# /\* 데이터 구조 및 알고리즘 \*/

신현규 강사, 화/목 20:00 시간복잡도 (2)



#### 주차별 커리큘럼

1주차 과정 소개, 배열, 연결리스트, 클래스

2주차 스택, 큐, 해싱

3주차 시간복잡도

4주차 트리, 트리순회, 재귀호출

5주차 힙

6주차 그래프 소개, DFS

7주차 그래프 심화, BFS

8주차 강의 요약, 알고리즘 과정 소개

#### 컴퓨터를 이용한 문제 해결 과정

- 1. 문제를 정확히 이해한다
- 2. 문제를 해결하는 알고리즘을 개발한다
- 3. 알고리즘이 문제를 해결한다는 것을 증명한다
- 4. 알고리즘이 제한시간 내에 동작한다는 것을 보인다
- 5. 알고리즘을 코드로 작성한다
- 6. 제출 후 만점을 받고 매우 기뻐한다

알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0
for i in range(n):
   sum = sum + i
```

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0
for i in range(n):
   sum = sum + i
```

n 개

알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0
for i in range(n):
   sum = sum + i
```

O(n)

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0

for i in range(n):
   for j in range(n):
     sum = sum + i + j
```

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0
for i in range(n):
  for j in range(n):
    sum = sum + i + j
```

 $O(n^2)$ 

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0

for i in range(n) :
   for j in range(i) :
    sum = sum + i + j
```

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0

for i in range(n):
   for j in range(i):
     sum = sum + i + j
```

 $O(1/2 * n^2)$ 

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
sum = 0

for i in range(n) :
   for j in range(i) :
    sum = sum + i + j
```

 $O(n^2)$ 

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

```
def findNumber(myList, target) :
   for v in myList :
     if v == target :
       return True
   return False
```

#### 알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

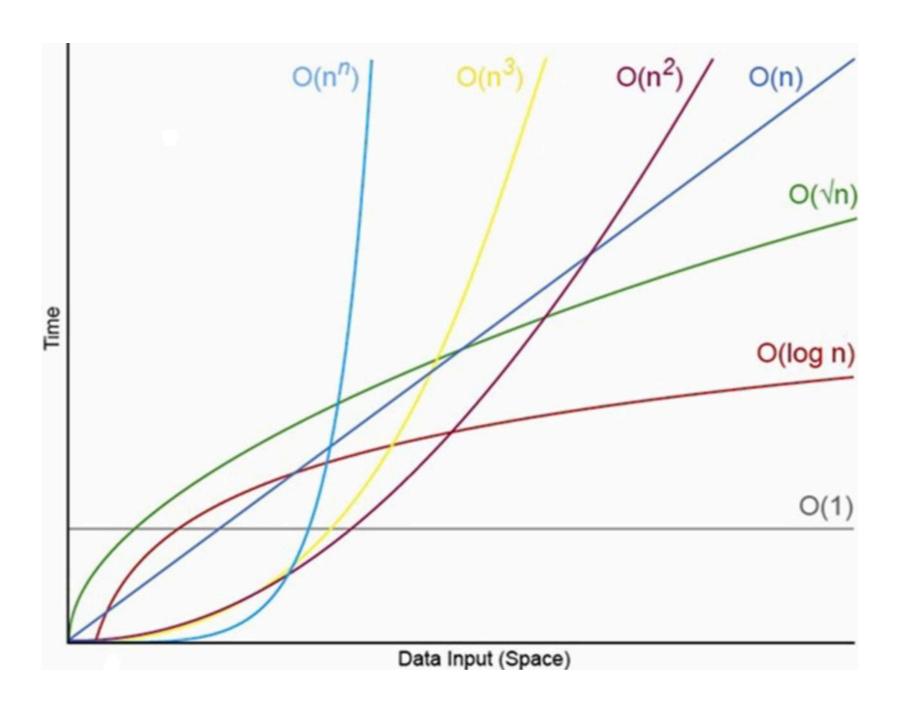
```
def findNumber(myList, target):
    for v in myList:
       if v == target:
         return True
    return False
```

O(n)

알고리즘이 **대략** 몇개의 명령을 수행하는가?

