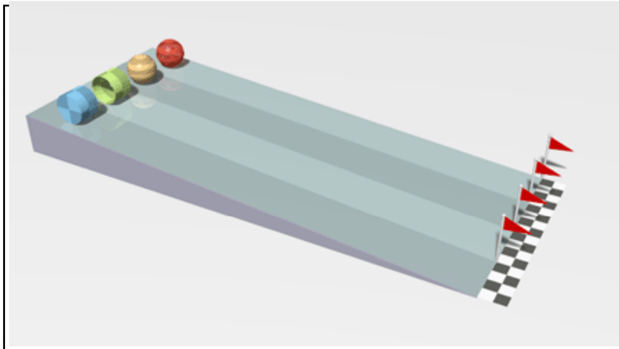
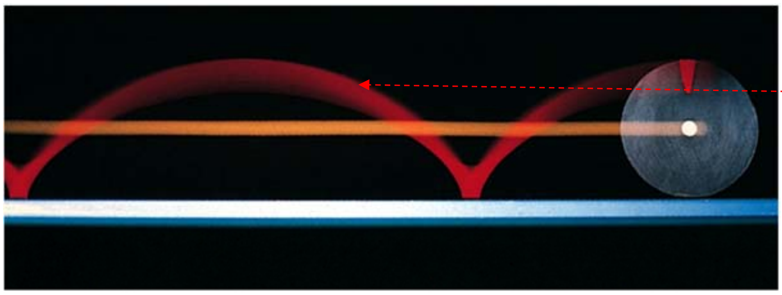


# Chapter 11. Rolling, Torque & Angular momentum



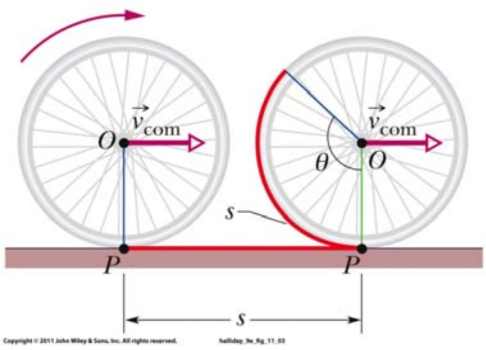
## 굴러가는 운동:Rolling



Cycloid curve

굴러가는 바퀴 가장자리 점의 궤적

회전중심 이동과 회전각 관계




- 미끄러짐이 없이 구르는 경우:

$$\boxed{\text{바닥에 닿은 호의 길이} = CM \text{ 이동거리}}$$

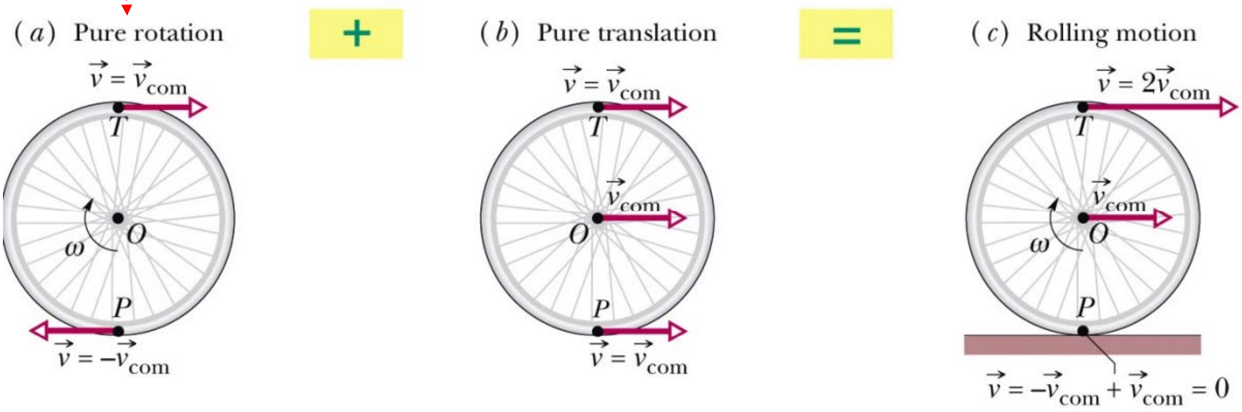
$$s = (\text{반지름}) \times (\text{회전각}) = R\theta$$

- 바퀴 $CM$ 속도:

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

CM과 같이 움직이면서 볼 때

# 구르는 운동의 이해




모든 지점이 CM을 중심으로 같은 각속도 ω로 회전운동 → 가장자리 속도=$V_{CM}$

모든 지점이 CM과 동일한 속도 $v_{CM}$로 병진운동

구르는 운동 = 순수회전 + 순수병진

Note
$$\begin{cases} \bullet\, P\text{점: 속도의 벡터합} = 0 & \text{(순간적으로 정지)} \\ \bullet\, T\text{점: 속도의 벡터합} = 2\vec{v}_{CM} & (CM\text{ 보다 2배 빠름}) \end{cases}$$

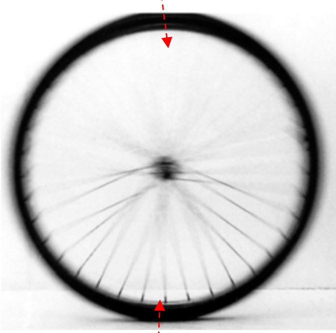


# 구르는 운동의 이해

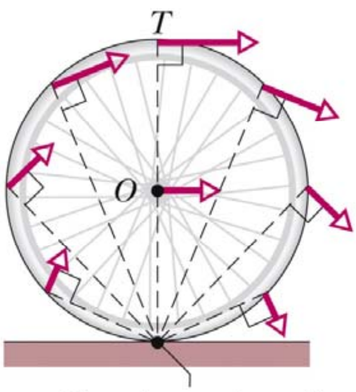
▶ 순수한 회전운동(about 접촉점)으로써의 구르는 운동

빠름: 흐리게 보임

순간사진



정지:선명하게 보임

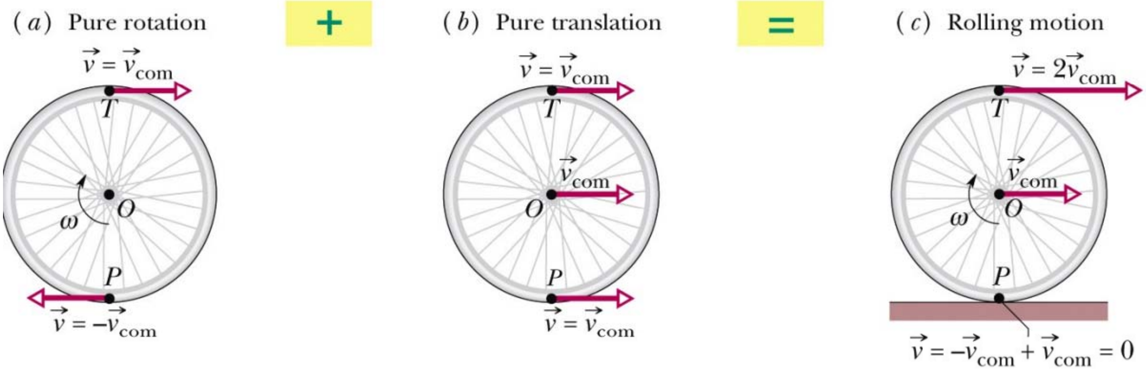



Rotation axis at $P$

▶ 구르는 운동을 순수 회전운동으로 보면, 회전축은 바퀴와 땅이 닿는 점으로서 매 순간 바뀐다

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{cases} T: v_{top} = r\omega = (2R)\omega = 2(R\omega) = 2v_{CM} \\ O: v_{center} = r\omega = R\omega = v_{CM} \\ P: v_{bottom} = r\omega = 0\omega = 0 \end{cases}$$

# 구르는 운동에서 에너지




$\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ $+\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ $= K_{tot}$

• 구르는 운동 = 접촉점 $P$에 대한 순수 회전운동으로 해석하면

$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$ ⇐ $P$점에 대한 순간회전(구름운동만 가능)

$= \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$ ⇐ 평행축 정리

$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M (R\omega)^2$ ⇐ $v_{CM} = R\omega$

• $\boxed{\text{일반적인 강체운동} = (CM \text{ 의 병진운동}) + (\text{회전 } w.r.t.\ CM - \text{축})}$



# 일반적인 강체의 운동

강체의 운동을 기술하기 위해서는 회전축을 어디로 잡아야 하는가에 대한 문제가 발생한다 : 토오크/각운동량 계산의 기준.

