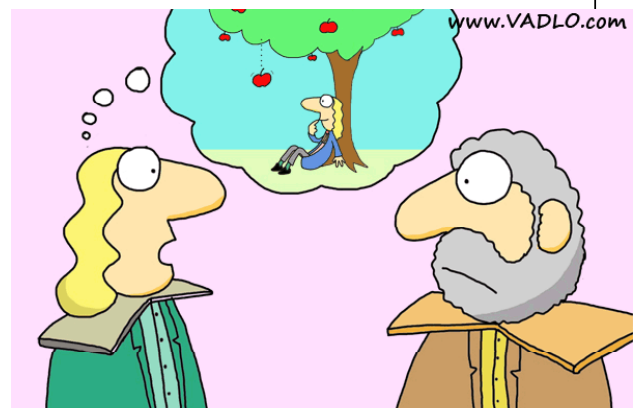
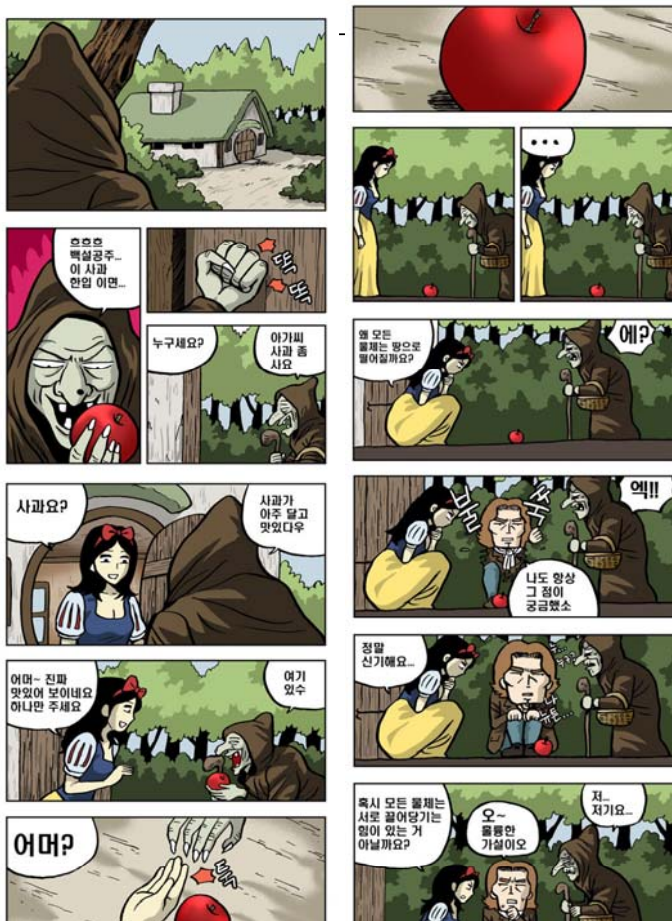


Chapter 13. Gravitation

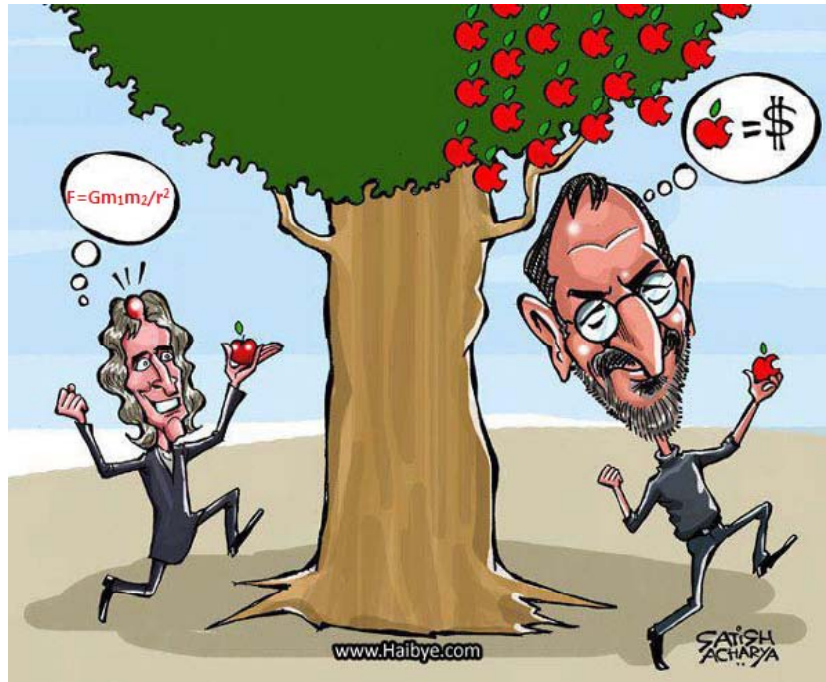
Kepler's superb insights on the data taken on planetary motions made it possible for Newton to make his landmark contributions.

Physics 1 1



"Thanks to morning seminar donuts, I wasn't hungry that day. Otherwise.."

Physics 1 2

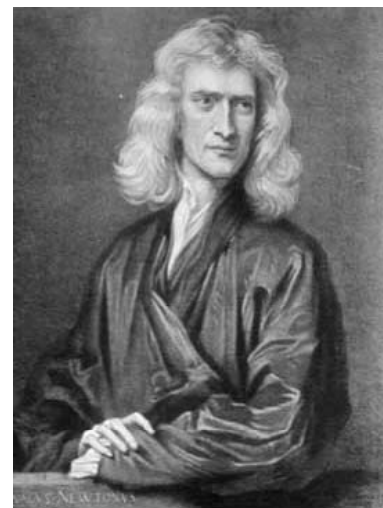


Isaac Newton (1642 - 1727)

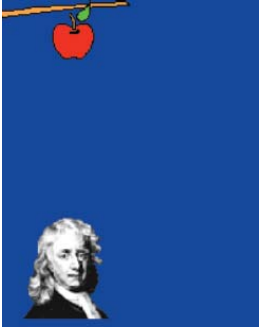
Isaac Newton was born in 1642, the year of Galileo's death. He entered Trinity College of Cambridge University at the age of 19 and graduated in 1665, at the age of 23. Because the Black Death was ravaging Europe at the time, he then returned to his family's farm estate for two years to escape the pestilence.

It was during this period that he did his greatest work. He performed experiments in optics and laid the foundations of his theories of mechanics and gravitation. Because he needed it for his studies, he invented the **calculus** as a new branch of mathematics.

Newton, following an idea suggested by Robert Hooke, hypothesized that the force of gravity acting on the planets is inversely proportional to their distances from the Sun. This is now called Newton's Law of Gravity.



Gravitation



Issac Newton(1665):

사과나무에서 떨어지는 사과에 작용하는 힘과 지구 주위를 원 궤도 운동하는 달에 작용하는 힘은 **동일한 힘**이다. 떨어지는 사과와 궤도 운동하는 달은 모두 지구 중심을 향해서 가속운동(떨어지는 운동)을 하고 있다.

