1

2)

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq |w|_b\}$

$xyz = a^n b^n$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0 \Rightarrow x = a^m$, $m < n \Rightarrow xz = a^m b^n \notin L \Rightarrow$ по лемме о накачке язык нерегулярный.

4)

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

Рассмотрим язык $\overline{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.

$xyz = a^n b^n \in \overline{L}$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0 \Rightarrow x = a^m$, $m < n \Rightarrow xz = a^m b^n \notin \overline{L} \Rightarrow$ по лемме о накачке язык $\overline{L}$ нерегулярный $\Rightarrow$ язык L тоже нерегулярный.

6)

$L = \{\alpha \cdot a \cdot \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*, |\alpha|_b > |\beta|_a\} = (a|b)^* b (a|b)^* a b^* = R$

- $L \subset R$

  Рассмотрим $\alpha \cdot a \cdot \beta \in L$. Заметим, что $|\alpha|_b > |\beta|_a \geq 0 \Rightarrow |\alpha|_b \geq 1 \Rightarrow \alpha \in (a|b)^* b (a|b)^*$.

  - $\beta \in b^* \Rightarrow \alpha \cdot a \cdot \beta \in R$
  - $a \in \beta \Rightarrow \beta \in (a|b)^* a b^* \Rightarrow \alpha \cdot a \cdot \beta \in \alpha \cdot a \cdot (a|b)^* \cdot a \cdot b^* \Rightarrow$ обозначим $\alpha' = \alpha \cdot a \cdot (a|b)^* = (a|b)^* b (a|b)^* \cdot a \cdot (a|b)^* = (a|b)^* b (a|b)^*$, $\beta' = b^* \Rightarrow \alpha' \cdot a \cdot \beta' \in R$

- $R \subset L$

  Рассмотрим произвольное слово w из языка R: $w = \gamma \cdot b \cdot \delta \cdot a \cdot \beta$, где $\gamma, \delta \in (a|b)^*$, $\beta \in b^*$. Обозначим $\alpha = \gamma \cdot b \cdot \delta$, тогда $|\alpha|_b \geq 1 > 0 = |\beta|_a$, значит, $w \in L$.

Следовательно, язык регулярный.

8)

$L = \{w \cdot a^m \mid 1 \leq |w|_b \leq m\}$

$xyz = b^n a^n \in L$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0 \Rightarrow x = b^k$, $y = b^l$, $l > 0$, $k + l = n \Rightarrow k + 2l > n \Rightarrow xy^2z = b^{k+2l} a^n \notin L \Rightarrow$ по лемме о накачке язык нерегулярный.

2

1) $(a|b)^* \ (a \ (a|b)^* \ a \mid b \ (a|b)^* \ b) = (a|b)^* \ (ab^*a \mid ba^*b)$

   $(\subset)$ $w = \alpha a \beta a$, $\alpha, \beta \in (a|b)^* \Rightarrow$ выделим самую правую a из $a\beta$: $a\beta \in (a|b)^* a b^* \Rightarrow w \in \alpha (a|b)^* a b^* a = (a|b)^* a b^* a$. Аналогично при $w = \alpha b \beta b$ получаем $(a|b)^* b a^* b$.

   $(\supset)$ Очевидно.

2) $\epsilon \mid a \ (a \mid ba)^* \ (\epsilon \mid b) = (a \mid ab)^*$

   Слова данного языка — это ϵ и все слова, начинающиеся с a, в которых нет двух b подряд. Упрощённое регулярное выражение описывает то же множество слов.

3) $\epsilon \mid e \ e^* \mid f \ f^* = e^* \mid f^*$

   $(\subset)$ $\epsilon \in e^*$, $ee^* \in e^*$, $ff^* \in f^*$

   $(\supset)$ $w \in e^* \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} w = \epsilon & \Rightarrow \mathsf{ok} \\ w = ee^* & \Rightarrow \mathsf{ok} \end{array} \right.$, $w \in f^*$ — аналогично.