프로그램의 수행 시간을 유추할 수 있음

Big-O 표기: 최악의 경우에 수행하는 명령 수



https://apelbaum.wordpress.com/2011/05/05/big-o/

#### 시간복잡도와 실제 수행 시간

많은 명령을 수행한다 = 오래 걸린다

#### 시간복잡도와 실제 수행 시간

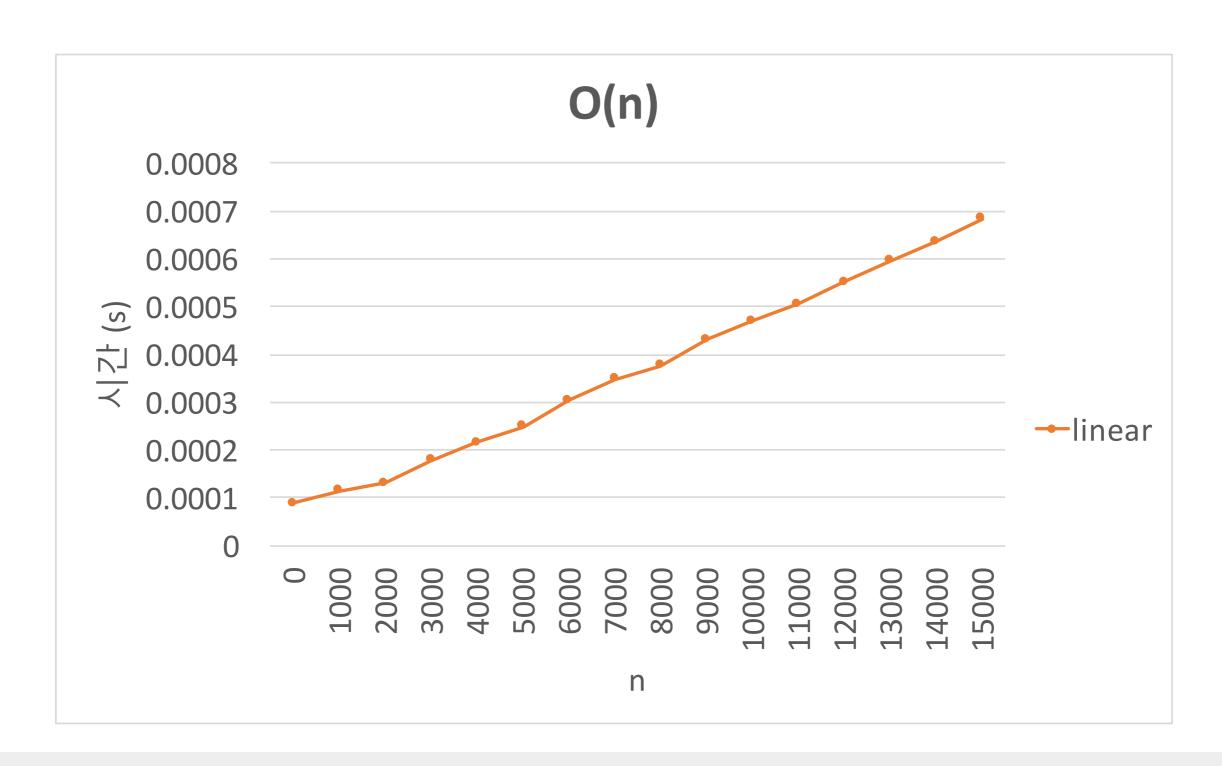
많은 명령을 수행한다 = 오래 걸린다

몇 개의 명령을 수행해야 1초가 걸리는가?