사과와 달을 가속시키는 힘?

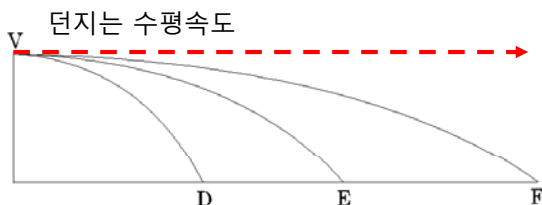
힘 → 중력
(비접촉력)

만유인력: Every body attracts every other body

Physics 1 5

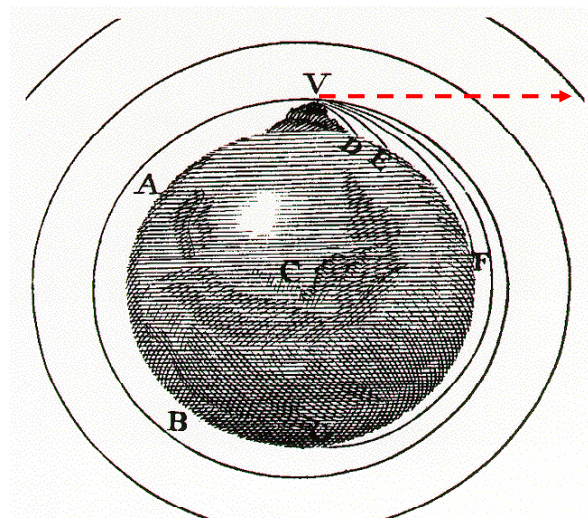
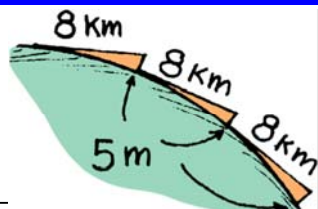
달도 지구 중심을 향해서 끊임없이 떨어진다.

그럼에도 불구하고 땅에 충돌하지 않는 이유는?



높은 곳에서 수평방향으로 돌을 던지면 편평한 지구에서는 **수평속도가 크면 멀리 가지만** 결국에는 땅에 충돌함...

그러나, 지구는 수평방향으로 8km 진행할 때, 지면에서 5m(1초 동안 떨어지는 거리)정도 떨어지는 정도로 둥글게 휘어져 있다.



따라서, 8km/s로 돌을 던지면 중심을 향해 계속 떨어지지만 결코 지표면에 충돌하지 않고 원궤도 운동을 할 수 있다.

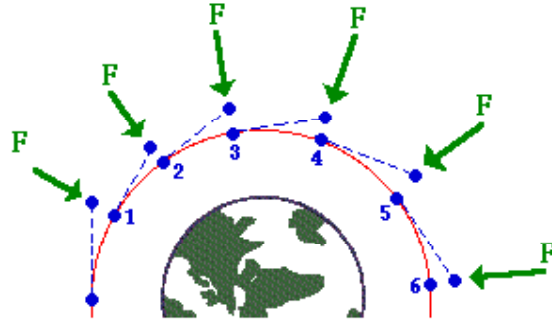
Physics 1 6

인공위성은 지구중심을 향해서 계속 떨어지고 있다

궤도에 접선방향의 속도가 있기 때문에 곧바로 지구중심을 향해 떨어지지 않고 비스듬히 이동하면서 지구중심을 향해 떨어진다.

An Orbiting Satellite Requires a Centripetal Force

$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$
힘이 결정하는 것은 속도가 아니라
속도의 변화임

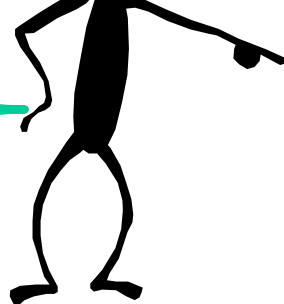


지구를 중심으로 원궤도를 도는 위성은 지구가 끌어당기지 않으면 접선방향으로 날아가버린다 (← 관성의 법칙)

Physics 1 7

뉴턴의
운동법칙

케플러의
3개 법칙



만유인력
법칙 발견

Physics 1 8

뉴턴의 중력법칙 (만유인력 법칙)

- 거리 r 만큼 떨어진 두 점입자 m_1 과 m_2 사이에 작용하는 인력의 크기:
 \Rightarrow 두 질량의 곱에 비례, 거리의 제곱에 반비례

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- 힘의 방향: 두 점입자를 잇는 선분과 나란, 인력

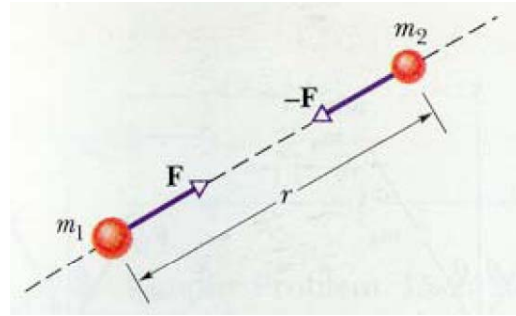
• G : 중력(만유인력) 상수

$$= 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m/kg}^2$$

*1798년 캐번디시가 정밀하게 측정

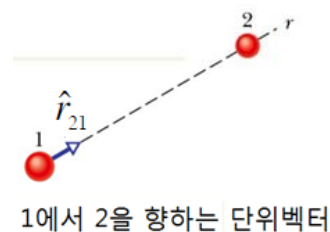
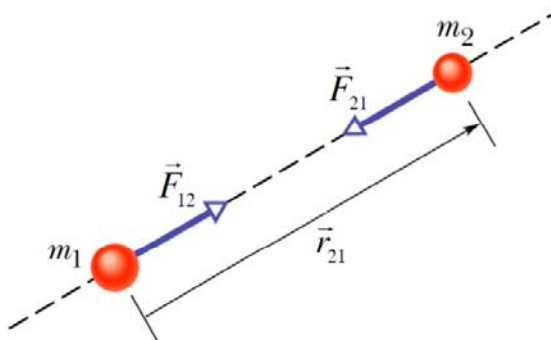
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Newton's Third Law



Physics 1 9

뉴턴의 중력법칙: 벡터형식



$r_{12} = r_{21}$: m_1 과 m_2 사이거리

$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$: m_2 에서 m_1 방향으로 단위벡터

$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = -\hat{r}_{12}$: m_1 에서 m_2 방향으로 단위벡터

• Force on m_1 due to m_2 : $\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21}$

• Force on m_2 due to m_1 : $\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{12}$



$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

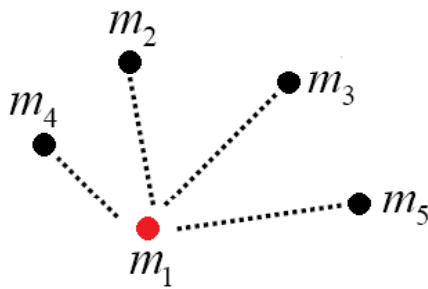
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

\Rightarrow 3 법칙 만족

Note: 이 공식은 점입자에만 해당한다. 일반적으로 크기가 있는 물체 사이의 중력은?

