Глава 2. Марковские случайные процессы

- **Определение**. *Случайным процессом* (с.п.) $X(t)$ называется функция, значение которой при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной, которую будем называть *сечением* случайного
- процесса в момент времени t.
- Из определения следует, что с.п. $X(t)$ есть функция двух переменных
  - $X(t) = \varphi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$, $\varphi(\omega,t) \in G \subset \mathbf{R}+$,
- где Ω - пространство элементарных событий; T- множество значений аргумента t; G- множество значений с.п. $X(t)$.

- **Замечание**
  Случайные процессы также иногда называют *случайными функциями*.

  При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\varphi(\omega,t)$ называется *траекторией* или *реализацией* с.п. $X(t)$. Это означает, что
- опыт, в ходе которого случайный процесс протекает, уже произведен и
- произошло элементарное событие $\omega \in \Omega$. Случайный процесс называется *непосредственно заданным*, если каждый элементарный исход ω эксперимента описывается соответствующей траекторией в пространстве всех функций на множестве T со значениями в G.

- В зависимости от мощности множества T значений аргумента t случайные процессы можно разделить на четыре класса:
- 1) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;
- 2) п. с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- 3) п. с непр. состояниями и дискр. временем;
- 4) п. с непр. состояниями и непр. временем.

- Подобно тому как вводили функцию распределения для случ. величины X, для с.п. X(t) введем *одномерную функцию распределения случайного процесса*
- *в момент времени t_1*
  - $F_X(y,t_1) = P\{ X(t_1)<y \}$,
- где $y \times t \in \mathbf{R} \times T$.
- Если зафиксировать два значения моментов времени t_1 и t_2, то функция
- $F_X(x_1,t_1;x_2,t_2) = P\{F(t_1)<x_1,F(t_2)<x_2\}$
- называется *двумерной функцией распределения* случайного процесса.
- Для n сечений случайного процесса функция
- $F_X(x_1,t_1; \dots;x_n,t_n) = P\{F(t_1)<x_1;\dots;F(t_n)<x_n\}$ (1)
- называется *n-мерной функцией распределения* случайного процесса.

  (можно записывать аргументы в таком порядке: $F_X(t_1; \dots ,t_n; x_1,\dots,x_n)$)

  Будем считать, что случайный процесс X(t) задан, если задано семейство функций распределений (1) для любого n.
- Функция $F_X(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называются условиями согласованности:
- $F_X(x_1,t_1; \dots;x_n,t_n) = F_X(x_1,t_1; \dots;x_n,t_n; \infty,t_{n+1}; \dots; \infty,t_{n+p})$ (1.2)
- $F_X(x_1,t_1; \dots;x_n,t_n) = F_X(x_{i_1},t_{i_1}; \dots;x_{i_n},t_{i_n})$ (1.3)
- где i1,i2,…,in– любая перестановка индексов1,2,…n для каждого n. Теперь можно сформулировать ещё одно определение случайного процесса.
- **Определение (альтернативное)**.
  Случайным процессом X(t), заданным на множестве T ($t \in T$) называется семейство распределений (1), удовлетворяющих условиям согласованности(1.2) и(1.3).
- Набор функций $F_X(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$ для n = 1,2,… называют конечномерным распределением случайного процесса X(t).

Опр.

Если n-мерная функция распределения $F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)$ допускает представление

$$F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = \int_{-\infty}^{y_1}\ldots\int_{-\infty}^{y_n} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)\,dy_n\ldots dy_1$$

где $f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)$ – некоторая измеримая неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)\,dy_n\ldots dy_1 = 1$$

то f_X называется n-мерной плотностью распределения случайного процесса X(t).
(также для плотности распространено обозначение p_X)

При этом условия согласованности примут вид

$$f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n;y_{n+1},t_{n+1};\ldots;y_{n+p},t_{n+p})\,dy_{n+p}\ldots dy_{n+1}$$

$$f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = f_X(y_{i1},t_{i1};\ldots;y_{in},t_{in}) \quad .$$

- Рассмотрим примеры на нахождение конечномерных функций распределения.

- **Пример1**. Пусть случайный процесс $X(t) = \varphi(t)V$, $t\in[0,1]$, где V – некоторая случайная величина, с функцией распределения $F_V(y)$, а $\varphi(t) > 0$.
- Найти многомерную функцию распределения случайного процесса X(t).