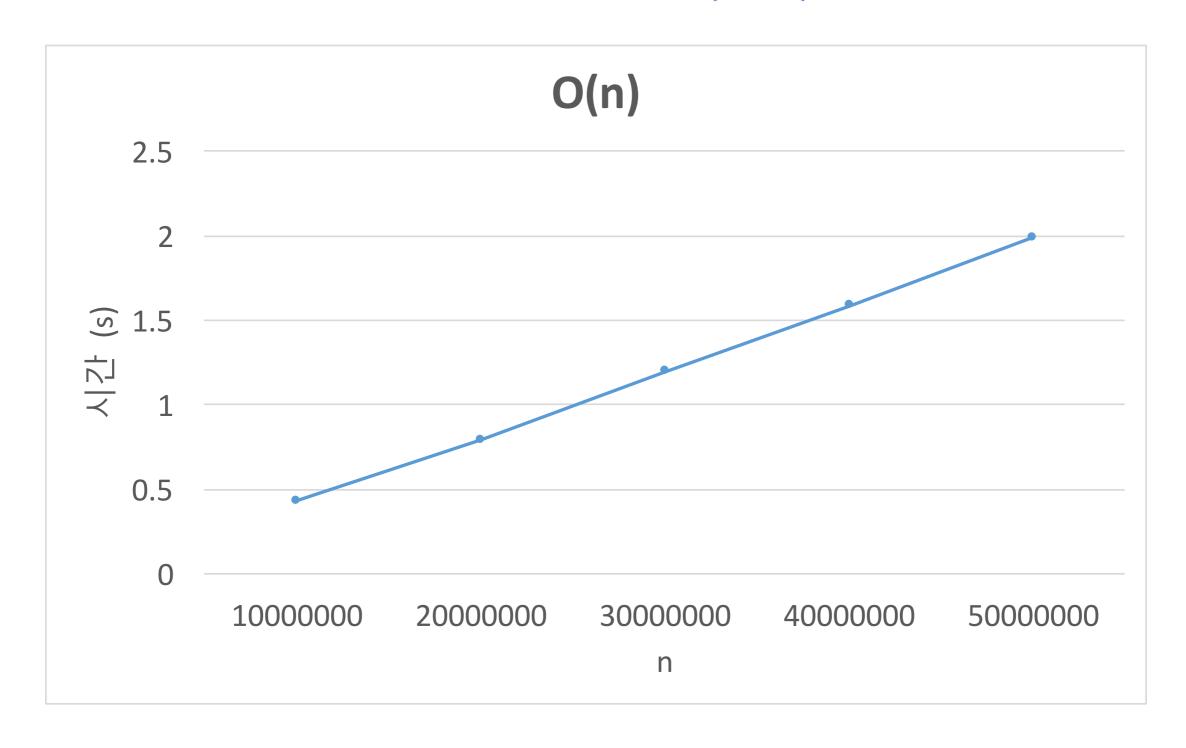
#### 실험

#### 아래 코드에 대하여 Elice에서 수행 시간을 측정

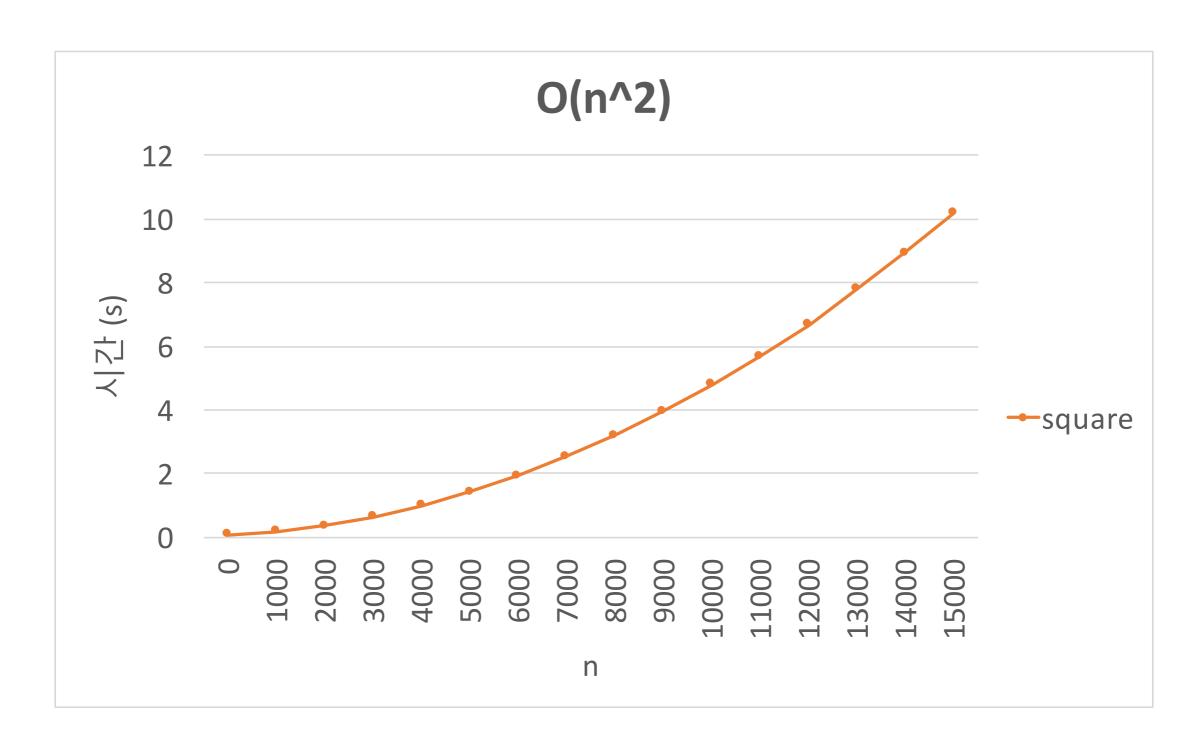
# 결과: O(n)



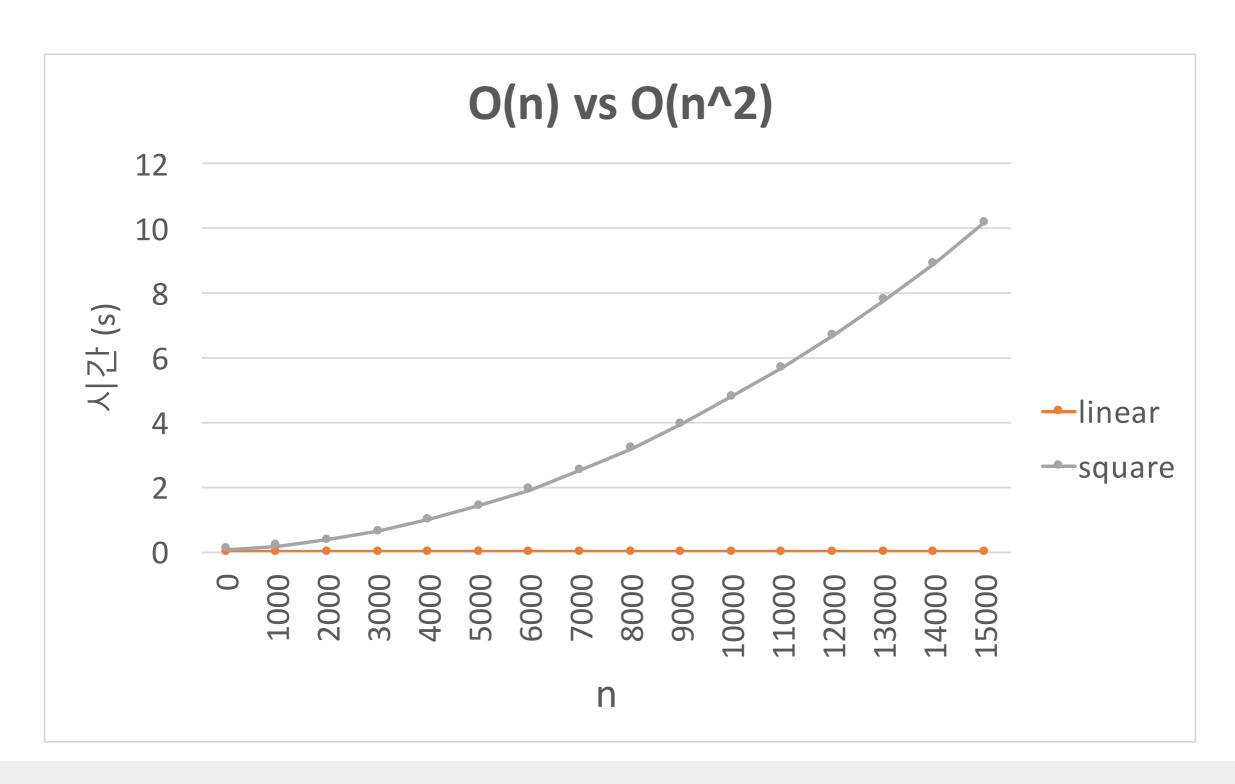
# 결과: O(n)



