Глава 0. Повторение понятий теории вероятностей.

Лектор выражает благодарность профессору НГУ Лотову В.И., доценту кафедры ММБП ИВТ СибГУТИ Черновой Н.И., а также доцентам кафедры теории вероятностей и математической статистики ММФ НГУ Ковалевскому А.П. и Быстрову А.А., чьи учебные пособия по курсу «Теория вероятностей» стали основой для этого раздела.

Примеры вероятностных экспериментов

- 1) подбрасывание монеты
  2) бросок игрального кубика
  3) загадывание натурального числа
  4) число звонков на АТС, поступивших за час
  5) прерывание кипения
  6) стрельба по мишени
- *Пространства элементарных исходов* (*эл. событий*):

дис
крет
ные

1) $\Omega = \{\omega_1 = Г, \omega_2 = Р\}$

2) $\Omega = \{\omega_1=1, \omega_2=2, \omega_3=3, \omega_4=4, \omega_5=5, \omega_6=6\}$

где ω_i – *элементарное событие* (*элементарный исход*)

3,4) $\Omega = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbf{N_0}$

- 5) $\Omega = (t_{комнаты}, 100] \in \mathbf{R}$
- 6) $\Omega = \{ (x,y) : x^2+y^2 < r^2 \} \in \mathbf{R^2}$

континуальные

Можно рассматривать последовательность (либо мн-во одновременно происходящих) вероятностных экспериментов как один вероятностный эксперимент, элементарными исходами которого являются все имеющие возможность быть последовательности исходов отдельных экспериментов.

Пример: бросание монеты трижды:

$$\Omega = \{ \omega_1=\langle Р,Р,Р\rangle, \omega_2= \langle Р,Р,Г\rangle, \omega_3= \langle Р,Г,Р\rangle, \omega_4= \langle Г,Р,Р\rangle, \omega_5= \langle Р,Г,Г\rangle, \omega_6= \langle Г,Р,Г\rangle, \omega_7= \langle Г,Г,Р\rangle, \omega_8= \langle Г,Г,Г\rangle \}$$

Опыты с подбрасыванием монеты

Исследователь	К-во бросков	Частота выпадений Г
Бюффон	4040	0,507
Де Морган	4092	0,5005
Феллер	10000	0,4979
Джевонс	20480	0,5068
Пирсон К.	24000	0,5005
Романовский	80640	0,4923

Результаты экспериментов из таблицы подтверждает закон больших чисел (рассмотрим далее), согласно которому чем больше проводим испытаний (**n** раз бросаем монету), тем ближе относительная частота встречаемости интересующего нас события (выпадение герба) к теоретической вероятности (1/2).

$$\mathbf{S_n/n \rightarrow p = 1/2},$$

где Sn – число экспериментов, закончившихся определённым результатом (выпал герб), p – теоретическая вероятность этого результата.

- **Опр.** *Событием* называется любое подмножество пространства элементарных исходов $A \subset \Omega$.

- **Пример**:
  Производится 3 броска монеты
  Ω = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>}

- Событие A: из трёх бросков монеты не менее двух раз выпал герб (Г).
  A = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>}
- Событие B: ровно два раза Г.
  B = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>}
- Событие C: хотя бы один раз решка (Р).
- C = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>}
  Событие D: все разы гербом.
- D = {<Г,Г,Г>}

- Пересечение двух событий называется также «умножением», оно так же является событием и о нём говорят, что оно происходит в случаях, когда одновременно (совместно) происходят оба события.
  $AC := A \cap C = B$ $\qquad\qquad$ $CD = \varnothing$

- Объединение двух событий называется «суммой», она так же является событием и о нём говорят, что оно происходит в случаях, когда происходит хотя бы одно из двух событий.
  $A+B = A$ $\qquad\qquad$ $A+C := A \cup C = C+D = \Omega$

- **Опр.** Если $AB=\varnothing$, то говорят, что события A и B *несовместны.*
  $\varnothing$ называют *невозможным* событием.

Опр. *Функцией вероятности* называется

$P: 2^{\Omega} \to [0,1]$, где 2^{Ω} – мн-во подмножеств Ω, т.е. *мн-во событий,*

удовлетворяющая условию:

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$ (*счётная аддитивность*)

3) $P(UA_i) = \Sigma P(A_i)$, для счёного мн-ва событий $A_1\ A_2\ldots$, кот. попарно несовместны ($A_{i1}\ A_{i2} = \varnothing$)

- В дискретном пространстве **Ω** любое мн-во вида **{ω}**, состоящее из одного эл. исхода имеет ненулевую вероятность **p**, далее будем называть её *вероятностью эл.исхода* и обозначать **P(ω)**.
- Если о вероятностном эксперименте с дискретным Ω известно, что элементарные исходы имеют одинаковые вероятности, то вероятность любого события A определяется по формуле (кот. называется ***классическое определение вероятности***):

$$P(A)= \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \text{ как следствие } P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)=\sum_{\omega \in A}(1/N(\Omega)), \text{ где } N(X) \text{ – мощность мн-ва } X$$

- **Пример**
- Очевидно, что при проведении серии бросков монеты элементарные события имеют одинаковую вероятность в силу равновероятности исходов каждого отдельного броска и отсутствия влияния на его результаты со стороны других бросков.

A = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>} - не менее двух Г.

