Chapter 10. Rotation

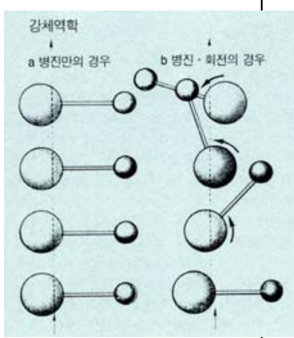
크기가 있는 물체에서:

1. 병진운동: 물체의 모든 지점이 같은 속도를 가지고 운동
2. (순수)회전운동: 물체의 모든 지점이 같은 각속도를 가지고 운동
3. 일반적인 운동: 병진운동 + 회전운동

회전운동을 어떻게 효과적으로 기술할 것인가?

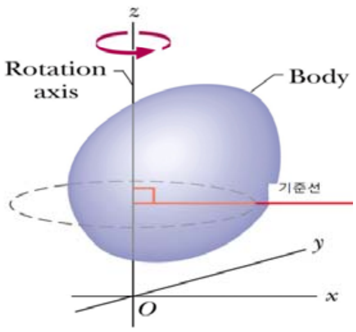
병진운동, 회전운동, 회전변수

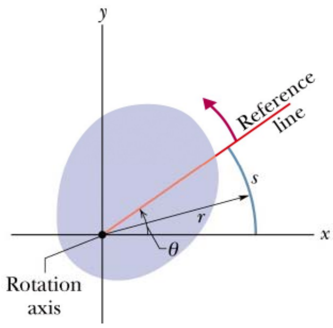
- 강체 (rigid body) : 물체를 구성하는 원자 간격이 변하지 않는 이상적인 물체 (eg. 이상적인 고체)
- 강체의 운동
  - 순수 병진운동 : 모든 부분이 같은 속도(크기, 방향)로 운동
    - (흔히) 질량중심의 운동으로 기술
  - 순수 회전운동 : 모든 부분이 한 축을 중심으로 같은 **각속도**로 운동
    - 회전운동의 기술 방법:
      - 각변위, 각속도, 각가속도
    - 회전축▸고정 & 변화
  - 복합운동 : 순수 병진운동과 순수 회전운동의 결합
- 원운동과 회전운동의 차이점
  - 원운동: 물체(입자로 생각)가 원둘레를 따라 움직임
  - 회전운동: 큰 물체(크기를 고려)가 축을 중심으로 돈다



회전변수

- 강체가 회전 → 강체의 구성 질점(원자)들은 **원운동**을 함
  - 모든 질점이 동일한 회전을 하므로 한 질점을 기준으로 삼음.





- 회전각 (θ): 기준질점를 가리키는 기준선이 얼마나 회전을 하였는가?

$$\theta \equiv \frac{\text{호길이}}{\text{반지름}} = \frac{s}{r} \quad (\text{단위}: \text{rad})$$

1 rad : "호길이 = 반지름"인 호의 각도 = 57.3°

회전운동의 변수

- 각변위: 시간에 따른 회전각의 차이

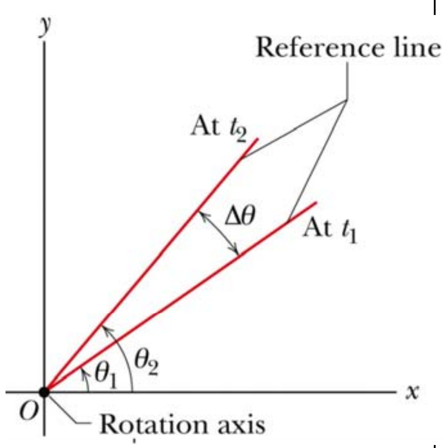
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (\text{단위}: \text{rad}) \leftrightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$

$$* \begin{cases} \text{반시계방향}: \text{양수} \\ \text{시계방향}: \text{음수} \end{cases}$$

- 각속도: 주어진 시간동안 회전각의 변화

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{단위}: \text{rad/s}) \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

$$* \text{각속력}: \text{각속도의 크기} = |\omega|$$

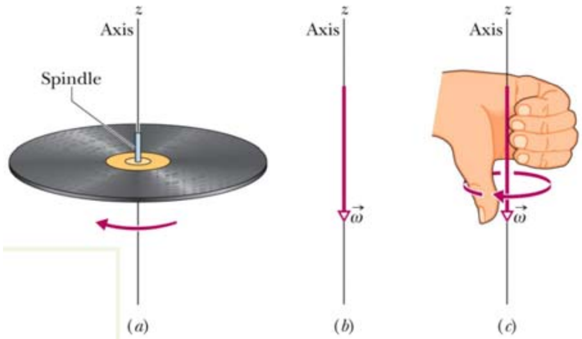


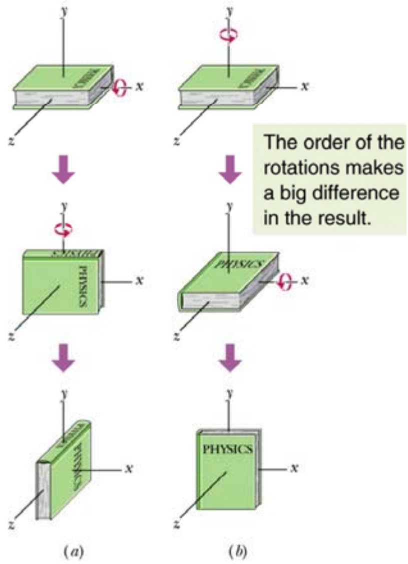
- 각가속도: 주어진 시간동안 각속도의 변화

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2} \quad (\text{단위}: \text{rad/s}^2) \leftrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

회전각/각속도/각가속도는 벡터량인가?

- 회전각, 각속도, 각가속도는 벡터량?
  - 방향 : 회전축의 방향
    - 오른손으로 회전축을 잡을 때 엄지손가락 방향.
  - 크기: 정의를 따른 크기.

