Теория автоматов и формальных языков

Магазинные автоматы

Автор: Екатерина Вербицкая

НИУ-ВШЭ

10 октября 2022

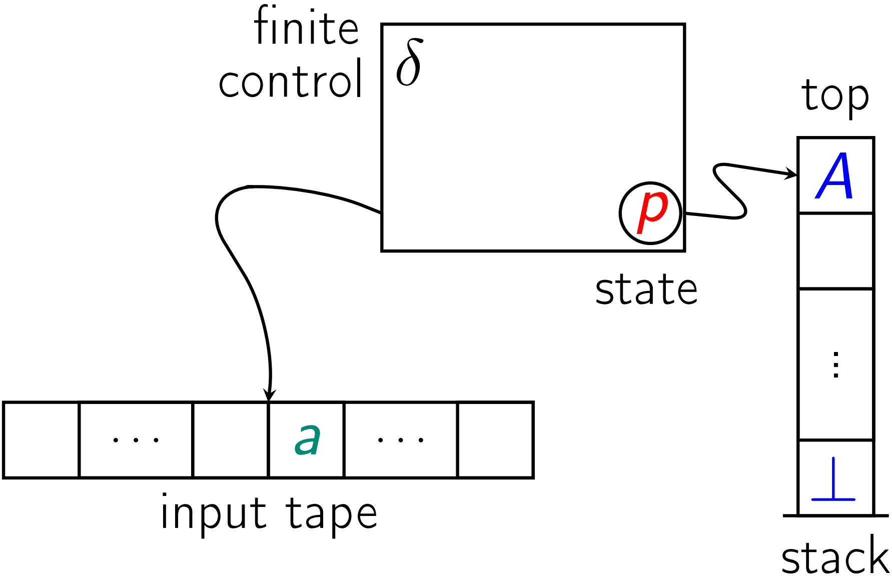
В предыдущей серии

- Регулярные языки распознаются с помощью конечных автоматов
- Разные алгоритмы синтаксического анализа для контекстно-свободных языков
  - CYK
  - Рекурсивный спуск
  - LL(1)
- Есть ли универсальный распознаватель для КС-языков?

TLDR

- Произвольный КС язык можно распознать при помощи магазинного автомата (он же автомат с магазинной памятью, он же pushdown automata, он же pda)
- Магазинный автомат по сути — автомат со стеком
- Детерминированные магазинные автоматы могут распознавать только детерминированные КС языки
- Недетерминированные магазинные автоматы могут распознавать произольные КС языки

Что такое магазинный автомат



Что такое магазинный автомат: неформально

- Автомат, переходы которого осуществляются по входному символу, текущему состоянию и символу на вершине стека
  - У конечного автомата не было стека
- Никакие состояния стека, кроме вершины, не доступны
- Во время перехода может изменяться стек
  - Положить что-то на стек (push)
  - Снять верхушку со стека (pop)
- А может и не изменяться
  - Магазинный автомат может вообще игнорировать стек
  - Или стек может не изменяться, хоть значение оттуда и читается
- Итого: по тройке (входной символ, состояние, символ на вершине стека) получается новое состояние, и модифицируется (или нет) стек

Формальное определение

Недетерминированный магазинный автомат это $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$

- Q — конечное множество состояний
- Σ — конечное множество символов, входной алфавит
- Γ — конечное множество символов, стековый алфавит
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ — функция переходов
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $\perp \in \Gamma$ — начальный элемент стека
- $F \subseteq Q$ — множество принимающих (конечных) состояний

Отношение переходов

$$(q, \alpha) \in \delta(p, a, A) \text{ означает}$$

- Если магазинный автомат находится в состоянии $p \in Q$,
- на вершине стека находится $A \in \Gamma$,
- а со входа читается символ $a \in \Sigma \cup \varepsilon$,

- то изменяем состояние на $q \in Q$,
- снимаем со стека символ A, записываем на стек строку $\alpha \in \Gamma^*$

