Теория автоматов и формальных языков

Атрибутные грамматики и магазинные преобразователи

Автор: Екатерина Вербицкая

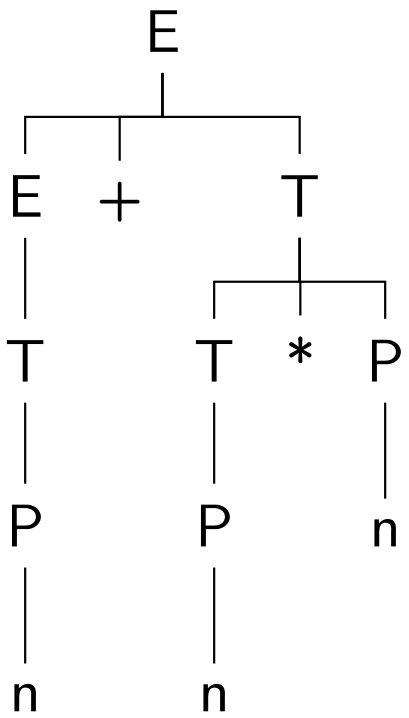
НИУ-ВШЭ

10 октября 2022

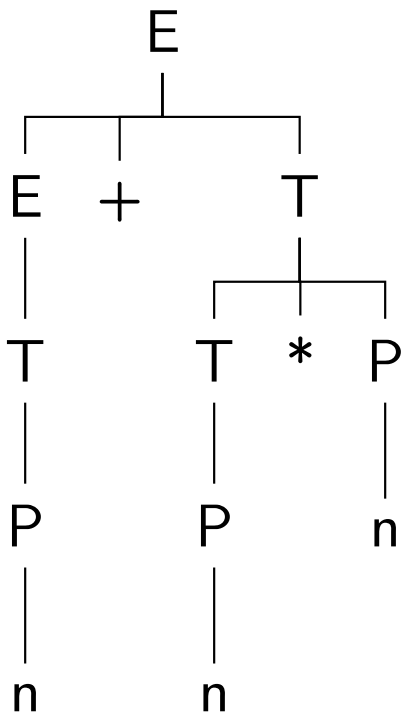
В предыдущей серии

- Что такое язык; когда предложение принадлежит языку
- Классы языков
  - Регулярные
  - Контекстно-свободные
    - Однозначные
    - Существенно неоднозначные
    - LL(k)
- Как задать язык
  - Конечный автомат
  - Магазинный автомат
- Синтаксический анализ
  - Определение, принадлежит ли цепочка языку
  - Построение дерева разбора

Дерево разбора — лишь цепочка в некотором языке



Дерево разбора — лишь цепочка в некотором языке



$$[.E[.E[.T[.P[.n]]]][.+][.T[.T[.P[.n]]][.*][.P[.n]]]]$$

Трансляция (перевод)

- **Трансляция** — преобразование некоторой входной строки в некоторую выходную
  - Σ — входной алфавит, Π — выходной алфавит.
    Трансляцией с языка $L_i \subseteq \Sigma^*$ на язык $L_o \subseteq \Pi^*$
    называется отображение $\tau : L_i \to L_o$
- Построение дерева разбора — простейший пример трансляции
- Другие примеры трансляции
  - Вычисление значения арифметического выражения
  - Преобразование арифметического выражения из инфиксной записи в постфиксную
  - Преобразование программы на языке Java в байт-код
  - Компиляция программ
  - ...
- Фактически синтаксический анализ нужен для трансляции

Схемы синтаксически управляемой трансляции

Схема синтаксически управляемой трансляции — пятерка (N, Σ, Π, P, S)

- N — конечное множество нетерминальных символов
- Σ — конечный входной алфавит
- Π — конечный выходной алфавит
- $S \in N$ — стартовый нетерминал
- P — конечное множество правил трансляции вида $A \to \alpha, \beta$, где $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*, \beta \in (N \cup \Pi)^*$
  - Вхождения нетерминалов в цепочку β образуют перестановку нетерминалов из цепочки α
  - Если нетерминалы повторяются больше одного раза, то их различают по индексам: $E \to E^l + E^r, E^r + E^l$

