Homework 2

2.1.2.

(가)

$$0 + n = \gamma_0(n) = n$$

pf. $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \gamma_0(n) = n\}$라 하자.

$$\gamma_0(0) = 0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\gamma_0(n^+) = [\gamma_0(n)]^+ = [n]^+ = n^+$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$0 + n = n$$

가 성립한다.

$$(m + n) + k = \gamma_{\gamma_m(n)}(k) = \gamma_m(\gamma_n(k)) = m + (n + k)$$

pf. m, n을 고정하고 $k \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{k \in \mathbb{N} \mid (m + n) + k = m + (n + k)\}$라 하자.

$$(m + n) + 0 = \gamma_{m+n}(0) = m + n$$
$$m + (n + 0) = \gamma_m(\gamma_n(0)) = \gamma_m(n) = m + n$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $k \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned}(m + n) + k^+ =&\gamma_{m+n}(k^+) = [\gamma_{m+n}(k)]^+ = [(m + n) + k]^+\\ =&[m + (n + k)]^+ = [\gamma_m(\gamma_n(k))]^+\\ =&\gamma_m([\gamma_n(k)]^+) = \gamma_m(\gamma_n(k^+)) = m + (n + k^+)\end{aligned}$$

이므로 $k^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$(m + n) + k = m + (n + k)$$

가 성립한다.

$$m + n = \gamma_m(n) = \gamma_n(m) = n + m$$

pf. m을 고정하고 $n \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{n \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m\}$라 하자.

$$m + 0 = \gamma_m(0) = m = \gamma_0(m) = 0 + m$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned}m + n^+ =&\gamma_m(n^+) = [\gamma_m(n)]^+ = [\gamma_n(m)]^+ = \gamma_n(m^+)\\ =&\gamma_n(1 + m) = n + (1 + m) = (n + 1) + m\\ =&(n + 0)^+ + m = n^+ + m\end{aligned}$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$m + n = n + m$$

가 성립한다.

(나)

$$0n = \delta_0(n) = 0$$

pf. $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \delta_0(n) = 0\}$라 하자.

$$\delta_0(0) = 0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\delta_0(n^+) = \delta_0(n) + 0 = \delta_0(n) = 0n = 0$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$0n = 0$$

가 성립한다.

$$1n = \delta_1(n) = 1$$

pf. $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \delta_1(n) = n\}$라 하자.

$$\delta_1(0) = 0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\delta_1(n^+) = \delta_1(n) + 1 = n + 1 = n^+$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$1n = n$$

가 성립한다.

Lemma 1. $m(n + k) = mn + mk$이다. **pf.** m, n을 고정하고 $k \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{k \in \mathbb{N} \mid m(n + k) = mn + mk)\}$라 하자.

$$m(n + 0) = mn$$
$$mn + m0 = mn + 0 = mn$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $k \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned} m(n+k^+) =& m[(n+k)^+] = m(n+k)+m \\ =& mn+mk+m == mn+m(k^+) \end{aligned}$$

이므로 $k^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$m(n+k) = mn+mk$$

가 성립한다.

$$(mn)k = \delta_{\delta_m(n)}(k) = \delta_m(\delta_n(k)) = m(nk)$$

pf. m, n을 고정하고 $k \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{k \in \mathbb{N} \mid (mn)k = m(nk)\}$라 하자.

$$(mn)0 = \delta_{mn}(0) = 0$$
$$m(n0) = \delta_m(\delta_n(0)) = \delta_m(0) = 0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $k \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned} (mn)k^+ =& mn(k^+) = mn(k)+mn = m(nk)+mn \\ =& m(nk)+m(n) = m(nk+n) \qquad (\because \text{Lemma 1.}) \\ =& m(nk+(0+n)) = m(nk+n(0^+)) \\ =& m(n(k+0^+)) = m[n(k^+)] \end{aligned}$$

이므로 $k^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$(mn)k = m(nk)$$

가 성립한다.