# 결과: O(n<sup>2</sup>)



# 결과: O(n) vs O(n²)



### 결론

대략 2500만개의 명령을 수행하면 1초가 걸린다

내 알고리즘이 최악의 경우에 2500만개를

수행하는지 고민해보자

숫자가 주어질 때, 소수인지 판정하라  $(단, 1 \le n \le 1,000,000,000 // 제한시간 1초)$ 



#### 알고리즘 개발

2 ~ n-1의 모든 수로 나누어본다.

#### 알고리즘 개발

2 ~ n-1의 모든 수로 나누어본다.

#### 풀이증명

가능한 모든 수로 나누어보기 때문에 옳은 풀이이다

#### 알고리즘 개발

2 ~ n-1의 모든 수로 나누어본다.

#### 풀이증명

가능한 모든 수로 나누어보기 때문에 옳은 풀이이다

#### 시간복잡도

O(n). 2500만보다 더 많은 명령을 수행하므로 1초에 안됨

#### 더 나은 알고리즘 개발

 $2 \le i \le \sqrt{n}$  의 모든 수로 나누어본다.

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 1. n이 소수인 경우

n이 소수인 경우, 2 ~ √n 의 모든 숫자로도 나누어 떨어지지 않는다.

따라서 우리 알고리즘은 True를 반환한다.

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

Case 2. n이 소수가 아닌 경우

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

n은 소수가 아니므로 약수가 존재한다.

이 약수들 중에서 √n보다 작거나 같은 약수가 **반드시 존재한다**.

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

관찰 1. a가 n의 약수면, (n / a)는 자연수이다.

관찰 2. 만약 a  $\geq \sqrt{n}$  이면,  $(n/a) \leq \sqrt{n}$  이다.

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

만약 모든 약수가 √n보다 크다고 가정하자. 이 약수를 a라고 하자.

#### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

만약 모든 약수가 √n보다 크다고 가정하자. 이 약수를 a라고 하자.

그러면 (관찰 2)에 의하여  $(n / a) \le \sqrt{n}$  이고, 이 또한 n의 약수이다.

### 풀이 증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

만약 모든 약수가 √n보다 크다고 가정하자. 이 약수를 a라고 하자.

그러면 (관찰 2)에 의하여  $(n / a) \le \sqrt{n}$  이고, 이 또한 n의 약수이다.

따라서 √n보다 작거나 같은 약수가 적어도 하나 존재한다.

### 풀이증명

증명해야 하는 명제 : 우리 알고리즘이 소수 판정을 옳게 한다

#### Case 2. n이 소수가 아닌 경우

우리 알고리즘은  $2 \le i \le \sqrt{n}$  의 수가 n으로 나누어 떨어지는지 테스트한다.

해당 범위에는 적어도 하나의 약수가 반드시 존재하므로, False가 반환된다.

### 시간복잡도

 $O(\sqrt{n})$ .  $n \le 1,000,000,000$  이므로,  $\sqrt{n} \le 31,622$ 

### 시간복잡도

 $O(\sqrt{n})$ .  $n \le 1,000,000,000$  이므로,  $\sqrt{n} \le 31,622$ 

2500만번보다 적은 횟수의 명령이므로

1초 내에 결과가 나온다

# [문제 4] 소수의 개수 구하기

범위가 주어질 때, 소수가 몇개인지 출력하라 (단,  $1 \le a$ ,  $b \le 100,000$  // 제한시간 1초)



모든 범위 내의 숫자들에 대하여 소수인지 판별

숫자 i가 소수인지 판별하기 위해서는 O(√i)가 걸림

모든 범위 내의 숫자들에 대하여 소수인지 판별

숫자 i가 소수인지 판별하기 위해서는 O(√i)가 걸림

따라서 [a, b] 내의 모든 숫자들을 판단하기 위해서는

$$O(\sqrt{a}) + O(\sqrt{(a+1)}) + O(\sqrt{(a+2)}) + ... + O(\sqrt{(b-1)}) + O(\sqrt{b})$$

