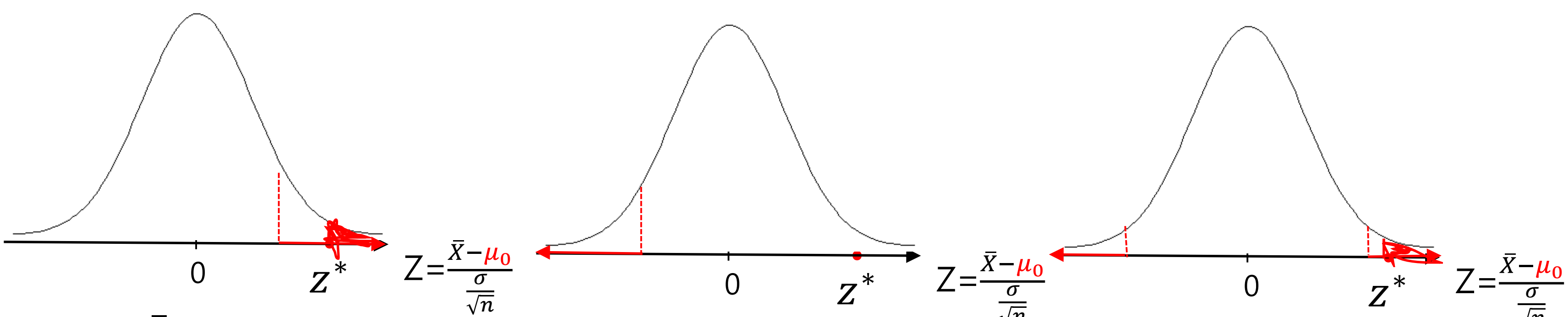
α=P($\bar{X} \leq r | \mu = \mu_0$)
=P($Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_\alpha$)

α=P($|\bar{X}| \geq |r| \,|\, \mu = \mu_0$)
=P($|Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}| \geq |z_{\alpha/2}|$)

(6) 유의확률 (P값)

- 귀무가설 H_0하에서 검정통계량이 실제 관측된 값 $\bar{x}$ 혹은 z^*보다 대립가설을 지지하는 방향으로 더욱 치우칠 확률 ($z^*=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$)
- 유의확률이 작을수록 귀무가설 H_0에 대한 반증이 강한 것을 의미한다. 즉, 유의확률 값이 작으면 대립가설 H_1이 참인 증거가 강함을 뜻한다.
- 유의확률이 유의수준 α보다 작으면 "주어진 유의수준 α에서 귀무가설 H_0를 기각할 만한 유의미한 증거가 된다" 라고 말한다.

