Теория автоматов и формальных языков

Контекстно-свободные языки

Лектор: Екатерина Вербицкая

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

9 ноября 2021

В предыдущей серии

- Регулярные выражения, регулярные грамматики и конечные автоматы задают класс регулярных языков
- Класс регулярных языков замкнут относительно теоретико-множественных операций, конкатенации, итерации, гомоморфизма цепочек
- Определение принадлежности слова языку осуществляется за $O(n)$ операций
- Однако класс регулярных языков достаточно узок, ни один используемый в промышленности язык программирования не является регулярным
  - Лемма о накачке для доказательства нерегулярности языка
  - Язык правильных скобочных последовательностей, язык палиндромов не являются регулярными

Контекстно-свободная грамматика

Четверка $\langle V_T, V_N, P, S \rangle$

- V_T — алфавит терминальных символов (терминалов)
- V_N — алфавит нетерминальных символов (нетерминалов)
  - $V_T \cap V_N = \varnothing$
  - $V ::= V_T \cup V_N$
- P — конечное множество правил вида $A \to \alpha$
  - $A \in V_N$
  - $\alpha \in V^*$
- S — начальный нетерминал грамматики, $S \in V_N$

Пример: арифметические выражения

$$E \to E + E \mid E * E \mid N$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$$

Вывод в грамматике

- **Отношение выводимости**:
  $\forall \alpha, \gamma, \delta \in V^*, A \in V_N : A \to \alpha \in P : \gamma A \delta \Rightarrow \gamma \alpha \delta$
- **Вывод** — транизитивное, рефлексивное замыкание отношения выводимости ($\overset{*}{\Rightarrow}, \overset{+}{\Rightarrow}, \overset{k}{\Rightarrow}$)
- **Левосторонний (правосторонний) вывод** — на каждом шаге заменяем самый левый (правый) нетерминал
  - Если не специфицируется, подразумевается левосторонний вывод
- По сути, правила грамматики рассматриваются как правила переписывания

Пример вывода

Построим левосторонний вывод цепочки $2 + 3 * 4$ в грамматике

$$\langle\{0, 1, \ldots, 9, +, *\}, \{E, N\}, P, E\rangle$$

$$\begin{aligned} E &\to E + N \mid E * N \mid N \\ N &\to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9 \end{aligned}$$

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} * N \Rightarrow \underline{E} + N * N \Rightarrow \underline{N} + N * N \Rightarrow 2 + N * N \overset{2}{\Rightarrow} 2 + 3 * 4$$

Существование левостороннего вывода

Теорема

Если для цепочки ω существует некоторый вывод $S \overset{*}{\Rightarrow} \omega$,
то существует и левосторонний вывод для этой цепочки $S \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$

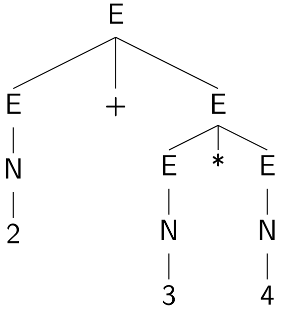
Доказательство.

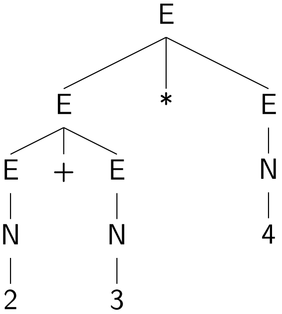
Докажем более общее утверждение:
если существует $A \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, то существует $A \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$, где $A \in V_N$.
Доказываем по индукции по длине вывода k
$k = 1 : A \Rightarrow \omega$ — тривиально.
$k \mapsto k + 1 : \lessdot A \Rightarrow \alpha \overset{*}{\Rightarrow} \omega$.
Обозначим $\alpha = B_1 B_2 \dots B_m \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m = \omega; \forall i : B_i \overset{l_i}{\Rightarrow} \omega_i, l_i \leq k$
По индукционному предположению $\forall i : B_i \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega_i$
$\Rrightarrow: A \Rightarrow B_1 B_2 \dots B_m \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega_1 B_2 \dots B_m \underset{l}{\overset{*}{\Rightarrow}} \omega$ — левосторонний вывод □

Единственность вывода

Не всегда (левосторонний) вывод единственен:
2 вывода строки $2 + 3 * 4$

$$E \to E + E \mid E * E \mid N$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$$





Однозначность грамматики

- Грамматика называется **однозначной**, если для *любого* слова языка существует *единственный* (левосторонний) вывод
- Грамматика называется **неоднозначной**, если *существует* слово языка, такое что для него *существует несколько* (левосторонних) выводов