① 고정축에 대해서 회전할 때: 고정축을 기준으로 한다

② 고정축이 없을 때 :

a. 질량중심이 등속운동하는 경우: 임의의 지점

b. 질량중심이 가속이 되는 경우: 질량중심을 통과하는 축을 기준으로 잡는다 (증명생략)

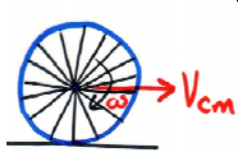
c. 미끄러지지 않고 Rolling 할 때: 바닥과의 접촉점에 대한 순수한 회전으로 생각할 수 있다 → 특수한 경우임.

• $\boxed{\text{일반적인 강체운동} = (CM \text{ 의 병진운동}) + (\text{회전 } w.r.t.\ CM - \text{축})}$

# 구르는 운동에서 마찰역할

▶ 바퀴가 일정한 속도로 굴러갈 때는 접촉점에서 미끄러지지 않으므로 그곳에 **마찰력이 작용하지 않는다**.

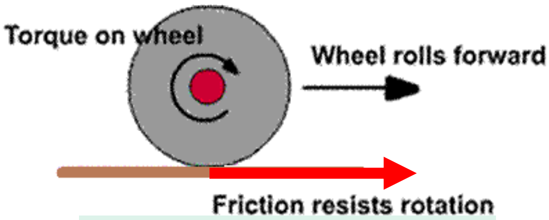
-왜? 마찰이 있다면 마찰방향으로 가속되어야 한다!
(➔일정속도가 안됨)



No friction!

▶ 그럼 자전거 바퀴를 페달을 밟아서 가속시킬 때 마찰력의 방향은?

페달을 밟으면 자전거 바퀴는 더 빨리 회전을 하고(ω 증가), 접촉점은 **왼쪽**으로 미끄러지려는 경향을 보인다. 마찰력은 이 미끄러지려는 경향을 반대하므로 **오른쪽**으로 작용하여서 자전거 (질량중심)를 가속을 시킨다.




가속 운동:정지마찰력
(미끄럼 없을 때)

- 운동마찰력: 미끄러짐이있는 경우 $(a_{CM} \neq R\alpha)$
- 정지마찰력: 가속하면서 구르는 경우 $(a_{CM} = R\alpha)$



# Which direction does the frictional force act on bicycle tires

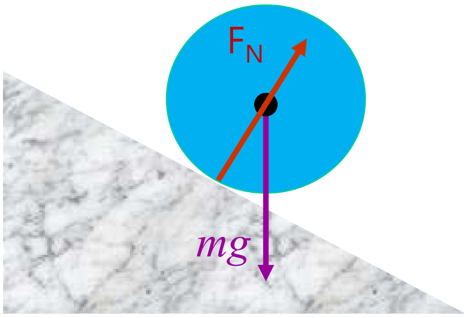
자전거의 페달을 밟아서 (미끄러짐 없이) 가속을 하고 있다. 각 바퀴에 작용하는 마찰력의 방향은? (정상적인 자전거는 후륜구동임)

이제, 마찰력이 만드는 돌림힘을 생각해 보라. 방금 답이 맞다고 생각하는가?

앞 바퀴의 브레이크를 꽉 잡아 속도를 줄인다. 마찰력의 방향은 ?

# 마찰이 없는 경사면

- 마찰이 없는 경사면 위에 올려진 바퀴는
  - 처음에 돌지 않는 상태로 올려진 바퀴는 구르지 않고 미끄러진다 → 직접 실험해보라!
  - 왜? CM을 기준으로 볼 때 물체를 회전시키는 토크가 없다 ($F_N$ & W : 모멘트 팔길이 = 0)




$$\boxed{\begin{array}{c}\text{일반적인 강체운동}\\ =\left(CM\text{의 병진운동}\right)+\left(\text{회전 } w.r.t.\ CM-\text{축}\right)\end{array}}$$

τ가 없다!



# 경사면에서 Rolling (마찰이 있어야 )

$\bullet\, CM-$병진운동 (경사면 위쪽이 +x) :

$$F_{net,x}=f_s-Mg\sin\theta=Ma_{CM}\qquad (a_{CM}<0)$$

$\bullet\, CM$에 대한 회전(반시계방향 +):

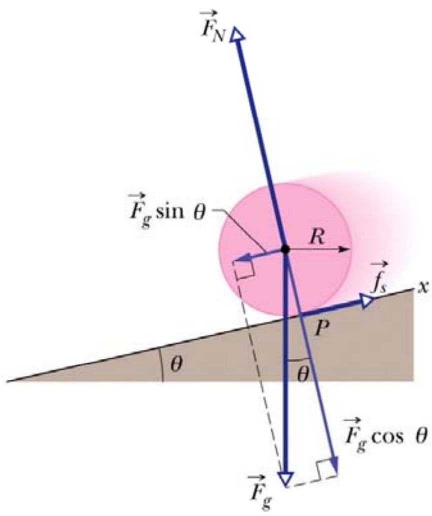
마찰만 돌림힘을 만듦 : $\tau=f_sR$

$$\tau=I_{CM}\alpha\longrightarrow f_sR=I_{CM}\alpha$$

$\bullet$아래로 구르면서 내려감 : $\boxed{R\alpha=-a_{CM}}$

$$\rightarrow f_s=-I_{CM}\frac{a_{CM}}{R}$$

$$\therefore a_{CM}=-\frac{g\sin\theta}{1+I_{CM}/MR^2}\quad (\text{"}-\text{"}: \text{아래로 내려감})$$




접촉점 P에서 정지마찰력은 중력에 의한 미끄러짐을 방지

$\bullet$경사면 끝에서 속력(경사면 길이 = $L$)

$$v^2-\underbrace{v_0^2}_{0}=2a_{CM}\underbrace{(x-x_0)}_{-L}\qquad \therefore v=\sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+I_{CM}/MR^2}}$$

$\bullet$비교 : 마찰없이 미끄러질 때

$a_{CM}=$

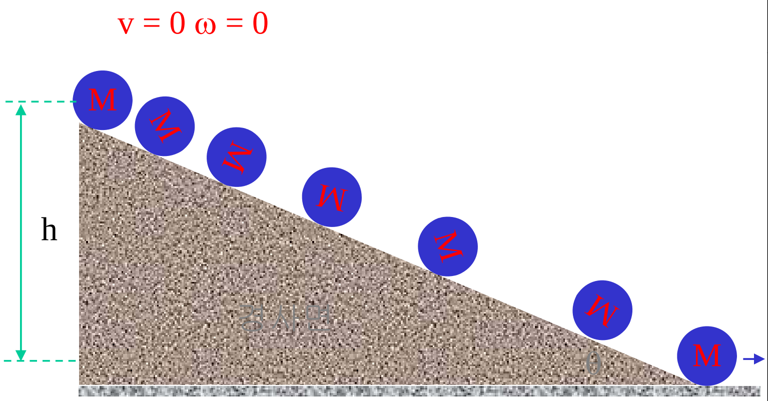
# 역학적 에너지 보존을 이용한 구르는 운동 해석

- 물체가 구르는 동안 정지마찰력은 일을 하지 않는다. 접촉점의 미끄러짐이 없기 때문이다. 따라서, 역학적 에너지가 보존된다.

- 역학적 $E$ 보존:

$$\underbrace{0+0+Mgh}_{\text{꼭대기}}=\underbrace{\tfrac{1}{2}Mv^2+\tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2+0}_{\text{바닥}}$$

$$\Rightarrow Mgh=\tfrac{1}{2}(I_{CM}/R^2+M)v^2$$




- 바닥에서 CM-속도:

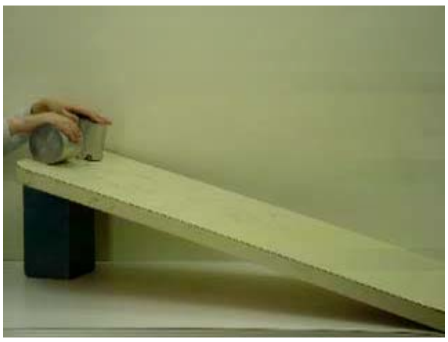
$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+I_{CM}/MR^2}}$$

$\Rightarrow I_{CM}$이 클수록 같은 높이를 내려올 때 (회전운동 에너지를 많이 써서) $v_{CM}$이 작으므로 더 느리게 내려온다.