Выводимая пара в СУ-схеме

- Если $A \to (\alpha, \beta) \in P$, то $(\gamma A^i \delta,\ \gamma' A^i \delta') \Rightarrow (\gamma\alpha\delta,\ \gamma'\beta\delta')$
- Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$ называется отношением выводимости в СУ-схеме, обозначается $\overset{*}{\Rightarrow}$
- Трансляцией назовем множество пар $\{(\alpha, \beta) \mid (S, S) \overset{*}{\Rightarrow} (\alpha, \beta), \alpha \in \Sigma^*, \beta \in \Pi^*\}$
- СУ-схема называется простой, если во всех правилах $A \to (\alpha, \beta)$, нетерминалы в α и β встречаются в одном и том же порядке

Пример СУ-схемы

$$
\begin{array}{lcll}
E & \to & E + T & , \quad ET+ \\
 & | & T & , \quad T \\
T & \to & T * F & , \quad TF* \\
 & | & F & , \quad F \\
F & \to & n & , \quad n \\
 & | & (E) & , \quad E
\end{array}
$$

Пример СУ-схемы

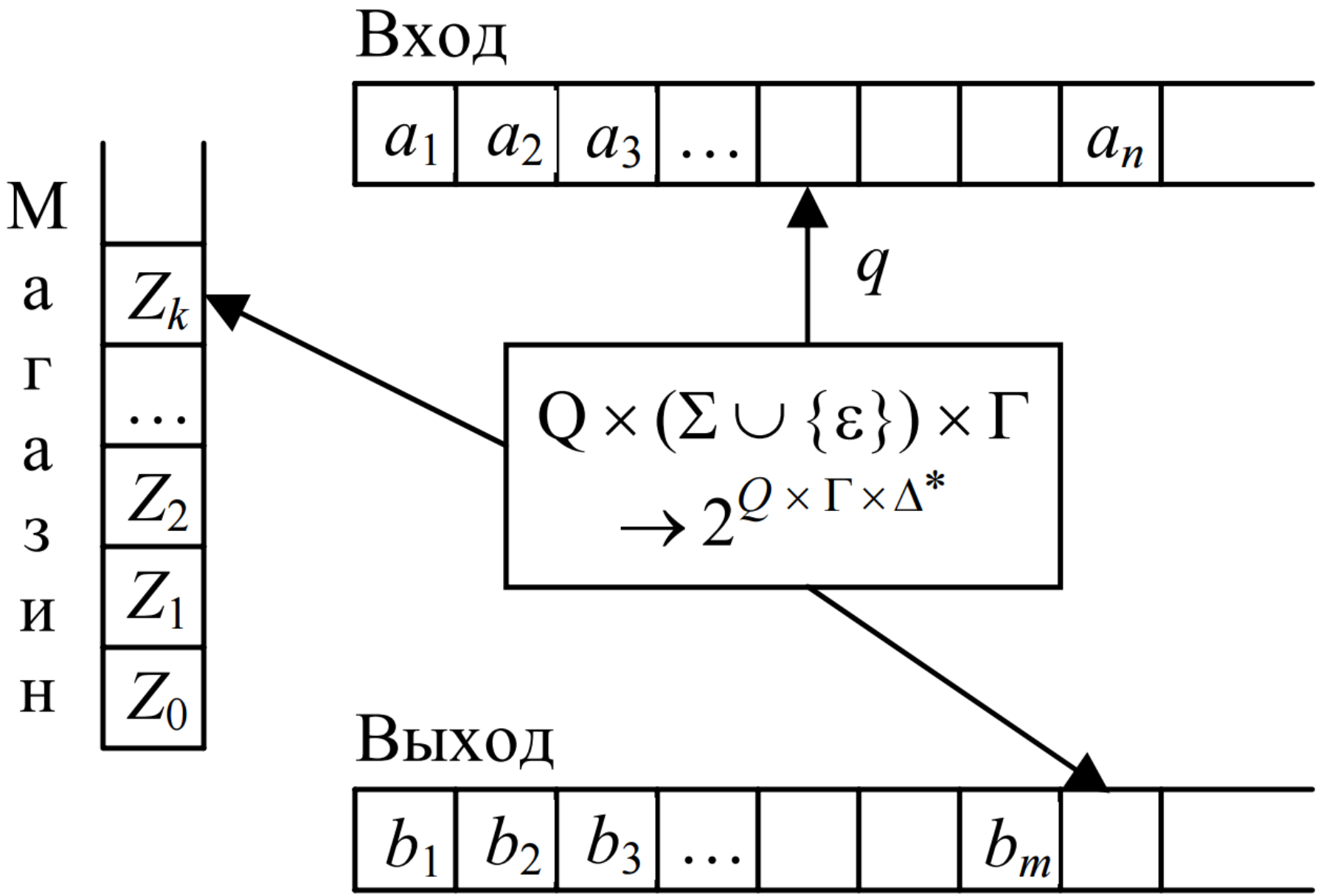
$$
\begin{array}{lcll}
E & \to & E + T & , \quad ET+ \\
 & | & T & , \quad T \\
T & \to & T * F & , \quad TF* \\
 & | & F & , \quad F \\
F & \to & n & , \quad n \\
 & | & (E) & , \quad E
\end{array}
$$