- **Решение**. В соответствии с определением
- $F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = P\{X(t_1)<y_1, \ldots,X(t_n)<y_n\} = P\{\varphi(t_1)V < y_1, \ldots, \varphi(t_n)V < y_n\} =$
- $$= P\left\{V < \frac{y_1}{\varphi(t_1)}, \ldots, V < \frac{y_n}{\varphi(t_n)}\right\} = P\left\{V < \min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i}{\varphi(t_i)}\right\} = F_V\left(\min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i}{\varphi(t_i)}\right)$$
- Если функция распределения $F_V(y)$ имеет плотность $f_V(x)$, то существует
- и одномерная плотность случайного процесса X(t). Так как для n = 1 имеем
- $$F_X(y,t) = F_V\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\varphi(t)} f_V\left(\frac{z}{\varphi(t)}\right) dz, \quad \text{то}$$
- $$f_X(y,t) = \frac{1}{\varphi(t)} f_V\left(\frac{x}{\varphi(t)}\right)$$

- **Пример2**.
- Пусть случайный процесс, определяется соотношением
- $X(t) = Ut+V$, где U и V – независимые случайные величины с функциями
- распределения $F_U(x)$, $F_V(y)$. Определить вид реализаций данного процесса
- и найти закон распределения.

- **Решение**. Реализации этого случайного процесса представляют собой прямые линии со случайным наклоном и случайным начальным значением при $t = 0$. Одномерная функция распределения случайного процесса $X(t)$ при $t > 0$ имеет вид

$$F_X(y,t) = P\{X(t)<y\} = P\{\,Ut + V < y\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Ut+V < y \mid V = z\}\, \overbrace{dF_V(z)}^{f_V(z)dz\ ,\ \text{если } V \text{ – абс-непр.}} =$$

- $$= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Ut+z < y\}\, dF_V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{U < \frac{y-z}{t}\right\} dF_V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_U\left\{\frac{y-z}{t}\right\} dF_V(z)\ .$$

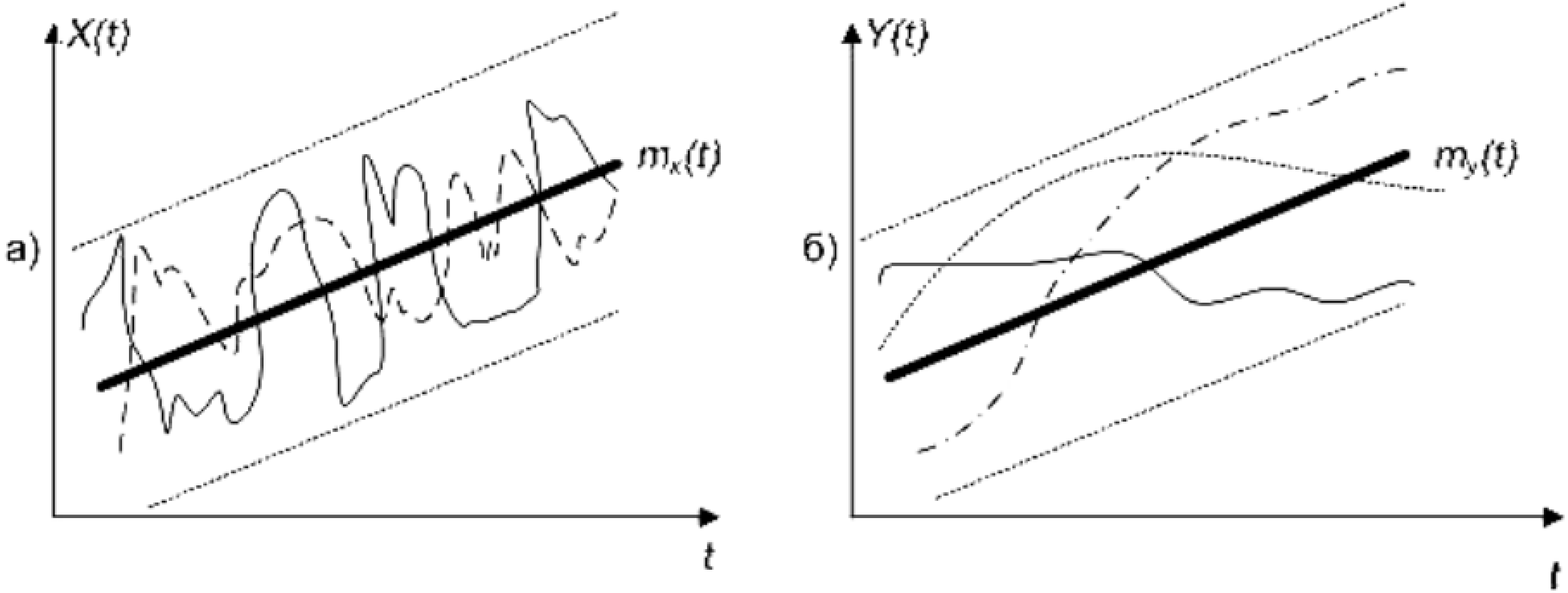
  Если же $t = 0$, то $F_X(y,t) = F_V(y)$.
  Для n-мерной функции распределения, аналогично предыдущему примеру, получаем вид
- $$F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = P\{X(t_1)<y_1,\ \ldots,X(t_n)<y_n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_U\left(\min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i-z}{t_i}\right) dF_V(z)$$

- Конечномерные распределения дают полное и исчерпывающее описание случайного процесса.
  Однако существует большое число задач, для решения которых оказывается достаточным использование основных характеристик случайного процесса, которые в более краткой и сжатой форме, отражают основные свойства случайного процесса. Такими характеристиками являются моменты первых двух порядков. В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют числовыми характеристиками, моменты случайной функции являются неслучайными функциями(их называют характеристиками случайной функции (процесса)).