## 3. 풀이 증명

범위 내 모든 숫자가 소수인지 테스트 해보므로 옳은 풀이임

[a, b] 내의 모든 숫자에 대해서 소수 판정을 함

[a, b] 내의 모든 숫자에 대해서 소수 판정을 함 O(n√n)

[a, b] 내의 모든 숫자에 대해서 소수 판정을 함 O(n√n)

최악의 경우는 [1, 100000]이므로,

 $100000 * \sqrt{100000} = 31,622,776$ 

[a, b] 내의 모든 숫자에 대해서 소수 판정을 함 O(n√n)

최악의 경우는 [1, 100000]이므로,

 $100000 * \sqrt{100000} = 31,622,776$ 

2500만보다 크기 때문에 1초 안에 안나온다

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

### 3. 문제 해결 증명

에라토스테네스의 체를 이용하면 소수를 구할 수 있음

숫자 하나를 잡고, 그 배수를 없애는데 얼마나 걸리는가?

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

숫자 하나를 잡고, 그 배수를 없애는데 얼마나 걸리는가?

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

숫자 하나를 잡고, 그 배수를 없애는데 얼마나 걸리는가?

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

숫자 하나를 잡고, 그 배수를 없애는데 얼마나 걸리는가?

#### 배수의 개수만큼의 연산이 필요함

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

숫자 하나를 잡고, 그 배수를 없애는데 얼마나 걸리는가?

배수의 개수만큼의 연산이 필요함

숫자 x에 대하여 O(b/x) 번이 필요하다

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

[1, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

[2, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

[2, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

[2, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

이건 이해 안하셔도 됩니다

$$\int_1^{n+1}rac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)$$

[2, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

 $O(n \log n) = 100,000 * \log 100,000 = 1,660,964$ 

[2, n] 의 모든 숫자에 대해서 배수를 지운다면 얼마나 걸리는가

 $O(n \log n) = 100,000 * \log 100,000 = 1,660,964$ 

2500만보다 적으므로 1초 안에 나온다!

# [문제 4] 소수의 개수 구하기



## [문제 3] 이진 탐색

n개의 **정렬된** 숫자 중에서, 특정 숫자가 포함되어 있는지 판단

입력의 예

6 1 3 4 5 9 10 4 출력의 예

True

# [문제 3] 이진 탐색

1 3 4 5 9 10 12

4를 찾자!

# [문제 3] 이진 탐색

단순한 풀이 : 하나하나 비교하며 찾아본다

1	3	4	5	9	10	12
---	---	---	---	---	----	----

4를 찾자!

단순한 풀이 : 하나하나 비교하며 찾아본다

O(n)

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

1	3 4	5	9	10	12
---	-----	---	---	----	----

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

1 3 4 5 9 10 12

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

1 3 4 5 9 10 12

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

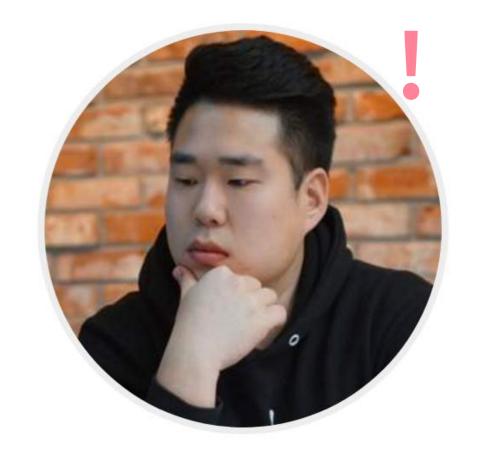
1 3 4 5 9 10 12

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

1 3 4 5 9 10 12
-----------------

정렬이 되어 있다는 사실을 이용한다

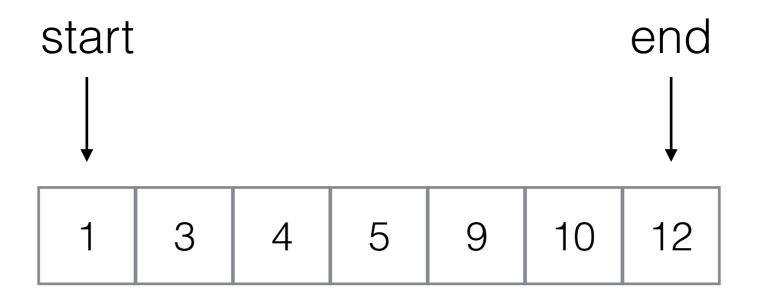
1	3	4	5	9	10	12
---	---	---	---	---	----	----