Однозначность грамматики

- Грамматика называется **однозначной**, если для *любого* слова языка существует *единственный* (левосторонний) вывод
- Грамматика называется **неоднозначной**, если *существует* слово языка, такое что для него *существует несколько* (левосторонних) выводов
- По однозначной грамматике можно тривиальным образом построить неоднозначную: продублировать правило

$$
\begin{aligned}
S &\to A \\
A &\to a
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S &\to A \mid B \\
A &\to a \\
B &\to a
\end{aligned}
$$

- Не существует общего алгоритма преобразования неоднозначной грамматики в однозначную

Примеры однозначной и неоднозначной грамматики

Неоднозначная грамматика

$$E \to E + E \mid E * E \mid N$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$$

Однозначная грамматика

$$E \to E + N \mid E * N \mid N$$
$$N \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$$

Проверка однозначности грамматики неразрешима

Теорема

Не существует алгоритма, определяющего по произвольной грамматике, что она является неоднозначной

Доказательство.

Сведение решения проблемы соответствий Поста к нашей задаче □

Проблема соответствий Поста

Даны списки $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$, где $\forall i : a_i, b_i \in \Sigma^*$.
Существует ли непустая последовательность $(i_1, \ldots, i_k)$, удовлетворяющая условию $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = b_{i_1} \ldots b_{i_k}$, где $\forall j : 1 \leq i_j \leq n$?

Проверка однозначности грамматики неразрешима

Теорема

Не существует алгоритма, определяющего по произвольной грамматике, что она является неоднозначной

Доказательство.

$\lhd$ алфавит $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\} \sqcup \{z_1, \dots, z_n\}$, где a_i, b_i из ПСП

$\lhd$ грамматику:

$$S \to A \mid B$$
$$A \to a_i A z_i \mid \varepsilon$$
$$B \to b_i B z_i \mid \varepsilon$$

Если грамматика неоднозначна, то существует выводимое слово вида:

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} z_{i_k} z_{i_{k-1}} \dots z_{i_1} = \omega = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k} z_{i_k} z_{i_{k-1}} \dots z_{i_1}$$

Если бы умели решать ПСП, то мы могли бы проверить грамматику на однозначность, но ПСП неразрешима, а значит и проверка на однозначность неразрешима $\square$

Контекстно-свободный язык

- Язык называется **контекстно-свободным**, если для него *существует* контекстно-свободная грамматика
- Язык, задаваемый КС грамматикой $\langle V_T, V_N, P, S\rangle$: $\{\omega \in V_T^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} \omega\}$
- КС язык называется **существенно неоднозначным**, если для него не существует однозначной грамматики
  - $\{0^a 1^b 2^c \mid a = b \text{ либо } b = c\}$ доказательство в книге Ахо Ульмана

Пустота КС языка

Теорема

Существует алгоритм, определяющий, является ли язык, порождаемый КС грамматикой, пустым

Доказательство.

Для доказательства потребуется следующая лемма $\square$

Лемма

Теорема

Если в данной грамматике выводится некоторая цепочка, то существует цепочка, дерево вывода которой не содержит ветвей длиннее m, где m — количество нетерминалов грамматики

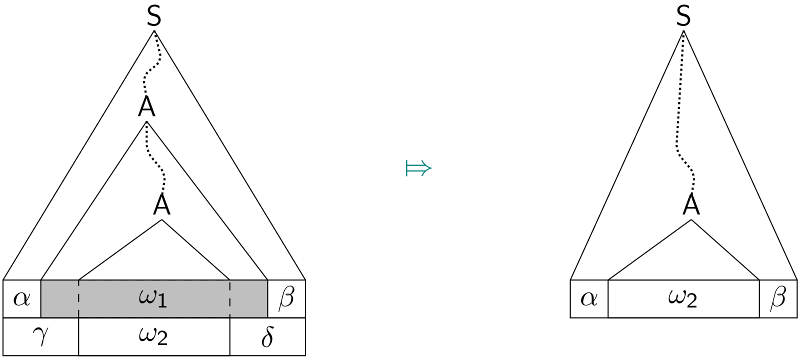
Доказательство.