Physics 1 10

중력과 중첩정리:



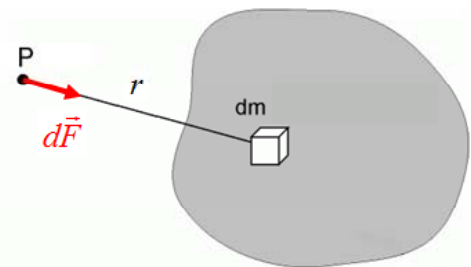
주위에 여러 개의 물체들이 있을 때, 개별 물체가 받는 중력은 어떻게 구할까?

m_1 에 작용하는 중력은 m_2, m_3, \dots 가 m_1 에 작용하는 개별 중력의 **벡터 합**:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1,net} &= m_1 \text{이 받는 알짜 중력} \\ &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}\end{aligned}$$

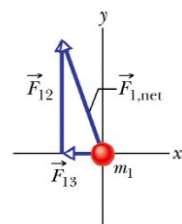
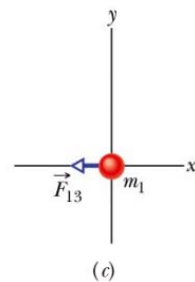
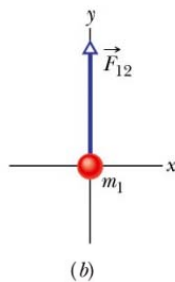
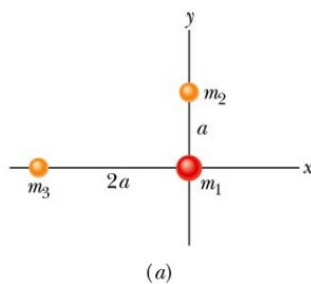
- 일반적인 물체(크기가 있는 물체)가 만드는 중력: 물체의 미소부분(dm)의 질량이 주는 중력($d\vec{F}$) 합

$$\vec{F} = \sum d\vec{F} \longrightarrow \vec{F} = \int d\vec{F}$$



Physics 1 11

m_1 이 받는 중력은? (중첩의 원리)



$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \hat{j} \quad (\leftarrow \hat{r} = \hat{j})$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{Gm_1m_3}{(2a)^2} (-\hat{i}) \quad (\leftarrow \hat{r} = -\hat{i})$$

$$\vec{F}_{1net} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \hat{j} + \frac{Gm_1m_3}{(2a)^2} (-\hat{i})$$

$$= \frac{Gm_1m_2}{4a^2} (-\hat{i} + 4\hat{j})$$

$$F_{1net} = \frac{Gm_1m_2}{4a^2} \sqrt{1+4^2} = \frac{Gm_1m_2}{4a^2} \sqrt{17}$$

$$\tan \theta = \frac{F_{1,net,y}}{F_{1,net,x}} = \frac{4}{-1}$$

$$\Rightarrow \theta = -76^\circ \Rightarrow 104^\circ$$

Physics 1 12

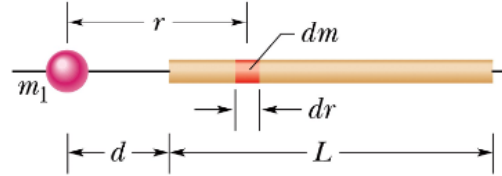
막대로부터 받는 중력의 세기

- ✓ 연속적인 물질분포에 의한 중력을 구할 때는 구분구적법의 원리를 이용한다.
- ✓ 그리고 물질이 분포의 대칭성을 잘 이용하면 벡터의 계산이 간단해진다.

미소부분 질량: $dm = M \frac{dr}{L}$

dm 부분이 m_1 에 작용하는 중력:

$$dF = G \frac{m_1 dm}{r^2} \quad (\text{방향: 왼쪽})$$



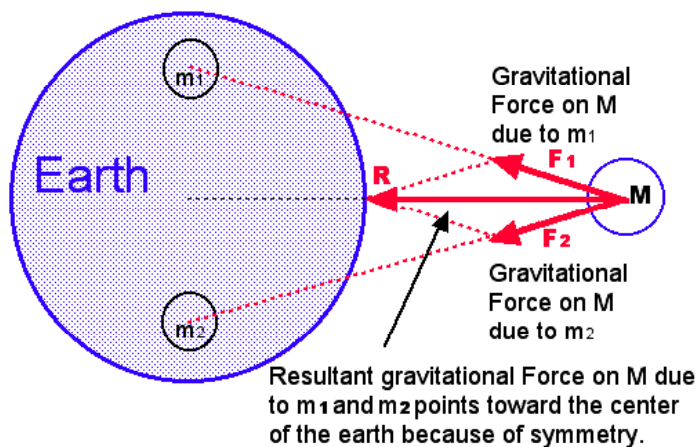
$$L=3.0\text{m}, \quad M=5\text{kg}, \quad d=23\text{cm}, \quad m_1=0.67\text{kg}$$

- 중첩의 원리(방향이 같으므로 그냥 더하면 된다)

$$F = \int dF = G \frac{m_1 M}{L} \int_d^{L+d} \frac{dr}{r^2} = G \frac{M m_1}{d(L+d)} = 3.0 \times 10^{-10} \text{N}$$

중력의 방향

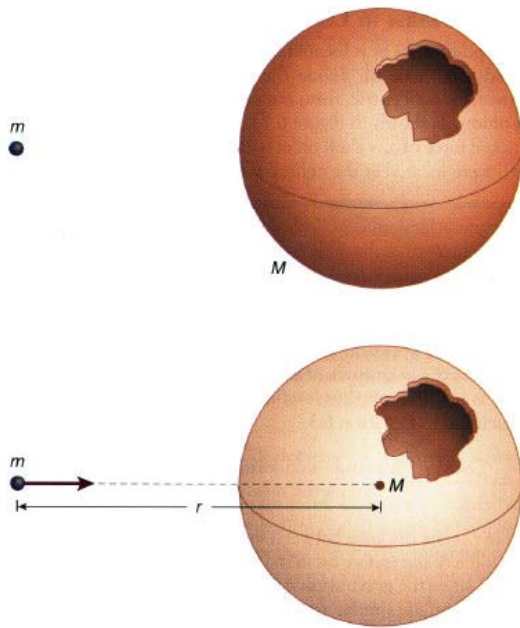
- 지구는 크기가 있는데도 위성이 받는 힘은 왜 지구 중심을 향하는가?



Newton: 지구가 공처럼 대칭이기 때문에 지구 중심에 총 질량이 당기는 힘과 같다.

Newton's shell theorem: 구대칭 물체의 중력

- **균일**한 질량밀도를 갖는 구각(shell) 물질이 외부의 입자에 작용하는 중력은 모든 질량이 중심(질량중심)에 점입자로 뭉쳐 있을 때 작용하는 중력과 같다 (증명생략).