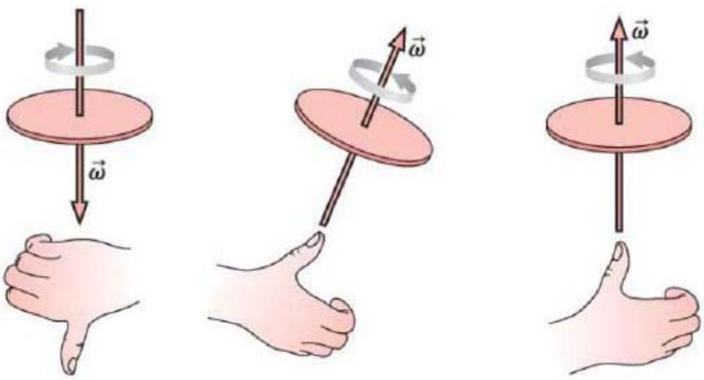




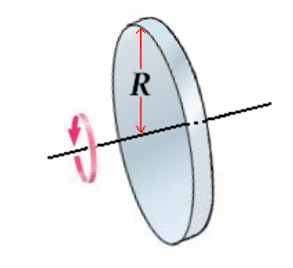
- 그러나 참된 벡터는 아님
  - 벡터 덧셈의 교환법칙이 성립 안됨 ➔
  - 그러나 미소회전에 대해서는 성립

각속도는 벡터임!

$$\omega \xrightarrow{\ upgrade\ } \vec{\omega}$$



등각가속도 운동



$\bullet$ 각가속도 : $\alpha(t) = \alpha =$ 일정

$\bullet$ 각속도 : $\dfrac{d\omega}{dt} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt' = \omega_0 + \alpha t$

$\bullet$ 회전각 : $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt' = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$t - \text{소거} \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Problem 10-10: *A disk, initially rotating at 120 rad/s, is slowed down with a constant acceleration of magnitude 4 rad/s^2.*

a) How much time does the disk take to stop?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(0 - 120 rad/s)}{-4 rad/s^2} = 30 s$$

?

b) Through what angle does the disk rotate during that time?

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = (120 rad/s)(30 s) + \tfrac{1}{2}(-4 rad/s^2)(30 s)^2$$
$$= 1800 rad = 286.5 rev$$

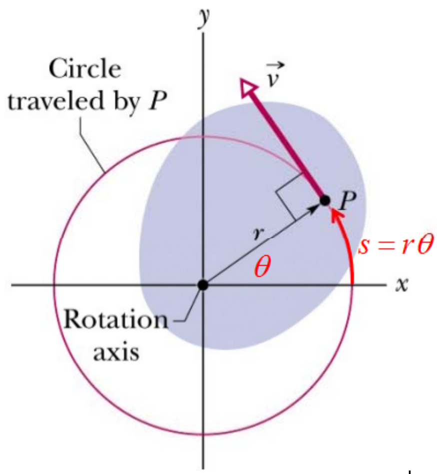
?

등가속도 직선운동 vs 등각가속 도 회전운동

직선운동	회전운동
x	θ
v	ω
a	α
$v = v_0 + at$	$\theta = \theta_0 + \omega t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

선변수와 각변수의 관계

- 강체가 회전하면 구성 질점은 **원운동**을 한다
  - 회전축에서 r 만큼 떨어진 질점 P의 회전각과 원을 따라 움직인 거리(s)의 관계?



•원운동의 거리 s와 회전각 θ:

$$\boxed{s = r\theta}$$

•회전속력 v와 각속도 ω:

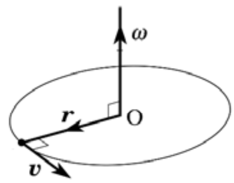
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{v = r\omega}$$

방향 : 접선방향

•좀 더 고급 표현:

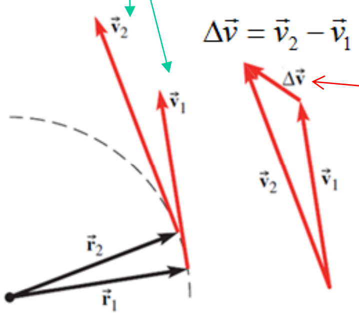
$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$



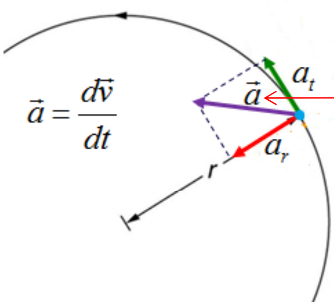
가속도와 회전가속도의 관계는 원주가 직선이 아니기 때문에 간단하지 않다

접선가속도

가속 원운동에서는 속도의 방향과 크기가 달라진다



일반적으로 원중심 방향 아님



중심성분과 접선성분으로 분해함

a_t affects magnitude
a_r affects direction

- 강체가 회전할 때, 구성입자는 일반적으로 **가속 원운동**을 한다: e.g. 그네 운동
- 일반적인 가속 원운동에서 가속도 성분:
  - ✓속도 방향이 얼마나 변하는가를 재는 **구심가속도(a_r:중심방향)**
  - ✓속력이 얼마나 변하는가를 재는 **접선가속도 a_t(접선방향)**

•구심가속도 : $a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad (= a_c$로 보통 씀)

$\rightarrow$ 중심방향으로 $\boxed{힘}$이 필요 : *e.g.* 장력

•접선가속도 $\rightarrow$ 각가속도와 연결됨

(등속원운동에서는 = 0)

$$a_t \equiv \frac{d|\vec{v}|}{dt} \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

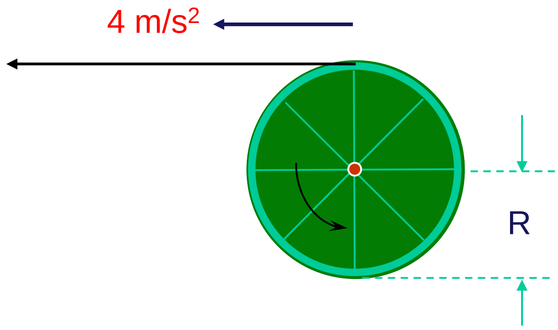
$\rightarrow$ 접선방향으로 작용하는 $\boxed{힘}$이 필요 $\rightarrow$ 토크

가속도 크기: $a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_t)^2}$

Problem

- A wheel with radius R = 0.4 m rotates freely about a fixed axle. There is a rope wound around the wheel. Starting from rest at *t = 0*, the rope is pulled such that it has a constant acceleration 4 m/s². How many revolutions has the wheel made after *10* seconds? (One revolution = 2π radians)

실을 당기는 가속도
=실이 풀리는 가속도
=접선가속도(a_t)



$\bullet$ 각가속도 : $\alpha = \dfrac{a_t}{R} = \dfrac{4\,\mathrm{m/s}^2}{0.4\,\mathrm{m}} = 10\,\mathrm{rad/s}^2$

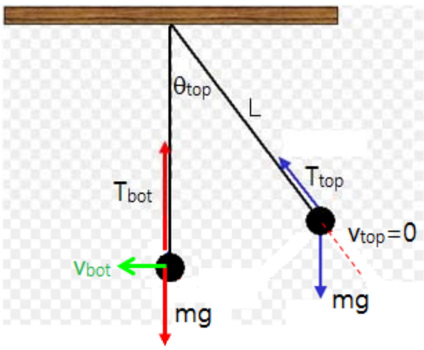
At $t = 10\mathrm{s}$,

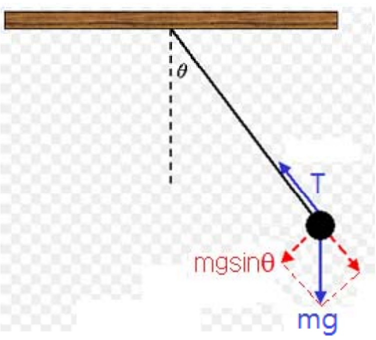
$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}\times 10 \times (10)^2 = 500\,\mathrm{rad}$$

?

$$= 500\,\mathrm{rad} \times \frac{1\,\mathrm{rev}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = 79.6\,\mathrm{rev}$$

그네는 가속 원운동을 한다...