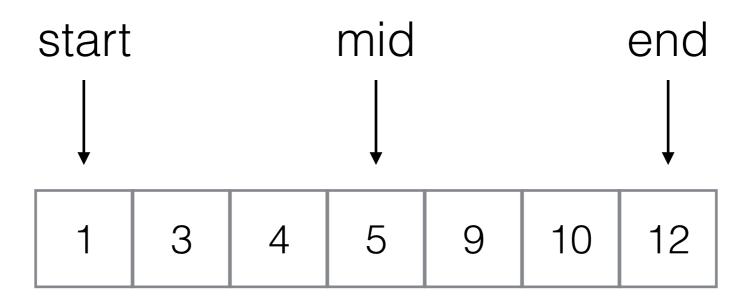


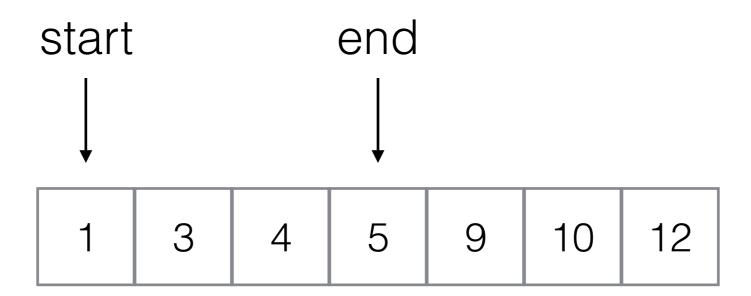


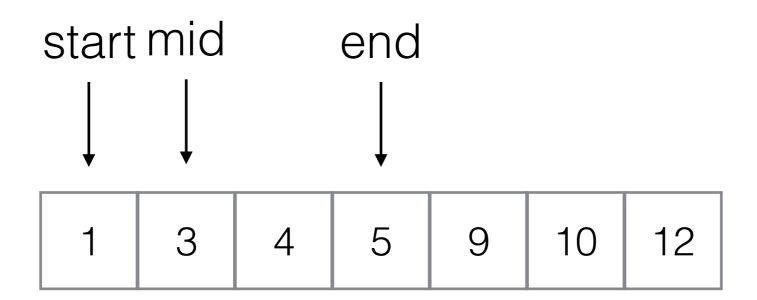
### 아직 키보드에 손 올리시면 안됩니다

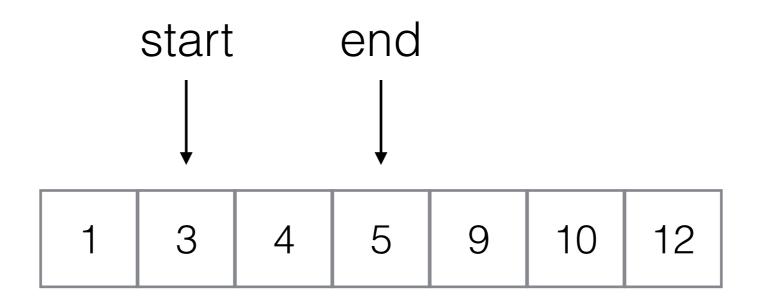
1 3 4 5 9 10 12

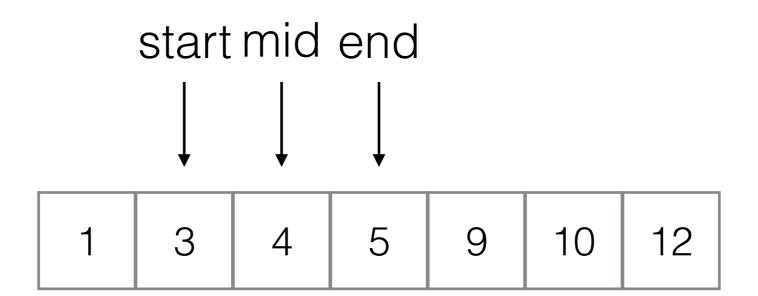


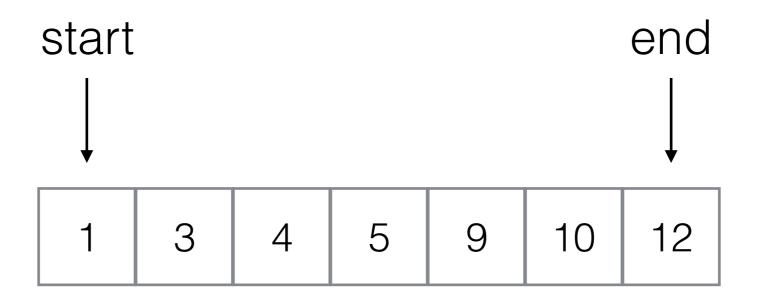


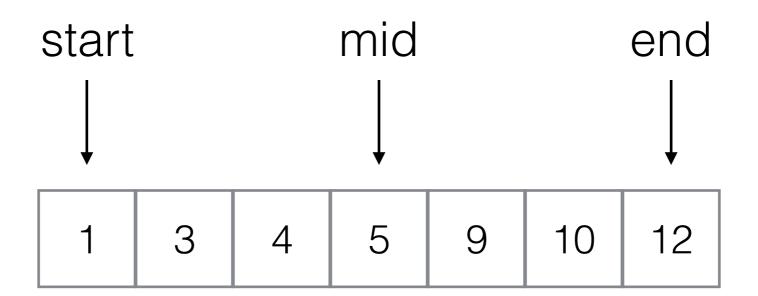


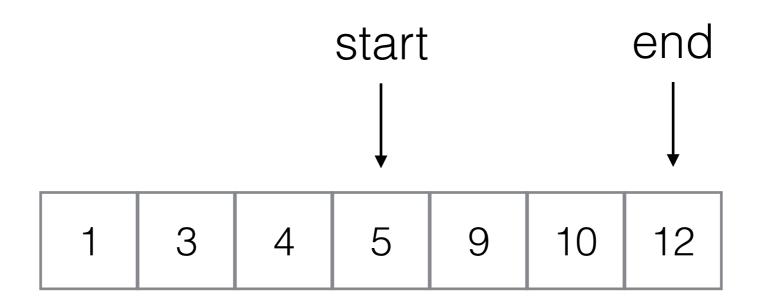