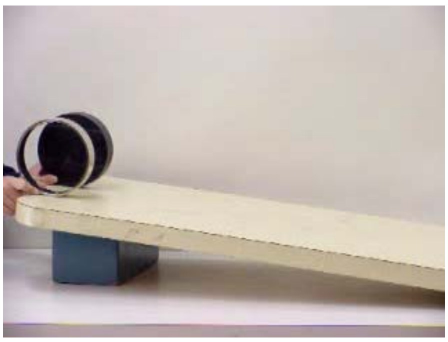


# 누가 빨리 내려오나?

▶ 미끄러지는 운동 vs 구르는 운동 (미끄러질 때, 마찰은 무시함)



▶ 원반 vs 링의 구르는 운동 (같은 질량의 물체임)



Moment of inertia large → small

| Object | Rotational Inertia, $I_{com}$ | Fraction of Energy in Translation | Fraction of Energy in Rotation | |
|---|---|---|---|---|
| Hoop | $1mr^2$ | 0.5 | 0.5 | slowest |
| Disk | $\frac{1}{2}mr^2$ | 0.67 | 0.33 | |
| Sphere | $\frac{2}{5}mr^2$ | 0.71 | 0.29 | |
| sliding block (no friction) | 0 | 1 | 0 | fastest |

# 같은 질량, 다른 크기의 원판 구르는 운동 비교

- 같은 질량, 다른 반지름의 두 원판을 경사면에서 굴린다. 어느 것이 먼저 바닥에 도달하는가?

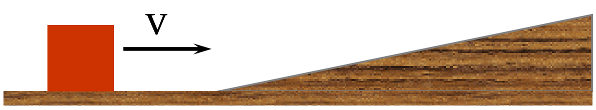
  (A)반지름이 큰 것  (B)반지름 작은 것  (C) 같다.

$$note: I_{원판} = \tfrac{1}{2}MR^2$$



# Question

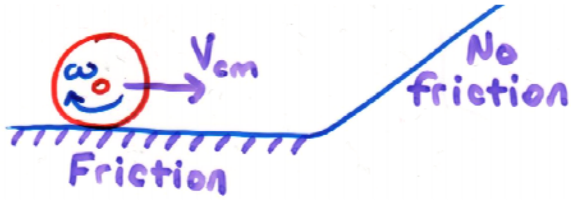
- 같은 질량의 블록과 공이 같은 각도의 경사면을 오른다. 블록은 마찰 없이 미끄러지고, 공은 미끄러짐 없이 굴러간다. 바닥에서 CM의 속도가 같을 때, 누가 더 높이 오르는가?





$$\boxed{\begin{gathered}\text{일반적인 강체운동}\\ =\left(CM\text{의 병진운동}\right)+\left(\text{회전 } w.r.t.\ CM-\text{축}\right)\end{gathered}}$$

마찰이 없는 경사면을 오르는 경우



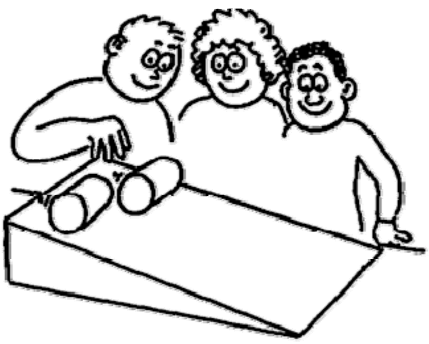

회전을 멈추는 토크가 없기 때문에 최고점에서도 바퀴는 바닥에서와 같은 각속도로 회전을 한다.

에너지 관점에서 보면 → 올라갈 수 있는 높이는

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_{cm}^{2}+\cancel{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^{2}}}_{\text{경사면아래}}=\underbrace{mgh+\cancel{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^{2}}}_{\text{경사면꼭대기}}$$



주스 캔과 얼린 주스 캔을 굴릴 때 어느 것이 더 빨리 내려가는가?

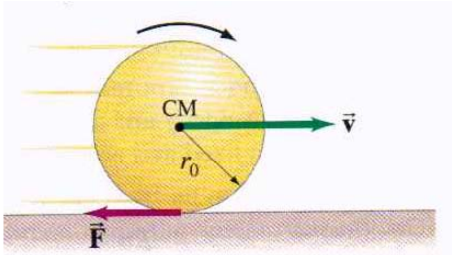


A. 그냥 주스 캔
B. 얼린 주스 캔
C. 같다

그냥 주스는 물이 같이 회전을 하지않는다!

-> 더 빠르다?

## 왜 구르는 물체는 점차 느려지는가?



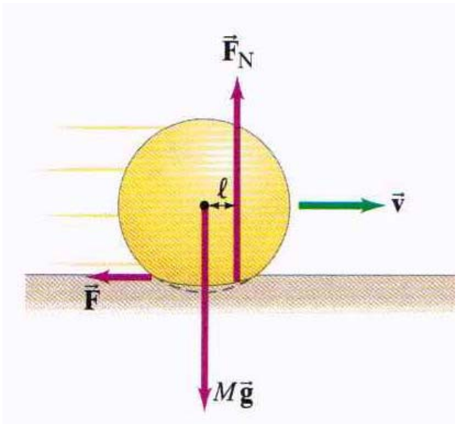

마찰 때문에?

- 마찰은 CM의 속도를 줄인다. 그러나 토크를 만들어서 (그림:시계방향) 회전을 빠르게 한다 → 이것이 다시 질량중심의 속도를 빠르게 한다
- 결론: 따라서 각속도를 줄이기 위해서는 다른 형태의 힘이 작용해야 한다.
- Note: 실제 구 (또는 원형 바퀴)는 완전한 강체가 아니므로 접촉점이 한 점이 아니다…



## Rolling friction

- 실제 바퀴는 옆 그림처럼 변형이 되고 마찰(F)과 수직항력($F_N$)을 받는다
  - ✓ 차가 오른쪽으로 가면 바퀴의 오른쪽 부분이 상대적으로 더 많이 힘을 받게 되어 수직항력은 회전중심에서 오른쪽에 있게 됨.
- 수직항력(반시계방향)과 마찰(시계방향)이 서로 반대의 돌림힘을 만들어서 바퀴의 회전을 감소시킴
- → **구름마찰(Rolling friction).**
- 일반적으로 구름마찰이 운동마찰보다 작다 : 바퀴를 사용한 이유



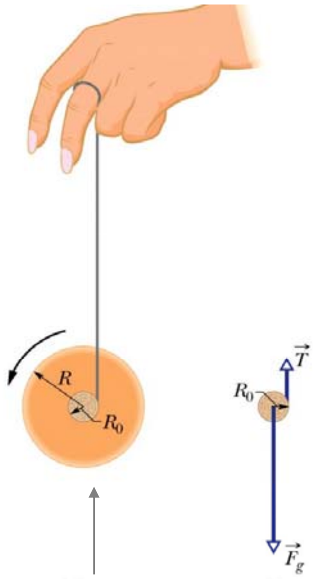

## CM 운동과 CM에 대한 회전운동으로 분리:

## Yo-Yo

- 요요에 작용하는 힘: $T, Mg$

  CM 운동: $F_{\text{net,y}} = T - Mg = Ma_{\text{CM}}$ (위쪽: $+y$)
- CM에 대한 돌림힘: 중력은 만들지 않음

  $\tau_{net} = +T\underline{R_0}$ (반시계: +) $\rightarrow$ $TR_0 = I_{CM}\alpha$




* R이 아니라 $R_0$

- 미지수: $CM$ 위치 $= y$ & 회전각 $= \theta$

- $y$감소($y$ = 바닥에서 높이) $\rightarrow \theta$증가:

  $\Delta y = -R\Delta\theta \;\rightarrow\; v_{CM} = -R\omega \;\rightarrow\; a_{CM} = -\underline{R_0}\alpha$

- $T$를 소거해서

$$\therefore a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}$$

(대부분 $I_{CM}/MR_0^2 >> 1 \rightarrow |a_{CM}| << g$)

$\Rightarrow$ 아래로 (느린) 등가속운동

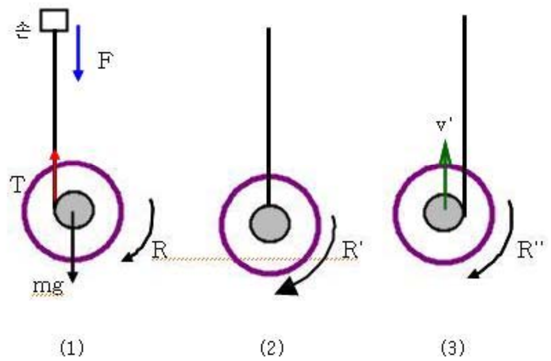
- 줄의 장력:

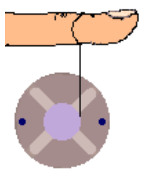
$$T = \frac{I_{CM}/MR_0^2}{1 + I_{CM}/MR_0^2} Mg$$