질량 M 인 균일한 *shell* 외부에 위치한 질량 m 이 중심에서 거리 r 만큼 떨어져 있을 때 받는 중력

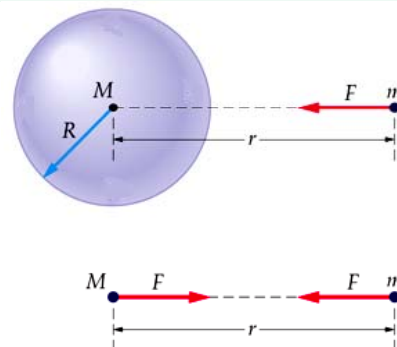
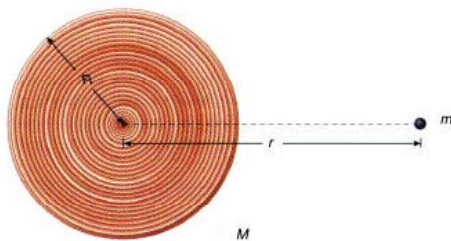
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

(방향: *shell* 중심방향)

Physics 1 15

균일한 구형물체의 중력

- **균일한** 구형물체 = 구각이 겹겹이 쌓인 구조(onion structure)
- 따라서 구형으로 물질이 균일하게 분포한 물체가 외부의 입자에 작용하는 중력은 모든 질량이 구의 중심(질량중심)에 점입자로 뭉쳐있을 때 중력과 같다.

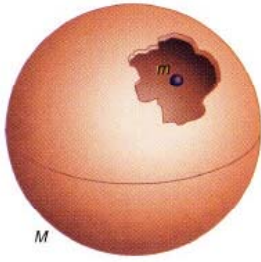


$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

(방향: 중심방향)

Physics 1 16

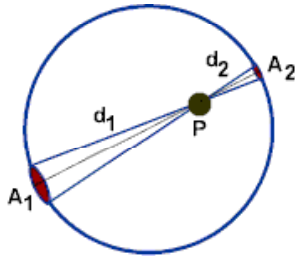
균일한 구각 내부에 있는 입자가 받는 알짜중력 = 0



- 균일한 *shell* 내부에 있을 때
 $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \text{중력} = 0$

Note : cone 의 면적 (반지름)²에 비례

$$\rightarrow \text{cone 의 면적비} : \frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$



$$\text{반대지점 중력세기} : \frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{A_2}{d_2^2}}{\frac{A_1}{d_1^2}} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} = 1$$

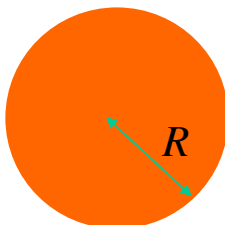


Forces on m from opposite pieces of surface cancel

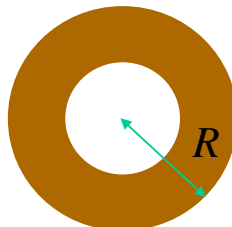
Physics 1 17

Quiz : 구각 정리의 이해

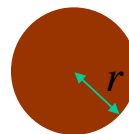
- 동일한 질량 (M)이 균일하게 분포하는 공 또는 구각 모양의 행성이 있다. 행성표면에 있는 질량 m인 입자에 작용하는 중력의 크기를 순서대로 나열하라.



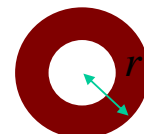
(a)



(b)



(c)



(d)

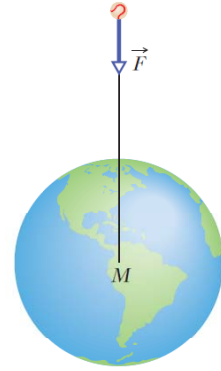
Physics 1 18

지표면에서 중력가속도(a_g)

- 중력가속도(a_g): 물체에 작용하는 힘이 중력일 때 뉴턴법칙이 주는 가속도

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = ma_g \rightarrow \boxed{a_g = \frac{GM}{r^2}}$$

$$\begin{cases} M = \text{지구질량}, \\ r = \text{지구중심까지 거리} \end{cases}$$



- 자유낙하 가속도: g

지표면 근처에서 물체가 떨어지는 가속도

- $$\begin{cases} 1. \text{지구자전}, \\ 2. \text{비구형}, \\ 3. \text{비균일 질량분포} \end{cases}$$

Altitude (km)	a_g (m/s ²)	Altitude Example
0	9.83	Mean Earth surface
8.8	9.8	Mt. Everest
36.6	9.71	Highest manned balloon
400	8.7	Space shuttle orbit
35 700	0.225	Communications satellite

$$g \neq a_g$$

자전효과

- 적도면에 놓인 상자: 원운동 (지구 밖 관성계)

구심력(outward+): $F_{net,r} = F_N - F_g = m(-\omega R^2)$

$$F_N = F_g - m\omega^2 R$$

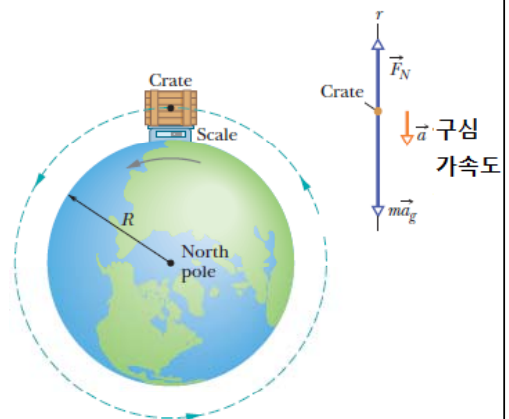
수직항력 = 자유낙하를 막음

= 물체의 무게(5장: 정의)

$$F_N = mg$$

$$\therefore g = a_g - \omega^2 R$$

$$\text{Note: } \omega R = 0.034 \text{ m/s}^2 = 3.5 \times 10^{-3} g$$



Tidal Force

- 머리와 다리에서 중력 가속도 차이는?

$$\begin{aligned}\bullet \Delta a_g &= a_g(r+h) - a_g(r) = GM \left(\frac{1}{(r+h)^2} - \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{GM}{r^2} \left(\frac{1}{(1+h/r)^2} - 1 \right)\end{aligned}$$

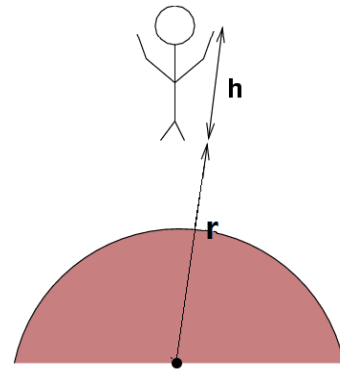
- Note, $(1+x)^{-2} \approx 1-2x$ for $x \ll 1$
for $x = h/r$

$$\Delta a_g \approx -2 \frac{GM}{r^3} h : \text{다리-머리 중력가속도 차이}$$

- 지구궤도 우주선에 우주인에 대해서:

$$h = 1.7m, r(\text{지구 궤도 우주선}) = 6.77 \times 10^6 m$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \Delta a_g &= -2 \frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{(6.77 \times 10^6)^2} (1.7) \\ &= -4.37 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$