Lemma 2. $(m^+)n = mn+n$이다.
pf. m을 고정하고 $n \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{n \in \mathbb{N} \mid (m^+)n = mn+n\}$라 하자.

$$(m^+)(0) = 0 = m0+0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned} (m^+)(n^+) =& (m^+)(n)+m^+ = mn+n+m^+ \\ =& mn+n+m+1 = mn+m+n+1 \\ =& m(n^+)+n^+ \end{aligned}$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$(m^+)n = mn+n$$

가 성립한다.

$$mn = \delta_m(n) = \delta_n(m) = nm$$

pf. m을 고정하고 $n \in \mathbb{N}$에 대해 증명해도 충분하다.
$X = \{n \in \mathbb{N} \mid mn = nm\}$라 하자.

$$m0 = \delta_m(0) = 0 = \delta_0(m) = 0m$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정하면,

$$\begin{aligned} m(n^+) =& mn+m = nm+m = nm+m \\ =& (n^+)m \qquad (\because \text{Lemma 2.}) \end{aligned}$$

이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$m+n = n+m$$

가 성립한다.

(다)

$$m(n+k) = mn+mk$$

pf. Lemma 1.과 같다. 위를 참고하라.

$$(n+k)m = nm+km$$

pf. 지금까지 증명한 것을 이용하여 보일 수 있다.

$$(n+k)m = m(n+k) = mn+mk = nm+km$$

이므로 성립한다.

2.1.6.

$$n \in \mathbb{N} \implies n = 0 \text{ or } [\exists m \in \mathbb{N} \mid n = m^+]$$

pf. $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \text{ or } [\exists m \in \mathbb{N} \mid n = m^+]\}$라 하자.

$$0 = 0$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $n \in X$라고 가정할 때,

$$\exists m = n \in \mathbb{N} \mid n^+ = (m)^+$$

은 가정에 관계없이 참이므로 $n^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해

$$n = 0 \text{ or } [\exists m \in \mathbb{N} \mid n = m^+]$$

가 성립한다.

2.1.7.

Lemma 1. $m < n \iff m^+ \le n$이다.
pf. ($\implies$)는 책의 (2.6)이다.
($\impliedby$)
$m^+ \le n \iff m^+ = n \text{ or } m^+ \in n$이고, $m < n \iff m \in n$ 임을 상기하자.

$$m^+ = n \implies n = m \cup \{m\} \implies m \in n \implies m < n$$
$$m^+ \in n \implies m^+ < n \implies m < m^+ < n \implies m < n$$

이므로 성립한다. □

Lemma 2. $m \le n \iff m^+ \le n^+$임을 보이자.

$$\begin{aligned} m^+ \in n^+ &\iff m^+ \in n \cup \{n\} \\ &\iff m^+ = n \text{ or } m^+ \in n \\ &\iff m^+ \le n \\ &\iff m < n && (\because \text{Lemma 1.}) \\ &\iff m \in n \end{aligned}$$

이고,

$$m = n \iff m^+ = n^+$$

이므로

$$\begin{aligned} [m = n \text{ or } m \in n] &\iff [m^+ = n^+ \text{ or } m^+ \in n^+] \\ m \le n &\iff m^+ \le n^+ \end{aligned}$$

이다. □

(가)

$$m + k \le m + l \iff k \le l$$

pf. $X = \{m \in \mathbb{N} \mid m + k \le m + l \iff k \le l\}$라 하자.

$$k = 0 + k \le 0 + l = l \iff k \le l$$

이므로 $0 \in X$이다. 이제 $m \in X$라고 가정할 때,

$$\begin{aligned} m^+ + k \le m^+ + l &\iff m + 1 + k \le m + 1 + l \\ &\iff m + k + 1 \le m + l + 1 \\ &\iff (m + k)^+ \le (m + l)^+ \\ &\iff m + k \le m + l && (\because \text{Lemma 2.}) \\ &\iff k \le l \end{aligned}$$

이므로 $m^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $m \in \mathbb{N}$에 대해

$$m + k \le m + l \iff k \le l$$

가 성립한다.

(나)

$$mk \le ml \iff k \le l \qquad (\text{단, } m \ne 0)$$

pf. $X = \{k \in \mathbb{N} \mid m \ne 0, mk \le ml \iff k \le l\}$라 하자.

$$0 = 0k \le ml \iff 0 = k \le l$$

는 모든 자연수가 0보다 크거나 같으므로 성립한다.

따라서, $0 \in X$이다. 이제 $k \in X$라고 가정할 때 $k^+ \in X$임을 보이자. 일단 $l \in \mathbb{N}$이므로 $l = 0$ or $l = p^+$이다.

