Quiz 4 (11월 19일 금 3, 4교시)

[2010년 2학기 수학 및 연습 2]
(시간은 20분이고, 20점 만점입니다)

* 답안지에 학번과 이름을 쓰시오. 답안 작성시 풀이과정을 명시하시오.

1. (5점) 평면의 열린 집합에서 정의된 이급함수 f 에 대하여

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$$

   임을 보이라.

2. (5점) x-축과 사이클로이드

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

   로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

3. (10점) 좌표공간에서 중심이 $(0, R, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 yz-평면의 원을 z-축 주위로 회전시켜 얻은 곡면을 원환면(torus)이라 한다. (단, $0 < r < R$)

   (a) (3점) 원환면을 매개화하라.
   (b) (5점) 원환면의 면적소를 구하라.
   (c) (2점) 원환면의 넓이를 구하라.

Quiz 4 모범답안 및 채점기준 예시

1. 오일러 편미분 교환법칙에 의하여

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \mathrm{rot}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

2. x-축과 사이클로이드로 둘러싸인 부분을 D, 그리고 ∂D 에서 x-축 부분을 C_1, 사이클로이드 부분을 C_2 라 하자. (곡선 C_2 의 향에 유의하라.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{area}(D) &= \int_{\partial D} \frac{1}{2}(-y, x) \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_{C_1} \frac{1}{2}(-y, x) \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \frac{1}{2}(-y, x) \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(0, t) \cdot (1, 0)\, dt \\
&\quad + \int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2}(-a(1-\cos t), a(t - \sin t)) \cdot (a(1-\cos t), a \sin t)\, dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t - \frac{1}{2} t \sin t)\, dt = a^2\{2\pi - \frac{1}{2}(-2\pi)\} = 3\pi a^2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
X(\theta, \varphi) &= ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi) \\
\frac{\partial X}{\partial \theta} &= (-(R + r\cos\varphi)\sin\theta, (R + r\cos\varphi)\cos\theta, 0) \\
\frac{\partial X}{\partial \varphi} &= (-r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \\
\frac{\partial X}{\partial \theta} \times \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= ((R + r\cos\varphi) r\cos\theta\cos\varphi, (R + r\cos\varphi) r\cos\varphi\sin\theta, (R + r\cos\varphi) r\sin\varphi)
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial X}{\partial \theta} \times \frac{\partial X}{\partial \varphi}\right| = (R + r\cos\varphi) r$$

$$\mathrm{area}(\mathbb{T}^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi) r\, d\theta d\varphi = 4\pi^2 R r$$