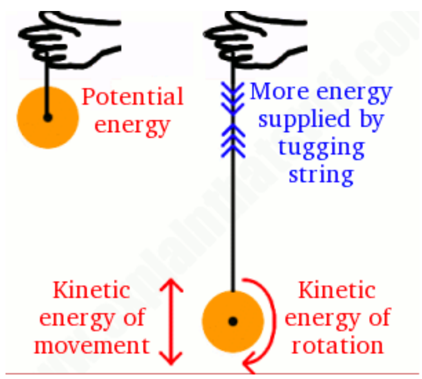
($note$, $T < Mg$)



## 요요

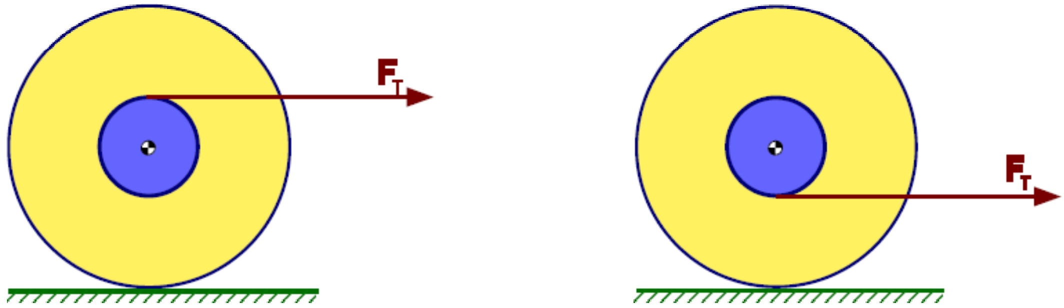





- 마찰/공기저항이 없다는 요요는 영원히 왕복운동을 할 수 있다.
- 마찰/저항이 있는 경우, 요요의 줄을 위-아래로 낚아채는 동작을 하여서 요요에게 에너지를 제공하면, 요요의 운동을 지속시킬 수 있다.

# 어느 방향으로 구르는가?
# 마찰력의 방향은?



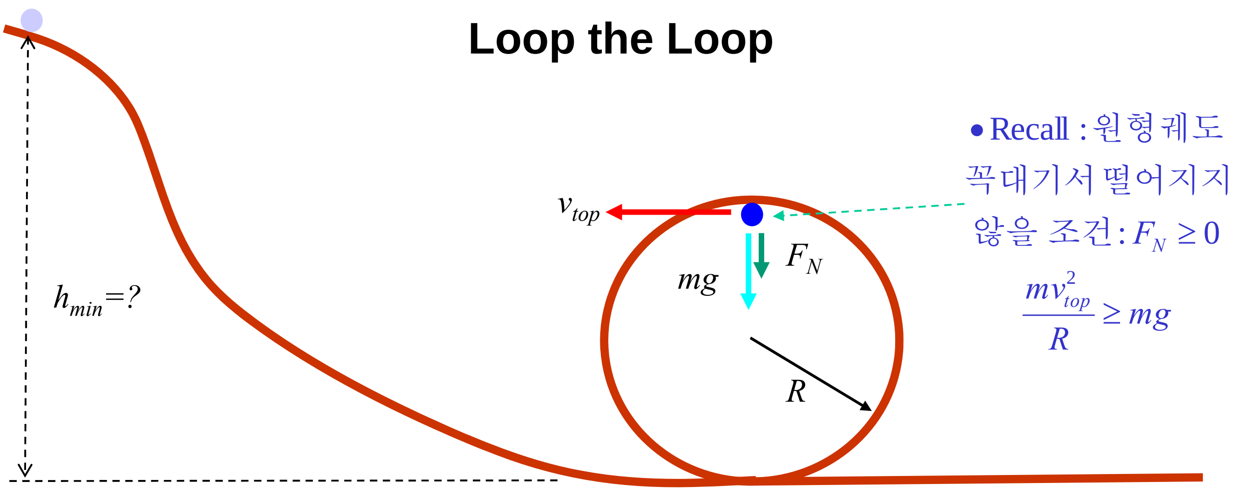

구르는 방향은 명확하죠?

이 쪽은?

식으로 표현할 수 있는가?
-CM 운동:
-CM축 회전운동:



# Loop the Loop




- Recall : 원형궤도 꼭대기서 떨어지지 않을 조건: $F_N \geq 0$

$$\frac{mv_{top}^2}{R} \geq mg$$

- Slipping without rolling (minimal condition : $F_N = 0$) :

$$mgh = mg \times 2R + \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad mg = \frac{mv^2}{R}$$

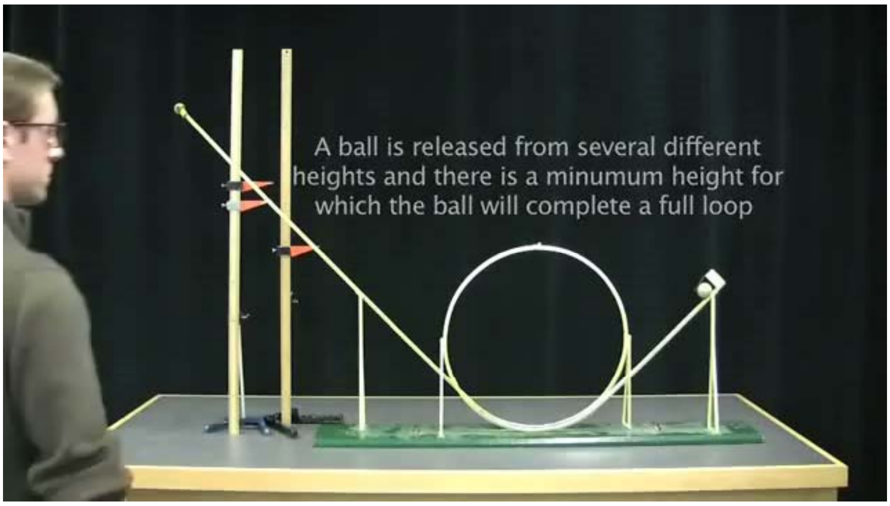
$$\Rightarrow mgh = mg(2R + \tfrac{1}{2}R) \Rightarrow h = 2R + \tfrac{1}{2}R$$

- Rolling without slipping (minimal condition : $F_N = 0$) :

$$mgh = mg \times 2R + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2, \qquad mg = \frac{mv^2}{R} \quad \& \quad I_{ball} = \tfrac{2}{5}mR^2$$

$$\Rightarrow \ mgh = mg(2R + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{5}R) \qquad \Rightarrow \ h = 2R + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{5}R$$

→ The rolling motion added an extra 1/5 R to the height






# 지금까지의 보존법칙

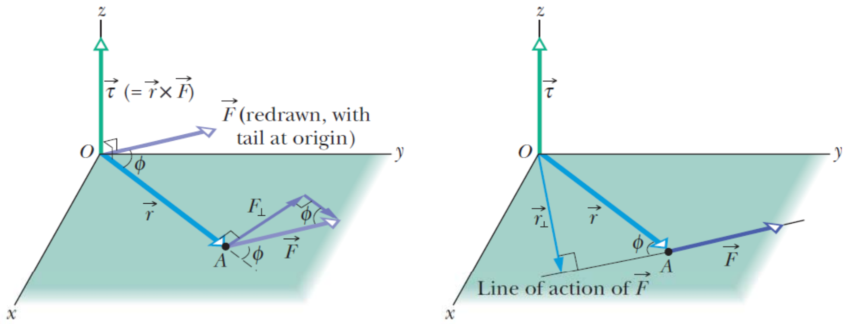
- 선운동량 : *No external Force*
- 운동에너지: *Elastic Collision*
- 역학적에너지: *Conservative force*
- 총에너지: *Always*

*Now...*

- 각운동량 : *No External Torque*

# 돌림힘 다시보기 (Chap. 10)

- 힘을 받고 움직이는 입자에 작용하는 돌림힘을 어떻게 정의하는가?
  - 기준점(원점)이 정해져야 한다(rather than a fixed axis)
  - 힘이 변위와 힘벡터가 만드는 평면에 수직이고 원점을 통과하는 회전축에 대해서 회전시키는 것으로 이해




$\bullet\ \vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ w.r.t. $O$

크기: $\boxed{\tau = rF\sin\phi = rF_\perp = r_\perp F}$

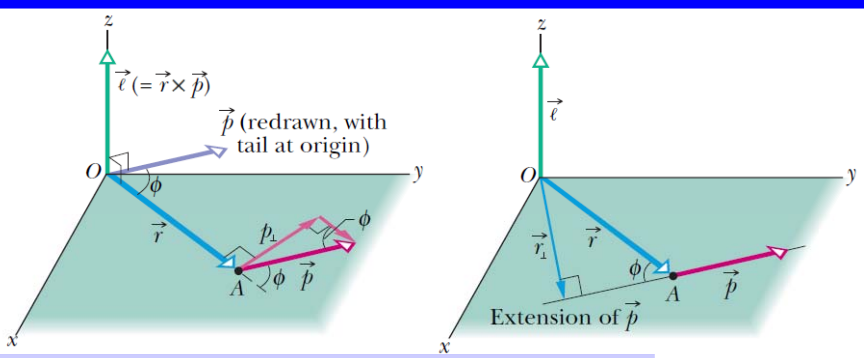
$F_\perp \equiv F\sin\phi,\quad r_\perp \equiv r\sin\phi = \text{moment arm}$

방향: 오른손 법칙:



# 입자의 각운동량

- 운동량 p인 입자의 원점에 대한 각운동량은 어떻게 정의하는가?
  - ✓ 변위와 운동량 벡터가 만드는 평면에 수직이고 원점을 통과하는 축에 대해서 회전한다고 생각하면 된다.