$\bullet$ 중심방향 알짜힘 $\rightarrow$ 구심력

$$F_{net,c} = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L} \qquad (중심쪽+)$$

$$\begin{cases} \theta = \theta_{top} : v_{top} = 0 \longrightarrow \boxed{T_{top} = mg\cos\theta_{top}} \le mg \\ \theta = 0 : \boxed{T_{bot} = m\dfrac{v_{bot}^2}{L} + mg} \ge mg \end{cases}$$

$\bullet$ 에너지 보존 : $mgL(1-\cos\theta_{top}) = \frac{1}{2}mv_{bot}^2$

$\rightarrow T_{bot} = 2mg(1-\cos\theta_{top}) + mg = mg(3 - 2\cos\theta_{top})$

$\bullet$ 접선방향 알짜힘 $\rightarrow$ 접선가속도($a_t = L\alpha$)

$$F_{net,t} = mg\sin\theta = ma_t = mL\alpha$$

$$\alpha = \frac{g}{L}\sin\theta \rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_{top} : \alpha_{top} = \dfrac{g}{L}\sin\theta_{top} \\ \theta = 0 : \alpha_{bot} = 0 \end{cases}$$

회전운동에너지

- 회전운동에너지 :회전하는 강체를 구성하는 각 질점의 운동에너지 합
  - 회전축에서 거리에 따라 질점의 빠르기는 다르다
  - 하지만 모두 동일한 각속도 (ω)로 회전을 하므로 속도(v)보다 각속도를 쓰는 것이 편리

• 회전하는 강체의 운동에너지

$$K \equiv \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \leftarrow v_i = r_i \omega$$

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

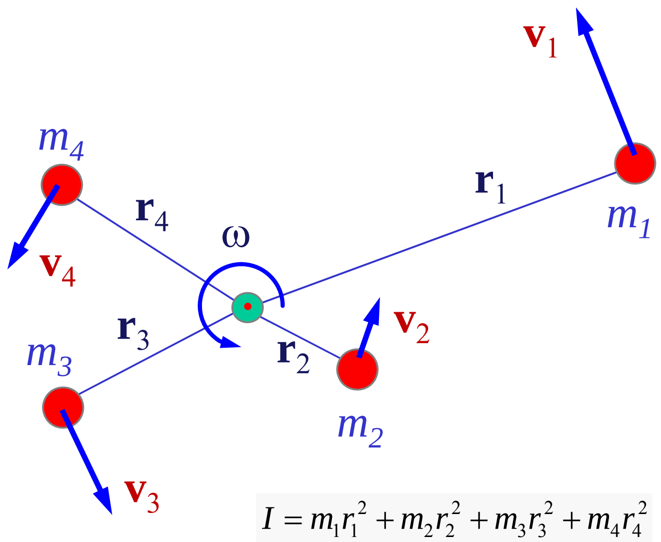
$$\boxed{I \equiv \sum_i m_i r_i^2}:$$

강체의 회전관성 (단위: $kg.m^2$)

• 고정축 회전운동 E:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I\omega^2}$$

비교: 입자의 병진운동 E: $K = \tfrac{1}{2} mv^2$

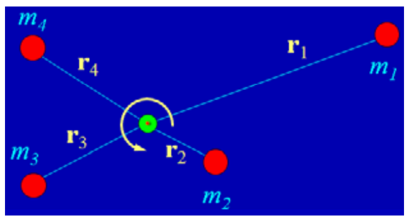


$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

회전관성

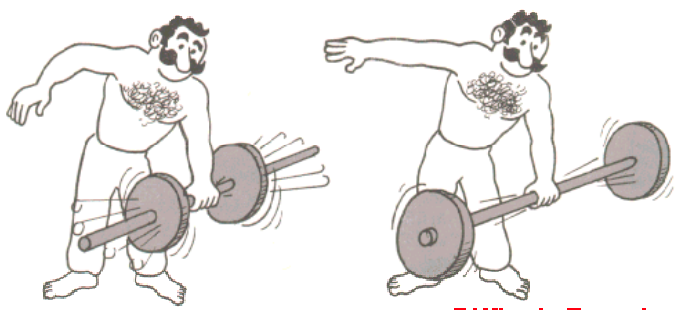
$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{단위}: \text{kg.m}^2)$$

$$I \sim (\text{질량}) \times (\text{회전축까지 거리})^2$$



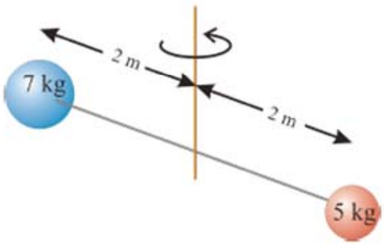
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

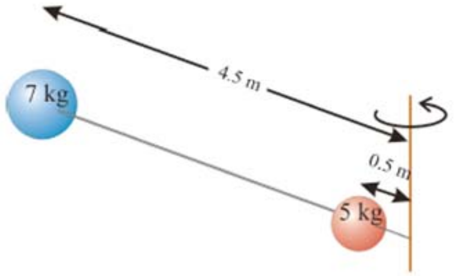
- 회전관성(rotational inertia, moment of inertia)의 물리적 의미:
  - 회전관성(I): 얼마나 회전시키기가 어려운가를 나타냄, K= ½ Iω²
    - 관성(m): 얼마나 운동시키기 어려운가를 나타냄, K= ½ mv²
  - 질량이 같아도 회전축의 위치(r_i), 물질의 분포에 따라서 달라짐



Easier Rotation   Difficult Rotation

회전축의 위치에 따른 회전관성의 변화





- $I = \sum m_i r_i^2$

$= (7\text{kg})(2\text{m})^2 + (5\text{kg})(2\text{m})^2$

$= 48\text{kg.m}^2$

- $I = \sum m_i r_i^2$

$= (7\text{kg})(4.5\text{m})^2 + (5\text{kg})(0.5\text{m})^2$

143kg.m^2

회전축에 가까이 있는 질량은 회전관성에 기여도가 낮다!