- **Опр**.
- *Математическим ожиданием* случайного процесса или (иногда) его *средним значением* называется неслучайная функция $EX(t)$, $t \in T$, (или $E[X(t)]$, часто также обозначают $MX(t)$, либо $m_X(t)$), определяемая соотношением

$$EX(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_X(y,t)\, dy$$

- Значение этой функции при любом t равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. Математическое ожидание, есть«средняя» функция, вокруг которой происходит разброс реализаций случайного процесса.



а)
X(t)
$m_x(t)$
t
б)
Y(t)
$m_y(t)$
t

- **Свойства математического ожидания случайного процесса**
- 1. $E\varphi(t) = \varphi(t)$ для неслучайной функции $\varphi(t)$
- 2. $E[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) \cdot EX(t)$
- 3. Для любых двух случайных функций (процессов) $X_1(t)$ и $X_2(t)$
-

$$E[X_1(t)+X_2(t)] = EX_1(t) + EX_2(t)$$

- 4. $E[X(t)+ \varphi(t)] = EX(t) + \varphi(t)$

- **Опр.**
- *Дисперсией случайного процесса* X(t) называется неслучайная неотрицательная функция DX(t), которая при любом значении аргумента t

  равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса:
- $DX(t) = D(X(t)) = E(X(t) - EX(t))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[X(t)])^2 \, \partial_y F_X(y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[X(t)])^2 f_X(y,t) \, dy$

Свойства дисперсии случайного процесса

- 1. $D\varphi(t) = 0$ для неслучайной функции $\varphi(t)$
- 2. $D[X(t)+\varphi(t)] = DX(t)$
- 3. $D[\varphi(t) \cdot X(t)] = \varphi^2(t) \cdot DX(t)$

- **Опр**.
- Центрированным случайным процессом $\overset{\circ}{X}(t)$ называется процесс, который получится, если из случайного процесса $X(t)$ вычесть его мат ожидание:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - EX(t)$$

- **Свойства центрированного случайного процесса**

- 1. Если $X_2(t) = X_1(t) + \varphi(t)$ ➔ $\overset{\circ}{X}_2(t) = \overset{\circ}{X}_1(t)$
- 2. Если $X_2(t) = X_1(t) \cdot \varphi(t)$ ➔ $\overset{\circ}{X}_2(t) = \overset{\circ}{X}_1(t) \cdot \varphi(t)$
- 3. $E\overset{\circ}{X}(t) = 0$

- **Опр**.
- *Функцией ковариации (ковариационной функцией)* случайного процесса X(t) называется математическое ожидание произведения центрированных сечений случайного процесса в моменты времени t1 и t2 (т.е. ковариация этих сечений).
- $K(t_1,t_2) = Cov\,(X(t_1), X(t_2)) = E\,[\,(X(t_1) - E(X(t_1))\,) \cdot (X(t_1) - E(X(t_1))\,)\,]$
- $K_X(t_1,t_2)$ характеризует не только степень линейной зависимости между двумя сечениями, но и разброс этих сечений относительно математического ожидания случайного процесса EX(t).

Определение. Случайный процесс X(t) называется *стационарным* или *стационарным процессом в узком смысле* (*строго стационарным*), если
$F_X(t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n) = F_X(t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau,x_1,\ldots,x_n)$ для любых n, τ, $t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n$

Для случайных процессов, являющихся стационарными в узком смысле:

1) $F_X(t,x)| = F_X(0,x) = F_X(x)$

2) $F_X(t_1, t_2, x_1, x_2)| = F_X(0, t_2-t_1,x_1,x_2) = F_X(t_2-t_1,x_1,x_2)$,

то есть двухмерная функция распределения зависит от трёх параметров: $F_X(\tau, x_1, x_2)$, где τ – разность моментов времени сечений

Определение. Случайный процесс X(t) называется *стационарным процессом в широком смысле*, если выполняются следующие свойства (при этом из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле):

1) $EX(t) = EX$

2) $DX(t) = DX$

3) $K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau)$, где $\tau = t_2-t_1$

При этом условие (2) является «лишним» и может быть выведено из условия (3).

Замечание.

Ковариационная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

1) $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$

2) $D_X = K_X(0)$

3) $| K_X(\tau) | \le D_X$

4) $\Sigma^N_{k=1} \Sigma^N_{i=1} x_i x_k K_X(t_i-t_k) \ge 0$, для любых N, $t_1, \ldots, t_N$, $x_1, \ldots, x_N$

- **Определение.**
  Случайный процесс называется *процессом с независимыми значениями*, если его сечения в произвольные моменты времени являются независимыми в совокупности.