- B = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - ровно два раза Г. D = {<Г,Г,Г>}
- C = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - хотя бы раз Р.
- P(A) = 4/8; P(B) = 3/8; P(C) = 7/8; P(D) = 1/8;
- P(AB) = 3/8; P(CUD) = (7+1)/8 = 1; P(AUC) = 1

Свойства вероятности:

- 1. $P(\varnothing) = 0$
- 2. *Аддитивность вероятности*: для всякого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$
$$P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$$
- 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ для любого A
- 4. $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$
- 5. $P(\cup A_n) = \Sigma P(A_i) - \Sigma P(A_iA_j) + \Sigma P(A_iA_jA_k) - \dots$
- 6. $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
- 7. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \Rightarrow \exists \lim P(A_i) = P(\cup A_i)$
- 8. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \Rightarrow \exists \lim P(A_i) = P(\cap A_i)$

непрерывность вероятности

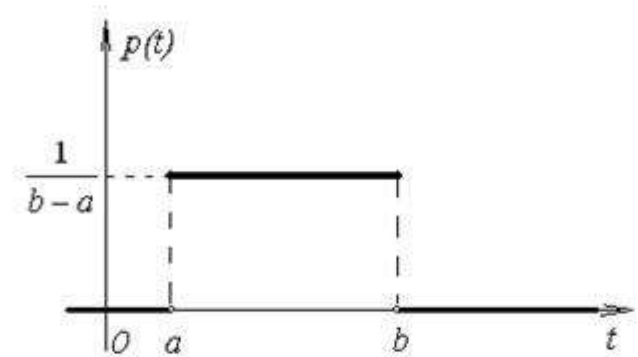
- Рассмотрим случай континуального пр-ва элем. исходов, а именно когда **Ω = R** или **Ω = R^n**. Для определения вероятности на таком пр-ве вводится вспомогательная функция π, такая что:
- (в случае **Ω = R**) (в случае **Ω = R^n**)
- 1) $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$ 1) $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega)d\omega = 1$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega)d\omega_1 \ldots d\omega_n = 1$

и вероятность события $A \subset \Omega$ можно определить как результат интегрирования

- по множеству A:

$$P(A) = \int_A \pi(\omega)d\omega$$

- **Пример**
- $$\Omega = R, \quad \pi(\omega) = \begin{cases} 1/(b-a), & \omega \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Здесь вероятность равномерно «размазана» по отрезку [a,b], и поэтому этот случай является *обобщением классического определения вероятности для* ***Ω = R***:

$$P(A)= \frac{\lambda(A)}{\lambda(D)},$$ где D = [a,b], а λ([x,y]) – длина отрезка [x,y].

В **R^n** можно рассматривать аналогичный случай, где вместо отрезка [a,b] будет компактное мн-во D, на котором π(ω) принимает постоянное значение, а вне его равна 0. Тогда вероятность будет определена по той же формуле, с той разницей ,что λ(A) – n-мерный объем мн-ва A.

- **Опр.** События A и B называются *независимыми*, если$P(AB) = P(A)P(B)$.

- **Опр.** События из мн-ва $\{A_1,\ldots, A_n\}$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого подмножества индексов $\{i_1,\ldots,i_k\}$:

- $$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik})$$
- В дискретном пр-ве элем. исходов Ω не всегда все эл. исходы равновероятны. В этом случае классическое определение вероятности не работает. Для определения вероятности того или иного события бывает удобно иметь (или вывести, хотя это не всегда удаётся) формулу, позволяющую вычислять вероятность любого элем. исхода, и затем найти вероятность интересующего события как сумму вероятностей его элем. исходов.
  Разберём этот подход на следующем примере:
- **Пример (*схема Бернулли*)**
  Рабочий изготовляет *n* изделий в день. С вероятностью *p* - бракованное,с вер-ю *q* – хорошее. Вопрос: какова вероятность того, что кол-во брака за день $S_n \le K$?

- $B_1 = \{1\text{-е Б}\}$ $\qquad$ $B_{n+1} = \{1\text{-е Х}\}$
  $B_2 = \{2\text{-е Б}\}$ $\qquad$ $B_{n+1} = \{2\text{-е Х}\}$
  … $\qquad$ …
- $B_n = \{n\text{-е Б}\}$ $\qquad$ $B_{2n} = \{n\text{-е Х}\}$
- Имеем $P(B_i) = \begin{cases} p, & i = 1,2,..n \\ q, & i = n+1,\ldots,2n \end{cases}$, кроме того любой элементарный исход представляет собой событие вида $B_{i1}\ldots B_{in}$, с индексами $i_j \in \{ j, n+j \}$.

Из условия задачи делаем вывод о независимости событий $B_{i1},\ldots B_{in}$. Поэтому

$$P(S_n \le K) = \sum_{k=1\ldots K} P(S_n = k) = \sum_{k} \sum_{\omega \in A_k} P(\omega) = \sum_{k} (\text{к-во эл. исх. с } k \text{ бракован.})\, p^k q^{n-k} = \sum_{k=1\ldots K} C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

(обозначили $A_k \equiv (Sn = k)$)

- **Опр.** *Условной вероятностью* (или вероятностью события А при условии, что событие В произошло) называется

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$ и существует только при условии $P(B) \neq 0$.

Пример (опыт с 3-кратным подбрасыванием монеты)

- А = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>} - не менее двух Г.

С = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - хотя бы раз Р.

$$P(A|C) = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7} \qquad P(C|A) = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Пусть нас интересует вероятность некот. события А и есть набор вспомогательных событий $H_1,\ldots,H_n$, которые называются *гипотезами* и удовлетворяют следующим требованиям:

1) $H_i H_j = \varnothing \quad (i \neq j)$

2) $A \subset \cup H_i$

Тогда справедлива ***формула полной вероятности***:

$$P(A) = \Sigma\, P(A|H_i)\, P(H_i)$$

$P(H_i)$ называется *априорной вероятностью гипотезы*,

$P(H_i|A)$ – *апостериорной вероятностью гипотезы.*

Для нахождения апостериорных вероятностей используется ***формула Байеса***

$$P(Hi|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{\Sigma P(A|H_j)\, P(H_j)}$$

- **Опр.** *Случайная величина* X – это функция вида $X : \Omega \to \mathbf{R} \setminus \{+\infty, -\infty\}$
- Будем говорить, что нам известно *распределение* случайной величины, если для произвольных чисел $a \le b$ мы можем находить вероятности $P(\omega: a \le X(\omega) \le b)$.
- (краткая запись: $P(a \le X \le b)$)
- Для этого достаточно знать *функцию распределения* сл.величины.
- **Опр.** *Функцией распределения* случайной величины X называется

$$F_X(y) = P(\omega: X(\omega) < y) \equiv P(X < y), \quad -\infty < y < +\infty$$

Свойства функции распределения случайной величины:

1. $0 \le F_X(y) \le 1$, $-\infty < y < +\infty$

2. Если $y_1 < y_2$, то $F_X(y_1) \le F_X(y_2)$, т.е. функция распределения монотонно не убывает.

3. Существуют пределы $\lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$ и $\lim_{y \to +\infty} F_X(y) = 1$

4. Для любого y $F_X(y-0) = F_X(y)$, то есть функция распределения всегда непрерывна слева.

Опр. Случайная величина называется *дискретной*, если существует конечная, либо счётная последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ такая, что

$$\sum_k P(X = y_k) = 1$$

Функция распределения дискретной случайной величины называется *дискретной*.

1. Вырожденное распределение $X € I_a$

k	a
P(X=k)	1

2. Распределение Бернулли $X € B_p$

k	1	0
P(X=k)	p	q

3.Биномиальное распределение. $X € B_{n,p}$, если

$$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 < p < 1, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

4. Распределение Пуассона. $X € П_\lambda$, если

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda>0, \quad k = 0,1,2,\dots$$

5. Геометрическое распределение $G_{p:}$ $X € G_p$, если

$$P(X=k)=(1-p)p^{k-1}, \qquad 0 < p < 1, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

- **Определение** Функция распределения $F_X(y)$ называется абсолютно непрерывной, если для любого значения y
- $$F_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt; \qquad (1)$$
-

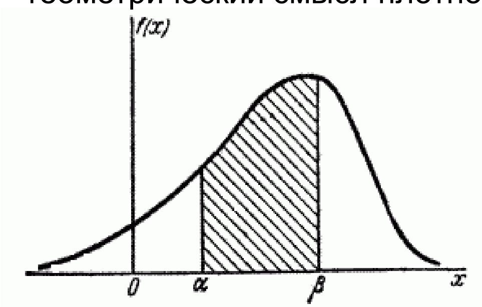
стоящая под знаком интеграла функция f(t) называется *плотностью* распределения.

- 1. Определение напоминает, что для случайной величины X с плотностью распределения f (t) вероятность принимать значения внутри любого интервала
- вычисляется как площадь под графиком f (t) над этим интервалом.

- 2. Интеграл (1) непрерывен по x, поэтому функция распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением всюду непрерывна .

- 3. Из равенства (1) следует также, что плотность абсолютно непрерывного
- распределения равна производной от функции распределения: f (x) = F'(x)

геометрический смысл плотности



- **Свойства плотности**

- 1. $f_X(t) \ge 0$
- 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$
- 3. $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt$ для любых a < b

1. Равномерное распределение

$$f(t) \equiv u_{a,b}(t) = \begin{cases} 1/(b-a), \text{ если } t \in [a,b], \\ 0, \text{ если } t \notin [a,b]. \end{cases} \qquad F(y) \equiv U_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > b \end{cases}$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение

$$f(t) \equiv e(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le 0, \\ \alpha e^{-\alpha t}, \text{ если } t \in [a,b]. \end{cases} \qquad F(y) \equiv E(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 1^{-}e^{\alpha y}, & y>0 \end{cases}$$

3. Нормальное (гауссовское) распределение

$$f(t) = \varphi_{a,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, t \in R \qquad F(y) = \Phi_{a,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

и его частный случай при α=0, σ=1 - стандартное нормальное распределение

$$\varphi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t^2}{2}}, t \in R \qquad \Phi_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-(t^2}{2}} dt$$

4. Гамма-распределение

$$\gamma_{\alpha,\lambda} = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ (\alpha^{\lambda}/\Gamma(\lambda))\, t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \end{cases}$$

где $$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

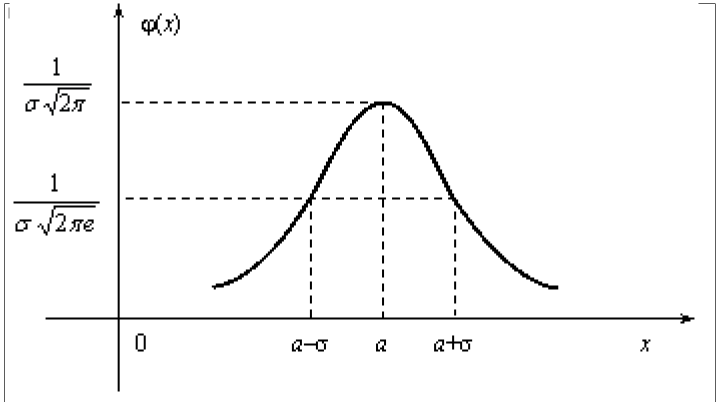
$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$, поэтому $\Gamma(n+1)=n!$