$l = 0$인 경우를 먼저 생각하자.

$$n \le 0 \iff n = 0 \text{ or } n \in 0 = \varnothing \iff n = 0$$

인 것을 알고있다. $m \ne 0$인 것을 참고하여,

$$\begin{aligned} mk \le m0 = 0 &\iff mk = 0 \\ &\iff k = 0 \\ &\iff k \le 0 \end{aligned}$$

이므로, $l = 0$인 경우에는 $mk \le ml \iff k \le l$가 성립한다.

$l = p^+$인 경우를 생각해보자.

$$\begin{aligned} m(k^+) \le m(p^+) &\iff m(k+1) \le m(p+1) \\ &\iff mk + m \le mp + m \\ &\iff m + mk \le m + mp \\ &\iff mk \le mp && (\because (\text{가})) \\ &\iff k \le p \\ &\iff k^+ \le p^+ && (\because \text{Lemma 2.}) \\ &\iff k^+ \le l \end{aligned}$$

이므로 $k^+ \in X$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $X = \mathbb{N}$이고, 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대해

$$m \ne 0\text{인 경우, } mk \le ml \iff k \le l$$

가 성립한다.

2.2.4.

Well-defined

$$[m, n] + [k, l] = [m + k, n + l]$$

이 잘 정의되었는지 확인하자.
$[m, n] = [m', n']$이고 $[k, l] = [k', l']$일 때

$$\begin{aligned} (m + k) + (n' + l') &= (m' + k') + (n' + l') \\ &= (m' + k') + (n + l) \end{aligned}$$

이므로 $[m + n, k + l] = [m' + n', k' + l']$이다. 따라서,

$$[m, n] + [k, l] = [m', n'] + [k', l']$$

이다. 따라서, (2. 12)의 연산은 잘 정의되었다.

결합법칙

$$\begin{aligned}([a,b]+[c,d])+[e,f]=&[a+c,b+d]+[e,f]\\=&[a+c+e,b+d+f]\\=&[a,b]+[c+e,d+f]\\=&[a,b]+([c,d]+[e,f])\end{aligned}$$

이므로 결합법칙이 성립한다.

교환법칙

$$\begin{aligned}[a,b]+[c,d]=&[a+c,b+d]\\=&[c+a,d+b]\\=&[c,d]+[a,b]\end{aligned}$$

이므로 교환법칙이 성립한다.

2.2.6.

$$\begin{aligned}[m,n]\cdot[k,l]=[0,0]&\iff[mk+nl,ml+nk]=[0,0]\\&\iff mk+nl+0=ml+nk+0\\&\iff mk+nl=ml+nk\end{aligned}$$

여기서 $m=n$이면 $[m,n]=[0,0]$인 경우이고,

$$\begin{aligned}mk+nl=&nk+nl\\=&nk+ml\\=&ml+nk\end{aligned}$$

이므로, $[m,n]\cdot[k,l]=[0,0]$가 성립한다.

이제, $m\neq n$인 경우를 생각하자.
1. $m<n$인 경우
$n=m+p$를 만족하는 $p\in\mathbb{N}$이 존재한다. 단, $m\neq n$이므로 $p\neq 0$이다.

$$\begin{aligned}mk+nl=ml+nk&\iff mk+(m+p)l=ml+(m+p)k\\&\iff mk+ml+pl=ml+mk+pk\\&\iff(mk+ml)+pl=(mk+ml)+pk\\&\iff pl=pk\iff pl\le pk\text{ and }pk\le pl\\&\iff l\le k\text{ and }k\le l\iff k=l\\&\iff[k,l]=[0,0]\end{aligned}$$

이므로, $[k,l]=[0,0]$이다.

2. $n<m$인 경우
1.와 비슷하게 진행하면 된다. $m=n+p$를 만족하는 $p\in\mathbb{N}$이 존재한다. 단, $m\neq n$이므로 $p\neq 0$이다.

$$\begin{aligned}mk+nl=ml+nk&\iff(n+p)k+nl=(n+p)l+nk\\&\iff nk+pk+nl=nl+pl+nk\\&\iff(nk+nl)+pk=(nk+nl)+pl\\&\iff pk=pl\iff pl\le pk\text{ and }pk\le pl\\&\iff l\le k\text{ and }k\le l\iff k=l\\&\iff[k,l]=[0,0]\end{aligned}$$

이므로, $[k,l]=[0,0]$이다.