$F_X\,(t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n) = P\,(\,X(t_1) \le x_1,\ldots,\,X(t_n) \le x_n) = P(X(t_1) \le x_1)\cdot\ldots\cdot P(X(t_n) \le x_n) =$
$= F_X\,(t_1,x_1)\ldots F_X\,(t_n,x_n)$

Замечание

Процесс с независимыми значениями X(t) часто называют *белым шумом*. При этом стационарный процесс с независимыми значениями, для которого $F_X(t,x) = F_X\,(x)$ называют *стационарным белым шумом*.

Определение.

Случайный процесс называется *процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $X(t_0)$, $\Delta X_1 = X(t_1) - X(t_0)$, $\Delta X_2 = X(t_2) - X(t_1)$. … являются независимыми в совокупности.

Опр.

Случайный процесс $w(t)$ с независимыми приращениями называется *винеровским процессом*, если выполняются следующие условия:
1) $w(0) = 0$;
2) $w(s) - w(t) \in N(0, \sigma^2(s-t))$, $s \geq t \geq 0$

- Моментные функции винеровского процесса:

1) $Ew(t) = 0$
- 2) $Dw(t) = \sigma^2 t$
- 3) $K_w(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

- **Опр.**
- Случайный процесс $\pi(t)$ с независимыми приращениями называется *пуассоновским*, если:
- 1) $\pi(0) = 0$;
- 2) $\pi(s) - \pi(t) \in \Pi(\lambda(s-t))$, $s \geq t \geq 0$

- Моментные функции пуассоновского процесса:

- 1) $E\pi(t) = \lambda t$
- 2) $D\pi(t) = \lambda t$
- 3) $K_\pi(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

- При помощи пуассоновских потоков в физике моделируют распад вещества.

Замечание

- Пуассоновский процесс π(t) связан с простейшим пуассоновским потоком событий интенсивности λ следующим образом: его значение π(t) равно числу событий в потоке, уже произошедших вплоть до данного момента времени t.

Для процессов с в общем справедливо следующее:

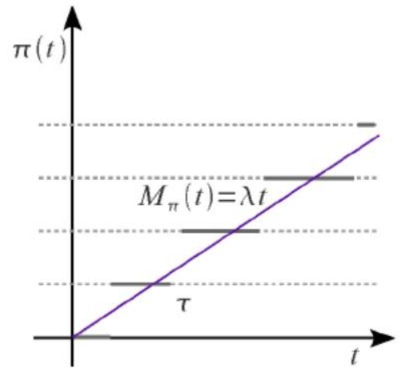
- 1) любой процесс где а) X(t) ϵ **N** , и
- б) X(t2) ≥ X(t1) , если t2 > t1

равен числу событий, произошедших на данный момент времени в некотором потоке событий

- 2) стационарность соответствующего потока событий не означает стационарность процесса

- 3) Свойство независимости приращений процесса даёт отсутствие последействия в соответствующем потоке.

- **Замечание**
- Параметр λ равен тангенсу угла наклона прямой математического ожидания и называется интенсивностью пуассоновского процесса. Величина T = 1/λ является средним временем между скачками значений.



Опр.

Говорят, что стационарный в широком смысле случайный процесс X(t) (имеет постоянное матожидание) *подчиняется закону больших чисел* или, что то же самое, называется *эргодическим (эргодическим относительно матожидания, эргодическим)*, если среднее по времени значение сходится по вероятности к математическому ожиданию.

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} X(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} EX$$

Опр.

Случайный процесс X(t) *сходится в по вероятности* к случайной величине Y при $t \to t_0,$ когда для любой последовательности моментов времени $t_n \to t_0$

$$X(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} Y$$

ТЕОРЕМА (эргодическая 1)

Достаточным условием эргодичности стационарного в широком смысле случайного процесса X(t) является равенство

$$\lim_{\tau\to\infty} K_X(\tau) = 0$$

Д-ВО

Для простоты возьмём $t_0 = 0$. Тогда нужно доказать следующее:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} EX$$

Сходимость по вероятности следует из более сильной среднеквадратической сходимости.