$\bullet\ \boxed{\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v})}$ w.r.t. $O$

크기: $\boxed{\ell = rmv\sin\phi = rp_\perp = r_\perp p}$ (단위: kg.m$^2$/s)

$p_\perp = p\sin\phi,\quad r_\perp = r\sin\phi$

방향: 오른손 법칙($\perp$ to x-y plane)

$\bullet$ 특별한 경우:

원운동하는 입자: $\sin\phi = 1$

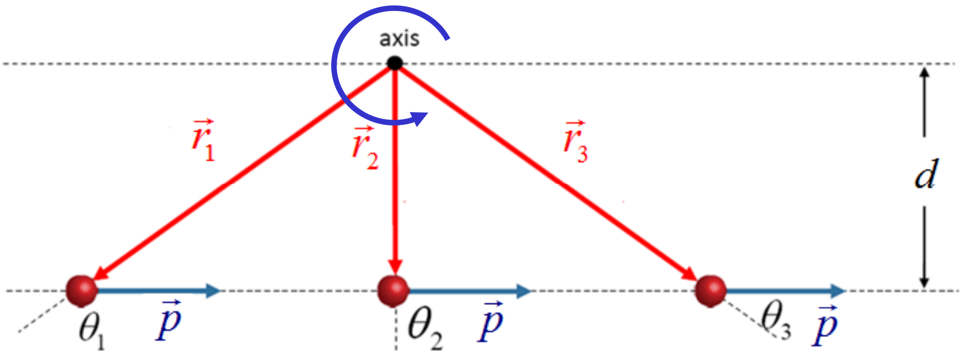
$\ell = mvr = mr\omega^2 \qquad v = r\omega$

✓원점을 어디로 정하느냐에 따라 달라질 수 있다.!

# 직선운동하는 입자의 각운동량

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \quad or \quad \ell = mvr\sin\theta$$

직선운동하는 동안 (No torque) 원점에서 떨어진 위치에 상관없이 일정한 값임!→ 잘 정의된 물리량..




$\ell = |\vec{r}_1 \times \vec{p}| = r_1 p \sin\theta_1 = pd$

$\ell = |\vec{r}_2 \times \vec{p}| = r_2 p \sin\theta_2 = pd$

$\ell = |\vec{r}_3 \times \vec{p}| = r_3 p \sin\theta_3 = pd$



# 각운동량을 이용한 뉴턴의 제 2법칙

- 직선운동에서 *Newton's Second Law*:
  입자에 작용하는 알짜힘이 운동량을 변화시킴

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(단일입자)}$$

- 회전운동: 입자에 작용하는 알짜돌림힘이 각운동량을 변화시킴

입자의 각운동량: $\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=0} = m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_{net}}_{\vec{\tau}_{net}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}} \qquad \text{(단일입자)}$$

*Note*, $\vec{v} \times \vec{v} = 0$

✓토크와 각운동량을 계산하는 원점이 같아야 함;
✓원점이 가속하지 않아야 함;

# 입자계

• 입자계의 총 선운동량 : $\vec{P} = $ (개별입자의 운동량 합) $= \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$

$\therefore \boxed{\vec{F}_{net} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}}$ 알짜 외력($\vec{F}_{net}$)이 총 선운동량($\vec{P}$)을 변하게 함

• 입자계의 총 각운동량 : $\vec{L} = $ (개별입자 각운동량 합) $= \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i,$

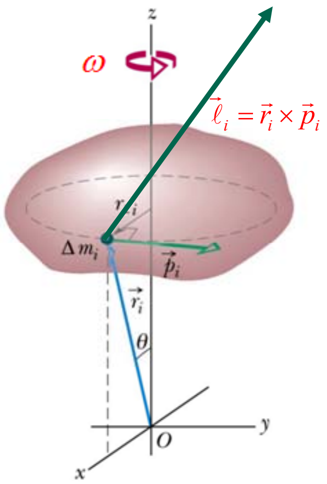
$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{net,i} \qquad \begin{cases} \vec{\tau}_{net,i} = (\text{외력 } torque) + (\text{내력 } torque) \\ \sum_{\text{모든입자}} (\text{내력 } torque) = 0 \quad (\because \text{작용} - \text{반작용 짝}) \end{cases}$$

$\therefore \boxed{\vec{\tau}_{net} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$ 알짜 외부 torque ($\vec{\tau}_{net}$)가 총 각운동량을 변하게 함.

- ✓ 돌림힘과 각운동량을 계산하는 원점이 같아야 함.
- ✓ 고정 회전축이 있으면 그 지점을 원점으로 선택하면 된다.
- ✓ 질량중심이 가속하면, 질량중심을 원점으로 하면 된다.



# 강체의 각운동량 표현(고정축 회전)




• 강체의 각운동량 $= \sum$(강체 구성입자의 각운동량)

• 물체가 회전축에 대해 대칭적이면 → 축방향 성분만 있음.

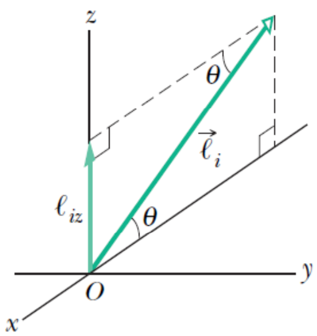
• $z$ − 축 회전 : 입자 $i(\Delta m_i)$는 $z$축에 대해 원운동($\vec{r}_i \perp \vec{p}_i$)

→ 각운동량 크기 : $\ell_i = r_i p_i = r_i \Delta m_i v_i$

→ $z$ − 성분 : $\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = \underline{r_i \sin\theta}\, \Delta m_i v_i = r_{\perp i} \Delta m_i v_i = \omega\, \underline{\Delta m_i\, r_{\perp i}^2}$

($r_{\perp i} = z$축에서 입자 $i$까지 직선거리; $v_i = r_{\perp i}\,\omega$)

• 강체의 각운동량 : $L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \omega \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\right)}_{z\text{-축에 대한 회전관성}=I} = I\omega$




• 고정 회전축에 대한 각운동량 :

($\vec{L}$과 $\vec{\omega}$는 같은 방향 벡터)

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ (고정축 − 일반화)

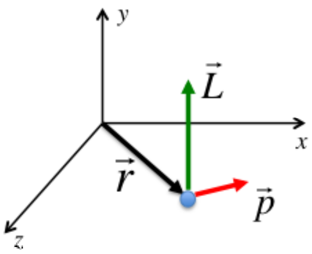
• 다른 유도 :

$\tau = dL/dt \;: z - axis$

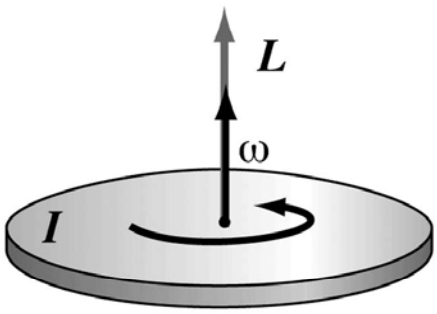
$\tau = I\alpha = I d\omega/dt = d(I\omega)/dt$

$\rightarrow L = I\omega$

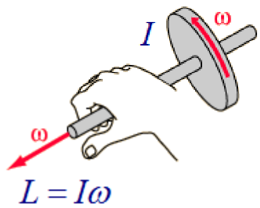
# 각운동량은 벡터다

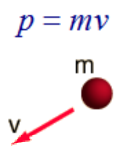



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (입자)




