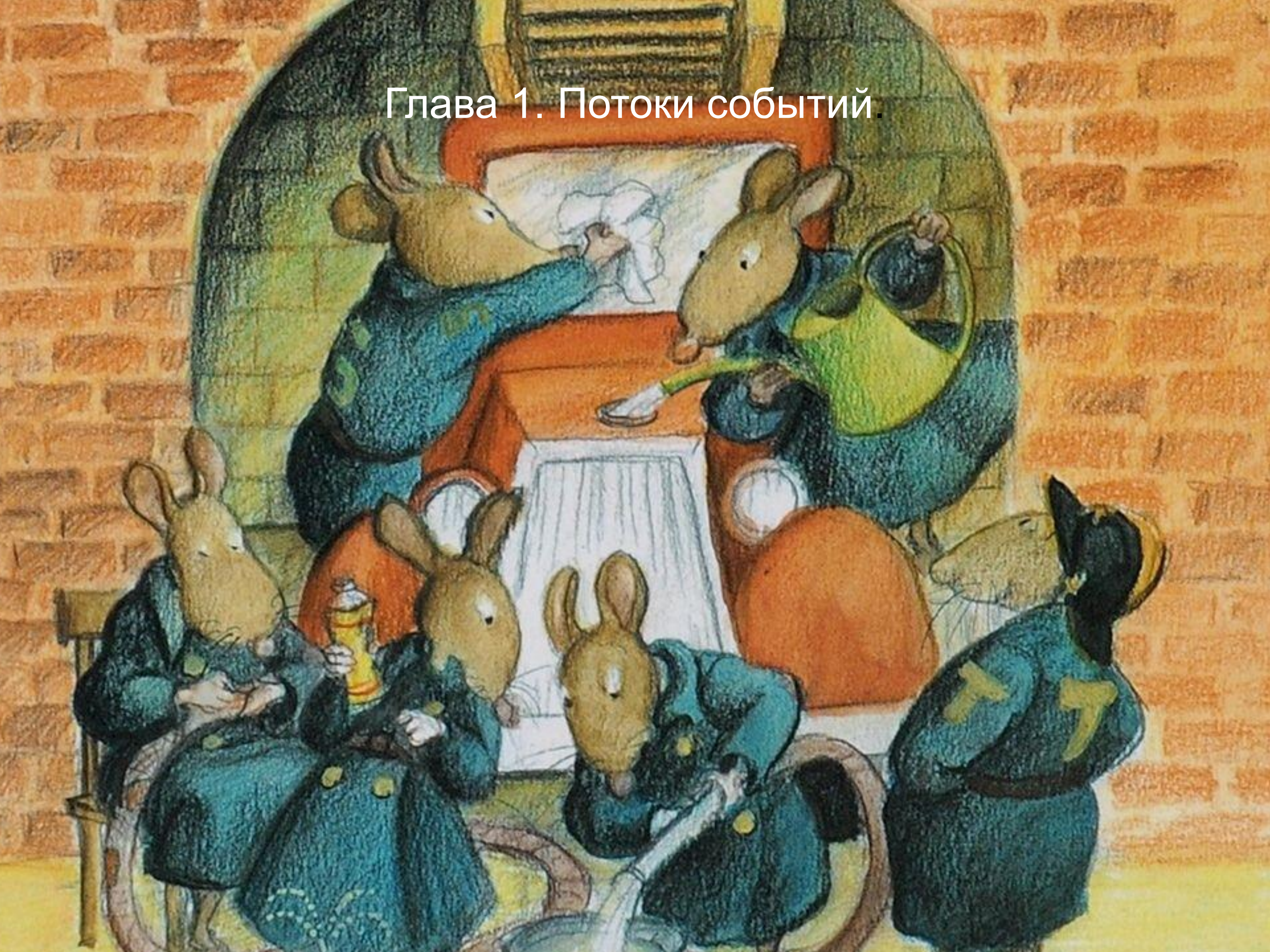
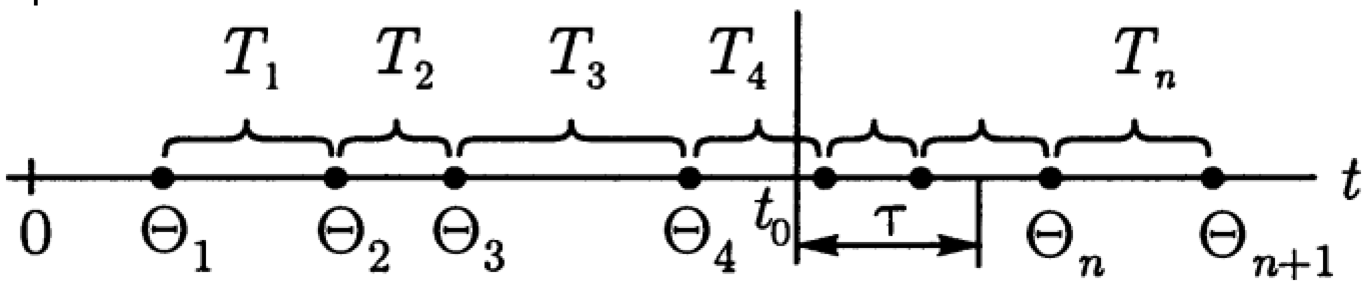
Глава 1. Потоки событий.



- Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п.



- Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами Θ_1, Θ_2,… с интервалами между ними: $T_1= \Theta_2- \Theta_1$, $T_2= \Theta_3- \Theta_2$,…, $T_n= \Theta_{n+1}- \Theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин:
- $\{\Theta_1, \Theta_2= \Theta_1+T_1, \Theta_3= \Theta_1+T_1+T_2,\ldots\}$ либо как $\{\Theta_1, T_1, T_2, \ldots\}$.
-
Заметим, что термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от ранее введенного термина «случайное событие». В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях «событий», образующих поток (например, о «вероятности вызова» на телефонной станции; ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один).
- Заметим также, что на рисунке в виде ряда точек можно изобразить не сам поток событий (он случаен),а только какую-то его конкретную реализацию.

- Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, боле конкретно, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины т этого интервала и не зависит от того, где именно на оси 0t он расположен.
- Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.
- П. с. называется *потоком без последействия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени т, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним интервал.
- Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

- **Определение.**

П. с. называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия.

- Для формализации этих понятий введём следующие математические объекты. Пусть p_k: R×R → R – семейство двумерных функций, таких что $p_k(t, \Delta t)$ - вероятность того, что «за время Δt, примыкающего к моменту времени t, появилось k событий» (высказывание, характеризующее событие в некотором вероятностном пр-ве), $k = 0,1,2,\ldots$
Очевидно, что сумма всех таких событий равна всему вероятностному пространству: $\Sigma p_i(t, \Delta t) = 1$ (1)

- Введем обозначение $p_{>1}(t,\Delta t) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i(t, \Delta t)$ - вероятность того, что за время
- Δt появилось более одного события.
  Тогда формула (1) примет вид:
- $p_0(t, \Delta t) + p_1(t, \Delta t) + p_{>1}(t, \Delta t) = 1$
- и свойство **ординарности** можно записать как
- $p_{>1}(t, \Delta t) = o(\Delta t)$,
- где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая по отношению к Δt величина, т.е. $o(\Delta t) /\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$
  Обозначим через $M(t, \Delta t)$ математическое ожидание числа событий, появившихся за время Δt, тогда
- $M(t, \Delta t) = \Sigma i\, p_i(t, \Delta t) = 0^* p_0(t, \Delta t) + 1^* p_1(t, \Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} i\, p_i(t, \Delta t) = p_1(t, \Delta t) + o(\Delta t)$
- для ординарного потока, так как последняя сумма равна некому $o(\Delta t)$. Это тривиальный факт, если взять дополнительное ограничение на число событий за малый отрезок. Если не ограничивать число событий, то это очевидно следует из одного из свойств сходимости по вероятности, если считать, что матожидание $M(t, \Delta t)$ существует и конечно для любого Δt.
  Ещё одно свойство сходимости по вероятности
- Пусть $Xn \to X$ при $n \to \infty$. Тогда для сходимости $EX_n \to EX$ достаточно выполнения любого из следующих условий :
- 1. Все члены послед-ти ограничены одной и той же постоянной: $|X_n| \le C$
  2. Все члены послед-ти огранич. одной и той же случ. величиной с конечным первым моментом: $|X_n| \le Y$, $EY < \infty$.
  3. Существует $\alpha > 1$ такое, что $E|X_n|^{\alpha} \le C = const$ для любого n.

- Действительно, рассмотрим последов-ть $\Delta t_k \to 0$ и соответствующую ей послед-ть случайных величин
- X_k = {число событий на интервале $[t, \Delta t_k]$ }, имеющих распределения $P(X_k = i) = p_i(t, \Delta t_k)$
- и определим послед-ть $\{Y_k(\omega) = X_k(\omega)$ для любого ω, такого что $X_k(\omega) < 2$, иначе $Y_k(\omega)=0\}$
- Тогда послед-ть
- $Z_k = (X_k - Y_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и воспользуемся вышепривед. свойством сходимости по вероятности, пункт 2:
  $|Z_k| \le X_k \le X_1$, $EX_1 = M(t, \Delta t_1) < \infty$ ➔ $EZ_k \to 0$ при $k \to \infty$,
- а это означает $\sum_{i=2}^{\infty} i\, p_i(t, \Delta t) = o(\Delta t)$
- **Определение**

  Интенсивностью (плотностью) потока событий в момент t будем называть функцию
- $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t, \Delta t)}{\Delta t}$$
-

  И плотность ординарного потока будет равна
- $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

  По смыслу плотность выражает среднее число событий, приходящихся на единицу времени, для малого участка Δt, примыкающего к моменту t.

- Среднее число событий, наступающих на интервале времени h, следующем непосредственно за моментом t равно
- $$a(t,h) \equiv EX(t,h) = \int_t^{t+h} \lambda(t)\, dt$$
- Как видно из определения стационарности, если поток событий **стационарен**, то
$$p_k(t, h) = p_k(h), \quad \text{и}$$
- $$a(t,h) = a(h)$$

Следовательно $\lambda(t) = \lambda$, т.е. интенсивность стационарного потока постоянна и
$$a(h) = \lambda h.$$

Наконец, отсутствие последействия можно формализовать так:
- Пусть $p_{n-k,n}(t,\tau)$ - вероятность того, что за время τ, примыкающего к моменту времени t, появилось k событий при условии, что в момент времени t было n-k событий. Тогда условие отсутствия последействия означает, что
- $$p_{0,n}(0,t+\tau) = p_{0,n-k}(0,t)\, p_{n-k,n}(t,\tau).$$

Более просто **отсутствие последействия** можно записать, если рассматривать случайные величины вида
$X(t,h) \equiv X_{[t,t+h]} \equiv$ {число событий на интервале [t,t+h] }.
Тогда отсутствие последействия будет означать независимость $X_{[a,b]}$ и $X_{[c,d]}$ для любых непересекающихся [a,b] и [c,d] .