- **Опр.**
- Случайный процесс X(t) *сходится в смысле среднего квадратического* к случайной величине Y при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} E(X(t)-Y)^2 = 0,$$

обозначается

$$X(t) \underset{t \to t_0}{\overset{\text{с.к.}}{\longrightarrow}} Y$$

(продолжение **Д-ВА**)

Т.е. нам достаточно доказать следующее:

$$\lim_{T \to \infty} E\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt - EX\right)^2 = 0$$

для доказательства преобразуем подпредельное выражение:

$$E\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt - EX\right)^2 = \frac{1}{T^2} E\left[\int (X(t) - EX)\, dt\right]^2 = \frac{1}{T^2} E\left[\int_0^T\int_0^T (X(t) - EX)(X(u) - EX)dudt\right]$$

$$= \{\text{аддитивность } E\} = \frac{1}{T^2}\int\int_0^T K_X(t,u)\, dudt = \{\tau = t-u\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\Big(\underbrace{\int_{-T}^{0}\int_{-\tau}^{T} K_X(\tau)\, du\, d\tau}_{t<u} + \underbrace{\int_0^T\int_0^{T-\tau} K_X(\tau)\, du\, d\tau}_{t>u}\Big) = \frac{1}{T^2}\left(\int_{-T}^{0} K_X(\tau)(T+\tau)\, d\tau + \int_0^T K_X(\tau)(T-\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} K_X(\tau)(T-|\tau|)\, d\tau = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(\tau)\left(1-\frac{\tau}{T}\right) d\tau > 0$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\left|\int_0^T K_X(\tau)\,(1-\frac{\tau}{T})\,d\tau\right| \le \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T \left|K_X(\tau)\right| d\tau = \left|\text{ правило Лопиталя}\right| = 2\lim_{T\to\infty} \frac{\left(\int |K_X(\tau)|\,d\tau\right)'_T}{T'_T}$$

$$= 2\lim_{T\to\infty} \left| K_X(T) \right| .$$

Последнее равно 0 когда $\lim_{\tau\to\infty} K_X(T) = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (эргодическая 2)
Необходимым и достаточным условием эргодичности стационарного в широком смысле процесса является устремление к нулю среднего значения ковариационной функции процесса:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_X(t_1,t_2) = 0$$

для док-ва теоремы нам понадобится

ЛЕММА

Если для случайного процесса X(t) существует конечный второй момент, то предел

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \rho(t)\,(\,X(t) - EX(t)\,)\,dt = 0$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T\int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1,t_2)\,dt = 0$$

- **Д-ВО леммы**
- Обозначим $Y = \int_0^T \rho(t)X(t)\,dt$ - случайная величина.
- $EY = \int_0^T \rho(t)EX(t)\,dt$, $DX = \int_0^T \int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2$
- Но, с другой стороны $DX = E(Y-EY)^2 = E\left(\int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt\right)^2$
- Пользуясь свойствами сходимости по вероятности имеем:
- $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt = 0 \Leftrightarrow 0 = \lim\limits_{T\to\infty} E\left(\int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt\right)^2 =$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2$$

- **Д-ВО теоремы**
- Следует из леммы при $\rho(t) = 1/T$ ■

- Практическая проверка необходимого и достаточного условия эргодичности стационарного в широком смысле процесса может быть связана с большими трудностями, поэтому чаще всего используется теорема 1.
- Для справедливости эргодических теорем достаточно вместо стационарности процесса в широком смысле всего лишь существование постоянного математического ожидания и конечного второго момента (что ещё не означает стационарности в широком смысле). Для такого класса процессов условие из теоремы 1 перепишется как
- $$\lim_{|t1-t2| \to \infty} K_X(t_1 - t_2) = 0$$

- Тем не менее, отметим, что когда говорят о нестационарном эргодическом процессе, то зачастую имеют в виду что он нестационарен в узком смысле.

  Смысл эргодичности можно пояснить так. Для расчёта/определения параметров физической системы, описываемой эргодическим процессом можно долго наблюдать за поведением одного её элемента (реализация процесса; усредняем параметры по времени), а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов, - сечение элемента; и тогда усредняем по вероятности). В обоих случаях получатся одинаковые результаты, если процесс обладает свойством эргодичности.

- Ещё раз подчеркнём, что стационарность (даже строгая) случайного процесса не означает его вырождения ни в постоянную величину, ни в случайную величину.

- **Пример** стационарного в узком смысле, но не эргодического процесса:

  $X(t) = U \sin(t + V)$,   где U,V -случ. величины с заданным распределением

- Все сечения данного процесса по отдельности имеют одно и то же распределение, но в зависимости от взаимного расположения сечений их совместное распределение будет различным.

Опр. ***Процессом Маркова*** называется процесс, обладающий следующим свойством *отсутствия памяти (отсутствия последействия)*:

$P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1},\dots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1) = P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1})$

Опр.

- Переходная функцией процесса Маркова называется ф-я
- $p(s,x,t,y) = P(X(t) = y \mid X(s) = x)$, которая исчерпывающе характеризует п. Маркова
- **УТВЕРЖДЕНИЕ**

  Переходная функция марковского процесса обладает следующими свойствами:

  1) $p(s,x,s,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$

- 2) Уравнение Колмогорова- Чепмена
- $$p(s,x,t,y) = \sum_{z \in E} p(s,x,u,z)\, p(u,z,t,y), \quad \text{для любых } s \le u \le t \text{ и } x, y \in E$$

  где E – мн-во значений процесса Маркова. В случае непрерывности E имеем интеграл.