5. Распределение Коши

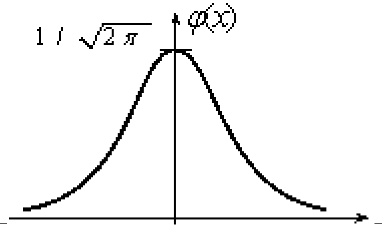
$k(t) = 1/\pi * 1/(1+t^2)$ $-\infty < t < +\infty$ $K(y) = ½ + 1/\pi \text{ arctg } y$

ГРАФИКИ ПЛОТНОСТЕЙ

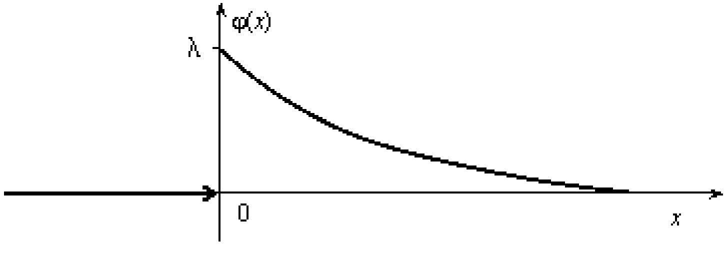
нормального

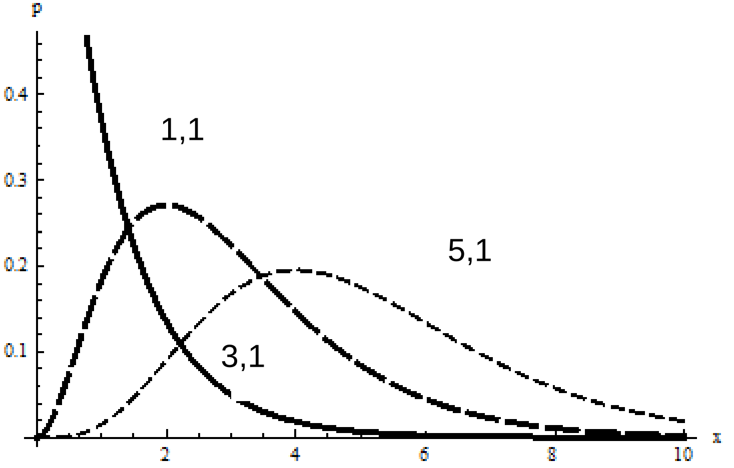


стандартного нормального



экспоненциального





гамма-распределения

Определение. Функция распределения F относится к смешанному типу, если при всех значениях y

$$F(y) = \alpha F_1(y) + \beta F_2(y),$$

где $F_1(y)$ — абсолютно непрерывная, а $F_2(y)$ — дискретная функция распределения, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Определение. Функцией распределения случайного вектора X (многомерной функцией распределения, совместной функцией распределения) называется

$$F_{X1,X2,\ldots,Xn}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(X_1 < y_1, X_2 < y_2, \ldots, X_n < y_n),$$

где перечисление событий через запятую означает одновременное их осуществление, то есть пересечение.

Определение. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются независимыми, если для любых $B_1 \subset R, \ldots, B_n \subset R$ выполняется соотношение

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)\ P(X_2 \in B_2) \ldots P(X_n \in B_n).$$

- **Свойства функции совместного распределения.**
- Для простоты обозначений ограничимся вектором (X_1, X_2) из двух величин (для n величин выполнены те же свойства).
- 1) Для любых y_1, y_2 верно неравенство:
  $0 \le F_{X1,\,X2}(y_1, y_2) \le 1$.
- 2) $F_{X1,X2}(y_1, y_2)$ не убывает по каждой координате вектора (y_1, y_2).
- 3) Для любого i = 1, 2 существует $\lim\limits_{y_i \to -\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = 0$.
- Существует двойной предел $\lim\limits_{y_1 \to +\infty} \lim\limits_{y_2 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1,y_2) = 1$.
- 4) Функция $F_{X1,X2}(y_1, y_2)$ по каждой координате вектора (y_1, y_2) непрерывна слева.

  5) Чтобы по функции совместного распределения восстановить функции распределения X_1 и X_2 в отдельности, следует устремить мешающую переменную к $+\infty$:
- $\lim\limits_{y_1 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = F_{X2}(y_2)$, $\lim\limits_{y_2 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = F_{X1}(y_1)$.

Для n-мерного случая последнее свойство выглядит так:
$\lim\limits_{y_n \to +\infty} F_{X1,X2,\ldots Xn}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_{X1\;X2,\ldots Xn-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$,

- Пусть на вероятностном пространстве <Ω, F, P> (где F – мн-во событий) задана случайная величина X. Если g(X) — случайная величина, то полезно уметь находить распределение g(X) по распределению X.

- Если X имеет дискретное распределение, то для любой g(X) также имеет дискретное распределение, и таблица её распределения находится просто по определению

-

X	y_1	y_2	…
P(X=y)	p_1	p_2	…

➔

g(X)	$g(y_1)$	$g(y_2)$	…
P(g(X)=g(y))	p_1	p_2	…

- **ТЕОРЕМА 1**
- Пусть X имеет функцию распределения $F_X(y)$ и плотность распределения $f_X(y)$, и постоянная a отлична от нуля. Тогда случайная величина Y = aX + b имеет плотность распределения $f_Y(x) = 1/\ |a|\ f_X\ (\ (y - b)/\ a)$.