결론
$[m,n]\cdot[k,l]=[0,0]$이면, $[m,n]=[0,0]$ or $[k,l]=[0,0]$이다.

2.2.8.

$a=[x,0]\in P$이고, $b=[y,0]\in P$라 하자. 가정에 의해, $x,y\in\mathbb{N}$이고, $x\neq 0,y\neq 0$이다.

$$\begin{aligned}x\neq 0\text{ and }y\neq 0&\iff 0<x\text{ and }0<y\\&\iff 0<x\text{ and }x<x+y\\&\iff 0<x<x+y\\&\iff 0<x+y\end{aligned}$$

이다. 그러면,

$$a+b=[x,0]+[y,0]=[x+y,0+0]=[x+y,0]$$

이고, $x+y\in\mathbb{N},0<x+y$이므로, $a+b\in P$이다.

$$\begin{aligned}x\neq 0\text{ and }y\neq 0&\iff 0<x\text{ and }0<y\\&\iff 1\le x\text{ and }0<y\\&\iff y\le xy\text{ and }1\le y\\&\iff 1\le xy\iff 0<xy\end{aligned}$$

이다. 그러면,

$$ab=[x,0]\cdot[y,0]=[xy+0,0+0]=[xy,0]$$

이고, $xy\in\mathbb{N},0<xy$이므로, $ab\in P$이다.

2.2.15.

임의의 $[a,b],[c,d]\in\mathbb{Q}$에 대하여

$$[a,b]\ge[c,d]\iff[a,b]-[c,d]\in P_{\mathbb{Q}}\text{ or }[a,b]=[c,d]$$

이다. 여기서 $[a,b]=[c,d]$의 동치관계는

$$\begin{aligned}[a,b]=[c,d]&\iff ad=cb\\&\iff ad(bd)=cb(bd)&&(\because bd\neq 0)\\&\iff abd^2=cdb^2\end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 다음으로 $[a,b]-[c,d]\in P_{\mathbb{Q}}$의 동치관계는

$$\begin{aligned}[a,b]-[c,d]\in P_{\mathbb{Q}} &\iff [a,b]+(-[c,d])\in P_{\mathbb{Q}}\\ &\iff [a,b]+[-c,d]\in P_{\mathbb{Q}}\\ &\iff [ad+(-c)b,bd]\in P_{\mathbb{Q}}\\ &\iff [ad-cb,bd]\in P_{\mathbb{Q}}\\ &\iff (ad-cb,bd)\in P_{\mathbb{Z}}\times P_{\mathbb{Z}}\\ &\iff ad-cb\in P_{\mathbb{Z}} \text{ and } bd\in P_{\mathbb{Z}}\\ &\iff 0<ad-cb \text{ and } 0<bd\\ &\iff ad<cb \text{ and } 0<bd\\ &\iff ad(bd)<cb(bd)\\ &\iff abd^2<cdb^2\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}[a,b]\geq[c,d] &\iff [a,b]-[c,d]\in P_{\mathbb{Q}} \text{ or } [a,b]=[c,d]\\ &\iff abd^2<cdb^2 \text{ or } abd^2=cdb^2\\ &\iff abd^2=cdb^2\end{aligned}$$

이다.

2.3.1.

임의의

$$r=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\qquad (a\in\mathbb{Z},b\in P_{\mathbb{Z}})$$

에 대해

$$r^*=\{p\in\mathbb{Q}\mid p<r\}$$

가 절단임을 보이자.

(절 1) $r-1<r$이므로 $r-1\in r^*$이고, $r+1\geq r$이므로 $r+1\notin r^*$이다. 따라서 $r^*\neq\varnothing$, $r^*\neq\mathbb{Q}$이다.

(절 2) $p\in r^*,q\in\mathbb{Q},q<p$라고 하면,

$$\begin{aligned}p<r \text{ and } q<p &\iff q<p<r\\ &\iff q<r\\ &\iff q\in\mathbb{Q}\end{aligned}$$

이다.

(절 3) 만약

$$p=\frac{c}{d}\in r^*\qquad (c\in\mathbb{Z},d\in P_{\mathbb{Z}})$$

라고 하면, 먼저 $p<r$임을 이용하여,

$$\begin{aligned}p<r &\iff \frac{c}{d}<\frac{a}{b}\\ &\iff 0<\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\\ &\iff 0<\frac{ad+cb}{bd}\\ &\iff 0<ad+cb \qquad (\because 0<bd)\end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다.