- **Опр**.
- Марковский процесс называется однородным, если переходные вероятности не зависят от абсолютного времени, а только от разности между моментами времени:

  $$p(s,x,t,y) = p(t-s,x,y)$$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ**

  Любой процесс с независимыми приращениями (см. расширенный курс лекций) является марковским.

Д-ВОследует из того,что условие отсутств.памяти в процессе можно переписать

$P(X_n-X_{n-1}=x_n-x_{n-1} \mid X_{n-1}-X_{n-2}=x_{n-1}-x_{n-2},\dots, X_2-X_1=x_2-x_1, X_1=x_1)$

и из определения процесса с независисмыми приращениями

Опр

- ***Цепью Маркова*** называется марковский процесс с дискретным временем
- $T = \{t_0, t_1, t_2,\ldots\}$ и конечным, либо счётным множеством состояний E, которое далее, если не оговорено иное, для простоты будем считать мн-вом целых неотрицательных чисел.
- **Опр**.
- В цепи М. обозначим переходные вероятности $p_{ij}(m,n) = p(m,i,n,j)$,
- Через $p_{ij}^{(n)}$ будем обозначать $p(n-1,i,n,j) = P(X(t_n) = j \mid X(t_{n-1} = i)$.

  а в случае однородности марковской цепи обозначим через
- $p_{ij}(n-m)$ условную вероятность, что процесс Маркова за (n-m) шагов перейдёт из состояния m в состояние n

- (будем также говорить,что некот. *динамическая система* S со счётным числом возможных состояний, которую описывает процесс, переходит в состояние s_n, когда процесс Маркова (не обязательно с дискр. временем) принимает значение n). (Дин. система - множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и совокупным положением в пространстве (которое и есть состояние s системы). Любую задачу, где искомые параметры зависят от положения в пространстве физических объектов, можно наглядно описать некоторой динамической системой, в том числе и все примеры в следующ. лекциях)

  Тогда уравнения Колмогорова-Чепмена для однородной марковской цепи можно переписать так:

  $p_{ij}(m + n) = p_{ik}(m) + p_{kj}(n)$ для любых целых положительных m, n и i,k ,j ϵ E
- **Опр**.
- Обозн. *вектор (распределения) вероятностей состояний* в момент t_n через $p^{(n)}$
- - i-я компонента вектора $p_i^{(n)}$ показывает вер-ть, что система в момент t_n находится в состоянии номер i (отметим, что сумма $\Sigma p_i^{(n)}=1$)

  Матрица перехода $\pi^{(n)}$, элементами кот. являются вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ связывает векторы распределения состояний на шаге n и n-1 след. образом:

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \pi^{(n)}$$

Для однородной цепи $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$ и $\pi^{(n)} = \pi$, поэтому

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \pi \qquad (1)$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \pi^n$$

Когда существует предел (это касается не только однородного случая)

$$\lim p^{(n)} = p^* \qquad (\lim p(t) = p^*)$$

и этот предел не зависит от начального распределения состояний $p^{(0)}$ и также от распределения в любой иной момент времени $p(t_0)$, то этот предел p^* называется *финальными (или предельными) вероятностями состояний (финальным распределением состояний).* Тогда говорят, что в соответствующей дин. системе устанавливается ***стационарный режим***, и что она является эргодической, и сам **процесс Маркова** называется ***эргодическим****.*

Но: последнее означает не более и не менее, чем сходимость на бесконечности процесса Маркова к некоему строго стационарному и эргодическому процессу Y(t) с одномерным распределением p*.

Эргодичность Y можно вывести из следующего:

Так как для любых $(n, t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ p^* не зависит от $p(t_n)$ $\Leftrightarrow$ $K(X(t_n), Y(t_n+t)) = 0$

С другой стороны $\lim X(t_n) = \lim Y(t_n)$,и ввиду огранич. $|X| < C$ $\Rightarrow$ $EY = \lim\limits_{t \to \infty} EX(t)$

Следовательно,

$$\lim_{t_n \to \infty} \lim_{t \to \infty} K(Y(t_n), Y(t_n+t)) = \lim_{t_n \to \infty} \lim_{t \to \infty} K_Y(t_n, t_n+t) = 0 .$$

Финальные вероятности можно вычислить, перейдя в (1) к пределу:

$$p^* = p^* \pi$$

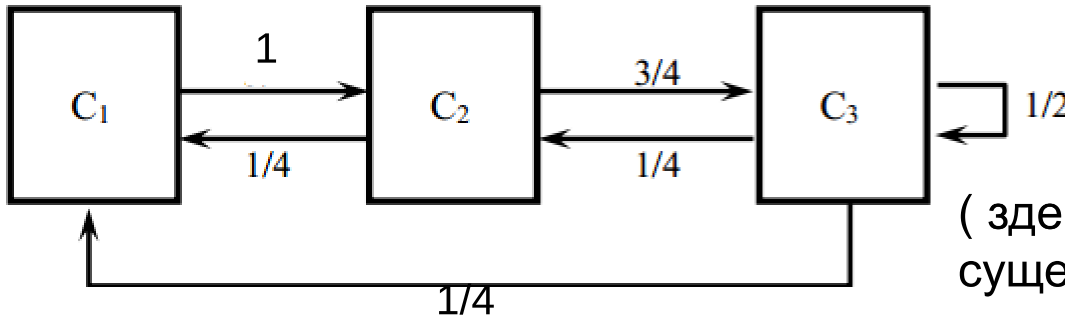
Достаточное условие эргодичности для однородных цепей Маркова даёт