대칭축 회전 : $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (강체, 고정축)






# 각운동량 보존법칙

● 알짜외력이 없는 물리계

총선운동량 보존 $\Leftrightarrow$ $\vec{P} = \text{const}$

● 알짜외부돌림힘 = 0

총각운동량 보존 $\Leftrightarrow$ $\vec{L} = \text{const}$

● 특정한 회전축 방향의 돌림힘이 없으면(대부분 경우)

그 축 방향의 각운동량만 보존된다

$$L_i = L_f \quad \Leftrightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

각운동량 보전법칙 적용 전 체크사항 :

$$\begin{cases} \bullet \text{고정축 회전 : 고정축 방향의 알짜 돌림힘이 0인가?} \\ \bullet \text{움직이는 강체}(CM - \text{회전}) : CM \text{에 대한 돌림힘이 0인가?} \end{cases}$$

# 병진운동 v.s 회전운동

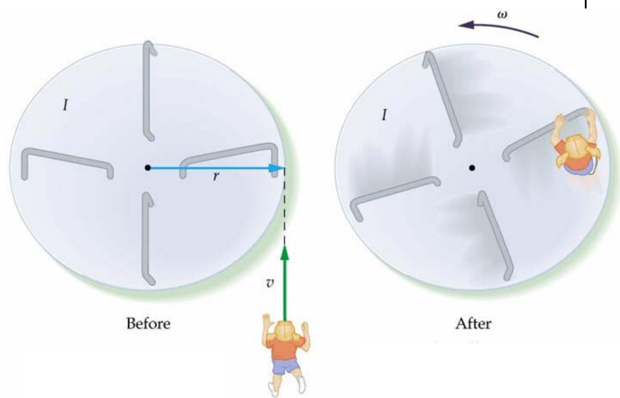
| 병진운동 | | 회전운동 | |
|---|---|---|---|
| 힘 | $\vec{F}$ | 돌림힘 | $\vec{\tau}(=\vec{r}\times\vec{F})$ |
| 선운동량 | $\vec{p}$ | 각운동량 | $\vec{\ell}=(\vec{r}\times\vec{F})$ |
| 선운동량(입자계) | $\vec{P}(=\sum\vec{p}_i)$ | 각운동량(입자계) | $\vec{L}(=\sum\vec{\ell}_i)$ |
| 선운동량(입자계,강체) | $\vec{P}=M\vec{v}_{CM}$ | 각운동량(입자계,강체) | $L=I\omega$ |
| 뉴턴 운동방정식(입자계,강체) | $\vec{F}_{net}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ | 뉴턴 운동방정식(입자계,강체) | $\vec{\tau}_{net}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ |
| 보존법칙 | $\vec{P}=\text{const}$ | 보존법칙 | $\vec{L}=\text{const}$ |

주어진 계에 작용하는 외부 돌림힘이 없는 경우에:
각운동량 보존법칙을 이용하면 → 계를 구성하는 입자 사이의 힘을 알지 못하더라도 계의 운동에 대한 많은 정보를 얻을 수 있다.



# 자유롭게 회전할 수 있는 회전판에 달리던 학생이 올라탄다. 회전판의 각속도는?

**계= 학생+회전판 ➔ 올라타는 과정에서 외부 돌림힘=0 ➔ 각운동량 보존됨**
(회전판-학생발 사이의 힘(손, 마찰)이 있어야 같이 회전하지만 내력들임)
(기준점=원판회전축)




- 회전축 방향의 각운동량이 보존되므로
  타기직전: 회전판은 각운동량이없음

$$L_i = L_i(\text{회전판}) + L_i(\text{학생})$$
$$= 0 + mvr$$

- 올라탄 후: 최종적으로 같이 회전

$$L_f = L_f(\text{회전판}) + L_f(\text{학생})$$
$$= (I_{\text{회전판}} + mr^2)\omega$$

- 각운동량보존: $L_i = L_f$

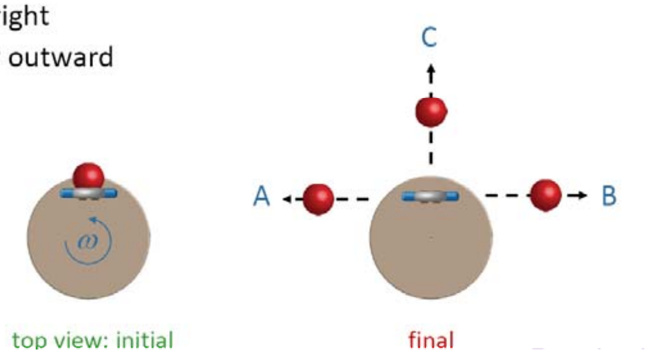
[redacted]

- 얼마의 에너지 손실이 있는가
- 에너지 손실이 있다면 왜 발생하는가?

# Question

A student holding a heavy ball sits on the outer edge a merry go round which is initially rotating counterclockwise. Which way should she throw the ball so that she stops the rotation?

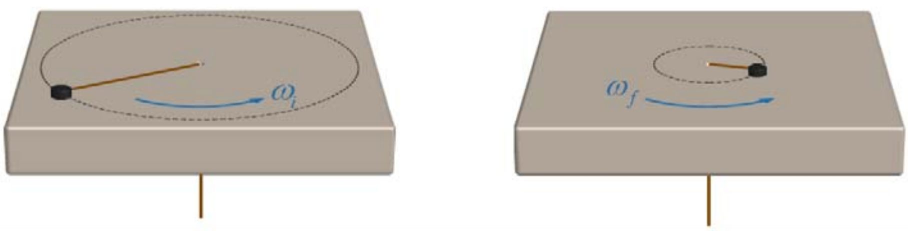
A) To her left
B) To her right
C) Radially outward






# 줄에 매달려 마찰이 없는 판 위에서 회전하는 물체: 줄을 당겨서 반지름이 회전반지름이 절반으로 줄어들게 하면 회전각속도는?

장력은 각운동량은 변화시키지 않음 → __________보존




- $L_i = mR^2\omega_i$
- $L_f = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega_f$
- $L_i = L_f \Rightarrow \omega_f = 4\omega_i$

- 장력은 토크를 만들지 않은데 어떻게 빨리 지는가?

- $\tau_{장력} = 0 \quad \rightarrow$

$$0 = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{보통=0}\omega + I\frac{d\omega}{dt}$$

$$= \frac{dI}{dt}\omega + I\alpha$$

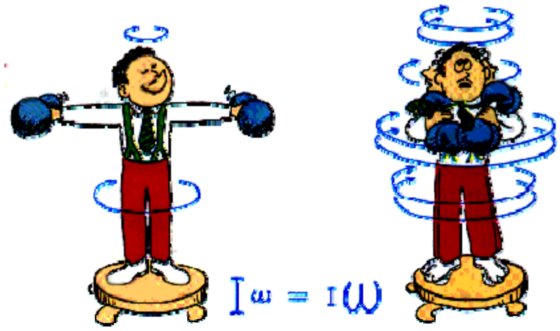
$\therefore \alpha = -\frac{1}{I}\frac{dI}{dt}\omega$ : 돌림힘 없이도 각가속 가능

이 예제: $\frac{dI}{dt} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$

# 각운동량 보존 : Rotating Stool

- If $\tau_{net,z} = 0$

$$z-\text{성분}: \frac{dL}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad L_i = L_f$$





# 각운동량 보존 : Rotating Stool

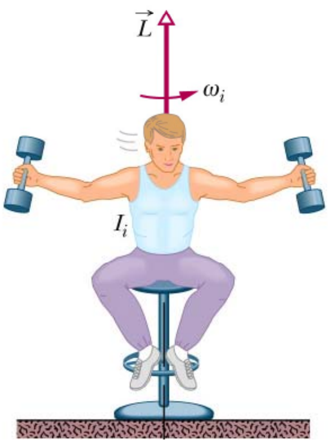
- $external\ \tau_{net} = 0$

$(W_{boy}\ \ and\ \ F_N$ 은 회전축과 나란함 $\Rightarrow$ 돌림힘 $= 0$

$W_{dumbell}$도 회전축에 나란함 $\Rightarrow$ 돌림힘 $= 0)$

$$z-\text{성분}: \quad L_i = L_f$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$




- 각운동량 보존(사람+아령)

팔길이: $R \rightarrow r$ (사람팔 효과 무시)

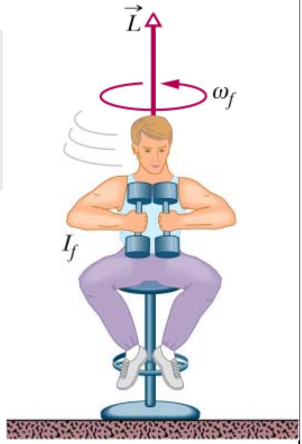
$$(I_{\text{사람}} + 2MR^2)_i \omega_i = (I_{\text{사람}} + 2Mr^2)_f \omega_f$$

- $r < R \longrightarrow \omega_f > \omega_i$

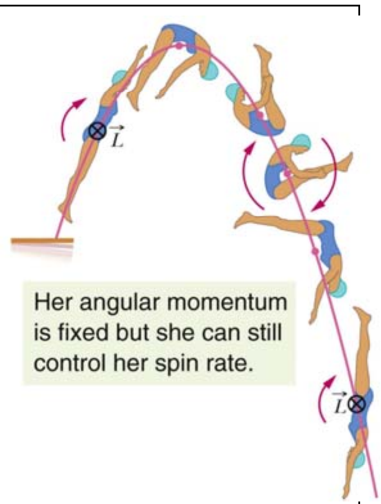
팔을 오무리면 더 빨리 회전함!

