Студент: Имя Фамилия
Группа:
Дата: 1 апреля 2021 г.

---

1. (a) $\{\omega \in \{a, b\}^* | |\omega|_a \geq |\omega|_b\}$

   Допустим, что язык регулярный и в нём выполняется лемма о накачке. Рассмотрим слово $a^n b^n$. По лемме о накачке его можно разбить как xyz, $|xy| \leq n \land |y| \geq 1$. Тогда y - это какое-то число $i \geq 1$ букв a. Слово $xy^0z = a^{n-i}b^n$ в язык не попадает. Получили противоречие с леммой о накачке, значит язык не регулярный.

   (b) $\{\omega \in \{a, b\}^* | |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

   Этот язык является дополнением к языку $L' = \{\omega \in \{a, b\}^* | |\omega|_a = |\omega|_b\}$

   Допустим, что L' регулярный. Рассуждение выше работает и для этого языка, поэтому L' не является регулярным. А значит исходный язык тоже нерегулярен.

   (c) $\{\alpha \cdot a \cdot \beta | \alpha, \beta \in \{a, b\}^*, |\alpha|_b > |\beta|_a\}$

   Это регулярный язык: каждое слово можно представить так, что его β часть содержит только буквы b. Поэтому этот язык можно задать следующей регуляркой: $a^*b(a|b)^*ab^*$ - в часть α входит хотя бы одна буква b, а в часть β не входит ни одной буквы a.

   (d) $\{\omega \cdot a^m | 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$

   Допустим, что язык регулярный и в нём выполняется лемма о накачке. Рассмотрим слово $b^n a^n$. Разложим его на xyz из леммы о накачке. Тогда y - какое-то число букв b. Рассмотрим слово $xy^2z = b^{n-i}b^{2i}a^n$. В нём букв b больше, чем букв a, поэтому это слово никак не может подходить нашему языку. Следовательно, этот язык не регулярен.

2. (a) $(a|b)^*(a(a|b)^*a|b(a|b)^*b)$ Тут не понял, как упростить. Вроде язык из слов: "если буква a на конце, то где-то в слове есть ещё одна буква a"или "если буква b на конце, то где-то в слове есть ещё одна буква b"особо проще не написать.

   (b) $L = \epsilon | a(a|ba)^*(\epsilon|b) = (a|ab)^* = R$

   Доказательство: Рассмотрим слово $w \in L$

      i. $w = \epsilon \to w = (a|ab)^*$

      ii. $w = a(a|ba)^*(\epsilon|b) \to (a|ab)^*$ Рассмотрим самую левую букву b. Перед ней $k_1 \geq 1$ букв a Весь этот участок выглядит как $a^{k_1-1}ab$, что можно описать как $(a|ab)^*$. Если есть еще буквы b, то участки перед ними можно так же разобрать. Если остались буквы a без буквы b, то они тоже разбираются регулярным выражением для R.

   Теперь рассмотрим $w \in R$. После каждой буквы b (кроме может быть последней) есть буква a, и первая буква слова - буква a. Значит слово из R можно разобрать регуляркой для L.

   (c) $L = \epsilon | ee^* | ff^* = (e^* | f^*) = R$

   Докательство: Пусть $w \in L$, тогда возможно 3 варианта:

      i. $w = \epsilon \to w = e^*$

      ii. $w = ee^* \to w = e^*$

      iii. $w = ff^* \to w = f^*$

   Значит, все слова из L являются словами в R.

   Теперь пусть $w \in R$.

      i. $w = f^* \land w = \epsilon \to w = \epsilon$

      ii. $w = f^* \land w \neq \epsilon \to w = ff^*$

iii. $w = e^* \wedge w = \epsilon \to w = \epsilon$

iv. $w = e^* \wedge w \neq \epsilon \to w = ee^*$

Все слова из R являются словами в L.