Эргодическая ТЕОРЕМА Маркова

Если существует целое $m>0$, такое что все элементы матрицы π^m строго положительны, то процесс Маркова эргодичен.

Д-ВО Почитать – Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. (М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988; § 17 «Теорема о предельных вероятностях»)

- Размеченный граф состояний цепи Маркова
-



(здесь все состояния существенные)

- Узлы графа состояний с именами С1, С2, С3 соответствуют значениям процесса Маркова (удобно построить граф так, чтобы индекс узла был равен соответствующему целочисленному значению процесса). Ориентированные рёбра (стрелки) графа соответствуют возможным переходам в цепи Маркова, рядом со стрелкой пишут вероятность перехода.
- Состояние i называют существенным, если попав в него, всегда можно вернуться назад, т.е. для любого j

$$i \to j \quad \Rightarrow \quad j \to I \,,$$

где символ → означает существование пути как цепочки переходов между состояниями с началом в левом состоянии и концом в правом.

- Поглощающее состояние – это состояние, из которого нельзя перейти ни в какое другое. (Всегда существенное.)

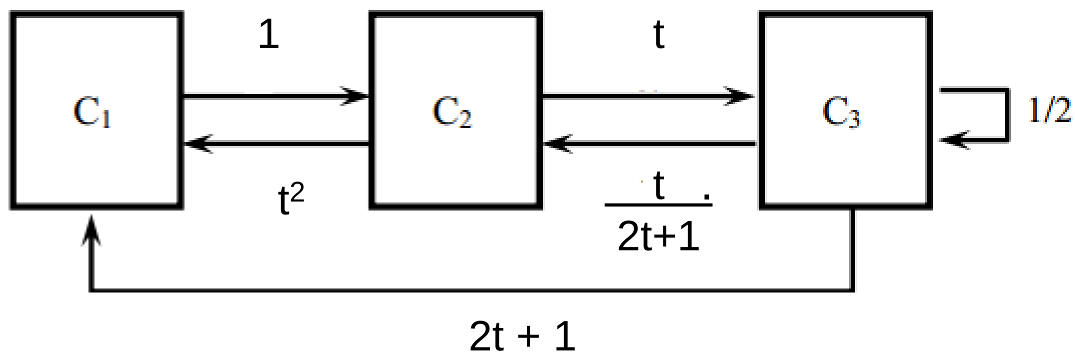
- Пусть I – некоторое мн-во состояний. Будем называть I мн-вом *сообщающихся состояний* (либо *неразложимым классом состояний*), если для любых I,j є I

$$i \to j \;\; и \; j \to i \quad (обозначим\ i \leftrightarrow j)$$

-

- В процессе Маркова с непрерывным временем T можно ввести понятие интенсивности (плотности) вероятности перехода(или просто инт. перехода) $\lambda_{ij}(t)$:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(j,\ t+\Delta t\ ,i,t)}{\Delta t}$$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ.**
- Интенсивности однородного процесса Маркова постоянны: $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$.(очевидно)
- Если известны интенсивности перехода для любой пары состояний процесса Маркова, то можно составить размеченный граф состояний процесса, пометив рёбра графа соответствующими интенсивностями переходов:
- 

- **ТЕОРЕМА**
Критерием эргодичности однородного процесса Маркова с конечным числом состояний (как с дискретным так и с непрерывным временем) является то, что любое множество существенных состояний сообщается между собой (существует цепочка переходов между любыми существ. состояниями).

- В конечной однородной цепи Маркова для существования предельных распределений состояний **p** (без требования независимости от начального распределения $p^{(0)}$) достаточно существование предела последовательности $\{\pi^k\}$ степеней стохастической (сумма элементов в любой строке = 1 – **определение**) матрицы перехода.