이제,

$$s=\frac{a+c}{b+d}\in\mathbb{Q}$$

를 생각하면,

$$\begin{aligned}p<s &\iff \frac{c}{d}<\frac{a+c}{b+d}\\ &\iff 0<\frac{a+c}{b+d}+(-\frac{c}{d})\\ &\iff 0<\frac{a+c}{b+d}+\frac{-c}{d}\\ &\iff 0<\frac{(a+c)d+(-c)(b+d)}{(b+d)d}\\ &\iff 0<\frac{(ad+cd-bc-cd}{(b+d)d}\\ &\iff 0<\frac{(ad-bc)}{(b+d)d}\\ &\iff 0<ad-bc \qquad (0<(b+d)d)\end{aligned}$$

이므로, $p<s$는 성립한다. 또한,

$$\begin{aligned}s<r &\iff \frac{a+c}{b+d}<\frac{a}{b}\\ &\iff 0<\frac{a}{b}+(-\frac{a+c}{b+d})\\ &\iff 0<\frac{a}{b}+\frac{-a-c}{b+d}\\ &\iff 0<\frac{a(b+d)+(-a-c)(b)}{d(b+d)}\\ &\iff 0<\frac{ab+ad-ab-bc}{(b+d)d}\\ &\iff 0<\frac{ad-bc}{(b+d)d}\\ &\iff 0<ad-bc \qquad (0<(b+d)d)\end{aligned}$$

이므로, $s<r$ 또한 성립한다.

따라서, $p<s$이고 $s\in r^*$인 s가 존재한다.

결론. 임의의 $r\in\mathbb{Q}$에 대해 r^*가 절단이다.

2.3.3.

결합법칙. 임의의 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$에 대해

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned}x\in(\alpha+\beta)+\gamma &\iff \exists n\in(\alpha+\beta),c\in\gamma\mid x=n+c\\ &\iff \exists a\in\alpha,b\in\beta,c\in\gamma\mid x=a+b+c\\ &\iff \exists a\in\alpha,m\in(\beta+\gamma)\mid x=a+m\\ &\iff x\in\alpha+(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

이므로, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$이다.

교환법칙. 임의의 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$에 대해

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned} x \in \alpha + \beta &\iff \exists a \in \alpha, b \in \beta \mid x = a + b \\ &\iff \exists b \in \beta, \exists a \in \alpha \mid x = b + a \\ &\iff x \in \beta + \alpha \end{aligned}$$

이므로, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$이다.

2.3.6.

$\alpha 1^* = 1^* \alpha = \alpha$ **임을 보이자.**

교환법칙. ($P_\mathbb{R}$) 임의의 $\alpha, \beta \in P_\mathbb{R}$에 대해

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

가 성립한다.

$$\begin{aligned} x \in \alpha\beta &\iff \exists a \in \alpha, b \in \beta \mid x \leq ab \\ &\iff \exists b \in \beta, \exists a \in \alpha \mid x = ba \\ &\iff x \in \beta\alpha \end{aligned}$$

이므로, $\alpha\beta = \beta\alpha$이다.

교환법칙. ($\mathbb{R}$) 임의의 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$에 대해

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0* & = & 0* & \alpha = 0 \text{ or } \beta = 0 \\ \alpha\beta & = & \beta\alpha & \alpha \in P_\mathbb{R}, \beta \in P_\mathbb{R} \\ -\alpha(-\beta) & = & -(-\beta)\alpha & \alpha \in P_\mathbb{R}, \beta \in -P_\mathbb{R} \\ -(-\alpha)\beta & = & -\beta(-\alpha) & \alpha \in -P_\mathbb{R}, \beta \in P_\mathbb{R} \\ (-\alpha)(-\beta) & = & (-\beta)(-\alpha) & \alpha \in -P_\mathbb{R}, \beta \in -P_\mathbb{R} \end{cases}$$

이므로, $\alpha\beta = \beta\alpha$인 것을 알 수 있다.

교환법칙에 의해서

$$\alpha 1^* = 1^* \alpha \tag{1}$$

임을 알 수 있다.

이제 임의의 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대해 $\alpha 1^* = \alpha$임을 보이자.

Case 1. $\alpha = 0^*$

$$\alpha 1^* = 0^* 1^* = 0^* = \alpha$$

이므로 성립한다.