Question

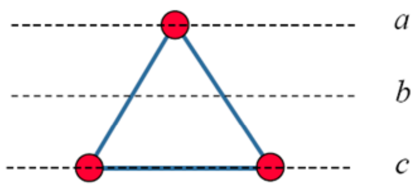
A triangular shape is made from identical balls and identical rigid, massless rods as shown. The moment of inertia about the a, b, and c axes is I_a, I_b, and I_c respectively.

Which of the following orderings is correct?

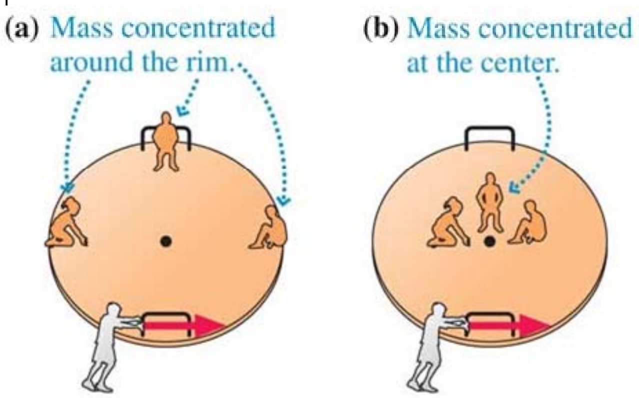
A) $I_a > I_b > I_c$

B) $I_a > I_c > I_b$

C) $I_b > I_a > I_c$



회전목마(Merry-go-round)를 돌릴 때, 타고 있는 사람이 중심 쪽에 있는 경우와, 가장자리에 있는 경우 중 어떤 상황이 더 돌리기 쉬운가?

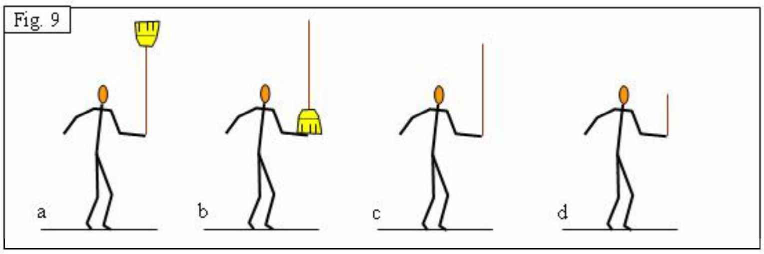


회전관성을 이용한 예들:

1. 공중 줄타기를 할 때 긴 장대를 들고 한다. Why?
2. 평균대를 건널 때 팔을 펴고 건넌다. Why?
3. 손바닥으로 물체의 균형을 잡을 때, 무게중심이 떨어진 것이 쉬운가 아니면 손바닥에 가까이 있는 것이 쉬운가?

나이아가라 건너기

회전관성이 증가하면 ➔회전에 저항하려는 경향도 커짐



Which is easier?

경운기의 **Flywheel**의 용도는?

회전관성이 커서 안정적으로 돌게함.

4기통 엔진은 180도 회전할 때 마다 회전력을 제공한다....중간은

연속적인 질량분포를 가지는 강체의 회전관성

강체를 구성하는 입자의 수가 매우 클 때는 질량의 분포가 공간상에 연속적으로 분포하는 것으로 취급할 수 있다

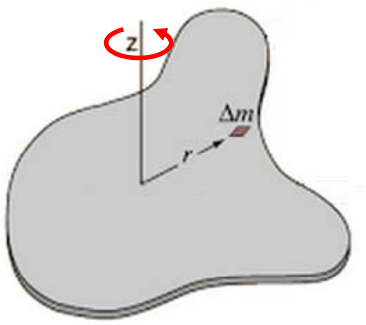
공간상의 미소부피 내의 질량(Δm)이 기여하는 회전관성 ($r^2\Delta m$)을 모두 더해서 강체의 회전관성을 구한다.

- 질량이 연속적으로 분포된 물체의 회전관성:

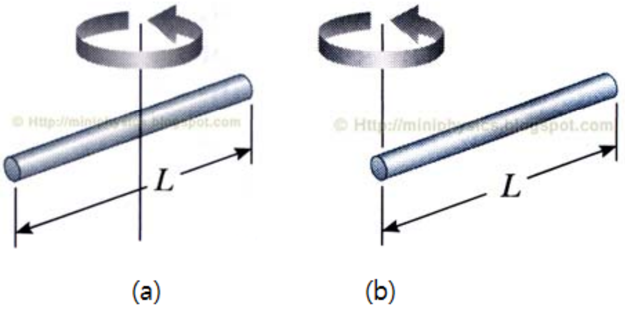
$$I = \sum r^2 \Delta m$$

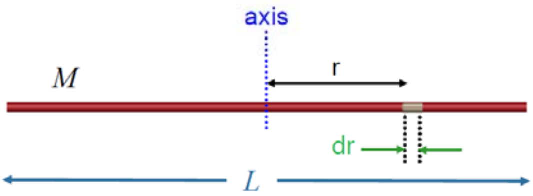
$$\longrightarrow I = \int r^2 dm$$

(계산을 위해서는 다중적분 테크닉이 필요함)



Ex. 긴막대의 회전관성.





• 막대의 두께는 무시:

단위길이당 질량: $\frac{M}{L}$

dr 부분의 질량: $dm = \frac{M}{L}dr$

• $I_{막대중심} = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \frac{M}{L} dr$

$= \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{M}{3L}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12}ML^2$

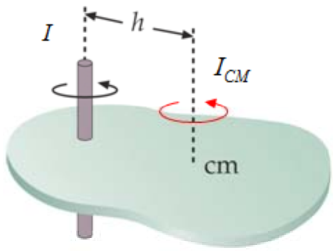
• 막대끝: 적분구간 $[0, L]$

$I_{막대끝} = \int_0^L r^2 \frac{M}{L} dr = \frac{1}{3}ML^2$

; 회전시키기가 더 어려움

평행축 정리

임의의 회전축에 대한 회전관성(I)은 이 회전축과 평행이면서 물체의 CM을 통과하는 회전축에 대한 회전관성(I_{CM})을 알면 쉽게 구할 수 있다.



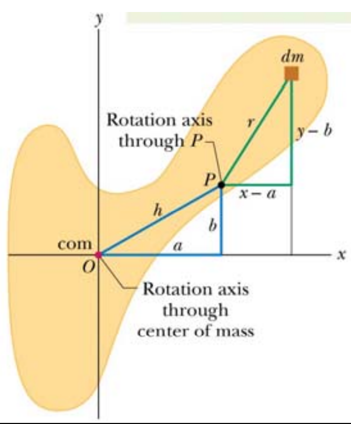
• 평행축 정리:

$I = P$를 지나는 회전축에 대한 회전관성

$I_{\mathrm{CM}} = CM$을 지나고, P를 지나는 회전축에 평행인 회전축에 대한 회전관성.