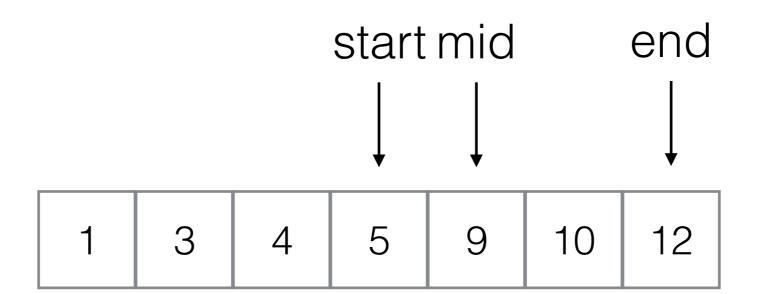


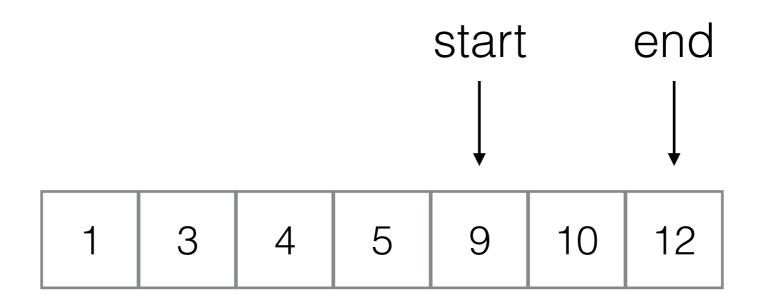


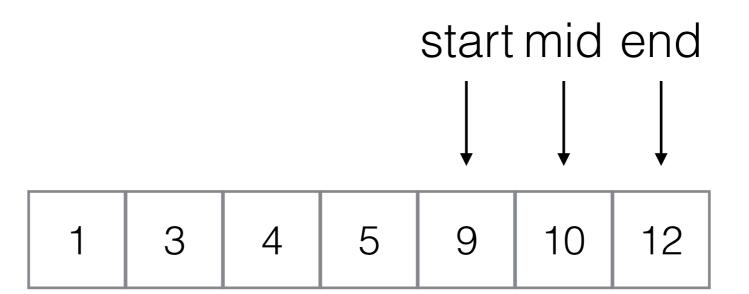


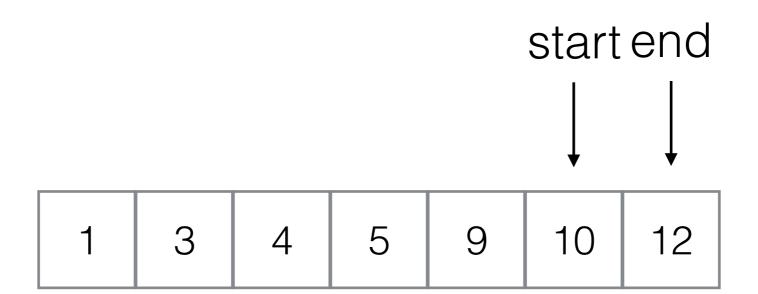


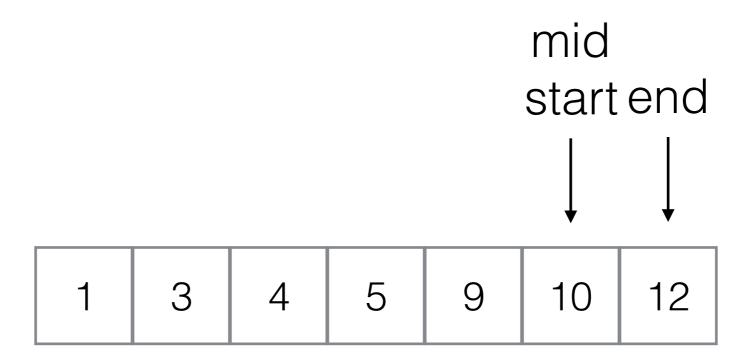


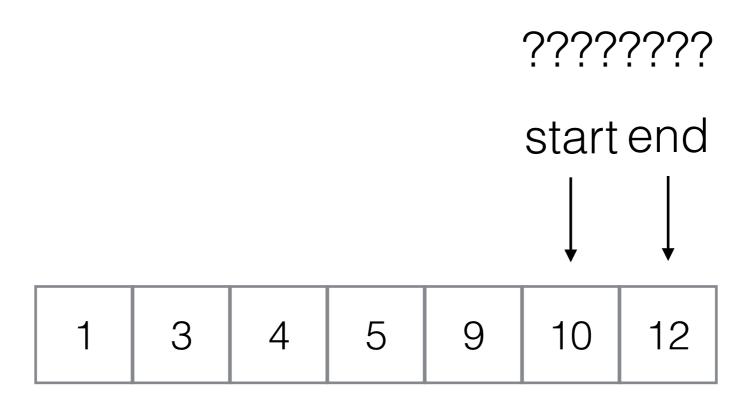


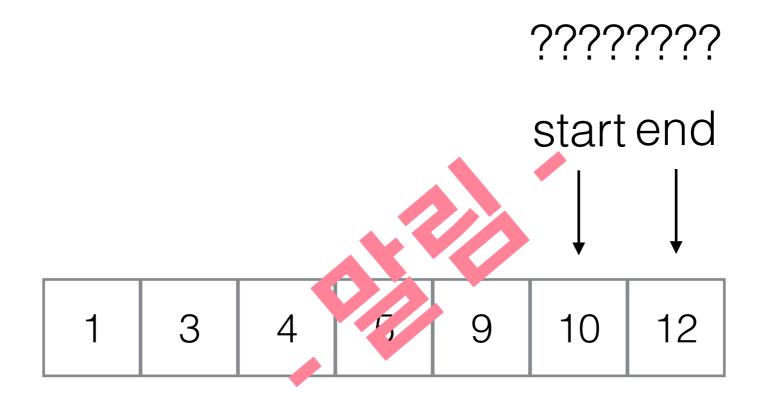




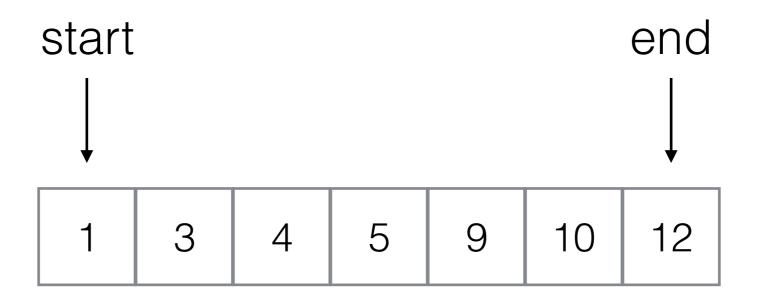