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

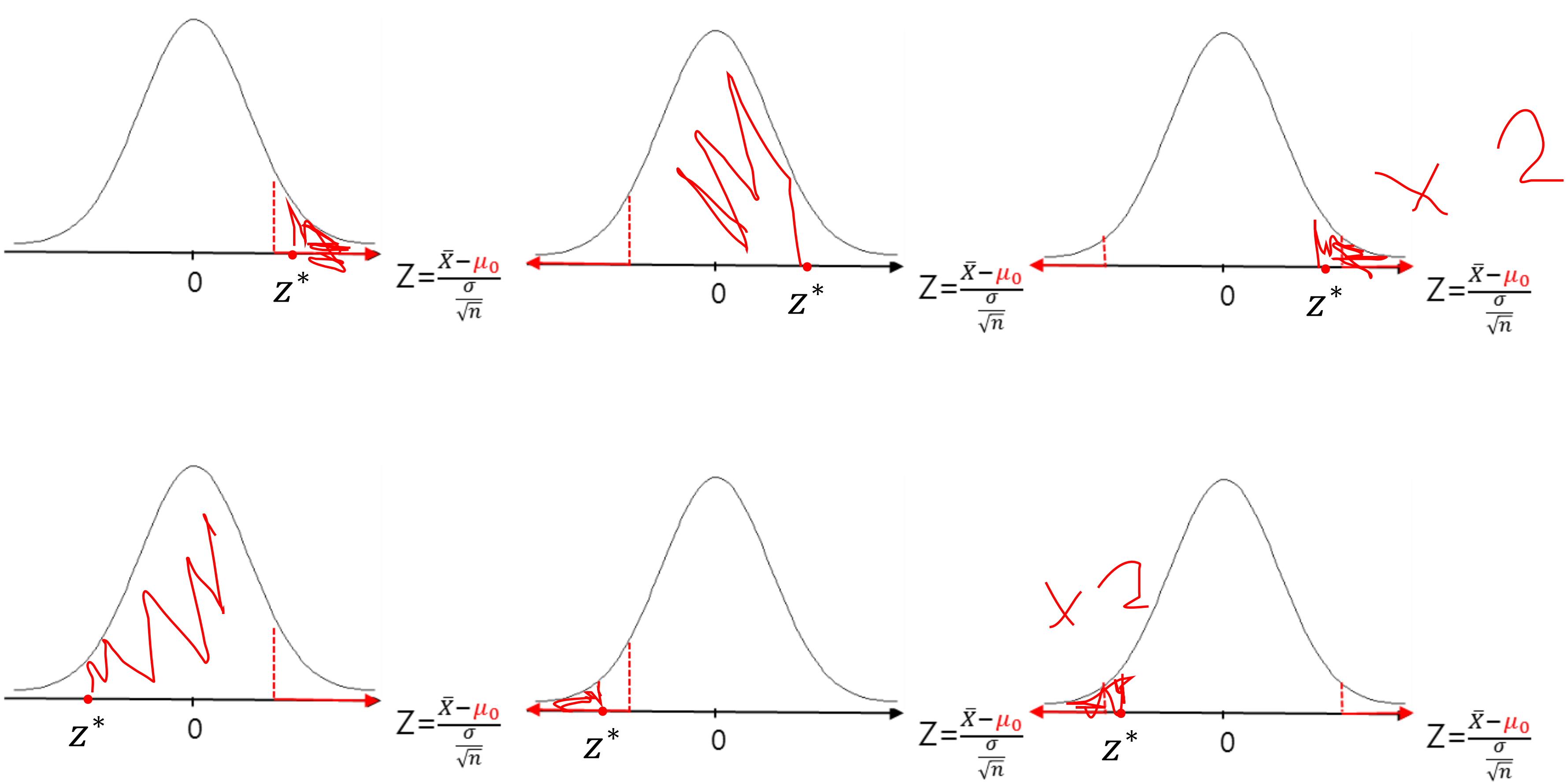


$P(\bar{X} \geq \bar{x} | \mu = \mu_0)$
$=P(Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

$P(\bar{X} \geq \bar{x} | \mu = \mu_0)$
$=P(Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

$P(|\bar{X}| \geq |\bar{x}| \mid \mu = \mu_0)$
$=P(|Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}| \geq |z^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}|)$

$H_0: \mu = \mu_0 \; vs \; H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0 \; vs \; H_1: \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0 \; vs \; H_1: \mu \neq \mu_0$



2.2 가설검정 절차

1. 가설 설정 : H_0: ________ vs H_1: ________
2. 유의수준 α 설정 (일반적으로 논문 혹은 실제 분석현장에서 많이 쓰는 수준으로 정함, 0.1, 0.05, 0.01 등)

u -> bar(X), sigma^2 -> S^2, u_1-u_2 -> bar(X_1)-bar(X_2)
sigma_1/sigma_2 -> S_1/S_2

3. 검정통계량 선택 (귀무가설 H_0 하에서)

모수에 귀무가설의 모수를 넣어준다. bar(X) - mu_0/(sigma/root(n))

4. 검정통계량 계산
5. 검정

-기각역으로 검정 : 4에서 계산된 값이 기각역에 속한다면 귀무가설을 기각할 만한 증거가 됨.

-P값으로 검정 : 얼마나 강한 정도를 가지고 기각하게 되는지를 알 수 있음. P값이 유의수준보다 작다면 귀무가설을 기각할 만한 증거가 됨.

6. 결론

$\overline{X}$

2.3 모평균에 대한 추론 (모분산을 알 때)

1. 가설설정

H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu > \mu_0$ H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu < \mu_0$ H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu \neq \mu_0$

2. 유의수준 α 설정

귀무가설을 넣는다!!