Рассмотрим дерево вывода цепочки ω. Если в нем есть 2 узла, соответствующих одному нетерминалу A, обозначим их n_1 и n_2. Предположим, n_1 расположен ближе к корню дерева, чем n_2; $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha A_{n_1} \beta \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha \omega_1 \beta; S \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma A_{n_2} \delta \stackrel{*}{\Rightarrow} \gamma \omega_2 \delta$; ω_2 является подцепочкой ω_1. Заменим в изначальном дереве узел n_1 на n_2. Полученное дерево является деревом вывода $\alpha \omega_2 \beta$. Повторяем процесс замены одинаковых нетерминалов до тех пор, пока в дереве не останутся только уникальные нетерминалы.
В полученном дереве не может быть ветвей длины большей, чем m. По постороению оно является деревом вывода. □

Лемма

Теорема

Если в данной грамматике выводится некоторая цепочка, то существует цепочка, дерево вывода которой не содержит ветвей длиннее m, где m — количество нетерминалов грамматики



Алгоритм проверки пустоты КС языка

Доказательство.

Строим коллекцию деревьев, представляющих вывод в грамматике.

1. Инициализируем коллекцию деревом из одного узла S
2. Добавляем в коллекцию дерево, полученное применением единственного правила грамматики из какого-нибудь дерева из коллекции, если его в нем еще нет, и самая длинная ветвь не длиннее m
3. Если после окончания построения коллекции в ней существует дерево, являющееся деревом вывода некоторой цепочки терминалов, значит, язык не пуст

□

Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Продуктивный нетерминал: нетерминал, для которого существует цепочка терминалов, выводимая из него ($\exists \omega \in V_T^* : A \overset{*}{\Rightarrow} \omega$)

Непродуктивный нетерминал: нетерминал, не являющийся продуктивным

Упрощение КС грамматики: удаление непродуктивных нетерминалов

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_T, V_N, P, S\rangle : L(G) \neq \varnothing$ *можно построить эквивалентную грамматику, каждый нетерминал которой продуктивен*

Доказательство.

Удаляем из грамматики все нетерминалы $A : L(A) = \varnothing$, а также правила, использующие их.
Полученную грамматику обозначаем G_1.
Докажем, что $L(G) = L(G_1)$.
Очевидно, $L(G_1) \subseteq L(G)$.
Докажем от противного, что $L(G) \subseteq L(G_1)$.
Предположим, что $\exists \omega \in L(G)$, но $\omega \notin L(G_1)$. Тогда $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_2 \overset{*}{\Rightarrow} \omega$, где $A \in V_N \setminus V_{N_1}$, но тогда $\exists \gamma \in V_T^* : A \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$. Противоречие $\square$

Упрощение КС грамматики: приведение

Теорема

Для любой КС грамматики, порождающей непустой язык, можно посторонить эквивалентную, для каждого нетерминала A которой существует вывод вида $S \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Доказательство.

Будем рассматривать грамматику без непродуктивных нетерминалов $G_1 = \langle V_{N_1}, V_T, P_1, S \rangle$.

Верно: если существует $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_3, \alpha_i \in V^*$, то

$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha_1 A \alpha_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

Строим множество нетерминалов, встречающихся в выводах: добавляем сначала S, потом добавляем нетерминалы, встречающиеся в правой части правил для нетерминалов из множества. Завершаем процесс, когда больше ничего не добавить. Обозначаем полученное множество V_{N_2}, удаляем все правила грамматики, содержащие нетерминалы из $V_{N_1} \setminus V_{N_2}$

Упрощение КС грамматики: приведение

Доказательство.

Получили грамматику $G_2 = \langle V_{N_2}, V_T, P_2, S \rangle$.
Докажем: $L(G_2) = L(G_1)$
$L(G_2) \subseteq L(G_1)$, так как $P_2 \subseteq P_1$
Докажем: $L(G_1) \subseteq L(G_2)$. Пусть $S \overset{*}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} \omega$. Все нетерминалы, встречающиеся в этом выводе содержатся в V_{N_2}, соответственно используются только правила из $P_2 \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} \omega$
Так как все нетерминалы V_{N_2} продуктивны, то
$S \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 A \omega_3 \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \omega_i \in V_T^*$

□

Грамматика G_2 называется **приведенной**, ее нетерминалы — **достижимыми**
Недостижимые и непродуктивные нетерминалы называются **бесполезными**

Упрощение КС грамматики: удаление цепных правил

Правило называется **цепным**, если оно имеет вид $A \to B$; $A, B \in V_N$.

Теорема

Для любой КС грамматики $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ можно построить эквивалентную, не содержащую цепных правил

Доказательство.