- $\Sigma \cup \varepsilon$ сигнализирует о том, что вход можно и не читать

$$p \xrightarrow{a;\, A/\alpha} q$$

Семантика магазинного автомата

- Мгновенное описание МА: $(p, \omega, \beta) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
  - p — текущее состояние автомата
  - ω — непрочитанный фрагмент входного потока
  - β — содержимое стека (верхушка записана первой)
- Отношение $\vdash$ на мгновенных описаниях (шаг)
  - Для каждого $(q, \alpha) \in \delta(p, a, A)$, верно $(p, a\omega, A\gamma) \vdash (q, \omega, \alpha\gamma)$ для произвольных $\omega \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*$
- Шаг не определен, если стек пуст

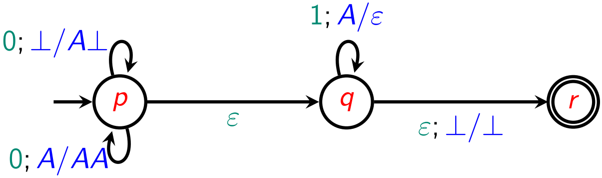
$$p \xrightarrow{a;\, A/\alpha} q$$

Семантика магазинного автомата: вычисление

- Вычисление — последовательность шагов
- Начальное мгновенное описание $(q_0, \omega, \bot)$
- Выбирается любой из подходящих шагов
- Если какой-нибудь выбор приведет к успеху, значит, строка распознается

- Два варианта окончания работы
  - По достижении конечного состояния
    - $L(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, \bot) \vdash^* (f, \varepsilon, \gamma), f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - По опустошении стека
    - $N(M) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, \bot)) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q\}$
  - Эти варианты эквивалентны: по автомату, завершающемуся по первой схеме, можно посмотроить автомат, завершающийся по второй схеме, и наоборот
- $\vdash^*$ — транзитивно рефлексивное замыкание отношения $\vdash$

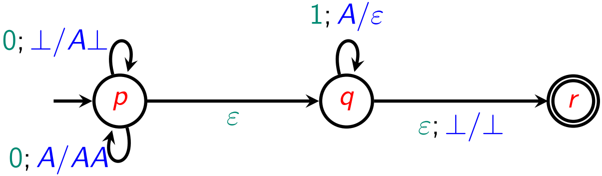
Пример: язык $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ (конечное состояние)



Вычисление на строке 0011:

- $(p, 0011, \bot) \vdash (q, 0011, \bot) \vdash (r, 0011, \bot)$ — провал
- $(p, 0011, \bot) \vdash (p, 011, A\bot) \vdash (q, 011, A\bot)$ — провал
- $(p, 0011, \bot) \vdash (p, 011, A\bot) \vdash (p, 11, AA\bot) \vdash (q, 11, AA\bot) \vdash (q, 1, A\bot) \vdash (q, \varepsilon, \bot) \vdash (r, \varepsilon, \bot)$ — успех (по принимающему состоянию)

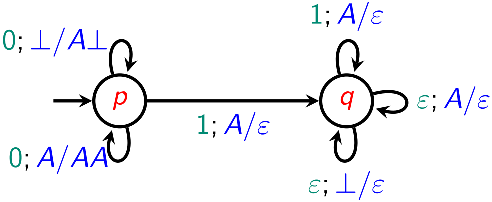
Пример: язык $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ (конечное состояние)



Вычисление на строке 00111:

- $(p, 00111, \perp) \vdash (q, 00111, \perp) \vdash (r, 00111, \perp)$ — провал
- $(p, 00111, \perp) \vdash (p, 0111, A\perp) \vdash (q, 0111, A\perp)$ — провал
- $(p, 00111, \perp) \vdash (p, 0111, A\perp) \vdash (p, 111, AA\perp) \vdash (q, 111, AA\perp) \vdash (q, 11, A\perp) \vdash (q, 1, \perp) \vdash (r, 1, \perp)$ — провал

Пример: язык $\{0^n1^m \mid 1 \le m \le n\}$ (опустошение стека)



Вычисление на строке 00111:

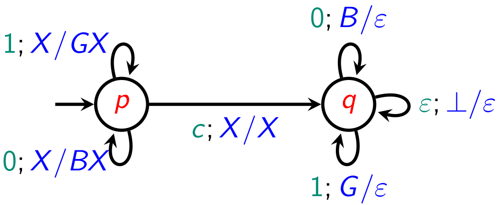
- $(p, 00111, \bot) \vdash (q, 00111, \bot)$ — провал
- $(p, 00111, \bot) \vdash (p, 0111, A\bot) \vdash (p, 111, AA\bot) \vdash (q, 11, A\bot) \vdash (q, 1, \bot)$ — провал