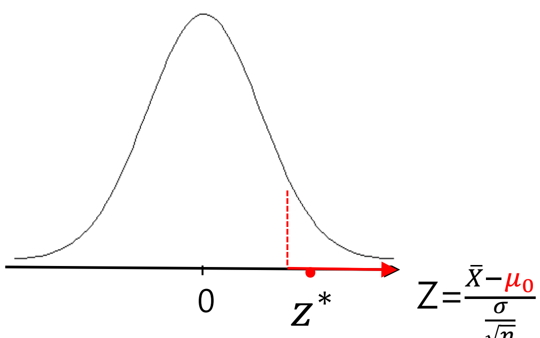
3. 검정통계량 선택 ($\hat{\mu} = \bar{X}$)

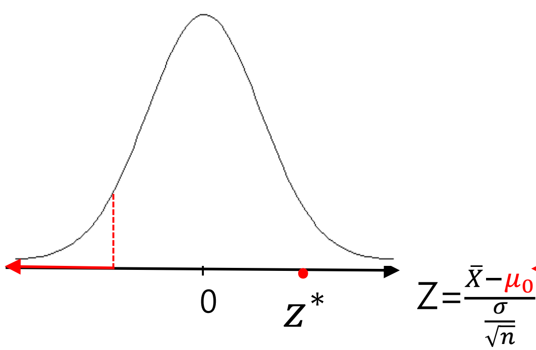
-모집단이 정규분포를 따를 때, Z=$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$~N(0,1)

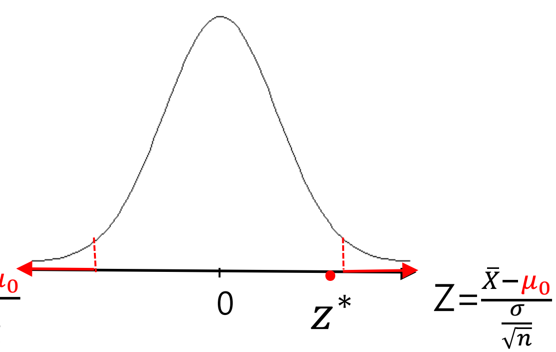
-모집단이 정규분포를 따르지 않으나, 표본의 크기가 클 때, Z=$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \dot{\sim}$ N(0,1)

4. 주어진 표본에 의해 검정통계량 계산 $z^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

5. 검정







귀무를 기각할 만한 희박한 증거가 된다.

(예제)새로운 첨가제가 페인트의 건조시간을 단축시키는가를 확인하기 위하여 가설

$$H_0: \mu = 75 \; vs \; H_1: \mu < 75$$

을 세우고, 시제품 100개를 생산하여 건조시간을 조사한 결과 평균 건조시간이 73.5분 이었다고 하자. 모표준편차는 9.4분으로 주어졌을 때 유의수준 5%에서 가설검정을 하시오.

(풀이) 1. 가설설정 : $H_0: \mu = 75 \; vs \; H_1: \mu < 75$

2. 유의수준 α 설정 : 0.05

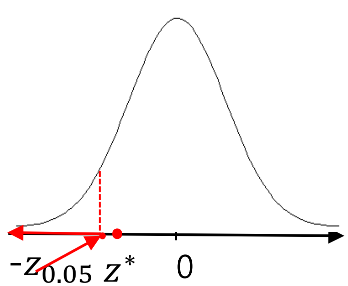
3. 검정통계량 선택 ($\hat{\mu} = \bar{X}$)

귀무가설을 넣는다.

-모집단이 정규분포를 따르지 않으나, 표본의 크기가 클 때, Z=$\frac{\bar{X}-75}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\dot{\sim}$N(0,1)

4. 주어진 표본에 의해 검정통계량 계산 z^*=$\frac{73.5-75}{\frac{9.4}{\sqrt{100}}}$=-1.5956

5. 검정



-기각역 사용 : -1.5956 > $-z_{0.05}$=-1.645

-P값 사용 : $P(\bar{X} \leq 73.5 | \mu = 75) = P(Z \leq z^*) \doteqdot 0.0548$ 덜 희박하다.

귀무가설을 기각할 만한 증거가 되지 못한다.

Z=$\frac{\bar{X}-75}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

결론쓰기

6. 결론 : 유의수준 5%에서 새로운 첨가제는 페인트의 건조시간을 단축시킨다는 유의미한 증거가 되지 못한다.