- **Доказательство**.
- Пусть сначала $a > 0$.
- $F_Y(x) = P(aX + b < y) = P(X < (y - b)/a) = F_X((y - b)/a) = \int_{-\infty}^{(y-b)/a} f_X(t)dt$
- Сделаем замену переменной в последнем интеграле. Переменную t заменим на новую переменную u так: $t = (u - b) / a$. Тогда $dt = du / a$, верхняя граница области интегрирования $t = (y - b) / a$ перейдёт в $u = y$, нижняя $t = -\infty$ перейдёт в $u = -\infty$. Получим
- $F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} (1/a) f_X((u-b)/a)du$
- Функция под интегралом — плотность распределения $f_Y(u)$ случайной величины $Y = aX + b$ при $a > 0$.
  Пусть теперь $a < 0$.
- $F_Y(x) = P(aX + b < y) = P(X > (y - b)/a) = \int_{(y-b)/a}^{+\infty} f_X(t)dt$
- Сделаем ту же замену переменной $t = (u - b) / a$, $u = at + b$. Но теперь граница интегрирования $t = +\infty$ перейдёт в $u = -\infty$, поскольку $a < 0$. Получим
- $F_X(y) = \int_{y}^{-\infty} (1/a) f_X((u-b)/a)du = \int_{-\infty}^{y} (1/|a|) f_X((u-b)/a)du$ ■

- **Теорема 2**. Пусть X имеет плотность распределения $f_X(y)$, и функция $g : R \to R$ монотонна. Тогда случайная величина $Y = g(X)$ имеет плотность распределения $f_Y(t) = (g^{-1}(t))' f_X(g^{-1}(t))$ □ . Здесь g^{-1} — функция, обратная к g, и $(g^{-1}(y))'$ — её производная

- **Из теоремы 1 следует:**

  Следствие 1. Если X € $\Phi_{0,1}$, то Y = σX + α € Φ_{α,σ^2} .

- **Следствие 2**. Если X € Φ_{α,σ^2}, то Y = (X – α)/σ € $\Phi_{0,1}$.

- **Следствие 3**. Если X € $U_{0,\ 1}$, то aX + b € $U_{b,\ a+b}$ при a > 0

- **Следствие 4**. Если X € E_{α}, то αX € E_1.

  Следствие 5. Если X € Φ_{α,σ^2}, то Y = AX + B € $\Phi_{A\alpha+B,\ A^2\sigma^2}$

ТЕОРЕМА 3

Если случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения $f_X(t)$ и $f_Y(t)$ соответственно, то случайная величина X + Y также будет иметь плотность, равную

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\, f_X(t-v)\,dv.$$

Эти интегралы называются *свертками плотностей* f_X и f_Y.

Д-ВО

Достаточно доказать первое соотношение, второе получается из него заменой

$v = t - u$. Имеем для функции распределения

$$F_{X+Y}(y) = P(X+Y < y) = P((X,Y) \in \{(u,v): u+v < y\}) = \iint\limits_{u+v<y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)\,dt\,du = \int_{-\infty}^{y} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(t-u)\,du \right\} dt$$

Мы здесь воспользовались свойством $f_{X,Y}(u,v) = f_X(u)\, f_Y(v)$ для независимых X и Y, и заменой переменных $t = u+v$ ■

- **Следствие 1.** Пусть случайные величины $X \subset \Pi_\lambda$ и $Y \subset \Pi_\mu$ независимы. Тогда $X + Y € \Pi_{\lambda+\mu}$.

- **Следствие 2**. Пусть случайные величины $X € B_{n,p}$ и $Y € B_{m,p}$ независимы. Тогда $X + Y € B_{n+m,p}$.

- **Следствие 3**. Пусть случайные величины $X € \Phi_{\alpha 1,\sigma 1^2}$ и $Y € \Phi_{\alpha 2,\sigma 2^2}$ независимы. Тогда $X + Y € \Phi_{\alpha 1+\alpha 2,\sigma 1^2+\sigma 2^2}$.

- **Следствие 4** Пусть случайные величины $X € \Gamma_{\alpha,\lambda 1}$ и $Y € \Gamma_{\alpha,\lambda 2}$ независимы. Тогда $X + Y € \Gamma_{\alpha,\lambda 1+\lambda 2}$
- .
- **Следствие 5.** Пусть независимые случайные величины $X_1 \ldots X_n$ имеют показательное распределение $E_\alpha = \Gamma_{\alpha,1}$. Тогда $X_1 + \ldots + X_n € \Gamma_{\alpha,n}$

Следствие 6.

$X_1,\ldots X_n € \Phi_{\alpha,\sigma^2}$ - независимы. Тогда $X_1+\ldots+X_n € \Phi_{n\alpha,n\sigma^2}$ и $\overline{X} = \dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n} € \Phi_{\alpha,\sigma^2/n}$

ТЕОРЕМА.

Пусть случайные величины X и Y независимы , g и h - функции из **R** в **R**. Тогда случайные величины g(X) и h(Y) также независимы.

Доказательство.