- **ТЕОРЕМА**. Если поток событий- **простейший**, то распределение длин
- интервалов T_n между поступлениями любой пары соседних событий (т.е. для любого n)- показательное (экспоненциальное) с параметром λ, равным интенсивности потока. **T € E_λ**
- ► Следующие постулаты вытекают из определения простейшего потока:
- 1) для всякого малого $\Delta t > 0$ существует ненулевая вероятность появления события;
- 2) если система начинает функционировать с момента $t = 0$, то первое появление события имеет место в момент $t > 0$.
- Рассмотрим функцию
- $p(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ (2)
- Если $f(\tau)$ – плотность распределения интервала T_n, то $p(t) = P$ { первое событие появилось после момента t}. Из свойства отсутствия последействия имеем:
- $p(t + \Delta t) = p(t)\, p(\Delta t)$
- Вычитая из обеих частей формулы p(t), получим
  $p(t + \Delta t) - p(t) = -p(t)\,(1 - p(\Delta t))$.
- Разделим обе части на Δt и перейдем к пределу по Δt:
- $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = -p(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t}$$
- Если пределы существуют, то полагая $\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t} > 0$, будем иметь
  $p'(t) = -\lambda\, p(t)$, где $p(0) = 1$.
- ➔ $p(t) = e^{-\lambda t}$ ➔ $e^{-\lambda t} = 1 - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ ➔ $\int_0^t f(\tau)\, d\tau = 1 - e^{-\lambda t}$ ➔ $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$

подставляя в (2)

- Теперь соталось показать, что
параметр распределения λ - не что иное, как интенсивность потока.
Рассмотрим введённую в доказательстве функцию
$p(t) = 1 – F_T(t) = p_0(t)$ (вероятность, что в отрезке длины t не будет событий).
Тогда в силу ординарности
$1 - p(\Delta t) = p_{>1}(\Delta t) = p_1(\Delta t) + o(\Delta t)$, и
$M(\Delta t) = p_1(\Delta t) + o(\Delta t)$ - матожидание числа событий.
Поэтому введённая ранее величина
$\lambda = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta t)}{\Delta t}$ - равна интенсивности потока. ◄

ТЕОРЕМА
Случайная величина числа событий на отрезке длины h **в простейшем потоке** распределена по закону Пуассона с параметром λh: **$X(h) \in \Pi_{\lambda h}$**
Д-ВО

$P(X(h)=k) \equiv p_k(h) = P\{T_0+T_1+\ldots+T_{k-1} < h,\ T_0+T_1+\ldots+T_k > h\} =$

| Рассмотрим $T^{(n)} = T_0+\ldots+ T_n$ - сумма n независимых случайных величин с показательным распределением с параметром λ. Мы знаем, что $T^{(n)}$ имеет распределение $\Gamma_{\lambda,n}$ (Следствие из теоремы о свёртке.)
Обозначим $A^h_n \equiv \{T^{(n)} < h\} \subset A^h_{n-1}$. Тогда $P(A^h_n) = \Gamma_{\lambda,n}(h)$. |

$= P(A^h_{k-1}(\Omega \backslash A^h_k)) = P(A^h_{k-1} \backslash A^h_k) = P(A^h_{k-1}) – P(A^h_k) =$

$$= \int \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)=(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\, dt \;-\; \underbrace{\int \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\, t^{k} e^{-\lambda t}\, dt}_{(*)} \;=$$

интегрируем по частям, такие замены:

$$u = t^{n-1}/(n-1)! \qquad dv = \lambda^n e^{-\lambda t}\, dt\,,$$

$$du = t^{n-2}/(n-2)! \qquad v = -\lambda^{n-1} e^{-\lambda t}$$

$$= -\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-\lambda t}\Big|_0^h + \int \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\, t^{k-2} e^{-\lambda t}\, dt \;-\; (*) \;=$$

$$= \int \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h} \;-\; \left(\int \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \sum_{n=1}^{k} \frac{(\lambda h)^n}{n!} e^{-\lambda h} \right) \;=\; \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} \qquad \blacksquare$$

Замечание. Матожидание числа событий на интервале $(t,t+h)$ в потоке заданной интенсивности равно

$$EX(t,h) = \int_t^{t+h} \lambda(t)\,dt$$

Опр ***Потоком Пуассона*** называется ординарный поток без последействия.

Простейший поток является частным случаем пуассоновского, а именно когда характеристика интенсивности постоянна $\lambda(t) = \lambda$.

ТЕОРЕМА (о преобразовании временной оси простейшего потока Пуассона). Пусть поток Пуассона $\{\Theta_1,\Theta_2,\ldots\}$ имеет интенсивность $\lambda(t)$. Тогда подействуем на него преобразованием

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\,,$$

которое переводит произвольно взятый интервал (a,b) временной оси в

$$(\Lambda(a), \Lambda(b)) \equiv (\Lambda(a), \Lambda(a) + \Lambda(a,b-a))\,, \text{ где } \Lambda(a,b-a) \equiv \int_a^b \lambda(t)\,dt\,.$$

Полученный поток событий $\{\Lambda(\Theta_1), \Lambda(\Theta_2),\ldots\}$ будет простейшим с единичной интенсивностью.