Case 2. $\alpha \in P_\mathbb{R}$

1. $\alpha \supset \alpha 1^*$ **이다.**

$$\begin{aligned} x \in \alpha 1^* &\implies \exists r \in \alpha \cap P_\mathbb{R}, \exists s \in 1^* \cap P_\mathbb{R} \mid x \leq rs \\ &\implies \exists r \in \alpha \cap P_\mathbb{R}, \exists s \in 1^* \cap P_\mathbb{R} \mid x \leq rs < r \\ &\implies x \in \alpha \cap P_\mathbb{R} \\ &\implies x \in \alpha \end{aligned}$$

2. $\alpha \subset \alpha 1^*$ **이다.** $p \in \alpha \implies \exists q \in \alpha \mid q > p$이다. 그러면,

$$\exists r = q \in \alpha \cap P_\mathbb{R}, \exists s = \frac{p}{r} \in 1^* \cap P_\mathbb{R} \mid x \leq rs = q\left(\frac{p}{q}\right)$$

이므로, $p \in \alpha 1^*$이다.

1.와 2.에 의해서

$$\alpha = \alpha 1^*$$

이다.

Case 3. $\alpha \in -P_\mathbb{R}$

$a \in P_\mathbb{R}$인 경우에 $\alpha 1^* = \alpha$가 성립함을 이용하자.

$$\alpha 1^* = -(-\alpha)1^* = -(-\alpha) = \alpha$$

이므로, $\alpha \in -P_\mathbb{R}$인 경우에도

$$\alpha 1^* = \alpha$$

가 성립한다.

결론.
$x \in \mathbb{R}$이면,

$$x = 0^* \quad \text{or} \quad x \in P_\mathbb{R} \quad \text{or} \quad x \in -P_\mathbb{R}$$

이고, 각각의 경우 (Case 1, Case 2, Case 3)에 대해서 $x1^* = x$가 성립하므로, 임의의 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대해서,

$$\alpha 1^* = \alpha \tag{2}$$

가 성립함을 알 수 있다.

(1), (2)에 의하여 임의의 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha 1^* = 1^* \alpha = \alpha$$

이다. □

$0^* < 1^*$**임을 보이자.**

$\frac{1}{2} \notin 0^*$이고, $\frac{1}{2} \in 1^*$이므로,

$$0^* \neq 1^* \tag{1}$$

이다.

$$\begin{aligned} x \in 0^* &\iff x \in \mathbb{Q}, x < 0 \\ &\implies x \in \mathbb{Q}, x < 1 \\ &\implies x \in 1^* \end{aligned}$$

이므로,

$$0^* \subset 1^* \tag{2}$$

이다.

(1), (2)에 의해 $0^* \subsetneq 1^*$이고, 이는

$$0^* < 1^*$$

을 의미한다. □

2.3.7.

$$\gamma = 0^* \cup \{0\} \cup \left\{ q \in P_{\mathbb{Q}} \mid \left(\exists r \in P_{\mathbb{Q}} \mid r > q, \frac{1}{r} \notin \alpha \right) \right\}$$

γ는 절단이다.

(절1)

$$0 \in \gamma \implies \gamma \neq \varnothing \tag{(1)}$$

이다. 또한,

$$\begin{aligned} \alpha \in P_{\mathbb{R}} &\implies 0 \in \alpha \\ &\implies \exists x \in \alpha \mid x \in P_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

이다.

$\frac{1}{x} \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}}$가 γ에 속하지 않는 것을 증명해보자.

pf. [귀류법] $\frac{1}{x} \in \gamma$라 하자. 그러면,

$$x \in \gamma \iff \exists r \in P_{\mathbb{Q}} \mid r > \frac{1}{x}, \frac{1}{r} \notin \alpha$$

이다. 하지만,

$$r > \frac{1}{x} \implies \frac{1}{r} < x \implies \frac{1}{r} \in \alpha$$

이므로, $\frac{1}{r} \in \alpha$ and $\frac{1}{r} \notin \alpha$이다. 따라서 모순이다.

따라서, $\frac{1}{x} \notin \gamma$이다. □

위를 이용하면

$$\frac{1}{x} \in P_{\mathbb{Q}}, \frac{1}{x} \notin \gamma \implies \gamma \neq \mathbb{Q} \tag{2}$$

을 알 수 있다.

(1), (2)에 의해 (절 1)은 성립한다.

