

고급수학 및 연습 1 중간고사

(2015년 4월 18일 오후 1:00-3:00)

학번:

이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [30점] 다음 각 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 단 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n \end{cases}$

(b) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$

(c) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$

문제 2. [15점] 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

문제 3. [20점] 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n - 3^n + 5^n}$$

문제 4. [25점] 다음 각 급수의 합을 구하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^{2n}}{(2n)!}$

(b) (15점) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)2^n}$

문제 5. [10점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \searrow 0} \sin x \log x$$

문제 6. [20점] 다음 정적분의 근사값을 오차의 범위가 0.005 이하가 되도록 구하시오.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

문제 7. [20점] 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = 2x + \cos x$$

$y = f(x)$ 의 역함수 $x = g(y)$ 가 존재함을 보이고, $y = 1$ 에서의 2차 근사다항식 $T_2^1 g(y)$ 를 구하시오.

문제 8. [20점] $x = 0$ 에서 함수 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 의 테일러 급수 $Tf(x)$ 를 구하고, $f(1) = Tf(1)$ 임을 보이시오.

문제 9. [20점] 극좌표계로 주어진 두 곡선

$$r = \sin 3\theta, \quad r = \sin \theta$$

의 개형을 그리고, 두 곡선의 원점이 아닌 교점을 모두 구하여 직교좌표계로 표시하시오.

문제 10. [10점] 멱급수를 이용하여 다음의 초기 조건이 주어진 미분방정식의 해를 구하시오.

$$f'(x) = xf(x), \quad f(0) = 1$$

문제 11. [10점] 수열 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ 이 수렴함을 보이시오.