Д-ВО

Рассмотрим произвольный пуассоновский поток.
Заметим, что при «искажении времени» под действием Λ для любого ω (эл.исх.)

- $\Lambda(\Theta_{n+1}(\omega)) - \Lambda(\Theta_n(\omega)=t_\omega) = \int_{\Theta n = t_\omega}^{\Theta n+1(\omega)} \lambda(t)\, dt$
- Также заметим, что Λ(x) – монотонно возрастает, если всюду кроме счётного числа точек λ(t)>0. Но если бы было λ(t) = 0 на некотором интервале, то это бы означало наличие последействия. (Почему?) Поэтому λ(t) >0 почти всюду, и в силу этого существует $\Lambda^{-1}(x)$, и
- $\Theta_{n+1}(\omega) - \Theta_n(\omega) = \tau \iff \Lambda(\Theta_{n+1}(\omega)) - \Lambda(\Theta_n(\omega)) = \int_t^{t+\tau} \lambda(t)\, dt$ (1)
- $\Theta_n \in (a,b) \iff \Lambda(\Theta_n(\omega) \in (\Lambda(a), \Lambda(b)) = (\Lambda(a), \Lambda(a) + \Lambda(a,b-a))$, следовательно
  (2) $p_k(t,h) = p'_k(\Lambda(t), \Lambda(t,h))$ - вероятность в преобразованном потоке, из чего легко показать сохранение отсутствия последействия.
- Также $p_{>1}(t, \Delta t) = p'_{>1}(\Lambda(t), \Lambda(t, \Delta t))$ ➔ Для ординарности остаётся показать, что для любого t $o(\Delta t) = o(\Lambda(t, \Delta t))$
  $\Lambda(t, \Delta t) = \int_t^{\Delta t} \lambda(t)\, dt$ ➔ $\Delta t \min \lambda(t) = c_1 \Delta t \le \Lambda(t, \Delta t) \le c_2 \Delta t = \Delta t \max \lambda(t)$,
  ➔ $o(c_1 \Delta t) \le o(\Lambda(t, \Delta t)) \le o(c_2 \Delta t) = o(\Delta t)$. Заметим, что эти рассуждения работают и в обратную сторону, т.е. $\Lambda^{-1}(t)$ тоже сохраняет эти свойства.

- Теперь рассмотрим простейший поток с интенсивностью 1. Для произвольно выбранного интервала между двумя соседними событиями T(t)
- $P(T(t) \ge h) = P(T \ge h) = 1 - F_T = e^{-h}$
- $P(T(t) \ge \Lambda(t,h)) = e^{-\Lambda(t,h)}$
  В силу (1) это равносильно
- $P(\Lambda^{-1}(T(t)) \ge h) = e^{-\Lambda(t,h)}$ - вероятность для соответствующего интервала в пуассоновском потоке, полученном преобразованием времени $\Lambda^{-1}(t)$.

- В силу (2) в новом потоке
  $p'_1(\Lambda^{-1}(t), \Delta t) = p_1(t, \Lambda(t, \Delta t)) \approx 1 \cdot \Lambda(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda(\tau)d\tau$ - в старом потоке.
- Поэтому интенсивность нового потока
- $$\lambda'(\Lambda^{-1}(t)) = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p'_1(\Lambda^{-1}(t), \Delta t)}{\Delta t}}_{\text{ординарность}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \lambda(\tau)d\tau}{\Delta t} = \lambda(t)$$

  И преобразованием $\Lambda(t)$ получим из этого пуассоновского потока исходный простейший поток с единичной интенсивностью ■

СЛЕДСТВИЕ 1 В пуассоновсом потоке

$$p_0(t,h) = e^{-a(t,h)}$$

- **СЛЕДСТВИЕ 2**

Число событий на интервале времени в потоке Пуассона имеет распределение Пуассона с параметром a(t.h) (≡ EX(t,h))

$$P(\ X(t,h)=k) = \frac{(a(t,h))^k}{k!}\ e^{-a(t,h)}$$

ТЕОРЕМА

Сумма (наложение) n пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)$ будет пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t) = \Sigma\ \lambda_i(t)$.

Д-ВО: Достаточно доказать для n = 2 . (Отсутствие послед-я - элементарно)

Покажем ординарность суммы: $p^{\Sigma}{}_k\,(t,\Delta t) = p^1{}_k(t,\Delta t)\ p^2{}_0(t,\Delta t) + p^1{}_{k-1}(\Delta t)\ p^2{}_1(\Delta t) +$
$+\ p^1{}_0(\Delta t)\ p^2{}_k(\Delta t) \ = \ Q_k\,(\Delta t)\ R_0(\Delta t) + Q_{k-1}\,(\Delta t)\ R_1(\Delta t) + \ldots + Q_0\,(\Delta t)\ R_k(\Delta t)$, где
R_i и Q_i - полиномы с младшей степенью i, полученные при разложении в ряд Тейлора $p^1{}_i$ и $p^2{}_i$. В любом слагаемом наименьшая степень k и коэффициент при ней имеет вид
$\lambda_1{}^i(t)\ \lambda_2{}^{k-i}(t)\ /\ i!(k-i)!$ Следовательно: $p_{>1} = O(\Delta t^2) = o(\Delta t)$ ■