Вычисление на строке 001:

- $(p, 001, \bot) \vdash (p, 01, A\bot) \vdash (p, 1, AA\bot) \vdash (q, \varepsilon, A\bot) \vdash (q, \varepsilon, \bot) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ — успех

Пример: язык $\{\omega c \omega^R \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$ (опустошение стека)

$X \in \{G, B, \perp\}$



Вычисление на строке $110c011$:

- $(p, 110c011, \perp) \vdash (p, 10c011, G\perp) \vdash (p, 0c011, GG\perp) \vdash$ $(p, c011, BGG\perp) \vdash (q, 011, BGG\perp) \vdash (q, 11, GG\perp) \vdash (q, 1, G\perp) \vdash$ $(q, \varepsilon, \perp) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ — успех

Формальное определение ДМА

Детерминированный магазинный автомат это $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$

- Q — конечное множество состояний
- Σ — конечное множество символов, входной алфавит
- Γ — конечное множество символов, стековый алфавит
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$ — функция переходов
  - $\forall q \in Q, Z \in \Gamma$: если есть эпсилон-переход $\delta(q, \varepsilon, Z)$ то нет переходов по терминалам $\delta(q, a, Z)$
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $\perp \in \Gamma$ — начальный элемент стека
- $F \subseteq Q$ — множество принимающих (конечных) состояний

Детерминированные магазинные автоматы vs недетерминированные

- В общем случае одной входной строке может соответствовать несколько вычислений
  - Некоторые из них могут завершаться в принимающих состояниях
- Если существует хотя бы одно вычисление, завершающееся в принимающем состоянии, строка принадлежит языку
- Если для каждой строки существует ровно одно вычисление в магазинном автомате, то он является *детерминированным*
  - Соответствующий язык является *детерминированным КС языком*
- Детерминированный магазинный автомат является частным случаем недетерминированного, поэтому детерминированные КС языки — строгое подмножество контекстно-свободных

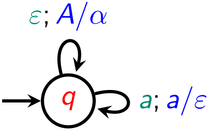
Неэквивалентность двух видов приема для детерминированных магазинных автоматов

Беспрефиксный язык — язык, в котором никакое слово не является префиксом другого

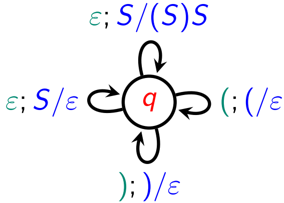
- Прием языка детерминированным магазинным автоматом по пустому стеку и по допускающему состоянию эквивалентно только для беспрефиксных языков
- Рассмотрим слово $\omega = \alpha\beta : \alpha, \beta \in \Sigma^*, \omega, \alpha \in L$, где $L \subseteq \Sigma^*$
- При попытке распознать слово ω ДМП завершит свою работу, как только прочитает α
- ω никогда не будет принята
- Можно построить ДМП, принимающий по допускающему состоянию, который допускает префиксный язык

Построение магазинного автомата по КС-грамматике

- Интуиция:
  - Для каждого нетерминала: заменяем его на стеке на правую часть правила
  - Для каждого терминала: считываем со входа этот терминал и снимаем со стека
- Построение:
  - Для каждого правила $A \to \alpha$ добавляем (q, α) в $\delta(q, \varepsilon, A)$
  - Для каждого терминала a добавляем (q, ε) в $\delta(q, a, a)$
- Относительно бесполезный автомат: как найти правильное вычисление?



Магазинный автомат по грамматике $S \to (S)S \mid \varepsilon$

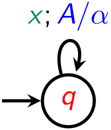


Вычисление на строке (())():

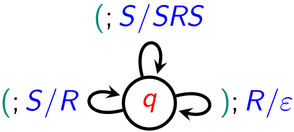
- $(q, (())(), S) \vdash (q, (())(), (S)S) \vdash (q, ())(), S)S) \vdash$ $(q, ())(), (S)S)S) \vdash (q,))(), S)S)S) \vdash (q,))(),)S)S) \vdash (q,)(), S)S) \vdash$ $(q,)(),)S) \vdash (q, (), S) \vdash (q, (), (S)S) \vdash (q,), S)S) \vdash (q,),)S) \vdash$ $(q, \varepsilon, S) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ — успех