(절2)

임의의 $p \in \gamma$를 생각해보자.

Case 1. $p \leq 0$**인 경우** γ의 정의에 의해 $p - 1 < 0$이므로,

$$\exists q = p - 1 < p \mid q \in \gamma$$

이다.

Case 2. $p > 0$**인 경우**

$$p \in \gamma \setminus \{0\} \setminus 0^*$$

이므로 성립함을 알 수 있다. 간략하게 적어보면,

$$\begin{aligned} p \in \gamma, p > q &\implies \left(\exists r \in P_{\mathbb{Q}} \mid r > p, \frac{1}{r} \notin \alpha \right), p > q \\ &\implies \exists r \in P_{\mathbb{Q}} \mid r > q, \frac{1}{r} \notin \alpha \\ &\iff q \in \gamma \end{aligned}$$

이므로 (절 2)는 성립한다.

(절3)

$\alpha \in P_{\mathbb{R}}$이므로, $\alpha > 0^* \iff \alpha \supset 0^*, \alpha \neq 0^*$이다. 또한 $\alpha \neq \mathbb{Q}$이므로,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \setminus \alpha =& \mathbb{Q} \setminus \alpha \setminus 0^* \setminus \\ =& \mathbb{Q} \setminus \alpha \setminus 0^* \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{$0 \in \alpha$}$$

이므로, $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x \in (\mathbb{Q} \setminus \alpha)$가 존재한다. 이 x는

$$x > 0 \text{ and } x \notin \alpha$$

이다. 이제

$$u = \frac{1}{x+1} > 0$$

가 γ에 속함을 보이자.

pf.

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1} = u \text{ and } x \notin \alpha \iff u \in \gamma \tag{1}$$

□

이제 임의의 $p \in \gamma$에 대해 (절 3)을 만족하는지 확인해보자.

Case 1. $p \leq 0$

$$\exists q = u > p \mid u \in \gamma \tag{$\because$ (1)}$$

Case 2. $p > 0$

$$p \in \gamma \implies \exists q \in P_{\mathbb{Q}} \mid q > p, \frac{1}{q} \notin \alpha$$

이다. 이제

$$x = \frac{(p+q)}{2}$$

인 $x \in P_{\mathbb{Q}}$ 생각하자. $p < x < q$는 만족한다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{1}{q} \notin \alpha \text{ and } x < q \implies x \in \gamma$$

이다.

따라서 $p \in \gamma \implies (\exists x \in \gamma \mid x > p)$이므로 (절 3)을 만족한다.

(절1), (절2), (절3)을 모두 만족하므로 γ는 절단이다. □

$\alpha\gamma = 1^*$**이다.**

1. $\alpha\gamma \subset 1^*$**이다.**

$$x \in \alpha\gamma \iff \exists r \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}}, \exists s \in \gamma \cap P_{\mathbb{Q}} \mid x \leq rs$$

이다. 여기서 $s \in \gamma \cap P_{\mathbb{Q}}$이므로,

$$\exists k \in P_{\mathbb{Q}} \mid k > s, \frac{1}{k} \notin \alpha$$

이고,

$$\left(\frac{1}{k} \notin \alpha, r \in \alpha\right) \text{ and } s < k \implies r < \frac{1}{k} < \frac{1}{s}$$

를 얻는다. 따라서,

$$\begin{aligned} x \in \alpha\gamma &\iff \exists r \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}}, \exists s \in \gamma \cap P_{\mathbb{Q}} \mid x \leq rs \\ &\implies \exists r \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}}, \exists s \in \gamma \cap P_{\mathbb{Q}} \mid x < \left(\frac{1}{s}\right) s \\ &\implies \exists r \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}}, \exists s \in \gamma \cap P_{\mathbb{Q}} \mid x < 1 \\ x \in 1^* \end{aligned}$$

이므로, $\alpha\gamma \subset 1^*$이다.

2. $\alpha\gamma \supset 1^*$**이다.**

$\alpha \in P_{\mathbb{R}}$이므로, $\alpha > 0^* \iff \alpha \supset 0^*, \alpha \neq 0^*$이다. 따라서,

$$\exists x \in (\alpha \setminus 0^*) \implies x \geq 0$$

이고, 만약 $x = 0$라면 절단의 성질에의해 $\exists y \in \alpha \mid y > x = 0$가 존재한다. 따라서 α에서 양의 유리수

$$\exists a > 0 \in \alpha \tag{1}$$

가 존재한다고 할 수 있다.