Physics 1 21

지구내부에서 중력

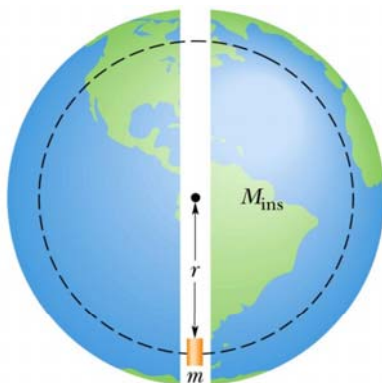
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi R^3 / 3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

- 균일한 구속 내부에 있는 입자가 받는 알짜중력 = 0

- 중심에서 $r (< R)$ 위치에 있는 물체(m)가 받는 중력:
= 반지름 r 안의 질량에 의한 중력만 받는다

$$\text{반지름 } r \text{ 내부의 질량: } M_{\text{ins}} = \text{밀도} \times \text{부피} = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{in}} = -G \frac{M_{\text{ins}} m}{r^2} \hat{r} : \text{-는 지구내부 방향 } (0 \leq r \leq R)$$



$$\bullet \vec{F} = - \left(\frac{GMm}{R^3} \right) \vec{r} = - \left(\frac{mg}{R} \right) \vec{r} \quad , (\vec{r} = r\hat{r})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -k\vec{r} : \text{복원력 형태(용수철)}$$

물체는 용수철에 메달린 물체처럼 왕복운동을 한다 (note : $k = mg/R$)

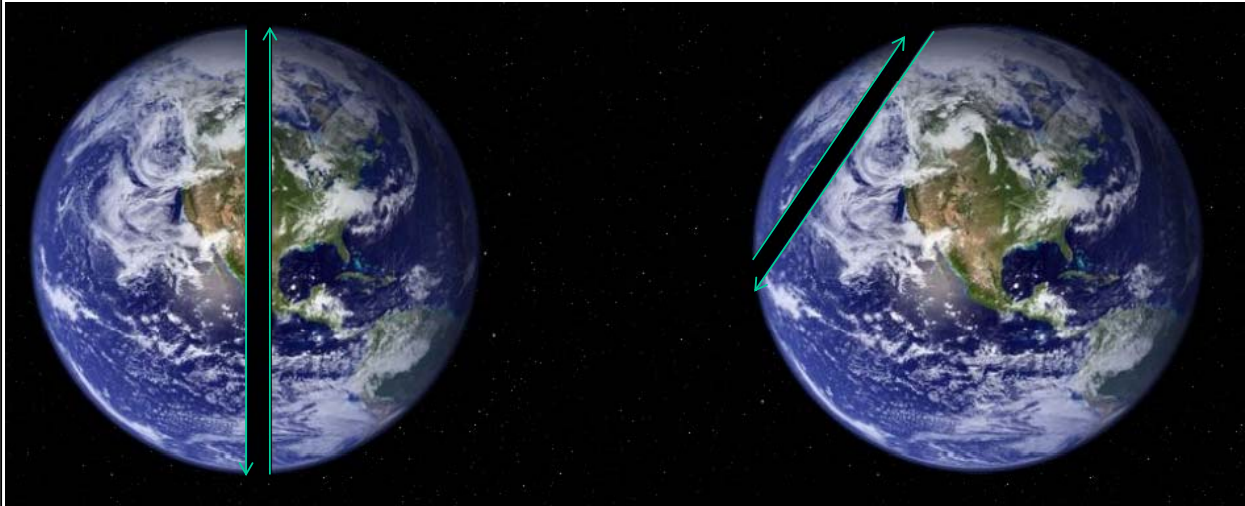
Q. 서울에서 출발해서 부에노스아이레스에 다녀오는데 걸리는 시간은?

Physics 1 22

반대편으로 나오는데 42분 정도 걸린다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84.6 \text{ min}$$

chap.15



진동주기 84분은 지표면을 스치는 원궤도 위성의 주기와 같다.
입증할 수 있는가? (Kepler 법칙)

중력위치에너지 : 중력이 균일하지 않을 때

•정의: $\Delta U = -W_g$ ("-"는 위치에너지 감소방향 = 중력방향)

$U(\infty) - U(R) = -(R \rightarrow \infty \text{ 가는 동안 중력이 한 일})$

$= -\int_R^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \text{어떻게 적분하는가?}$

•경로에 무관 (뒤에서 증명): 똑바로 멀어지는 경로선택

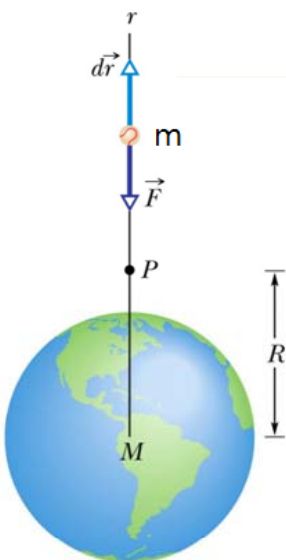
$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \underbrace{\vec{F}}_{\text{중심방향}} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{멀어지는 방향}} = F dr \cos(180^\circ) = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

•기준점 선택: $U(\infty) = 0$:

$$\therefore U(R) = \int_R^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} \Big|_R^\infty = -\frac{GMm}{R}$$

$$\therefore U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

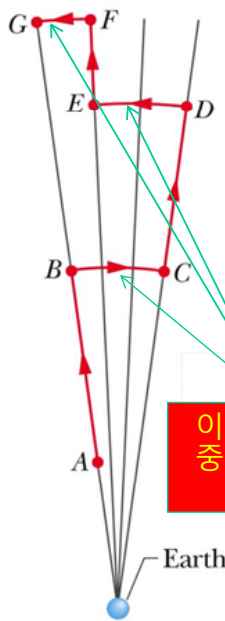
Note, $r_1 > r_2 \rightarrow U(r_1) > U(r_2)$



위치에너지 $U=mgh$ 는 어떻게 나왔나?

중력은 보존력(중력이 균일하지 않을 때)

- 중력이 한 일이 **경로에 무관함**을 보이면 된다!