(예제) 건물의 소화용으로 사용되는 살수장치를 생산하는 회사에서 이 살수장치가 실내온도55도에서 작동되도록 제조하려고 한다. 제조공정의 이상여부를 판단하기 위하여 생산품 중에서9개의 표본을 추출하여 작동 시작 온도를 조사한 결과 그 평균온도가 55.63이었다. 전체 제품의 작동 시작 온도가 표준편차 0.9인 정규분포를 따른다고 할 때, 공정의 이상여부를 확인하기 위한 가설 $H_0: \mu = 55$ vs $H_1: \mu \neq 55$ 을 유의수준 1%에서 검정하여라

(풀이) 1. 가설설정 :

2. 유의수준 α 설정 : 0.01

3. 검정통계량 선택 ($\hat{\mu} = \bar{X}$)

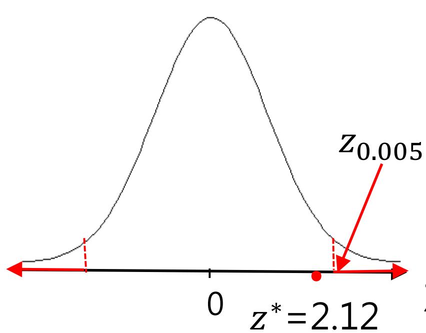
-모집단이 정규분포를 따르므로,

Z = (bar(X) - 55)/(0.9/3) ~ N(0,1)

z* = 0.63/0.3 = 2.1

4. 주어진 표본에 의해 검정통계량 계산 $z^*=$ =2.1

5. 검정



$Z=\frac{\bar{X}-55}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

-기각역 사용 : 2.1<z_a/2=2.576

-P값 사용 : P(X<55.63|u=55)= $P(|Z| \geq 2.1)$= 2 ×0.0179=0.0358

귀무가설을 기각할 만한 증거가 되지 못한다.

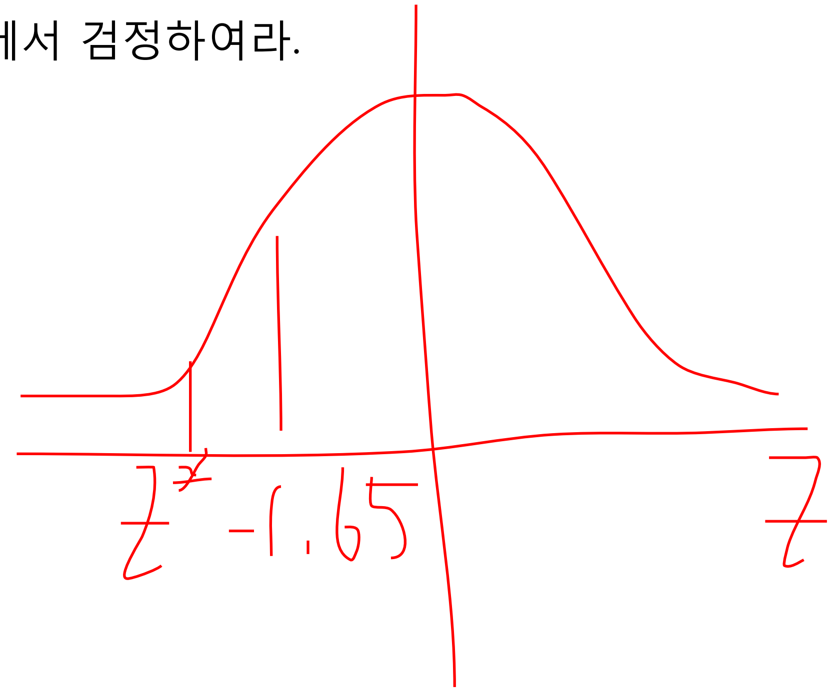
6. 결론 : 유의수준 1%에서 제조공정에 이상이 있다는 유의미한 증거가 되지 못한다.

2 가설검정

(예제) 한 제약회사에서 생산하고 있는 기존의 진통제는 진통효과가 나타나는 시간이 평균 30분, 표준편차 5분인 정규분포를 따르는 것으로 알려져 있다. 이 회사에서 새롭게 개발한 진통제의 효과를 확인하기 위하여 50명의 환자를 랜덤추출하여 새로운 진통제에 의해 그 효과가 나타나는 시간을 관측한 결과, 평균이 28.5분이었다. 새로운 진통제의 진통효과가 더 빠르다고 말할 수 있는지 유의수준 5%에서 검정하여라.