- **ТЕОРЕМА (p-преобразование**, оно же - **расщепление** простейшего потока**)**
- В простейшем потоке интенсивности λ последовательно проделаем следующее: каждому событию с вероятностью p будем присваивать цифру 1 (как новый индекс). Всем неизменённым данной операцией событиям присвоим цифру 2. Из событий с цифрой 1 составим новый поток событий, а из событий с цифрой 2 другой поток событий. Утверждается, что таким образом поток разбивается на два независимых простейших потока с интенсивностями pλ и (1-p)λ.
- **УТВЕРЖДЕНИЕ**
  Если в простейшем потоке известно, что за время (0,t] произошло ровно n событий-точек (это событие A вероятностного пр-ва), то моменты наступления этих событий $\Theta_1(\omega \epsilon A)$, $\Theta_2(\omega)$, … $\Theta_n(\omega)$ соответсвуют статистической выборке равномерного распределения Uo,t. Проще говоря, условное распределение
- $F_{\Theta i \mid N(t) = n} = U_{0,t.}$ для каждого $1 \le i \le n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ
Рассмотрим два простейших потока с интенсивностями λ_1 и λ_2 соответственно. Вероятность, что n событий первого потока наступит раньше m событий второго потока равна

$$P(\Theta^{(1)}_n < \Theta^{(2)}_m) = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_k^{n+m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

- **Опеделение.**
- Ординарный поток событий называется *потоком с ограниченным последствием*, если интервалы времени T_n между последовательными событиями (см.рис.) представляют собой независимые случайные величины. Если эти случайные величины одинаково распределены, то такой поток называется ***потоком Пальма***, или ***рекуррентным*** *потоком*. В связи с одинаковостью распределений T поток Пальма всегда стационарен.
- Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нём интервалы между событиями распределены по показательному закону E_λ,где λ—интенсивность потока.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.
Поток Пальма стационарен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.
- Поток Пальма ординарен.

- **ТЕОРЕМА.** (**выражение интенсивности в рекуррентном потоке (Пальма)**)
- В потоке Пальма $\lambda = 1/ET$.

СЛЕДСТВИЕ То же верно для интенсивности простейшего потока.

- **Д-ВО** теоремы основано на законе больших чисел:

- Действительно, давайте рассмотрим предел отношения отрезка времени к числу событий в потоке, произошедших за этот отрезок:

$$\lim_{T \to \infty} T/n(T) = \lim_{n \to \infty} \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n} = ET$$

- С другой стороны, если домножить всё на интенсивность λ, то
- $\lim_{T \to \infty} \lambda T / n = \lim_{T \to \infty} EX / n = \lambda ET$

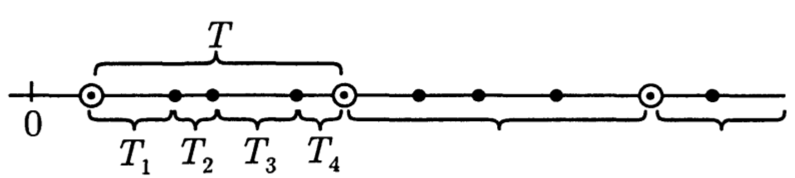
➔ $1 = \lambda ET$ (опять применяем ЗБЧ, попробуйте догадаться как)

■

- **Опр.**
- *Потоком Эрланга k-го порядка* называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.
  (На рис. показано по лучение потока Эрланга 4-гопорядка из простейшего потока).
  Интервал времени T между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2 ,... ,$T_к$, имеющих показательное распределение с параметром λ – интенсивность простейшего потока.
- Из этого следует, что поток Эрланга является пальмовским потоком и стационарен.

- Найдём **плотность закона распределения T** ≡ $T^{(k)}$ **для потока Эрланга** k-го порядка. Для этого рассмотрим простейший поток с интенсивностью λ и найдём элемент вероятности
- $f_{T(k)}(t)dt = P((T^{(k)} = \Sigma T_i) \in (t, t+dt))$
- Событие в скобках произойдёт, когда на интервал от [0,t] попадёт k-1 точка (событие) и на интервал (t, t+dt) - k-я точка. Поэтому, и в виду отсутствия последействия
- $f_{T(k)}(t)dt = p_{k-1}(t)\, p_1(dt) = \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt$

➔ $f_{T(k)}(t) = \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$ (t>0) .



- Так как интервал $T^{(k)}$ между соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка, полученном из простейшего интенсивности λ с интервалами T_i равен
- $T^{(k)} = \Sigma T_i$ ➔ $ET^{(k)} = kET_i = k / \lambda$ ➔
- Интенсивность потока Эрланга k-го порядка
- $\lambda^{(k)} = 1/ET^{(k)} = \lambda / k \rightarrow 0$ (при $k \rightarrow \infty$)
-

  Теперь заметим, что если произвести «операцию увеличения масштаба в k раз» потока, то есть сопоставить каждой реализации потока {Θ1(ω), Θ2(ω), …} бесконечномерный вектор {Θ1(ω) = Θ1(ω)/k , Θ2(ω) = Θ2(ω)/k , … }, то также пропорционально уменьшатся интервалы $T^{(k)}$, и
- $E\tilde{T}^{(k)} = ET^{(k)}/ k = 1/\lambda$.