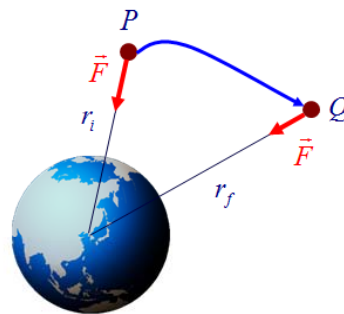


- 물체가 중력장에서 A에서 G로 움직일 때:

임의의 경로 = **radial 방향** + **호방향** 으로 분해가능
 오직 radial 방향의 이동에서만 중력이 일을 함
 → 처음과 나중 위치만 같으면 어떤 경로든 같다.

$$W_{ABCDEFG} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EF} + W_{FG}$$

$$= W_{AB} + W_{CD} + W_{EF} = W_{AG(\text{직선})}$$



- 임의의 두 지점사이:

$$U(r_f) - U(r_i)$$

$$= - \left(\frac{GMm}{r_f} - \frac{GMm}{r_i} \right)$$

위치에너지 → 힘

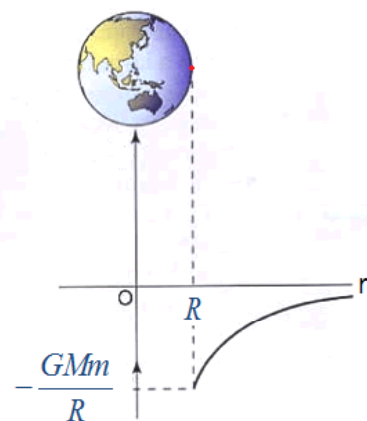
- 중력은 위치에너지가 감소하는 방향으로 작용한다 (위치에너지 정의)
- $U(r) = -GMm/r$ 이므로 지구에서 멀어질수록 위치에너지가 커진다 → $dU/dr > 0$
- 중력은 $F = -dU/dr$ 로 주어진다.

• From $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

r -방향으로 작용하는 힘:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

;-는 두 물체의 간격 r 이 줄어드는 방향으로 힘이 작용함.



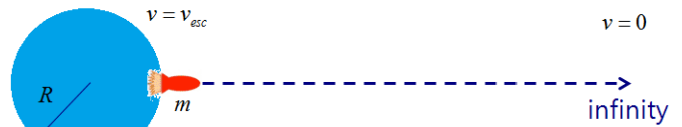
탈출속력(Escape Speed)

- 탈출속력: 질량 M 인 행성 표면에서(반지름= R) 행성의 중력(\rightarrow 인력)을 벗어나기 위해 필요한 최소의 속력

• At infinity: $U = 0, K = 0 \rightarrow E_{mech} = 0$

E 보존 $\Rightarrow K(R) + U(R) = K(\infty) + U(\infty)$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 + 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



$$v_{esc} = \begin{cases} \text{Earth} = 11.2\text{km/s}, \\ \text{Moon} = 2.38\text{km/s} \\ \text{Sun} = 618\text{km/s} \end{cases}$$

\Rightarrow 행성의 탈출속력이 작으면 대기가 남아있을 가능성이 작다.

Some Escape Speeds

Body	Mass (kg)	Radius (m)	Escape Speed (km/s)
Ceres ^a	1.17×10^{21}	3.8×10^5	0.64
Earth's moon ^a	7.36×10^{22}	1.74×10^6	2.38
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^6	11.2
Jupiter	1.90×10^{27}	7.15×10^7	59.5
Sun	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618
Sirius B ^b	2×10^{30}	1×10^7	5200
Neutron star ^c	2×10^{30}	1×10^4	2×10^5

Physics 1 27

Black Holes

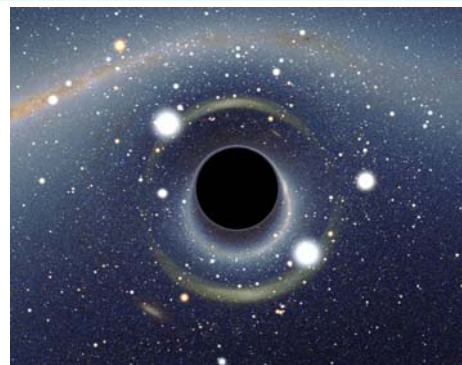
Black holes:

If an object is sufficiently massive and sufficiently small, the escape speed will equal or exceed the speed of light, so that light itself will not be able to escape the surface.

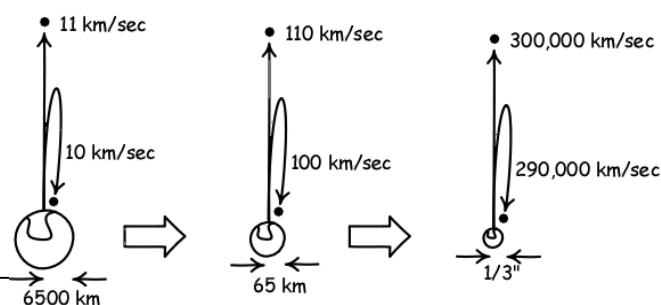
$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

if $v_{esc} \rightarrow c = 300,000\text{km/s}$, then $R_{BH} = \frac{2GM}{c^2}$;

$$\begin{cases} R_{BH}(\text{지구}) = 9.0\text{mm} \\ R_{BH}(\text{태양}) = 3\text{km} \end{cases}$$

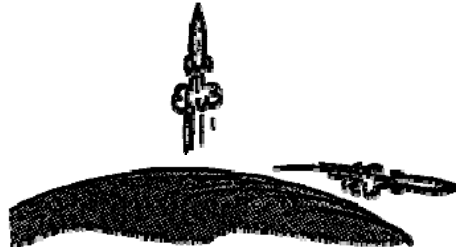


지구의 질량을 그대로 유지하면서 반지름을 줄이면 탈출속력은 점점 커진다.



Physics 1 28

지구에서 달출속력은 **11.2km/s**이다. 지표면에 접선방향의 같은 속력으로 발산한 로켓은 지구의 중력을 벗어날 수 있는가?



Physics 1 29

입자계의 중력위치에너지=U

U = 서로 무한히 떨어진 입자들을 모우기 위해서 필요한 일 (서로 무한히 떨어진 상태: $U=0$)

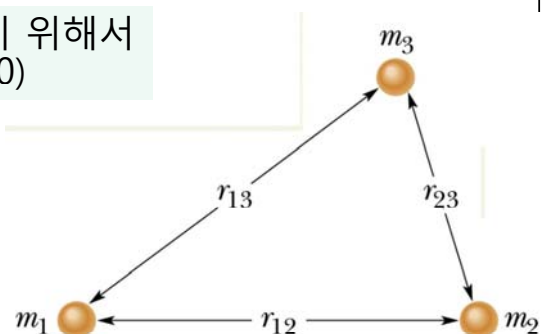
- W_1 = 아무것도 없는 상태에서 1번을 가져와서 놓는 데 필요한 일 = 0

- W_2 = 1번이 고정상태에서 2번을 가져오는데

$$\text{필요한 일} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}$$

- W_2 = 1, 2가 고정된 상태에서 3번을 가져오는 데

$$\text{필요한 일} = -\frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}$$



- 3 입자의 중력위치에너지

$$= W_1 + W_2 + W_3$$

$$= -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} \right)$$

Q) 왜 음수인가?

Physics 1 30

행성궤도와 에너지

무거운 물체가 만드는 중력은 물체의 중심방향을 향하므로 원운동에 필요한 구심력을 만들 수 있다!