가설 u_1 < u_0 = 30
a=0.05
Z = (bar(X) - 30) / (5/root(50)) ~. N(0,1)
z* = -0.3*5*root(2) = -2.1213

-z* > 1.645



유의수준 5%에서 새로운 진통제의 진통효과가
더 빠르다른 증거가 된다.

(예제) 새로운 진통제의 효과가 나타나는 평균시간 μ 가 28분이면 이는 괄목할만한 개선이라고 한다. 실제로 $\mu = 28$이고 유의수준이 5%라고 할 때, 제 2종 오류 (β)를 범할 확률은?

(풀이)

1. 가설: H_0: $\mu = 30$ vs H_1: $\mu < 30$

2. 기각역 (귀무가설이 참인 확률분포하에서) : $\frac{\bar{X}-30}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le -z_{0.05}$=-1.645

대립가설이 참인 확률분포

3. 제 2종 오류=$P(H_0$채택 | H_0가 거짓)= $P(H_0$채택 | H_1이 참)= $P(H_0$채택 | $\mu = 28)$

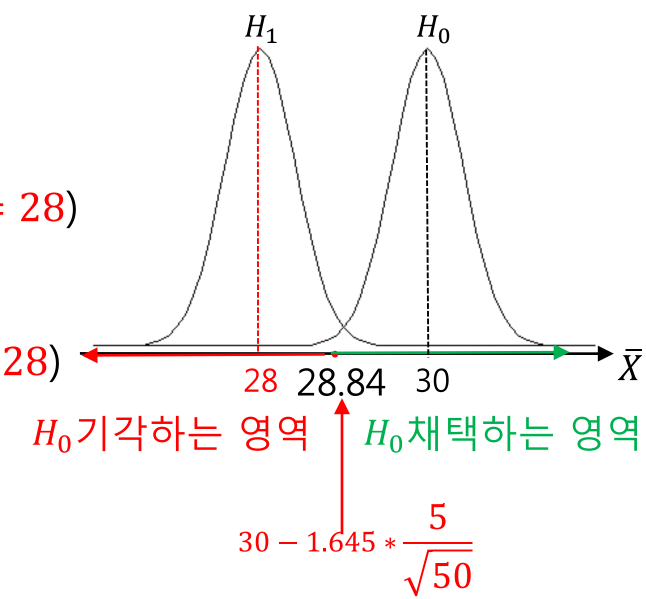
$$\beta = P(H_0\text{채택} \mid \mu = 28) = P\left(\frac{\bar{X}-30}{\frac{5}{\sqrt{50}}} > -1.645 \mid \mu = 28\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-28}{\frac{5}{\sqrt{50}}} + \frac{28-30}{\frac{5}{\sqrt{50}}} > -1.645 \mid \mu = 28\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-28}{\frac{5}{\sqrt{50}}} > -1.645 - \frac{28-30}{\frac{5}{\sqrt{50}}} \mid \mu = 28\right)$$

$$= P(Z > 1.183) = 0.1184046$$

검정력(power) 1− β=1−0.1184046=0.8815954



(예제) 앞의 예제에서 실제로 $\mu = 28$ 일 때, 제 2종의 오류를 범할 확률이 $\beta = 0.1$이하가 되도록 하며, 유의수준이 α =0.05 인 검정법(기각역을 의미)을 사용하려고 한다. 이 때, 요구되는 표본의 크기를 구하여라.

(풀이)$\beta = P(H_0$채택 | $\mu = 28) = P\left(\frac{\bar{X}-30}{\frac{5}{\sqrt{n}}} > -1.645 \mid \mu = 28\right)$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-28}{\frac{5}{\sqrt{n}}} + \frac{28-30}{\frac{5}{\sqrt{n}}} > -1.645 \mid \mu = 28\right)$$

$$= P\left(Z > -1.645 - \frac{28-30}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) \leq 0.1$$

표준정규분포로부터 $-1.645 - \frac{28-30}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \geq z_{0.1}$=1.282이어야 하므로

$$n \geq \left(\frac{1.645+1.282}{(30-28)/5}\right)^2 = 53.5458$$

따라서, 요구되는 표본의 크기는 54개 이상 이다.