  Назовём такой поток *нормированным потоком Эрланга k-го порядка*.
- $$\tilde{f}_{\tilde{T}(k)}(t) = \frac{\lambda k(\lambda kt)^{k-1}e^{-\lambda kt}}{(k-1)!}$$
- и дисперсия $\tilde{T}^{(k)}$ равна $D\tilde{T}^{(k)} = 1 / k\lambda^2$

  $(= DT^{(k)} / k^2 = \Sigma DT_i / k^2 = (k / \lambda^2) /k^2 = 1 / k\lambda^2)$
- В виду того, что $D\tilde{T}^{(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, длины интервалов стремятся к постоянному значению $\tilde{T}^{(k)} \rightarrow C = ET = 1/\lambda$.
  Это свойство потоков Эрланга удобно в практических применениях: оно даёт возможность, задавая различные k, получать потоки с разной степенью последействия: от полного отсутствия при k = 1, до жесткой функциональной зависимости между моментами появления событий (k = ∞)

- В целях упрощения часто бывает удобно приближенно заменить реальный пальмовский поток событий - потоком Эрланга с той же степенью последействия. Это делают, согласовывая характеристики реального потока – матожидание и дисперсию интервала между событиями - с теми же характеристиками заменяющего потока Эрланга.

Замечание

Потоки с ограниченным последействием также иногда называют *потоками восстановления*.

(Смысл этого термина раскрывает постановка задачи, когда событием на потоке является очередной отказ оборудования (системы) и замена его на новое с известной функцией распределения времени безотказной работы.)

- Далее решим несколько задачек, первые две из которых имеют для понимания курса особенно важное значение.

- **Задача (о футбольных командах).**
  Две футбольные команды A и B играют матч. Команда A забивает голы подобно простейшему потоку событий интенсивности $\lambda_A=2$, а команда B подобно простейшему потоку интенсивности $\lambda_B=3$. Какова вероятность того, что команда B забьёт гол первой в этом матче?

- **Решение (не является единственно возможным)**
- Введём события
  C_1 : «первый гол забивает команда B»,
- C_2 : «первый гол успеют забить за 90 минут».
- Очевидно, что условная вероятность $P(C_1|C_2)$ есть искомая вероятность.
- Здесь может возникнуть соблазн заменить C_2 на C_2' : «команда B успевает забить гол за 90 минут». Тогда $C_1C_2 = C_1C_2'$, но тогда будет совершенно другая условная вероятность.
- Заметим, что C_1 C_2 означает что «во втором потоке первое событие наступит раньше, чем в первом, и хотя бы в одном из потоков первое событие произойдёт в течение 90 минут».
-

  Знаем, что вероятность одного события на малом интервале Δt в простейшем потоке равна $p_1(t, \Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, т.е. приблизительно равна $p_1(t, \Delta t) \approx \lambda\Delta t$.
  Отсутствие события на том же интервале имеет вероятность $p_0(t, \Delta t) \approx 1-\lambda\Delta t$.
- А вероятность того, что событий не будет на заданном интервале $p_0(t, h) = e^{-\lambda h}$.

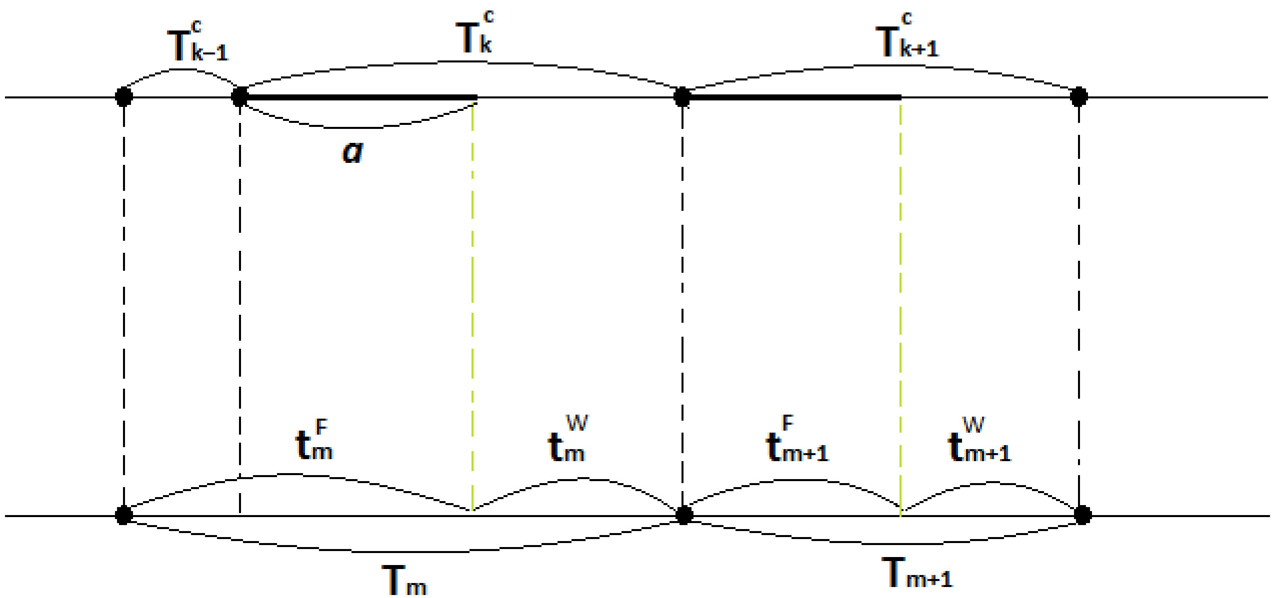
- Рассмотрим последовательность несовместных событий вида:
  { A_k: «вплоть до момента времени $k\Delta t$ никто не забил ни одного гола, а в интервале $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ гол забила команда B, а команда A так и не забила» }. Очевидно, что сумма (объединение) всех событий $\cup A_k$ при $\Delta t \to 0$ приближается по вероятности к событию C_1C_2, т.е. при переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ сумма становится интегралом и он равен вероятности $P(C_1C_2)$. По тому же принципу можно вычислить и $P(C_2)$ (вспомнить теорему о сумме простейших потоков).
-