- 태양계의 행성운동,
- 달/인공위성의 공전운동

• 위치에너지: $U = -\frac{GMm}{r}$

원궤도:
중력=구심력
 $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

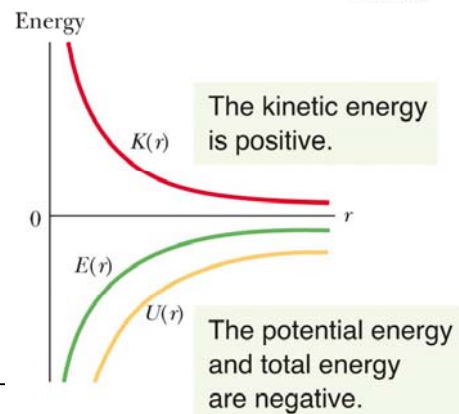
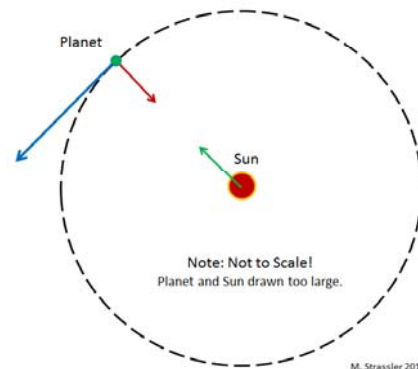


• 운동에너지:
 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

• 반지름 r - 원궤도에서 역학적 E :

$$E = K + U = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

\Rightarrow 총역학적 $E < 0$



1 32

Johannes Kepler (1571-1630)

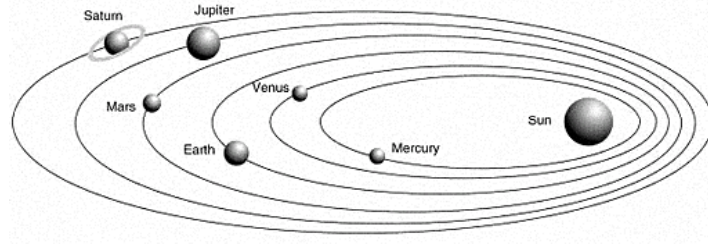
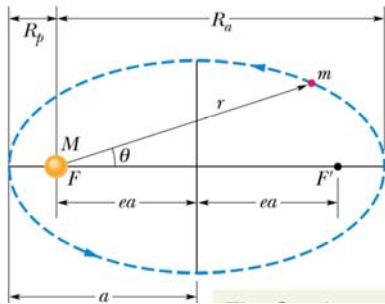
Johannes Kepler inherited (or stole) the detailed observations of planetary positions of Danish astronomer Tycho Brahe and tried to make sense of them, using algebra, trigonometry, and geometry.

After a decade of work, he was forced to conclude that planetary orbits were better described by ellipses than by circles, and that the planets travel in these orbits with a varying speed.



Kepler's 1st law

행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원궤도를 그리면서 공전한다.



1. $\frac{(x-ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (b^2/a^2 = 1-e^2)$
2. 타원은 장축길이 = $2a$, 이심률 = e , ($0 < e < 1$)로 결정
(note, $e = 0 \rightarrow$ 원궤도)
3. 물리적으로 에너지와 운동량이 타원궤도를 결정

• 타원궤도에서 역학적 E :

반지름 $r \rightarrow a = \frac{1}{2} \times$ 장축

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Note: 이심률: $e = c/a$ 에 무관

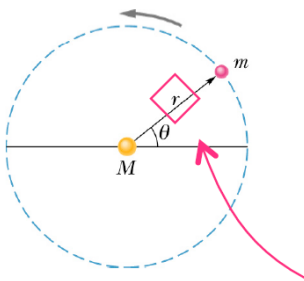
Note: $E_{\text{수성}} < E_{\text{금성}} < E_{\text{지구}} < E_{\text{화성}} < \dots$

Physics 1 34

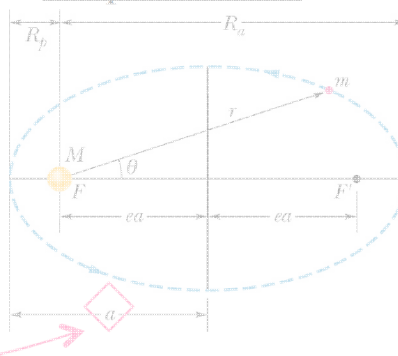
Kepler's 3rd law

모든 행성의 공전주기의 제곱은 궤도의 긴반지름의 세제곱에 비례한다.

Circular Orbit



Elliptical Orbit



• 원궤도:

$$\frac{GM_{\text{sun}}m}{r^2} = m\omega^2 = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{sun}}} \right) r^3$$

• 타원궤도:

원궤도: 반지름 = r

\rightarrow 타원궤도: $\frac{1}{2}$ 장축 = a

$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{sun}}} \right) a^3$$

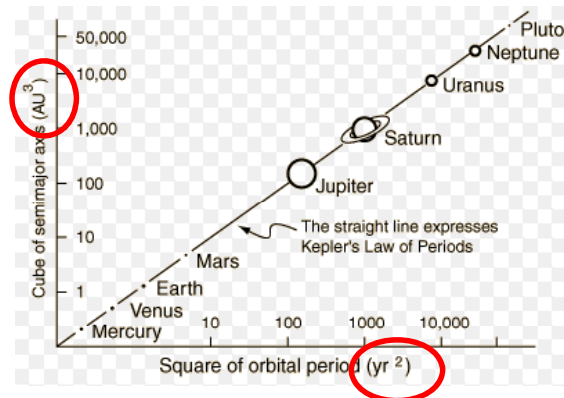
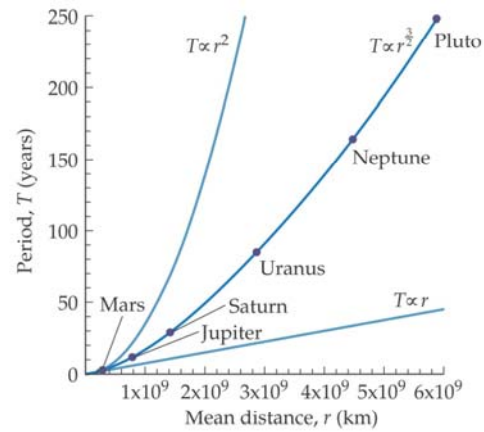
Note: $\frac{T_{\text{지구}}^2}{a_{\text{지구}}^3} = \frac{T_{\text{수성}}^2}{a_{\text{수성}}^3} = \frac{T_{\text{금성}}^2}{a_{\text{금성}}^3} = \frac{T_{\text{화성}}^2}{a_{\text{화성}}^3} = \dots$