$\Rightarrow \boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$ $\begin{cases} M = \text{강체의 질량} \\ h = \text{회전축에서 } CM\text{까지 거리.} \end{cases}$

• note. CM 지나는 축에 대한 회전관성이 제일 작음 $(h = 0)$.



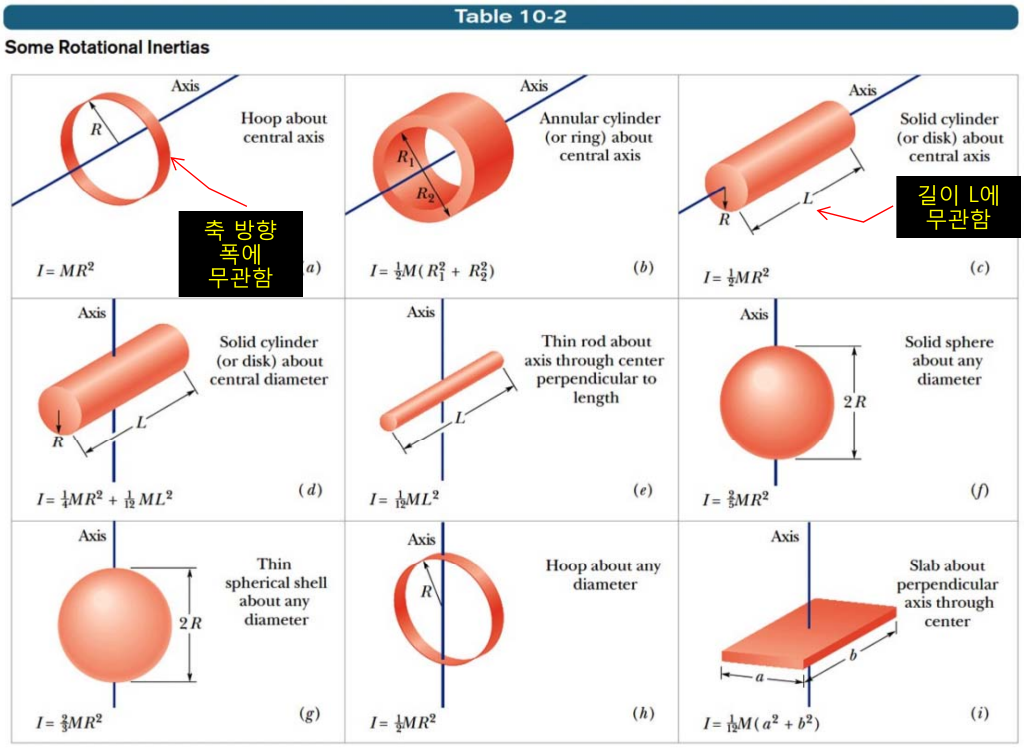
• 증명: CM을 원점으로 잡으면 편리함;

$I = \int rdm = \int \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}dm$

$= \int (x^2 + y^2)dm - 2a\int xdm - 2b\int ydm + (a^2 + b^2)\int dm$

$= I_{CM} + 0 + 0 + Mh^2$

$\because \int xdm = Mx_{CM} = 0, \ \int ydm = My_{CM} = 0$

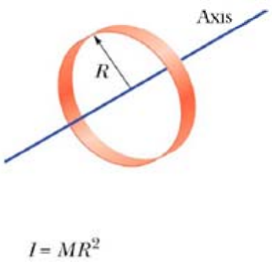


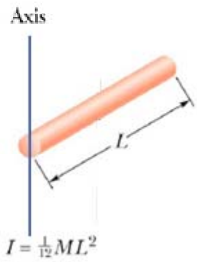
✓ 예제의 회전관성은 모두 질량중심을 지나는 대칭축에 대한 값이다.
✓ 같은 질량인 경우 질량이 회전축에서 멀리 떨어져 분포할수록 커진다
(solid sphere(f) 와 spherical shell(g)을 비교)

A bicycle wheel has a radius of 0.33m and a rim of mass 1.2 kg. The wheel has 50 spokes, each with a mass 10g.
What is the moment of inertial about axis of rotation?

• 바퀴를 알려진 강체들로 분해:

$$I_{바퀴} = I_{테두리} + 50 \times I_{바퀴살}$$





• $I_{바퀴살} = I_{바퀴살.CM} + Mh^2$:평행축 정리

$$= \tfrac{1}{12}ML^2 + M(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2$$

$$= \tfrac{1}{3}(0.01kg)(0.33m)^2 = 3.6\times10^{-4}kg.m^2$$

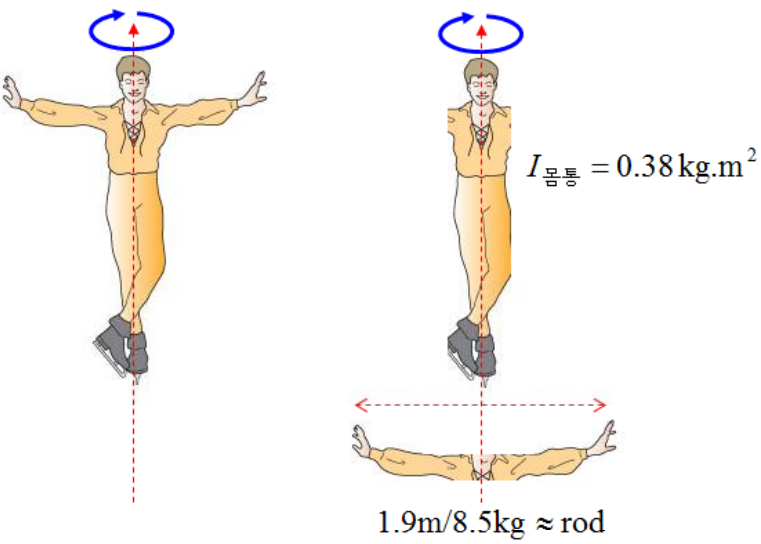
• $I_{바퀴} = (1.2kg)(0.33cm)^2 + 50(3.6\times10^{-4}kg.m^2)$

$$= 0.149kg.m^2$$

복합물체의 회전관성은 구성요소의 회전관성을 더하면 된다

Question

피겨 스케이터가 0.43 rev/s로 회전할 때 운동에너지는?