- **ТЕОРЕМА**
  (достаточный признак существов-я предельного распределения состояний в конечной однородн. цепи Маркова) (не эргодичность!, более слабое утверждение)
- Предел стохастической матрицы π существует, если выполнено хотя бы одно:
  1) для некоторой степени m матрицы π^m есть строго положительный столбец (в этом случае говорят, что π^m *принадлежит классу матриц Маркова* ***M***);
- 2) π – примитивная матрица (см. определение ниже)

- Квадратная Матрица A = (a_{ij}) называется *неразложимой,* если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду
- $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ A_1 и A_3—квадр подматрицы $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соотв
- это в точности означает, что в множестве индексов {1,..,n} нет *изолированных подмножеств* J, т.е. таких, что элементы матрицы $a_{ij} = 0$ всегда, когда одновременно i∊ {1,..,n} \ J и j ∊ J.
- Неотрицательная (все элементы ≥ 0) матрица A называется *примитивной*, если она неразложима и имеет лишь одно собственное значение с максимальным модулем (т.е. мн-во собств. значений $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots < \lambda_n$).
- (В любой стохастической матрице все собств. значения $\lambda \le 1$)

- **ТЕОРЕМА**
- Пусть динамическая система S имеет мн-во возможных состояний $\{S_k\}$, а процесс изменения состояний этой системы представляет собой случайный процесс Маркова, и для всех пар состояний $\{S_i , S_j\}$ определены интенсивности перехода $\lambda_{ij}(t)$ и $\lambda_{ji}(t)$. Тогда вероятности состояний системы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

- $p'_k(t) = \sum_{i\neq k} p_i(t)\lambda_{ik}(t) - p_k(t) \sum_{j\neq k} \lambda_{kj}(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $t \in T$ (2) .

- Д-ВО

  Пусть n – количество всех состояний

  Так как

  $p_k(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k) \Rightarrow p_k(t+\Delta t) - p_k(t)\, p(t, k, t+\Delta t, k) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k)$

- И по свойствам вероятн-ти $p(t, k, t+\Delta t, k) = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j) \Rightarrow$

- $p_k(t+\Delta t) - p_k(t)\,(1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j)) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, k, t+\Delta t, i) \Rightarrow$

- $p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k) - p_k(t) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j)$

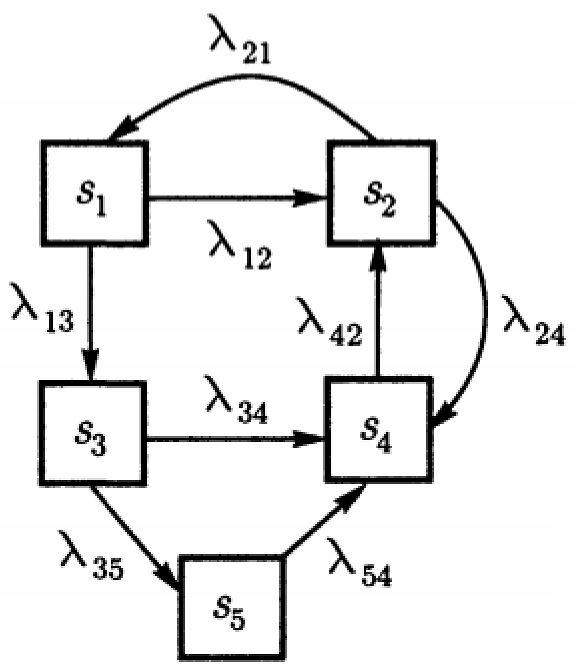
- Поделив обе части уравнения на Δt и переходя к пределу по $\Delta t \to 0$ получим

- $p'_k(t) = \sum_{i\neq k} p_i(t)\lambda_{ik}(t) - p_k(t) \sum_{j\neq k} \lambda_{kj}(t)$ ■

- В общем случае для определения вероятностей состояний системы в момент времени нужно решить задачу Коши с одним дополнительным, «нормировочным», условием:
- $p'_k(t) = \Sigma\, p_i(t)\lambda_{ik}(t) - p_k(t)\, \Sigma\, \lambda_{kj}(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $t \in T$ (2)
- $p^{(0)}$
- $\Sigma\, p_i(t) = 1$
- Если интенсивности всех переходов постоянны, то финальные вероятности состояний p* могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений (3), которую получим перейдя в (2) к пределу при $t \to \infty$.
- $0 = \Sigma\, p_i^*\lambda_{ik} - p_k^*\, \Sigma\, \lambda_{kj}$, $k = 1,2,\ldots,n$, $t \in T$ (3)
-

- Систему уравнений для поиска финальных вероятностей однородного процесса Маркова с непрерывным временем можно составлять непосредственно по размеченному графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: «для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему».

- Например, для системы S, с размеченным графом состояний, данным на рис. уравнения для финальных вероятностей состояний имеют вид



$$(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1^* = \lambda_{21} p_2^*;$$
$$(\lambda_{21} + \lambda_{24})\, p_2^* = \lambda_{12} p_1^* + \lambda_{42} p_4^*;$$
$$(\lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3^* = \lambda_{13} p_1^*;$$
$$\lambda_{42}\, p_4^* = \lambda_{24} p_2^* + \lambda_{34} p_3^* + \lambda_{54} p_5^*;$$
$$\lambda_{54}\, p_5^* = \lambda_{35} p_3^*.$$