Для любых B_1 с **R** и B_2 с **R**

$P\,(g(X) \in B_1,\, h(Y) \in B_2) = P\,(X \in g^{-1}(B_1),\, Y \in h^{-1}(B_2)) = P\,(X \in g^{-1}(B_1))\; P\,(Y \in h^{-1}(B_2)) = =$

$P\,(g(X) \in B_1)\;\; P(\, h(Y) \in B_2)$,

где $g^{-1}(B_1) = \{y\colon g(y) \in B_1\}$, $h^{-1}(B_2) = \{y\colon h(y) \in B_2\}$ $\blacksquare$

Утверждение (альтернативное определение независимости случ. величин**).**

- Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ с абсолютно непрерывным совместным распределением независимы если и только если плотность совместного распределения распадается в произведение плотностей, т.е. для любых $t_1, \ldots, t_n$ имеет место равенство: $f\,(t_1, \ldots, t_n) = f_{X1}(t_1) \cdot \ldots \cdot f_{Xn}(t_n)$.

Утверждение.

Пусть случайная величина имеет показательное распредление X € E_α. Тогда

1) для любых x, y > 0

$P(X \geq a + b \mid X \geq a) = P(X \geq b)$. **(свойство отсутствия памяти экспоненциального распределения)**

2) α X € E_1

Пусть случайная величина X дискретна, т.е. для некот. набора чисел y_1, y_2, . . .
$\sum P(X = y_k) = 1$

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется

$$E\,X = \sum y_k\, P(X = y_k)$$

если этот ряд абсолютно сходится, т. е. если

$$\sum |y_k|\, P(X = y_k) < \infty$$

В противном случае мы говорим, что математическое ожидание случайной величины X не существует.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X, имеющей абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(t)$, называется

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(y)dt,$$

если только $\int |t| f_X(t)dt < \infty$. В противном случае считаем, что EX не существует.

- Пусть случайная величина X имеет функцию распределения смешанного типа
  $F_X(y) = \alpha \int t\, f(t)dt + \beta\, \Sigma y_k p_k$,   где $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $F_1(y)$ — абс. непрерывная функция распределения, имеющая плотность $f(t)$, а $F_2(y)$ — дискретная функция распределения, имеющая скачки величиной $p_1, p_2, \dots$ в точках $y_1, y_2, \dots$. Тогда, по определению,
  $EX = \alpha \int t\, f(t)dt + \beta \sum y_k p_k$,
- если только абсолютно сходятся участв. здесь интеграл и сумма ряда.
- В ряде случае возникает задача нахождения математического ожидания некоторой функции $g(X)$ от случайной величины, при этом изначально известным является только распределение X.
  - $P(g(X)=g(y_k)) = \Sigma P(X=y_k)$ ➔
  - ➔ $Eg(X) = \Sigma g(y_k) P(g(X) = g(y_k)) = \Sigma g(y_k) P(X=y_k)$

  В случае абсолютно-непрерывного распределения
  - $Eg(X) = \int t\, f_{g(X)}(t)dt = \int g(t)\, f_X(t)dt$
- Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин вычисляется следующим образом:
  $Eg(X_1, \dots, X_n) = \int \dots \int g(t_1, \dots, t_n) f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$,
- где $g(t_1, \dots, t_n)$ — плотность совместного распределения случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$.

- **Свойства математического ожидания**

  1. E c = c , где c – постоянная величина
- 2. E (c X) = c E X
- (это легко показать, если вычислить как Eg(X) при g(X)=cX)
- 3. E(X+Y) = EX+EY для любых случайных величин X, Y . Действительно:
- $$E(X+Y) = \sum (x_k + y_n)P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_k x_k \underbrace{\sum_n P(X = x_k, Y = y_n)}_{= P(X = x_k)} + \sum_n y_n \underbrace{\sum_k P(X = x_k, Y = y_n)}_{= P(Y = y_n)} = EX+EY$$
- 4. E (XY) = EX EY, если X и Y независимы и их математические ожидания существуют.
- 5. Если X ≥ 0 почти наверное, т. е. если P(X > 0) = 1, то EX ≥ 0.
- 6. Если X ≥ 0 почти наверное, и EX = 0, то X = 0 почти наверное (п.н.).
- 7. Если X ≤ Y п. н., то E X ≤ E Y.
- 8. Если X ≤ Y п. н. и E X = E Y, то X = Y п.н.
- 9. Если a ≤ X ≤ b п.н., то a ≤ E X ≤ b.

$$\left.\begin{matrix}5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\} *$$

- **Определение**. Пусть $E\,|X|^k < \infty$. Число $E\,X^k$ называется моментом порядка k или k-м моментом случайной величины X, число $E\,|X|^k$ называется абсолютным k-м моментом, $E\,(X - E\,X)^k$ называется центральным k-м мо-ментом, и $E\,|X - E\,X|^k$ — абсолютным центральным k-м моментом случайной величины X**.**
- **Определение**. Дисперсией случайной величины X называется $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$.
Для дискретных распределений дисперсия вычисляется по формулам
- $DX = \sum^{+\infty} (y_k - EX)^2 P(X = y_k) = \sum y_k^2\, P(X = y_k) - (EX)^2$,
для распределений абсолютно непрерывного типа имеем
- $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - EX)^2 f_X(t)dt = \int t^2 f_X(t)dt - (EX)^2$.

- **Свойства дисперсии.**
- Пусть X, Y- случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, , тогда
- 1) $DX \ge 0$;
- 2) $Dc = 0$, где c – константа.
- 3) $DX = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{X = c\} = 1$ для некот. постоянной c;
- 4) $D(cX) = c^2 D(X)$, в частности $D(-X) = DX$
- 5) $D(X+c) = DX$
- 6) если X, Y - независимые, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

Определение. Ковариацей между случайными величинами назывется величина

$$Cov\,(X,Y) = E((X\text{-}EX)(Y\text{-}EY)) = E(XY) - EXEY$$

Если X и Y независимы, то Cov (X,Y) = 0.