- 에너지 변화는?

있다면 왜 생기는가?



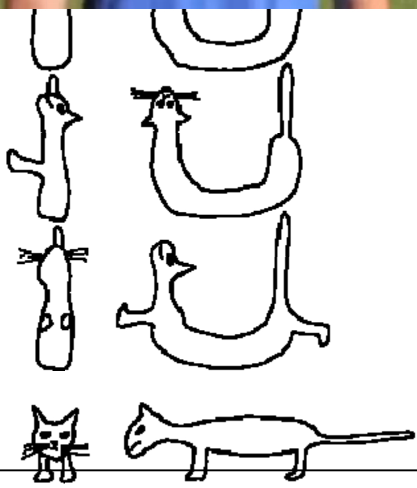
▶도약 다이빙: 다이빙 선수의 질량중심이 포물선을 그리는 동안, 선수는 질량중심을 지나는 축에 대해 회전한다. 각운동량이 보존되므로, 선수가 몸을 움추려 회전관성을 작게 하면 회전속도가 커진다.




지면수직성분: $I\omega = I\omega$

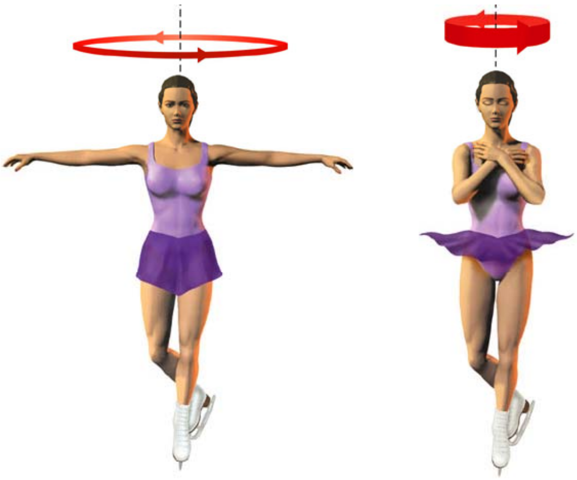

▶멀리뛰기: 질량중심에 대한 각운동량은 변화지 않으므로, 팔을 시계방향으로 회전시키면(-), 다리부분은 반시계방향으로(+) 회전하게 되어 다리가 멀리 나가게 된다.



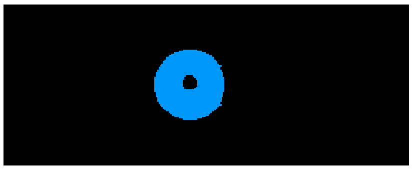



# 김연아는 각운동량 보존법칙을 이해해서 회전을 잘하는 것일까?

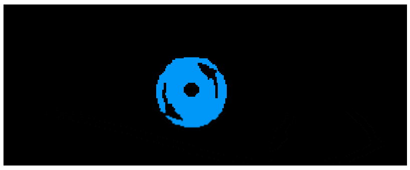
z-성분: I ω = I ω



$$L_{f.wheel} = L_{sp.craft} = 0$$



$$L_{f.wheel}(CCW) = -L_{sp.craft}(CW)$$





# Rotating Stool and Wheel

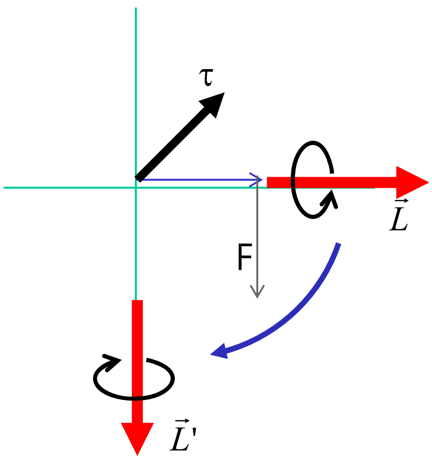
- 회전판은 $z-$축에 대해서
  자유롭게 돌 수 있으므로 $\rightarrow \ \tau_{net,z} = 0$

$$\frac{dL_{tot,z}}{dt} = 0$$

$$L_{tot,z} = L_{바퀴,z} + L_{사람,z} = const$$

$$처음 : L_{tot,z} = 0$$

처음 회전방향을 바꾸기 위해서는 바퀴에 힘을 주어야 한다 (반작용:회전판이 바닥을 미는 힘)→ 이 힘이 만드는 돌림힘은 z-성분이 없으므로 z-성분은 이 과정에서 보존이 되어야 한다.

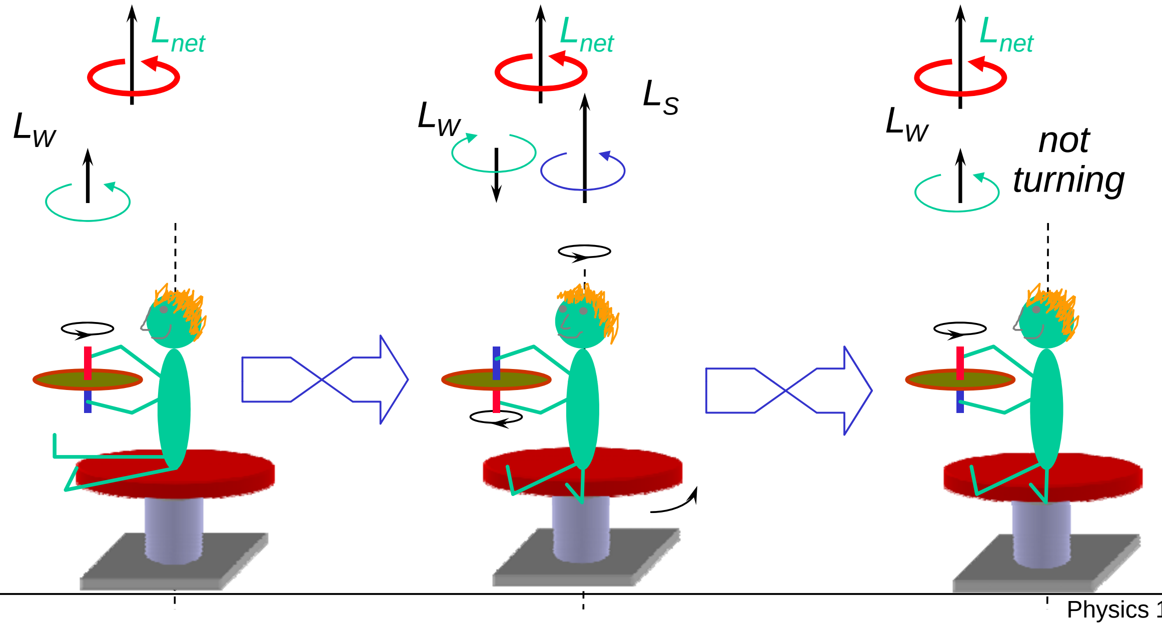


## Turning the Bike Wheel Twice

$L_w = wheel$의 각운동량 $z-$성분

$L_S =$ 학생의 각운동량 $z-$성분

$\longrightarrow L_{net} = L_w + L_s = \text{const}$



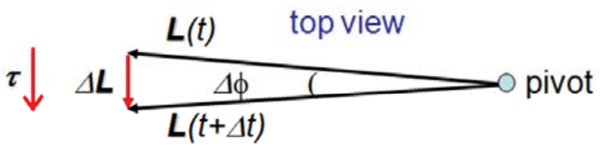



## 세차운동

▶바퀴의 중력에 의한 돌림힘 (τ=Mgr)이
각운동량 벡터를 회전하게 만든다: 세차운동

- $\Delta t$ 동안 각운동량의 변화는 (매우 빠른 경우)