Построение магазинного автомата по КС-грамматике в нормальной форме Грейбах

- Нормальная форма Грейбах: все правила имеют вид $A \to x\alpha$
  - $A \in V_N$
  - $x \in V_T$
  - $\alpha \in V_N^*$
- Построение магазинного автомата:
  - Для каждого правила $A \to x\alpha$ добавляем (q, α) в $\delta(q, x, A)$
- Автоматы получаются проще: без ε-переходов
- Не сильно более полезный автомат
- НФ Грейбах позволяет реализовывать эффективный парсер рекурсивным спуском



Магазинный автомат по грамматике в НФГ
$S \to (SRS \mid (R$
$R \to\ )$



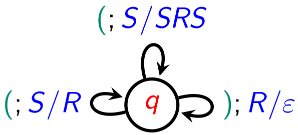
Вычисление на строке $(())()$:

- $(q, (())(), S) \vdash (q, ())(), SRS) \vdash (q,))(), RRS) \vdash (q,)(), RS) \vdash (q, (), S) \vdash (q,), R) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$ — успех

Построение КС грамматики по магазинному автомату

- По магазинному автомату $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F)$ строим грамматику (V_N, V_T, P, S)
- $V_N = \{S\} \cup \{[qAp] \mid p, q \in Q, A \in \Gamma\}$
- $V_T = \Sigma$
- $P = \{S \to [q_0 \perp q] \mid q \in Q\} \cup$
  $\{[qAq_{m+1}] \to a[q_1 B_1 q_2][q_2 B_2 q_3] \dots [q_m B_m q_{m+1}] \mid$
  $q_i \in Q; a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}; A, B_j \in \Gamma; (q_1, B_1 B_2 \dots B_m) \in \delta(q, a, A)\} \cup$
  $\{[qAp] \to a \mid (p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A)\}$

Пример построения КС грамматики по магазинному автомату

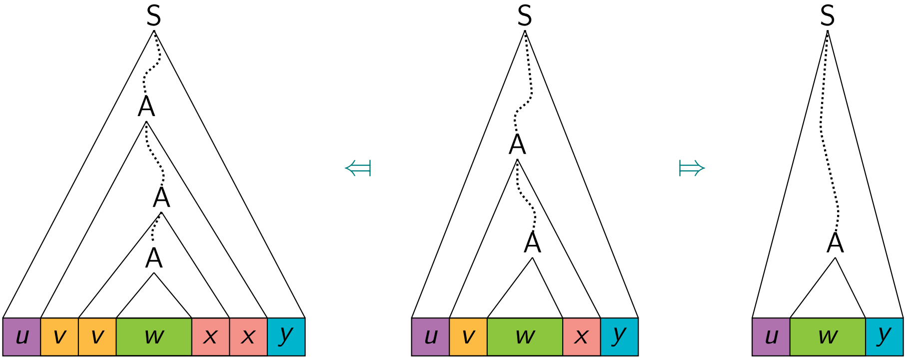


$$
\begin{array}{lcl}
[qSq] & \to & (\ [qRq] \\
 & \mid & (\ [qSq]\ [qRq]\ [qSq] \\
[qRq] & \to &)
\end{array}
$$

Лемма о накачке для КС языков

Лемма

Если язык L является контекстно-свободным, то
$\exists p \geq 1 : \forall \omega \in L : |\omega| \geq p$ *можно разбить на подстроки*
$\omega = uvwxy : |vwx| \leq p, |vx| \geq 1$ *и*
$\forall n \geq 0 : \; uv^n wx^n y \in L$



Лемма о накачке для КС языков: пример

Язык $L = \{a^n b^n c^n\}$
Предполагаем, что он КС, тогда по Лемме существует p...
Рассмотрим слово $a^p b^p c^p = uvwxy, |vwx| \leq p, |vx| \geq 1$

- $vwx = a^j, j \leq p$
- $vwx = a^j b^k, j + k \leq p$
- $vwx = b^j, j \leq p$
- $vwx = b^j c^k, j + k \leq p$
- $vwx = c^j, j \leq p$

Строка $uv^i wx^i y$ не содержит одинаковое количество букв для всех i.
Например, рассмотреть $i = 2$. Получили противоречие — успех