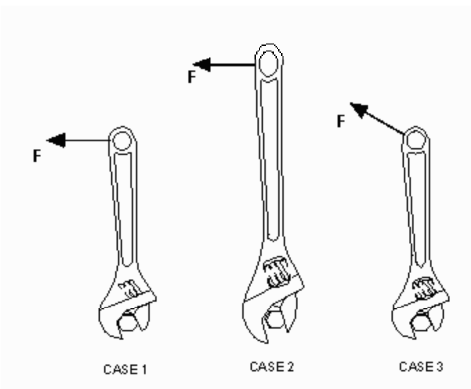


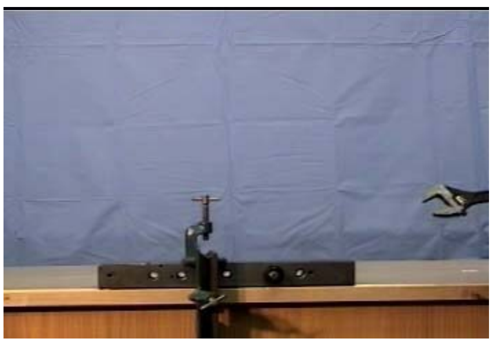
$$I = I_{몸통} + I_{팔}$$
$$= 0.38\mathrm{kg.m}^2 + \frac{1}{12}(8.5\mathrm{kg})(1.9\mathrm{m})^2$$
$$= 2.937\mathrm{kgm}^2$$

$$\omega = 0.43\,\mathrm{rev/s}$$
$$= 0.43 \times (2\pi)\,\mathrm{rad/s}$$
$$= 0.86\,\pi\,\mathrm{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(2.937\mathrm{kgm}^2)(0.86\,\pi)^2$$
$$= 10.72\,\mathrm{J} \approx 2.56\,\mathrm{cal}$$

나사가 가장 수월하게 풀리는 경우는

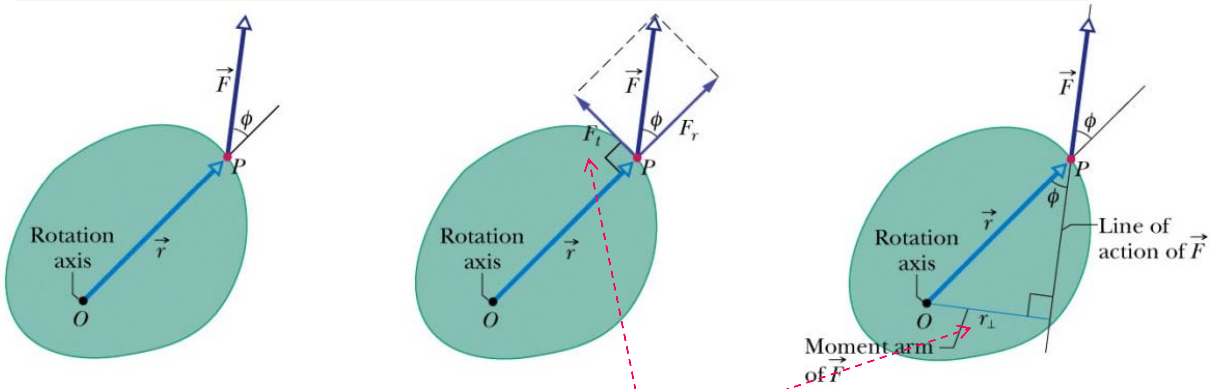




같은 힘을 주었는데 왜 효과가 달라지는가?

돌림힘(Torque)

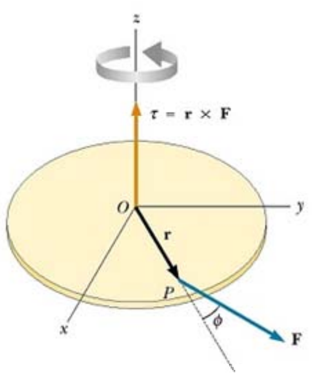
- 물체에 작용한 힘이 회전을 일으키려면
  - 작용점: 회전축 O 에서 떨어진 곳 P에 주어야
  - 힘의 방향: 회전원에 접선성분 F_t(선분 OP에 수직)가 있어야 함.
- **돌림힘(torque)**: 물체를 회전시키려고 하는 힘의 효력
  - 회전축에서 작용점까지의 **거리(r)**에 비례
  - **힘의 접선 성분의 크기 F_t**에 비례

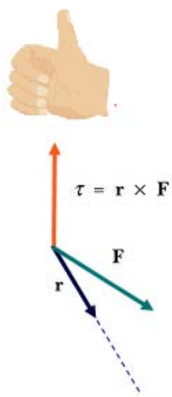


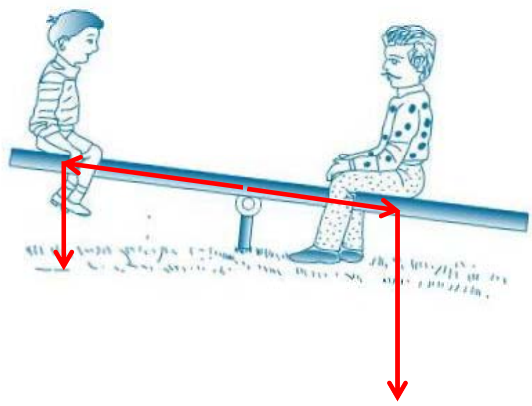
- 돌림힘 크기: $\tau = rF\sin\phi = rF_t = r_\perp F$ (단위: N.m ⇒ 일단위와 같다)
- 벡터형식: $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$

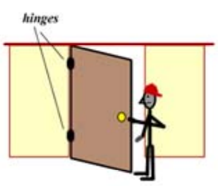
돌림힘: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow$ 벡터임 (오른손 규칙)