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{\tau} \longrightarrow \Delta\vec{L} \text{ 은 } \vec{\tau} \text{ 방향으로 만들어짐}$$



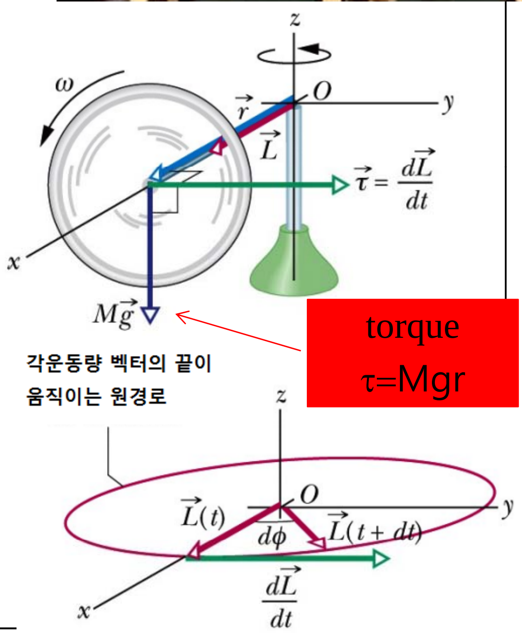

- 크기는: $\left.\begin{matrix}\Delta L = L\Delta\phi \quad (\text{그림}) \\ L = I\omega\end{matrix}\right\} \rightarrow \Delta L = I\omega\Delta\phi$

$\Rightarrow$ 회전축($\vec{L}$방향)이 회전함 = 세차운동

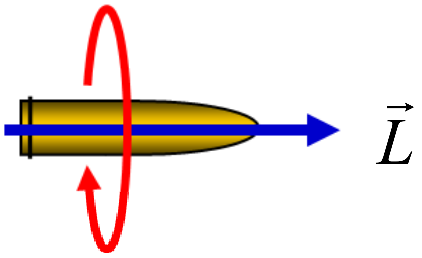
세차운동의 각속도 $\Omega$?

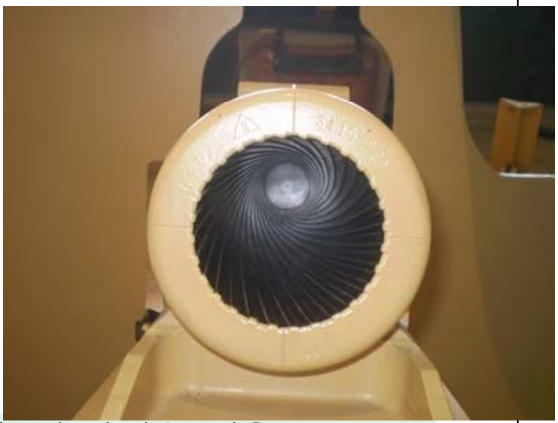
$$\Delta L = \tau\,\Delta t \quad \rightarrow \quad I\omega\Delta\phi = \tau\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \Omega \equiv \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{I\omega} = \frac{Mgr}{I\omega} \quad (\omega\text{가 매우 클때만})$$



# 왜 총알을 회전을 시키는가?



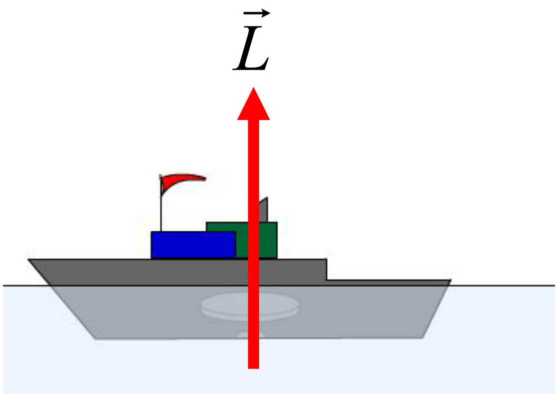
*총알을 회전시키면 총알의 진행방향의 각운동량을 갖는다. 이 각운동량을 변화시키려는 외력이 없으면 처음과 같은 방향의 각운동량을 그대로 유지되므로 총알의 궤도가 안정적이 된다. 총알이 날아가는 동안에 총알에 작용하는 중력은 이 각운동량을 바꾸는 토크를 만들지 못하고, 공기 저항 등의 요인이 이것을 변화시킬 수 있으나 대부분의 경우에 유효사거리 내에서는 크게 바꾸지 못한다.*

← *대미를 장식할 동영상*



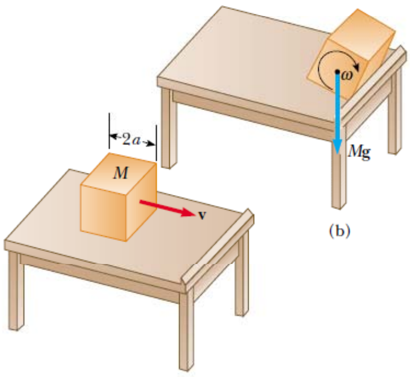
# 배의 안정성도 준다...

- *Gyroscope can be used for stabilizing the ship.*
- *Roll of a ship can be stabilized by the action of a heavy rapidly spinning disc rotating in a set of bearing.*



## 얼마나 빨리 달려야 넘어지나?(시간이 남을 때)

A solid cube of side 2a and mass M is sliding on a frictionless surface with uniform velocity v. It hits a small obstacle at the end of the table, which cause the cube to tilt. Find the minimum value of v such that the cube falls off the table. (Moment of inertia for cube about an axis along its edges is 8Ma$^2$/3.) Also note that this is an in-elastic collision at the edge.




외력을 구체적으로 명시하고, 그들이 만든 돌림힘이 없다는 것을 구체적으로 보여야

$\bullet$ 비탄성 충돌 : 역학적 $E$ 보존 적용안됨

그러나, 충돌과정에서 각운동량($w.r.t$ 턱)은 보존된다 (충돌은 순간적이라 가정, 토크를 만드는 힘이 없음);

$\rightarrow$ 걸림턱에 대한 상자 각운동량 : $L = Mva$

$\bullet$ 충돌 직후 상자에너지

= 턱에 대한 회전운동 - $E$

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{3Mv^2}{16}$$

$Note$ : 회전과정에서 역학적 $-E$ 는보존

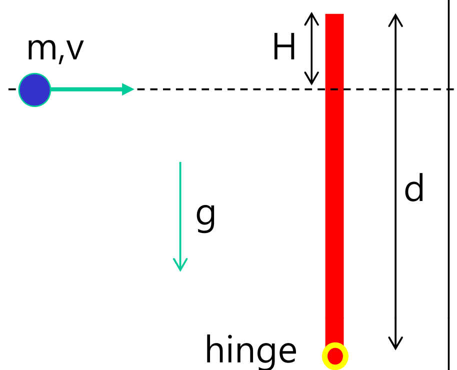
$\bullet$ 넘어지기 직전 에너지 $\geq$ 위치 $E$;

$$\frac{3Mv^2}{16} \geq Mg(\sqrt{2}-1)a$$

$$\therefore v \geq 4\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{3} ga}$$



*A bird of mass m is flying horizontally at speed v, not paying much attention, when it suddenly flies into a stationary vertical bar, hitting it a distance H below the top. The bar is uniform, with mass M and length d, and is hinged at its base. The collision stuns the bird so that it just drops to the ground afterward (but soon recovers to fly happily away). What is the angular velocity of the bar just before it hits the ground? (시간이 남을 때)*




$\bullet$ 새 $-$ 막대 충돌 : 각운동량이 보존됨($w.r.t.$ $hinge$)

($hinge$ 때문에 운동량은 안됨)

$L_i$ = 새 + 막대 $= mv(d-H)+0$

$L_f$ = 새 + 막대 $= 0 + I\omega$ ($\because$ 새는 밑으로 떨어져서 0)

$\Rightarrow$ 막대는 $hinge$ 를 축으로 회전함!

$\bullet$ 충돌 후 막대만의 역학적 에너지 보존 :

충돌 직후 : $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{m^2v^2(d-H)^2}{2Md^2/3} + Mg\left(\frac{d}{2}\right)$

바닥에 도달직전 : $E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Md^2\right)\omega_{bot}^2$

$\bullet$ 바닥에 도달 직전 각속도 :

$$\omega_{bot} = \sqrt{\left(\frac{3mv(d-H)}{Md^2}\right)^2 + \frac{3g}{d}}$$