$$P(C_1|C_2) = \frac{P(C_1C_2)}{P(C_2)} = \frac{\int_0^{90} e^{-\lambda_A t}(1-\lambda_A dt)\, e^{-\lambda_B t}\lambda_B dt}{\int_0^{90} e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}(\lambda_A+\lambda_B)dt} = \frac{\lambda_B}{(\lambda_A+\lambda_B)}$$

Заметим, что при раскрытии скобок членом с dt^2 пренебрегаем как малым слишком высокого порядка, который даст после суммирования величину порядка O(dt).

Задача (о пожарной станции).
На пожарную станцию поступают звонки с вызовами как простейший поток с интенсивностью $\lambda = ½$ за час. Каждый раз пожарной бригаде нужно определённое время, чтобы разобраться с вызовом и приготовиться к следующему. Приходящие в это время вызовы перенаправляются на другие станции. Длительности этих периодов работы распределены равномерно на интервале от получаса до часа и независимы. Найти какая часть от общей массы вызовов в длительной перспективе будет перенаправлена на другие пожарные станции.

Решение
Для наглядности удобно сделать следующий рисунок-схему



на которой сверху изображён простейший поток событий, где событиями являются все звонки-вызовы, адресованные на пожарную станцию, а снизу поток принятых вызовов, в котором интервалы между событиями состоят из времени борьбы с огнём и времени ожидания: $T = t^F + t^w$
Если учесть, что интервалы между вызовами в простейшем потоке распределены по экспоненциальному закону, то воспользовавшись свойством отсутствия памяти для экспоненциального распределения легко покажем, что промежутки времени ожидания t^w распределены по тому же экспоненциальному закону(поэтому нижний поток будет пальмовским!).

- Итак, свойство отсутствия памяти экспоненциального распределения (см. утверждение из Гл. 0) означает, что для любой случайной величины X, подчиняющейся этому закону:
  $P(X \geq a+b \mid X \geq a) = P(X \geq b)$
  Тогда, пользуясь экспоненциальностью интервалов между событиями в потоке всех звонков имеем:

  $P(T^c \geq a+b \mid T^c \geq a) = P(T^c \geq b) \iff P[(T^c - a) = t^w \geq b \mid (T^c - a) = t^w \geq 0] =$
- в силу неотрицательности времени ожидания
  $= P(t^w \geq b) = P(T^c \geq b)$
- С другой стороны, это равносильно равенству функций распределения t^w и T^c

- После этого легко видеть, что поток принятых вызовов является пальмовским, из чего немедленно следует его стационарность, а в стационарном потоке ожидаемое число событий на интервале равно произведению длины интервала на интенсивность, и, поэтому долю принятых вызовов найдём как отношение интенсивностей двух потоков.
  А интенсивность потока принятых вызовов вычислим по известной нам формуле $\lambda^{\text{пр.выз.}} = 1/ET = 1/(Et^F + Et^w)$.

- Как далее станет ясно, в этой задаче мы имеем дело с примером самой настоящей системы массового обслуживания(и, кстати, не самым тривиальным)

Задача (#3)

Магазин работает с 10^{00} до 18^{00}. Посетители прибывают в магазин соответственно потоку Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$, равной нулю в момент открытия магазина, 4-ём (посетителям/час) в полдень, 6 в 14^{00}, 2 в 16^{00} и снова 0 в момент закрытия. Функция линейна всюду между этими моментами. Найти:

а) распределение для числа посетителей в данный день;

б) вероятность того, что до полудня не будет посетителей;

в) ожидаемые моменты прибытия первых двух посетителей, если дополнительно предполагается, что до полудня будут двое и только двое;

г) ожидаемое число покупок, если известно, что только каждый третий посетитель делает покупку.

Решение.