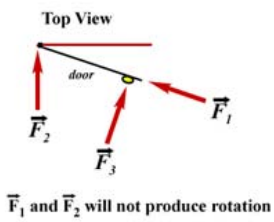
$$\tau = rF\sin\phi$$

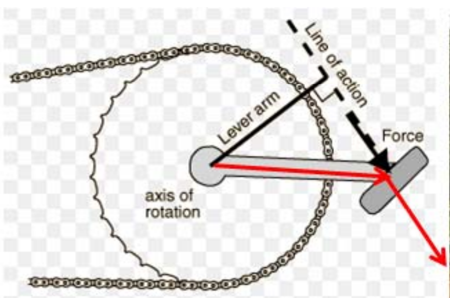




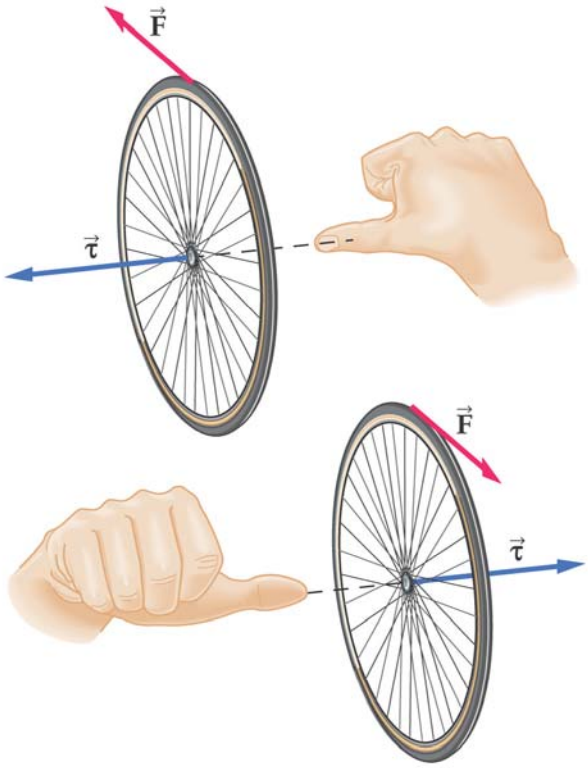




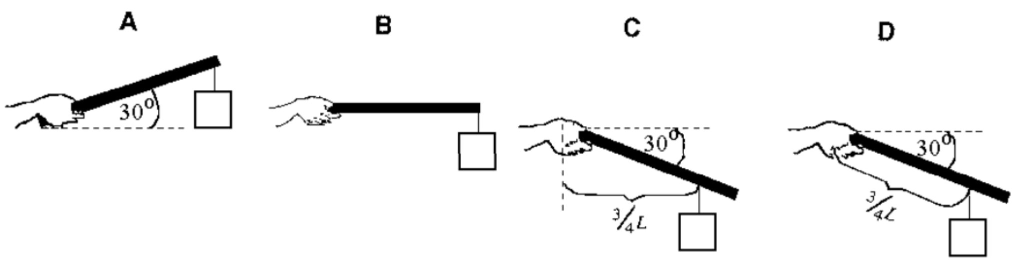




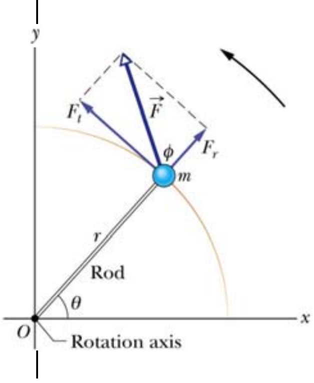
$$\text{돌림힘}:\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \text{벡터임 (오른손 규칙)}$$
$$\tau = rF\sin\phi$$



3kg 추가 달린 막대를 들기가 제일 어려운 것은**?**
(막대무게는 무시 **)**



(고정축) 회전운동에 대한 뉴턴법칙

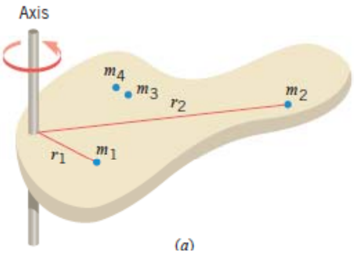


- 원운동의 빠르기를 변화시키려면 $(a_t \neq 0)$

  접선방향의 힘(F_t)을 주어야 : $F_t = ma_t$

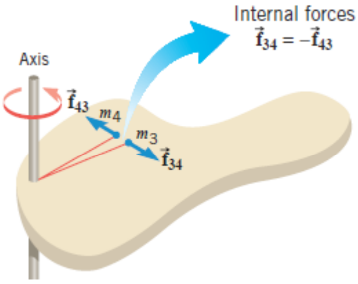
  접선방향 힘→토크생성: $\tau = rF_t$

  $\tau = r(ma_t) = mra_t = mr(r\alpha) = (mr^2)\alpha$



- 강체=같은 각가속도로 회전하는 입자모임

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= (m_1 r_1^2)\alpha \\ \tau_2 &= (m_2 r_2^2)\alpha \\ &\vdots \\ \tau_N &= (m_N r_N^2)\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{net} = (m_1 r_1^2 m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2)\alpha = I\alpha$$



τ_{net} = (내력)+(외력)에 의한 토크합 = 외력에 의한 토크합

- 강체의 (고정축) 회전 운동방정식:

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

(알짜외부토크) = (회전관성)(각가속도)

Sample Problem

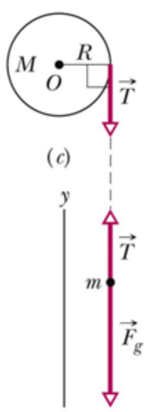
원반: 질량 $M = 2.5\text{kg}$

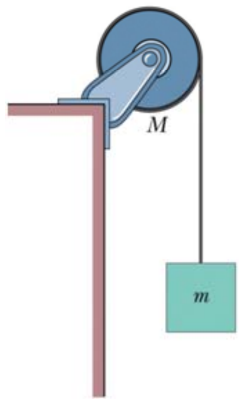
반지름 $R = 20\text{cm}$

추: 질량 $m = 1.2\text{kg}$

- 추가 떨어지면서 원반을 가속시킴
- 좌표: 윗쪽 = +y, 반시계방향 회전=+

FBD





- 추의 운동 : $(up+)$

  $F_{net,y} = T - mg = ma \quad (\Rightarrow a < 0)$

- 원반의 회전운동 : $(ccw+)$

  $\tau_{net} = -RT\sin(90°) = I\alpha \quad (\Rightarrow \alpha < 0)$

- 미지수 : $T,\ a,\ \alpha$ & 방정식 2개

- 줄이 안 미끄러지면: $a = R\alpha$

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 \ \&\ \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\rightarrow T = -\tfrac{1}{2}Ma$$

$$\therefore a = -\frac{2m}{M+2m}g = -4.8\text{m/s}^2$$

$$\therefore T = \frac{Mm}{M+2m}g$$

Check points

1. $I = 0\ (M = 0)$
2. $m = 0$

✓ 좌표축을 잘 잡으면 편해진다

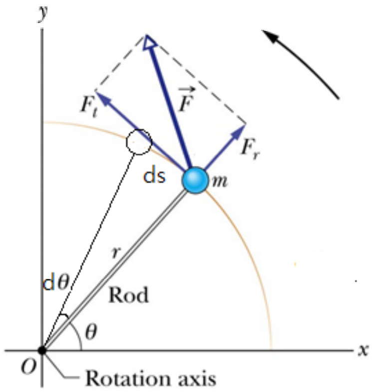
아래방향을 +y, 시계방향을 +θ

회전운동에서 일-에너지 정리

- 일-에너지 정리: W = ΔK 을 회전운동에 적용

•회전운동 에너지 변화:

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (v = r\omega)$$
$$= \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 \qquad (mr^2 = I)$$
$$= \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2$$



•돌림힘이 한 일: $\vec{F}$를 주어 $d\vec{s}$ 변위

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_t ds \qquad (\text{접선방향}, ds = r\theta)$$
$$= F_t r d\theta = \tau\, d\theta \qquad (\tau = F_t r)$$

•돌림힘이 한 일:

$$W = \int_i^f \tau d\theta \quad (\text{고정축 회전})$$

•If $\tau = const;$

$$\rightarrow W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{일정한 돌림힘})$$

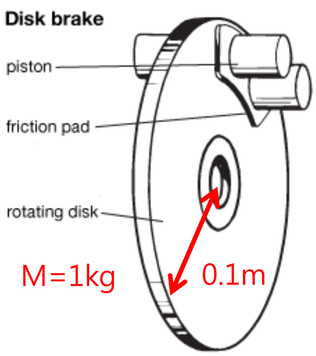
•회전운동: 일-에너지 정리:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

•토크로 표현된 일률:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Question



The thin disk brake drum is rotating at an angular speed of 10 rad/s at t=0. A force is applied to the thin rigid bar to stop the drum from rotating. How much work must be done on the drum in order to stop its rotation completely?