$(\underline{E}, \underline{E}) \Rightarrow (\underline{T}, \underline{T}) \Rightarrow (\underline{T} * F, \underline{T}\, F*) \Rightarrow (\underline{F} * F, \underline{F}\, F*) \Rightarrow (n * \underline{F}, n\, \underline{F}*) \Rightarrow$
$(n * (\underline{E}), n\, \underline{E}*) \Rightarrow (n * (\underline{E} + T), n\, \underline{E}\, T + *) \Rightarrow (n * (\underline{T} + T), n\, \underline{T}\, T + *) \Rightarrow$
$(n * (\underline{F} + T), n\, \underline{F}\, T + *) \Rightarrow (n * (n + \underline{T}), n\, n\, \underline{T} + *) \Rightarrow$
$(n * (n + \underline{F}), n\, n\, \underline{F} + *) \Rightarrow (n * (n + n), n\, n\, n + *)$

Общий механизм для работы с простыми СУ-схемами

Такие схемы можно моделировать **магазинным преобразователем**

Что такое магазинный преобразователь



Что такое магазинный преобразователь: неформально

Магазинный автомат, который при каждом переходе пишет что-то в выходную строку

Формальное определение

Магазинный преобразователь это набор $(Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Q — конечное множество состояний
- Σ — конечное множество символов, входной алфавит
- Γ — конечное множество символов, стековый алфавит
- Δ — конечное множество символов, выходной алфавит
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^* \times \Delta^*}$ — отношение переходов
- $q_0 \in Q$ — стартовое состояние
- $Z_0 \in \Gamma$ — начальный элемент стека
- $F \subseteq Q$ — множество принимающих (конечных) состояний

Отношение переходов

$$\delta(p, a, Z) = \{(q_i, \gamma_i, \alpha_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \text{ означает}$$

- Если магазинный преобразователь находится в состоянии $p \in Q$, на вершине стека находится $Z \in \Gamma$, а со входа читается символ $a \in \Sigma \cup \varepsilon$, то для некоторого i:
  - Изменяем состояние на $q_i \in Q$
  - Снимаем со стека символ Z, записываем на стек строку $\gamma_i \in \Gamma^*$
  - В выходную строку дописываем $\alpha_i \in \Delta^*$
- $\Sigma \cup \varepsilon$ сигнализирует о том, что вход можно и не читать
- Если $\gamma_i = \varepsilon$, символ со стека стирается
- Если $\alpha_i = \varepsilon$, в выходную строку ничего не пишем

Семантика магазинного преобразователя

- Мгновенное описание МП: $(p, \omega, \beta, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Delta^*$
  - p — текущее состояние автомата
  - ω — непрочитанный фрагмент входного потока
  - β — содержимое стека (верхушка записана первой)
  - α — содержимое выходной ленты
- Отношение $\vdash$ на мгновенных описаниях (шаг)
  - Для каждого $(q, \gamma, \alpha) \in \delta(p, a, Z)$, верно $(p, ax, Z\eta, \zeta) \vdash (q, x, \gamma\eta, \zeta\alpha)$ для произвольных $x \in \Sigma^*, \eta \in \Gamma^*, \zeta \in \Delta^*$
- Шаг не определен, если стек пуст