а) знаем, что число посетителей за 8 часов рабочего дня (обозначим его X) имеет распределение Пуассона с параметром $a(10,8) = \int \lambda(t)dt$

$$EX(10,8) = a(10,8) = \int_{10}^{18}\lambda(t)dt = \int_{10}^{12}\lambda(t)dt + \int_{12}^{14}\lambda(t)dt + \int_{14}^{16}\lambda(t)dt + \int_{16}^{18}\lambda(t)dt =$$

$$\tfrac{1}{2}(\lambda(10)+\lambda(12))(12-10) + \tfrac{1}{2}(\lambda(12)+\lambda(14))(14-12) + \ldots + \tfrac{1}{2}(\lambda(16)+\lambda(18))(18-16) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ ((0+4)*2 + (4+6)*2 + (6+2)*2 + (2+0)*2\ ) = \tfrac{1}{2}(\ 8 + 20 + 16 + 4\ ) = 24$$

$\Rightarrow$ $X \in \Pi_{24}$

б) $p_0(10, 2) = e^{-a(10,12)} = e^{-4} \approx 0{,}018$

$a(10,2) = \int \lambda(t)dt =$ { знаем, что $\lambda(t)$ линейна на этом интервале } $= \int (2t-20)dt = -4$

$\begin{cases} 10a+b = 0 \\ 12a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -20 \end{array}$

в) чтобы найти матожидание момента прибытия второго посетителя Θ_2, найдём функцию распределения и плотность для Θ_2 (при условии, что $N(12)=2$)

Так как $P(\Theta_2 < y) = P(N(y) \geq 2)$

$$F_{\Theta 2 \mid N(12)=2}(y) = P(N(y) \geq 2 \mid N(12)=2) = \frac{P(N(y) \geq 2,\ N(12)=2)}{P(N(12)=2)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=2,\ (2-i)\geq 0}^{\infty} P(N(y) = i,\ X(y,12-y) = 2-i)}{P(N(12)=2)} = \frac{P(N(y) = 2,\ X(y,12-y) = 0)}{P(N(12)=2)} = \frac{P(N(y)=2)P(X(y,12-y) = 0)}{P(N(12)=2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{(a(10,y-10) = \int\lambda(t)dt)^2}{2!} \cdot e^{-a(10,y-10)} \cdot e^{-a(y,12-y)}}{e^{-a(10,2)} \cdot (a(10,2))^2 / 2!} = \frac{\left.\dfrac{t^2-20t}{2}\right|_{t=10}^{t=y} \cdot e^{-a(10,2)}}{4^2/2! \cdot e^{-a(10,2)}} =$$

$$= \frac{(y^2 - 20y - 100 + 200)^2}{16} = \frac{(y-10)^4}{16}$$

$$F_{\Theta 2 - 10 \mid N(12)=2}(y) = \frac{y^4}{16} \qquad f_{\Theta 2 - 10 \mid N(12)=2}(y) = \frac{y^3}{4}$$

$$E(\Theta_2 - 10 \mid N(12)=2) = \int t \cdot t^3/4\, dt = \left. t^5/20 \right|_{t=0}^{t=2} = \frac{8}{5} \Rightarrow E(\Theta_2 \mid N(12)=2) = 10+8/5 = 11{:}36$$

$$F_{\Theta 1 \mid N(12)=2}(y) = P(N(y) \geq 1 \mid N(12)=2) =$$

$$= \frac{P(N(y)=1,\ N(12)-N(y)=1) + P(N(y)=2,\ N(12)-N(y)=0)}{P(N(12)=2)} = \frac{(y-10)^2}{2} - \frac{(y-10)^4}{16}$$

•

$\Rightarrow$ $F_{\Theta 1-10 \mid N(12)=2}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{16}$ $\qquad f_{\Theta 1-10 \mid N(12)=2}(t) = t - \frac{t^3}{4}$

$E(\Theta_1 - 10 \mid N(12)=2) = 1\ 1/15$ $\Rightarrow$ $E(\Theta_1 \mid N(12)=2) = 11{:}04$

г) самостоятельно

- **Утверждение**
  Пусть дан поток Пуассона **P** с интенсивностью $\lambda(t)$, тогда **P** $\cap$ $(T,+\infty)$ поток Пуассона с интенсивностью $\lambda^{|}(t) = \lambda(t+T)$.

- **Задача (#4)**.
  Интенсивность пуассоновского потока
- $\lambda(t) = 1/1+t$.
  Найти распределения первых двух интервалов T_0 и T_1.

Решение.

$$1 - F_{T0}(y) = P(T_0 \geq y) = P(T_0 > y) = P(N(y)=0) = e^{-\int_0^y \frac{1}{1+u} du} = \left(v'(t) = \frac{-v(t)}{1+t} \right) = \frac{1}{1+y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f_{T1}(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$. Тогда, учитывая утверждение на прошлой странице

$$1 - F_{T1 \mid T0}(y) = P(T_1 \geq y \mid T_0) = P(T_1 > y \mid T_0) = P(X(T_0,y)=0) = \exp\left(-\int_{T_0}^{T_0+y} \frac{dt}{1+t}\right) = \frac{1+T_0}{1+T_0+y}$$

$$\ln \frac{1+T_0+y}{1+T_0}$$

Находим безусловную вероятность:

$$F_{T1}(y) = \int_0^y \int_0^\infty f_{T1 \mid T0}(s \mid t)\, f_{T0}(t)\, dt\, ds = \int_0^\infty \int_0^y f_{T1 \mid T0}(s \mid t)\, f_{T0}(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{1+t}{1+t+y}\right) f_{T0}(t)\, dt = 1 - \int_0^\infty \frac{1+t}{1+t+y} f_{T0}(t)\, dt = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)(1+t+y)}\, dt = 1 - \frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$\Rightarrow f_{T1}(t) = \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2(1+t)}$$

Матожидание - ?

$$P(T_1 < 2) = \int_0^2 f_{T1}(t)\, dt \approx 0{,}45$$