Определение. Случайная величина X называется нормированной, если EX = 0 и DX= 1. Любую случайную величину можно нормировать преобразованием:

$$X^* = \frac{X\text{-}EX}{\sqrt{DX}}$$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин X, Y называется число

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = E\,(X^*,\ Y^*)$$

- Коэффициент корреляции показывает качественную зависимость случайных величин (например: зависмы\независмы, линейно\нелинейно зависимы).

Свойства корреляции:

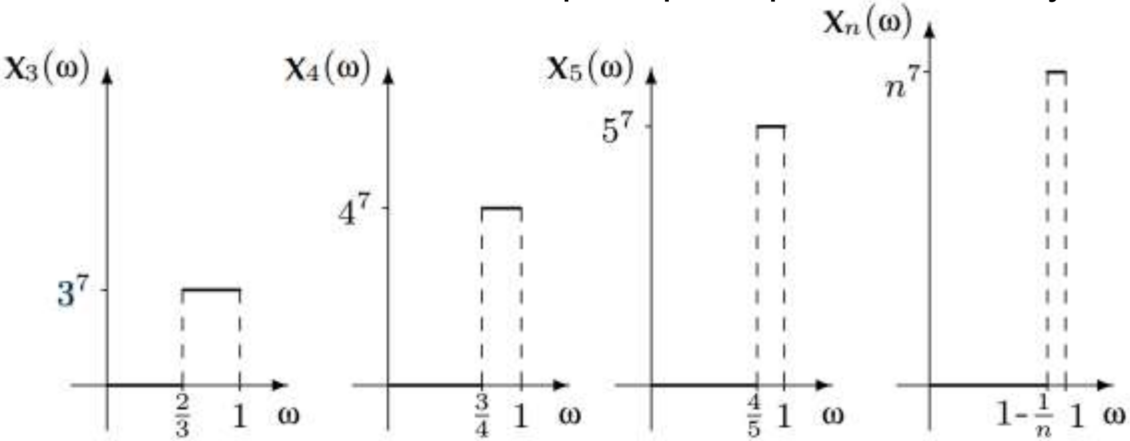
- 1) $\rho(X,Y) \leq 1$;
- 2) $\rho(X,Y) = 1 \iff Y = aX + b$ для некот. положительных вещественных a и b
- $\rho(X,Y) = -1 \iff Y = -aX + b$
- 3) если X, Y- независимые, то $\rho(X,Y) = 0$. (обратное не всегда верно)

- **Определение**. Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине X при $n \to \infty$, и пишут: $X_n \to X$, если для любого $\varepsilon > 0$
- $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$
- (или $P(|X_n - X| < \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$).
- **Пример** .
- Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \ldots$, в которой всевеличины имеют разные распределения: величина X_n принимает значения 0 и n^7 с вероятностями $P(X_n = n^7) = 1/n = = 1 - P(X_n= 0)$.
  Докажем, что эта последовательность сходится по вероятности к нулю.Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для всех n, начиная с некоторогоn такого, что $n^7 > \varepsilon$, верно равенство $P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = n^7) = 1 / n$. Поэтому
- $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = n^7) = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$.
- Итак, случайные величины X_n с ростом n могут принимать всё большие и большие значения, но со всё меньшей и меньшей вероятностью.

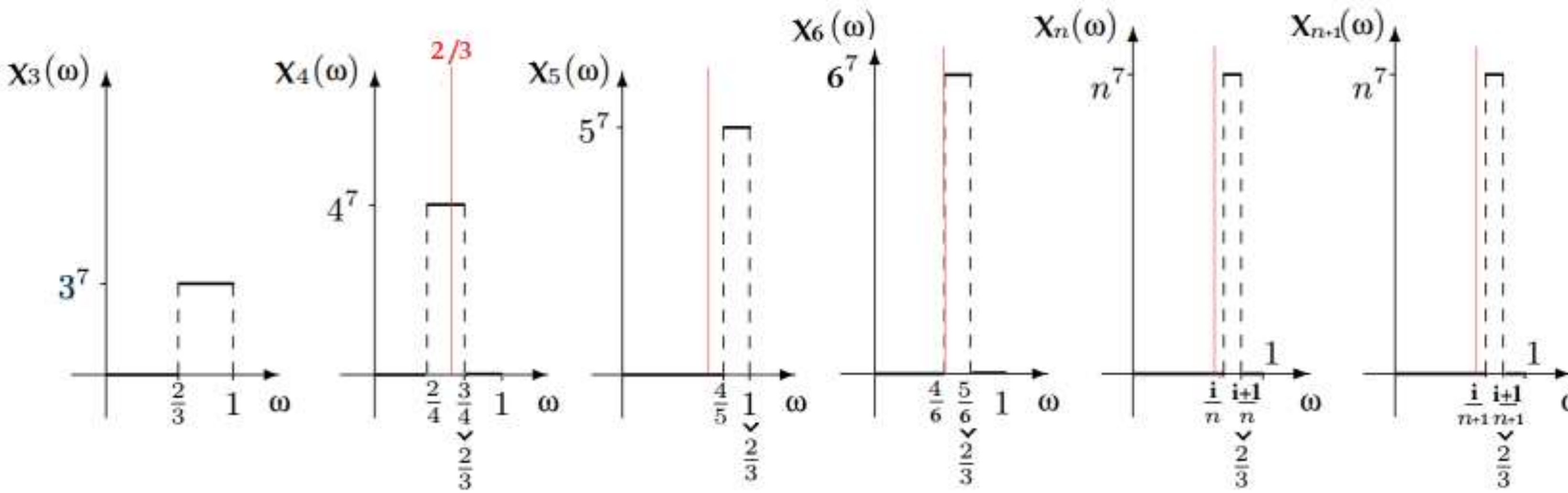
  Вообще, существуют разные виды сходимости последовательности функций. Говоря о сходимости случайных величин (которые являются функциями), можно также вводить следующее понятие:

  Определение. Последовательность $\{X_n\}$ *сходится почти наверное* к случайной величине X при $n \to \infty$, и пишут: $X_n \to X$ п. н., если
  $P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \text{ при } n \to \infty\} = 1$.

- Покажем, что сходимости по вероятности и почти наверное не эквивалентны. Для этого последовательность из примера определим следующим образом:



Тогда P {ω : $X_n(\omega) \to X(\omega)=0$ при $n \to \infty$} = 1, т.е. имеем сходимость п.н.
Но можно определить эту последовательность так, чтобы отрезок ненулевых значений X_n «бегал» по интервалу [0,1] таким образом, чтобы для любой точки из определённого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ можно было бы выбрать подпоследов-ть $\{X_{n_k}\}$ такую, что $X_{n_k}(\omega) = n_k^7$ и тогда P {ω : $X_n(\omega) \to X(\omega)=0$ при $n \to \infty$} ≤ 1-(b-a) и сходимость п.н. отсутствует. Например, определим $\{X_n\}$ так:



Некоторые свойства сходимости по вероятности

- 1. $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, то $X_n + Y_n \to X+Y$
- 2. Пусть при $n \to \infty$ $X_n^{(1)} \to a_1$, $X_n^{(2)} \to a_2$,…, $X_n^{(k)} \to a_k$, функция $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Тогда
  - $g(X^{(1)}{}_n,\ldots ,X^{(k)}{}_n) \to g(a_1, \ldots, a_k)$ при $n \to \infty$
- 3. Пусть $X_n \to X$, , функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна. Тогда $g(X_n) \to g(X)$
- 4. Если $X_n \to a$, $\alpha_n \to 0$ (где α_n – числовая последовательность), то $\alpha_n X_n \to 0$
- 5. $X_n \to X$ п.н. ➔ $X_n \to X$ (сходимость почти наверное сильнее)

- **Теорема** (неравенство Маркова). Если $E\,|X| < \infty$, то для
- любого $x > 0$
  - $P\,(\,|X| \geq \varepsilon) \leq .\ \dfrac{E|X|}{\varepsilon}$
- **Д-во.** Нам потребуется следующее понятие.
- **Определение**. Назовём индикатором события A случайную
- величину I (A), равную единице, если событие A произошло, и нулю, если A не произошло.

- По определению, величина I (A) имеет распределение Бернулли с параметром $p = P(\,I(A) = 1) = P(A)$, и её математическое ожидание равно
- вероятности успеха $p = P(A)$. Индикаторы прямого и противоположного
- событий связаны равенством $I(A) + I\,(\bar{A}) = 1$. Поэтому
- $|X| = |X| \cdot I(|X| < \varepsilon) + |X| \cdot I\,(|X| \geq \varepsilon) \geq |X| \cdot I(|X| \geq \varepsilon) \geq x \cdot I\,(|X| > \varepsilon)$.
- Тогда
- $E|X| \geq E\,(\varepsilon \cdot I\,(|X| \geq \varepsilon)\,) = \varepsilon \cdot P\,(|X| \geq \varepsilon)$, и
-
- . $\dfrac{E|X|}{\varepsilon} \geq P\,(|X| \geq \varepsilon)$ ■

- **Следствие** (обобщённое неравенство Чебышёва). Пусть
- функция g не убывает и неотрицательна на R. Если E g(X) < ∞, то для любого y ∈ R
- $$P\,(X \geq y) \leq \frac{E\,g(X)}{g(y)}$$
- .
- **Доказательство**. Заметим, что P (X ≥ y) ≤ P (g(X) ≥ g(y)), поскольку функция g не убывает. Оценим последнюю вероятность по неравенству Маркова, которое можно применять в силу неотрицательности g
- $$P\,(g(X) \geq g(y)) \leq \frac{E\,g(X)}{g(y)}$$
- ■
- **Следствие**. (неравенство Чебышёва — Бьенеме).
- Если DX существует, то для любого x > 0
- $$P\,(|X - E\,X| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$
- **Д-во**.
Для ε > 0 неравенство $|X - E\,X| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $(X - E\,X)^2 \geq \varepsilon^2$
- , поэтому $P\,(|X - E\,X| \geq \varepsilon) = P\,((X - E\,X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E|X - E\,X|^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$

- **Теорема** (закон больших чисел Чебышёва).
- Для любой последовательности $X_1, X_2, \dots$ попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом $EX_1^2 < \infty$ имеет место сходимость:

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \to EX_1$$

- **Доказательство**.
- Обозначим через $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Из линейности математического ожидания получим:

$$E(S_n/n) = \frac{EX_1+\ldots+EX_n}{n} = \frac{nEX_1}{n} = EX_1$$

- Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышёва – Бьенме

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = \frac{D(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{DX_1+\ldots+DX_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{nDX_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{DX_1}{n\varepsilon^2} \to 0$$