$$= \frac{4\pi^2}{GM_{\text{sun}}} = \text{const}$$

Physics 1 35



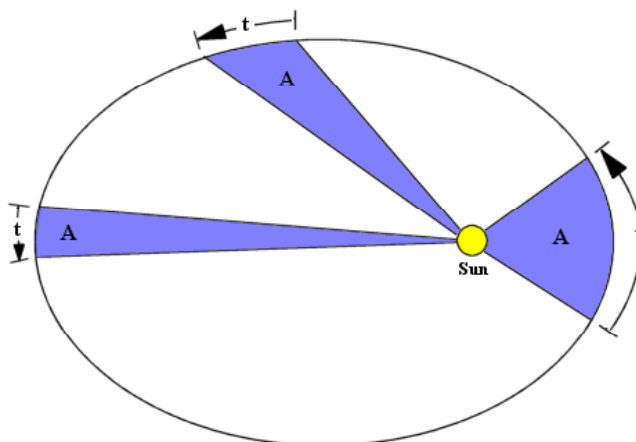
Planet/Asteroid	Mean radius (AU)		Orbital period (years)	
	Calculated	Observed	Calculated	Observed
Mercury	0.387	0.387	0.241	0.241
Venus	0.774	0.723	0.682	0.615
Earth	0.968	1.0	0.953	1.0
Mars	1.548	1.523	1.928	1.881
HIL	1.742	1.780	2.30	2.375
HOL	1.935	2.0	2.694	2.828
Vesta	2.515	2.361	3.994	3.630
Camilla	3.483	3.478	6.507	6.487
Jupiter	6.192	5.203	15.424	11.864
Saturn	9.675	9.537	30.125	29.433
Chiron	13.932	13.698	52.056	50.760
Uranus	18.963	19.191	82.663	83.530
Nessus	24.768	24.617	123.392	122.420
Neptune	31.347	30.069	175.689	163.786
Pluto	38.70	39.808	241.0	251.16



Physics 1 36

Kepler's 2nd law: 면적속도 일정의 법칙

행성과 태양을 연결하는 선분이 같은 시간에 쓸고 지나가는 면적은 일정하다.



“ $E = K + U = \text{일정}$ ” 이므로, 태양에서 멀어질수록 U 가 커지므로 K 가 줄어들어 속력이 감소하므로 원일점 근처에서는 느리게 움직이고, 반대로 근일점 근처에서는 빨리 움직인다 → 얼마나 변하는가?

Physics 1 37

Kepler's 2nd law : 면적속도 일정의 법칙

행성과 태양을 연결하는 선분이 같은 시간에 쓸고 지나가는 면적은 일정하다.
→ 태양의 중력이 각운동량을 보존하기 때문에 필연적임 (왜 보존됨?)

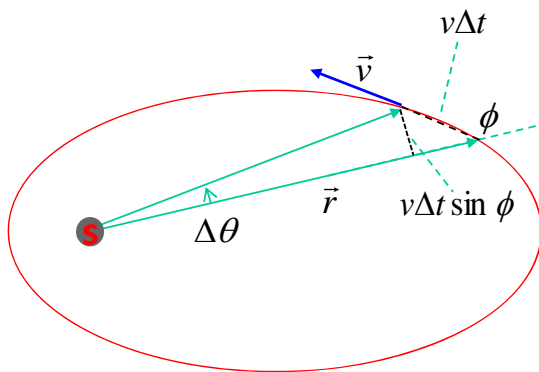
• 타원 궤도에서 면적변화율은?

$$\Delta A = \text{삼각형 면적} = \frac{1}{2} r(v\Delta t \sin \phi) = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$\text{since, } L = m |\vec{r} \times \vec{v}| = rmv \sin \phi$$

$$\rightarrow \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$



$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

면적속도 일정



각운동량 보존 ($L = \text{일정}$)

Physics 1 38

Ex. Comet Halley

- 헬리워성의 주기는 76년, 태양에 가장 가까워지는 지점인 근일점 (perihelion)으로 거리는 $8.9 \times 10^{10} \text{m}$ 이다. 원일점 (aphelion)의 거리는?

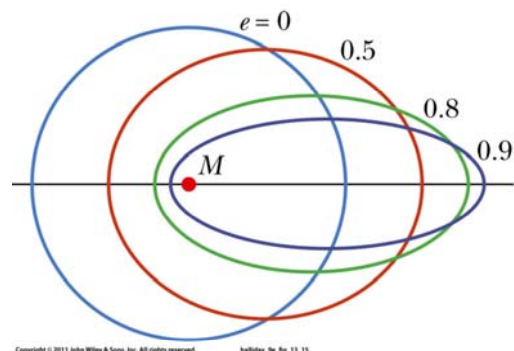
- Sol: 헬리워성의 궤도는 타원형임: $R_p + R_a = 2a$ 임을 이용하자.

Kepler의 3법칙을 이용하면: 주기 $\rightarrow a$

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 2.7 \times 10^{12} \text{m}$$

$$R_a = 2a - R_p = 2(2.7 \times 10^{12} \text{m}) - 8.9 \times 10^9 \text{m}$$

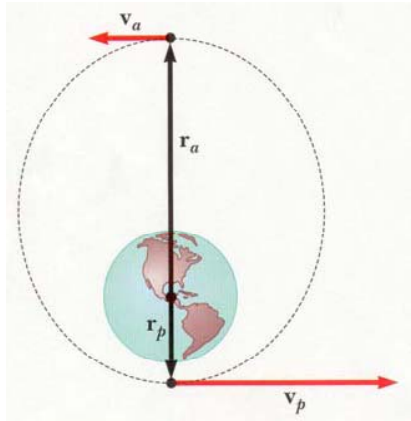
$$= 5.3 \times 10^{12} \text{m}$$



궤도의 장축의 길이가 같으면
에너지는 모두 같다. 그러나
각운동량은 다르다. 타원궤도는
E와 L로 결정됨.

Physics 1 39

근지점과 원지점에서 인공위성 속력은?



원운동이 아니므로
단순하게 중력=구심력
관계를 사용할 수 없다.

- $r_a = 9.37 \times 10^6 \text{ m}$, $r_p = 6.77 \times 10^6 \text{ m}$

- 각운동량 보존 : $L = m r_a v_a = m r_p v_p$
 $\longrightarrow v_a / v_p = r_p / r_a \quad \dots (1)$

- 역학적에너지 보존 보존 :

$$E = \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p}$$

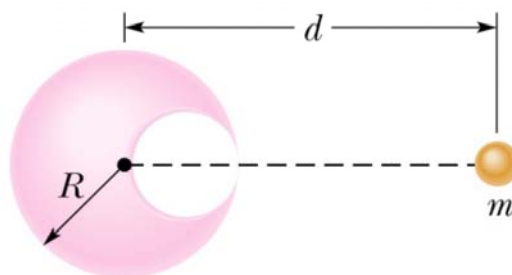
$$\longrightarrow v_p^2 - v_a^2 = 2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right) \quad \dots (2)$$

- From (1) & (2);

$$v_a = \frac{\sqrt{2GM}}{r_a \sqrt{1/r_p + 1/r_a}}, \quad v_p = \frac{\sqrt{2GM}}{r_p \sqrt{1/r_p + 1/r_a}}$$

Physics 1 40

속이 빈 균일한 밀도의 구형행성에 의한 중력은?*



중첩의 원리

온전한 구형행성이 작용하는 중력
 - 페인 부분의 질량이 작용하는 중력

내부의 빈 공간에서 중력은 어떻게 될까?

Physics 1 48