Строим новое множество правил P_1.
Включаем в него все нецепные правила P.
Затем добавляем в P_1 правила вида $A \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha$, если $A \stackrel{*}{\Rightarrow} B$, где $A, B \in V_N$ и $B \to \alpha$ — нецепное правило из P.
Замечание: достаточно проверять только цепные выводы длины меньшей, чем $|V_N|$
Обозначим полученную грамматику за $G_1 = \langle V_N, V_T, P_1, S \rangle$, докажем $L(G_1) = L(G)$ □

Упрощение КС грамматики: удаление цепных правил

Доказательство.

Очевидно $L(G_1) \subseteq L(G)$

Покажем $L(G) \subseteq L(G_1)$. Пусть $\omega \in L(G)$. Рассмотрим левосторонний вывод $S \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_0 \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_1 \underset{G}{\Rightarrow} \ldots \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_n = \omega$.

Предположим $\alpha_i \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{i+1}$ — первый шаг, выполняемый посредством цепного правила в выводе; $\forall k \in [i..j] : \alpha_k \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{k+1}$ — посредством цепного правила; $\alpha_j \underset{G}{\Rightarrow} \alpha_{j+1}$ — посредством нецепного правила

Тогда $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}| = \cdots = |\alpha_j|$, и на каждом шаге заменяется один и тот же нетерминал. Тогда $\alpha_i \underset{G_1}{\Longrightarrow} \alpha_{j+1}$ посредством правила из $P_1 \setminus P$, следовательно $\omega \in L(G_1)$ □

Нормальная форма Хомского

КС грамматика находится в **нормальной форме Хомского**, если все ее правила имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&A \to BC && A, B, C \in V_N \\
&A \to a && A \in V_N, a \in V_T \\
&S \to \varepsilon && S \text{ — стартовый нетерминал}
\end{aligned}
$$

Нормальная форма Хомского

Теорема

Для любой КС грамматики можно построить эквивалентную в нормальной форме Хомского

0. Удаляем непродуктивные нетерминалы
1. Удаляем цепные правила. Теперь $\forall A \to B : B \in V_T$
2. Заменяем каждое правило $A \to B_1 B_2 \dots B_n$ на $A \to C_1 C_2 \dots C_n$
   - Если $B_i \in V_N$, $C_i = B_i$,
   - Если $B_i \in V_T$, добавляем также правило $C_i \to B_i$,
3. Заменяем правило $A \to C_1 C_2 \dots C_n$ на множество правил:

$$
\begin{aligned}
A &\to C_1 D_1 \\
D_1 &\to C_2 D_2 \\
&\dots \\
D_{n-3} &\to C_{n-2} D_{n-2} \\
D_{n-2} &\to C_{n-1} C_n
\end{aligned}
$$

Полученная грамматика находится в НФХ и эквивалентна данной

Пример приведения в НФХ

$$G = \langle \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S\rangle, \text{ где } P:$$

$$S \to bA \mid aB$$
$$A \to a \mid aS \mid bAA$$
$$B \to b \mid bS \mid aBB$$

- $S \to bA \Rrightarrow S \to C_1A;\ C_1 \to b$
- $S \to aB \Rrightarrow S \to C_2B;\ C_2 \to a$
- $A \to aS \Rrightarrow A \to C_3S;\ C_3 \to a$
- $A \to bAA \Rrightarrow A \to C_4D_1;\ C_4 \to b;\ D_1 \to AA$
- $B \to bS \Rrightarrow B \to C_5S;\ C_5 \to b$
- $B \to aBB \Rrightarrow B \to C_6D_2;\ C_6 \to a;\ D_2 \to BB$

Еще немного упростим

$$S \to bA \mid aB$$
$$A \to a \mid aS \mid bAA$$
$$B \to b \mid bS \mid aBB$$

$$S \to C_bA \mid C_aB$$
$$A \to a \mid C_aS \mid C_bD_1$$
$$B \to b \mid C_bS \mid C_aD_2$$
$$D_1 \to AA$$
$$D_2 \to BB$$
$$C_a \to a$$
$$C_b \to b$$

Алгоритм приведения в НФХ

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
   - добавляется новое правило $S_0 \to S, S_0 \notin V_N, S_0$ делается новым стартовым
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
   - новое правило $C_c \to c$
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
   - Если $A \to \varepsilon$, то A — ε-правило
   - Если $A \to X_1X_2 \ldots X_n, \forall i : X_i$ — ε-правило, то A — ε-правило
   - Заменяем $A \to X_1X_2 \ldots X_n$ на множество правил, где каждый X_i опущен во всех возможных комбинациях, удаляем те, которые выводят ε
   - $A \to X_1X_2X_3 \Rightarrow A \to X_1X_2X_3 \mid X_2X_3 \mid X_1X_3 \mid X_1X_2 \mid X_3 \mid X_2 \mid X_1 \mid \varepsilon$
5. Удалить цепные правила
   - Для каждой пары правил $A \to B; B \to X_1X_2 \ldots X_n$ добавить правило $A \to X_1X_2 \ldots X_n$, цепное правило удалить

Порядок действий при приведении в НФХ

Порядок **важен**!