Семантика магазинного преобразователя: вычисление

- Вычисление — последовательность шагов
  - $\vdash^*$ — транзитивно рефлексивное замыкание отношения $\vdash$
- Начальное мгновенное описание $(q_0, \omega, Z_0, \varepsilon)$
- Два варианта окончания работы
  - По достижении конечного состояния
    - $\tau(M) = \{(\omega, \alpha) \,|\, \omega \in \Sigma^*, \alpha \in \Delta^*, (q_0, \omega, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (f, \varepsilon, \gamma, \alpha), f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - По опустошении стека
    - $\tau_\varepsilon(M) = \{(\omega, \alpha) \,|\, \omega \in \Sigma^*, \alpha \in \Delta^*, (q_0, \omega, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, \alpha), q \in Q\}$
  - Эти варианты эквивалентны: по преобразователю, завершающемуся по первой схеме, можно посмотроить преобразователь, завершающийся по второй схеме, и наоборот

Детерминированные магазинные преобразователи

Магазинный преобразователь является **детерминированным**, если

- $\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma : |\delta(q, a, Z)| \leq 1$
- Если $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \varnothing$, то $\forall a \in \Sigma : \delta(q, a, Z) = \varnothing$
- Детерминированный магазинный преобразователь является частным случаем недетерминированного

Пример: преобразование префиксных арифметических выражений в постфиксные

$$M = \{\{q\}, \{a, +, *\}, \{E, +, *\}, \{a, +, *\}, \delta, q, E, \{q\}\}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q, a, E) &= \{(q, \varepsilon, a)\} \\
\delta(q, +, E) &= \{(q, EE+, \varepsilon)\} \\
\delta(q, *, E) &= \{(q, EE*, \varepsilon)\} \\
\delta(q, \varepsilon, +) &= \{(q, \varepsilon, +)\} \\
\delta(q, \varepsilon, *) &= \{(q, \varepsilon, *)\}
\end{aligned}$$

$(q, +*aaa, E, \varepsilon) \vdash (q, *aaa, EE+, \varepsilon) \vdash (q, aaa, EE*E+, \varepsilon) \vdash$
$(q, aa, E*E+, a) \vdash (q, a, *E+, aa) \vdash (q, a, E+, aa*) \vdash (q, \varepsilon, +, aa*a) \vdash$
$(q, \varepsilon, \varepsilon, aa*a+)$

Взаимоотношение между простыми СУ-схемами и магазинными преобразователями

Теорема

По простой СУ-схеме $(N, \Sigma, \Delta, R, S)$ *можно построить магазинный преобразователь, задающий эквивалентную трансляцию*

Теорема

По магазинному преобразователю $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$ *можно построить простую СУ-схему, задающую эквивалентную трансляцию*

Теорема

Класс трансляций, задаваемых простыми СУ-трансляциями совпадает с классом трансляций, задаваемых магазинными автоматами

Однозначные СУ-схемы и левосторонний вывод

Однозначная СУ-схема — СУ-схема, в которой не существует двух правил $A \to \alpha, \beta, A \to \alpha, \gamma : \beta \neq \gamma$

Теорема

Выходная цепочка однозначной СУ-схемы может быть сгенерирована при левостороннем выводе входной цепочки

Обобщенные схемы синтаксически управляемой трансляции

Обобщенная схема синтаксически управляемой трансляции — шестерка $(N, \Sigma, \Pi, \Gamma, P, S)$

- Γ — конечное множество символов перевода вида $A_i, A \in N; i \in \mathbb{Z}$
- P — конечное множество правил трансляции вида $A \to \alpha, A_1 = \beta_1, \ldots, A_n = \beta_n$, где $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
  - $A_i \in \Gamma, 1 \leq i \leq n$
  - Каждый символ x, входящий в β_i, либо $x \in \Pi$, либо $x = B_k \in \Gamma$, где $B \in \alpha$
  - Если α имеет более одного вхождения символа B, то каждый символ B_k во всех β соотнесен (верхним индексом) с конкретным вхождением B