양의 실수($P_{\mathbb{R}}$)의 곱하기의 정의에 의해서 $\alpha\gamma \supset 0^* \cup \{0\}$이다.

그러므로, $\alpha\gamma \supset 1^* \setminus (0^* \cup \{0\})$을 보이면 충분하다. 여기서

$$\begin{aligned} 1^* \setminus (0^* \cup \{0\}) &= \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 1\} \setminus (\{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\} \cup \{0\}) \\ &= \{p \in \mathbb{Q} \mid 0 < p < 1\} \end{aligned}$$

이므로, $\alpha\gamma \supset \{p \in \mathbb{Q} \mid 0 < p < 1\}$을 보이는 것과 동치이다.

$\alpha\gamma \supset \{p \in \mathbb{Q} \mid 0 < p < 1\}$**을 보이자.**
pf. $\forall s \in \{p \in \mathbb{Q} \mid 0 < p < 1\}$에 대해 생각하자.

이제 임의의 원소 $0 < s < 1$에 대해

$$t = \frac{1-s}{2} a$$

라고 하자. 그리고 집합 A를

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid nt \in \alpha\}$$

라고 정의하자. A가 최대 원소를 가진다는 것을 보이기 위해 다음 두가지를 증명하겠다.

1. A**는 공집합이 아니다.** $a \in \alpha, a > 0 \implies 0 \in \alpha$이다. 그러면

$$0 = 0t \in \alpha \implies 0 \in A$$

이다. 따라서, A는 공집합이 아니다.

2. A**는 위로 유계이다.**
pf.[귀류법] A가 위로 유계가 아니라고 가정하자.

유리수체는 아르키메데스 성질을 만족하므로, 임의의 유리수 $q \in \mathbb{Q}$에 대해,

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid q < kt$$

인 k가 존재한다. 여기서 A는 상계를 가지지 않으므로 k는 상계가 아니므로

$$\exists n \in A \mid n > k$$

이고, 이를 이용하면

$$q < kt < nt \in \alpha$$

이다. 따라서 $q \in \alpha$가 된다. 이 결과로 $\alpha = \mathbb{Q}$가 되며 이는 절단의 정의에 모순이다.

따라서 A는 위로 유계이다. □

위 두 증명에 의해서 집합 A는 최대 원소를 가진다. 이 최대원소를 $n_0 \in \mathbb{N}$이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} &n_0 t \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}} \\ &n_0 + 1t \notin \alpha \cap P_{\mathbb{Q}} \\ &n_0 + 2t \notin \alpha \cap P_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

이므로, 이를 이용하면

$$\frac{1}{(n_0+1)t} > \frac{1}{(n_0+2)t} \text{ and } 1/\frac{1}{(n_0+1)t} = (n_0+1)t \notin \alpha$$

이므로

$$\frac{1}{(n_0+2)t} \in \gamma$$

이다. 이제

$$\begin{aligned}
&x = (n_0)t \in \alpha, y = \frac{1}{(n_0+2)t} \in \gamma \text{이므로,} \\
&s \le xy = \frac{(n_0)t}{(n_0+2)t} = \frac{n_0}{n_0+2} \implies s \in \alpha\gamma
\end{aligned}$$

이므로,

$$s \le \frac{n_0}{n_0+2}$$

을 보이면 증명이 끝난다. 이를 보이자.

$$\begin{aligned}
(n_0+2)t \notin \alpha, a \in \alpha &\implies a < (n_0+2)t \\
&\implies a < (n_0+2)\frac{1-s}{2}a \\
&\implies 1 < (n_0+2)\frac{1-s}{2} \qquad (a > 0) \\
&\implies \frac{2}{n_0+2} < 1-s \\
&\implies s < 1 - \frac{2}{n_0+2} \\
&\implies s \le \frac{n_0}{n_0+2}
\end{aligned}$$

이므로

$$s \le \frac{n_0}{n_0+2}$$

는 성립한다.

따라서, $s \in \alpha\gamma$이고 이는

$$\alpha\gamma \supset 1^*$$

을 의미한다. □

결론. $\alpha\gamma \subset 1^*$이며 $\alpha\gamma \supset 1^*$이므로,

$$\alpha\gamma = 1^*$$

이다.