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
5. Удалить цепные правила

- 1 шаг порождает новые цепные правила, поэтому его нельзя выполнять после 5 шага
- Если выполнить 4 шаг перед 3 шагом, то произойдет экспоненциальный взрыв грамматики
- 5 шаг приводит к квадратичному возрастанию размера грамматики
- Наиболее эффективны порядки $1, 2, 3, 4, 5$ и $1, 3, 4, 5, 2$

Увеличение размера грамматики при нормализации

Порядок **важен**!

1. Удалить стартовый нетерминал из правых частей правил
   - Увеличение на 1
2. Избавиться от неодиночных терминалов в правых частях
   - Увеличение на $|V_T|$ правил
3. Удалить длинные правила (длины больше 2)
   - Увеличение не более, чем в 2 раза (для правил длины $k \geq 3$ порождается $k-1$ новых правил)
4. Удалить непродуктивные правила (ε-правила)
   - Увеличение не более, чем в 3 раза
5. Удалить цепные правила
   - Увеличение не более, чем в $O(n^2)$ (цепных правил не больше n^2, где n — число нетерминалов)

Итого: **полиномиальное** увеличение размеров грамматики при правильном порядке действий

Задача распознавания

Построить алгоритм*, который определяет,
принадлежит ли строка данному языку или нет.

```
recognizer :: String -> Grammar -> Bool
```

*Алгоритм обязан завершаться

Синтаксический анализ

Построить алгоритм*, который определяет, принадлежит ли строка данному языку или нет, строит дерево вывода или сообщает об ошибке.

```
parser :: String -> Grammar -> (DerivationTree | SyntaxError)
```

*Алгоритм обязан завершаться

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \to a$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

Что значит $A \to a$?

$$A \Rightarrow a \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \omega = a$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \to BC$?

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \to BC$?

$$A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \omega_1, \omega_2 : \omega = \omega_1 \omega_2 \\ B \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \\ C \overset{*}{\Rightarrow} \omega_2 \end{cases}$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm)

Что значит $A \to BC$?

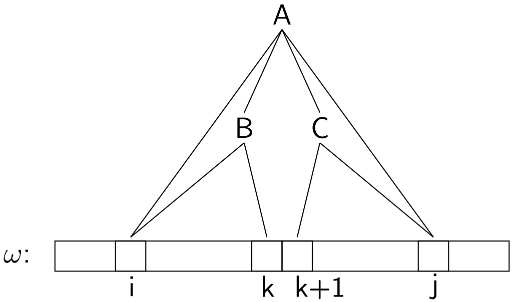
$$A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \omega_1, \omega_2 : \omega = \omega_1\omega_2 \\ B \overset{*}{\Rightarrow} \omega_1 \\ C \overset{*}{\Rightarrow} \omega_2 \end{cases}$$

Или:

$$A \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} \omega \Leftrightarrow \exists k \in [0 \ldots |\omega|] : \begin{cases} B \overset{*}{\Rightarrow} \omega[0 \ldots k] \\ C \overset{*}{\Rightarrow} \omega[k+1 \ldots |\omega|] \end{cases}$$

Синтаксический анализ: алгоритм Кока-Янгера-Касами (Cocke-Younger-Kasami algorithm, CYK)

- Алгоритм синтаксического анализа, работающий с грамматиками в НФХ
- Динамическое программирование



CYK

- Дано: строка ω длины n, грамматика $G = \langle V_T, V_N, P, S\rangle$ в НФХ
- Используем трехмерный массив d булевых значений размером $|V_N| \times n \times n$, $d[A][i][j] = true \Leftrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow} \omega[i \dots j]$
- Инициализация: $i = j$
  - $d[A][i][i] = true$, если в грамматике есть правило $A \to \omega[i]$
  - $d[A][i][i] = false$, иначе
- Динамика. Предполагаем, d построен для всех нетерминалов и пар $\{(i', j') \mid j' - i' < m\}$
  - $d[A][i][j] = \bigvee_{A \to BC} \bigvee_{k=i}^{j} d[B][i][k] \wedge d[C][k+1][j]$
- В конце работы алгоритма в $d[S][1][n]$ записан ответ, выводится ли ω в данной грамматике