Входной грамматикой назовем четверку (N, Σ, P', S), где $P = \{A \to \alpha \mid A \to \alpha, A_1 = \beta_1, \ldots, A_n = \beta_n \in P\}$

Выход обобщенной СУ-схемы

- Для каждой внутренней вершины дерева, соответствующей нетерминалу A, с каждым A_i связывается одна цепочка
  - Такую цепочку назовем значением (трансляцией) символа A_i
- Каждое значение определяется подстановкой значений символов трансляции данного элемента $A_i = \beta_i$, определенных в прямых потомках вершины
- **Трансляция**, определяемая данной схемой — множество $\{(\alpha, \beta)\}$
  - α имеет дерево разбора в данной входной грамматике
  - β — значение выделенного символа S_k

Пример обобщенной СУ-схемы: дифференцирование

$$
\begin{array}{lcll}
E & \to & E + T & , \quad E_1 = E_1 + T_1 \\
 & & & , \quad E_2 = E_2 + T_2 \\
 & | & T & , \quad E_1 = T_1,\ E_2 = T_2 \\
T & \to & T * F & , \quad T_1 = T_1 * F_1 \\
 & & & , \quad T_2 = T_1 * F_2 + T_2 * F_1 \\
 & | & F & , \quad T_1 = F_1,\ T_2 = F_2 \\
F & \to & (E) & , \quad F_1 = (E_1) \\
 & & & , \quad F_2 = (E_2) \\
 & | & sin(E) & , \quad F_1 = sin(E_1) \\
 & & & , \quad F_2 = cos(E_1) * E_2 \\
 & | & cos(E) & , \quad F_1 = cos(E_1) \\
 & & & , \quad F_2 = -sin(E_1) * E_2 \\
 & | & x & , \quad F_1 = x,\ F_2 = 1 \\
 & | & n & , \quad F_1 = n,\ F_2 = 0
\end{array}
$$

Транслирующие грамматики

- КС-грамматика, терминальный алфавит которой разбит на два множества: входных и выходных символов
- **Транслирующая грамматика** — пятерка $(N, \Sigma_i, \Sigma_o, P, S)$
  - N — алфавит нетерминалов
  - Σ_i — алфавит входных терминалов
  - Σ_o — алфавит выходных терминалов
  - $S \in N$ — стартовый нетерминал
  - $P = \{A \to \alpha\}, \alpha \in (\Sigma_i \cup \Sigma_o \cup N)^*$ — множество правил вывода

Пример транслирующей грамматики

$$
\begin{array}{lcl}
E & \to & E + T\,\{+\} \\
 & | & T \\
T & \to & T * F\,\{*\} \\
 & | & F \\
F & \to & n\,\{n\} \\
 & | & (E)
\end{array}
$$

Пример транслирующей грамматики

$$
\begin{array}{lcl}
E & \to & E + T\,\{+\} \\
 & | & T \\
T & \to & T * F\,\{*\} \\
 & | & F \\
F & \to & n\,\{n\} \\
 & | & (E)
\end{array}
$$

$$
E \Rightarrow E + T\,\{+\} \Rightarrow T + T\,\{+\} \Rightarrow P + T\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + T\,\{+\} \Rightarrow
$$
$$
n\,\{n\} + T * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + P * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow
$$
$$
n\,\{n\} + n\,\{n\} * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + n\,\{n\} * n\,\{n\}\,\{*\}\,\{+\}
$$

Пример транслирующей грамматики

$$
\begin{array}{lcl}
E & \to & E + T\,\{+\} \\
 & | & T \\
T & \to & T * F\,\{*\} \\
 & | & F \\
F & \to & n\,\{n\} \\
 & | & (E)
\end{array}
$$

$E \Rightarrow E + T\,\{+\} \Rightarrow T + T\,\{+\} \Rightarrow P + T\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + T\,\{+\} \Rightarrow$
$n\,\{n\} + T * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + P * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow$
$n\,\{n\} + n\,\{n\} * P\,\{*\}\,\{+\} \Rightarrow n\,\{n\} + n\,\{n\} * n\,\{n\}\,\{*\}\,\{+\}$