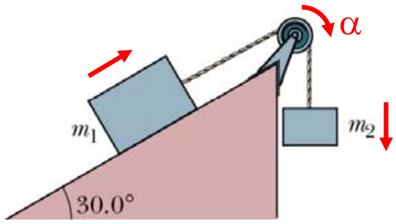
•일–에너지 정리를 이용:

$$W = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1\text{kg})(0.1\text{m})^2\right)(10\text{rad/s})^2$$
$$= -3\text{J}$$
$$W = \Delta K = -3\text{J}$$

("-"는 Disk brake에 외부에서 일을 해주어야 함)

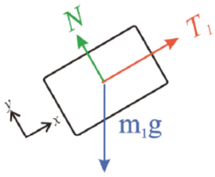
Sample Problem : 실제 도르래의 효과

Massless cord wrapped around a pulley of radius R and mass M (frictionless surface/bearings) and I= ½ MR^2. What is acceleration, a, of m_1 and m_2 ?



- m_2가 내려간다고 하면 가속도의 방향은?

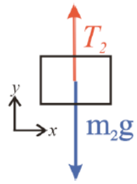
1) What are forces on m_1?



$$\hat{x}: \; T_1 - m_1 g \sin\theta = m_1 a$$
$$\hat{y}: \; N - m_1 g \cos\theta = 0$$
$$\Rightarrow \; T_1 = m_1(a + g\sin\theta)$$

2) What are forces on m_2?

$$\hat{y}: \; T_2 - m_2 g = -m_2 a$$
$$\Rightarrow \; T_2 = m_2(g - a)$$

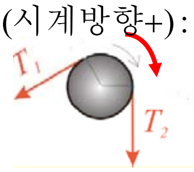


- T_1과 T_2는 크기가 다르다!

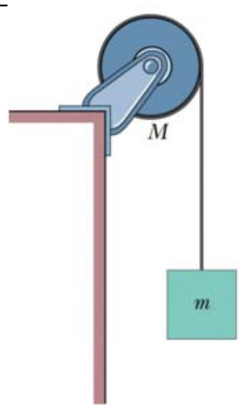
- pulley $(I = \frac{1}{2}MR^2)$가 받는 돌림힘(시계방향+):

$$\tau = RT_2 \sin 90 - RT_1 \sin 90$$

$$RT_2 - RT_1 = I\alpha = I\frac{a}{R} = \tfrac{1}{2}MRa$$



Sample Problem: Energy Method



- Energy 보존법칙 이용해서 h 높이를 떨어진 후 추의 속력을 구하자.

- $E_i = 0 + 0 + mgh = mgh$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

- $v = \omega R, \; I = \frac{1}{2}MR^2$ 을 이용

- $$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}(2m + M)v^2$$

- $$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

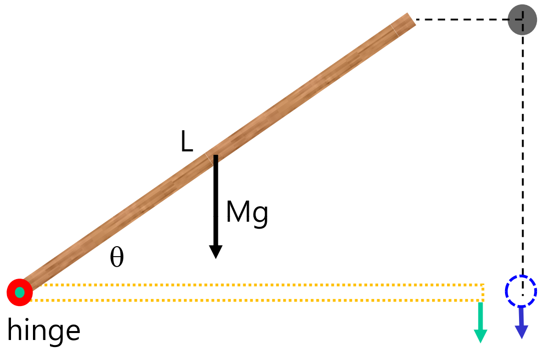
- 이전 페이지: $a = -\dfrac{2m}{2m + M}g$

$$\xrightarrow{\text{등가속도}} v^2 - 0^2 = 2\left(-\frac{2m}{2m + M}g\right)h$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

Q. 장력에 의한 일은 왜 고려하지 않는가?

막대의 오른쪽 끝이 바닥에 닿는 속도?



역학적 에너지 보존을 쓰자

- $\boxed{K_f + U_f = K_i + U_i}$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} I\omega^2 + Mg.0 = \tfrac{1}{2} I.0 + Mg\left(\tfrac{1}{2} L \sin\theta\right)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{MgL\sin\theta}{I}} = \sqrt{\frac{MgL\sin\theta}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}}$$

$$\longrightarrow v_{end} = L\omega = \sqrt{3gL\sin\theta}$$

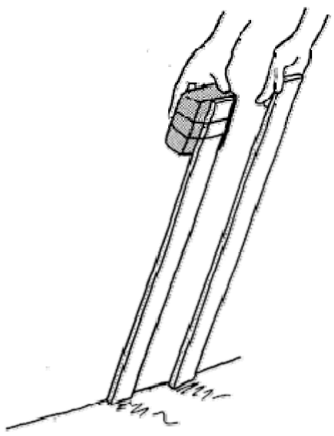
- 같은 높이에서 자유낙하:

$$v_{ff} = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

- Demo : 컵 속으로 공이 들어간다 : chap.11장...
컵의 회전반지름과 공의 위치가 같아야 하므로
컵 위치가 조금 더 안쪽에있다. 이 때문에 실제로
동작하기 위해서는 $\cos\theta > \sqrt{2/3}$이어야 함 :

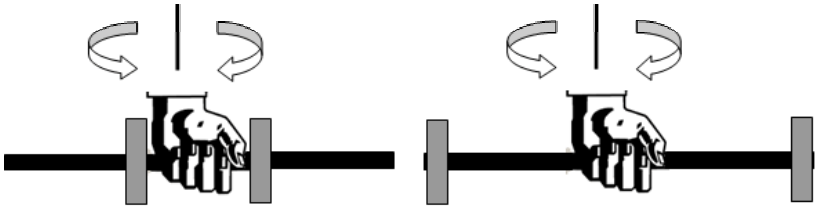
$$note^*,\ at\ \theta : \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)\cos\theta}{ML^2/3} = \frac{3g}{2L}\cos\theta$$

어느 막대가 먼저 바닥에 닿는가?



① 그냥 막대기
② 끝에 무거운 물체를 단 막대기
③ 둘 다 동시에

summary



동일한 질량이지만 질량이 회전축에서 멀리
분포할수록 회전시키기가 어렵다.