- Если вычеркнуть все выходные символы, получим $n + n * n$
- Если вычеркнуть все входные символы, получим $n\,n\,n + *$ — постфиксная запись выражения

Постфиксная транслирующая грамматика

- Если выходные символы встречаются только в конце правил, транслирующая грамматика называется постфиксной
- Это требование формально не выдвигается: транслирующие грамматики могут быть не постфиксными
- На практике постфиксные транслирующие грамматики удобнее

Атрибутная транслирующая грамматика

- Входной алфавит — алфавит лексем
  - Лексема характеризуется **типом** и **значением**
- Транслирующая грамматика описывает перевод только **типа** лексемы
  - Это существенно снижает выразительность формализма
- Для борьбы с этим недостатком предложены атрибутные грамматики
  - Модификация транслирующих грамматик, снабженная атрибутами
  - Выходные символы транслирующих грамматик — транслирующие символы
    - ★ Нетерминалы, которые раскрываются в ε, и в момент раскрытия выполняют связанные с ними действие

Атрибут

Атрибут — дополнительные данные, ассоциированные с грамматическими символами

- Если X — символ, а a — его атрибут, то значение a в узле дерева, помеченном X, записывается как $X.a$
- Узлы дерева могут реализовываться как записи или объекты, а атрибуты — как поля
- Атрибуты могут быть любого типа
- Если в каждом узле дерева атрибуты уже вычислены, оно называется **аннотированным**
- Процесс вычисления этих атрибутов называется **аннотированием** дерева разбора

Вычисление атрибутов не всегда возможно

$$A \to B \qquad \begin{aligned} A.s &= B.i \\ B.i &= A.s + 1 \end{aligned}$$

Синтезируемый атрибут, S-атрибутная грамматика

- Атрибут, значение которого зависит от значений атрибутов детей данного узла или от других атрибутов этого узла, называется **синтезируемым**
- Если в транслирующей грамматике используются только синтезируемые атрибуты, она называется **S-атрибутной грамматикой**
- Аннотирование дерева разбора S-атрибутной грамматики возможно путем выполнения семантических правил снизу вверх (от листьев к корню)

Пример S-атрибутной грамматики

S	$\to$	E		$S.val = E.val$
E_0	$\to$	$E_1 + T$	$\{ADD.res = op_1 + op_2\}$	$ADD.op_1 = E_1.val$ $ADD.op_2 = T.val$ $E_0.val = ADD.res$
E	$\to$	T		$E.val = T.val$
T_0	$\to$	$T_1 * F$	$\{MUL.res = op_1 * op_2\}$	$MUL.op_1 = T_1.val$ $MUL.op_2 = F.val$ $T_0.val = MUL.res$
T	$\to$	F		$T.val = F.val$
F	$\to$	n		$F.val = n.val$
F	$\to$	(E)		$F.val = E.val$

Наследуемый атрибут, L-атрибутная грамматика

Атрибут, значение которого зависит только от атрибутов братьев узла слева или атрибутов родителей, называется **наследуемым**

Грамматика называется **L-атрибутной**, если каждый наследуемый атрибут узла X_j в правиле $A \to X_1 \dots X_n$ зависит только от:

- Атрибутов узлов $X_1 \dots X_{j-1}$ (братья слева)
- Наследуемых атрибутов узла (предок)

Синтезируемые атрибуты тоже разрешены

Любая S-атрибутная грамматика является L-атрибутной

Пример L-атрибутной грамматики

D	$\to$	TL		$L.inh = T.type$
T	$\to$	int		$T.type = integer$
T	$\to$	$real$		$T.type = real$
L_0	$\to$	L_1, id	$\{ENTRY.type = (k, v)\}$	$L_1.inh = L_0.inh$ $ENTRY.k = id.text$ $ENTRY.v = L_0.inh$
L	$\to$	id	$\{ENTRY.type = (k, v)\}$	$ENTRY.k = id.text$ $ENTRY.v = L.inh$