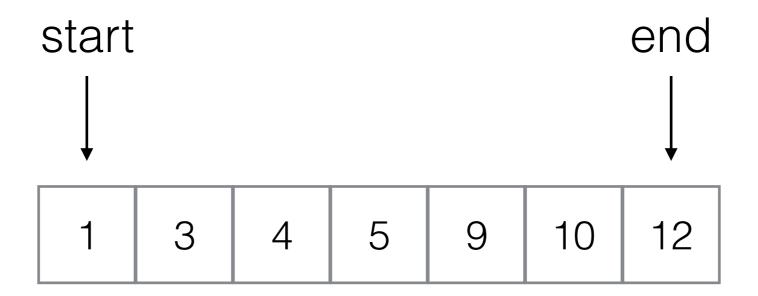




모든 단계에 "왜"를 생각하자



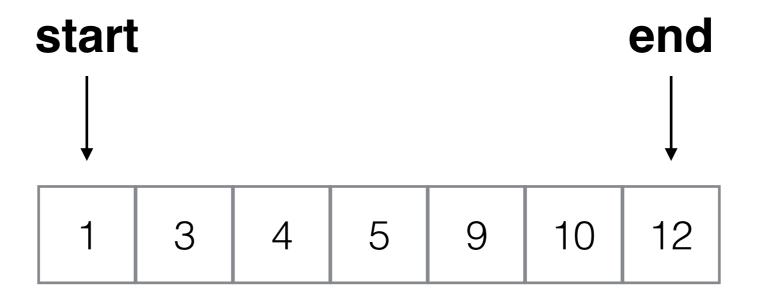
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

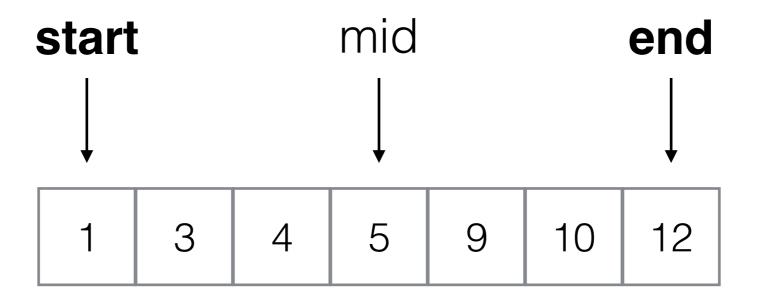
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

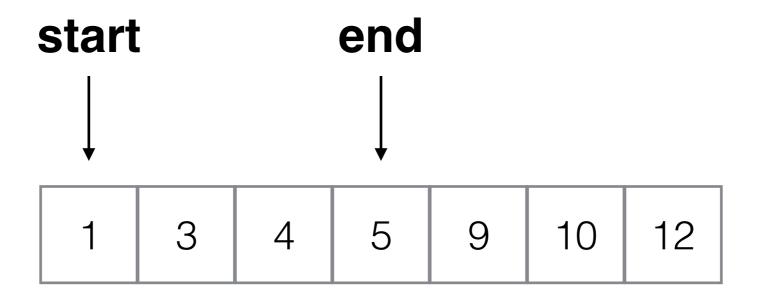
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

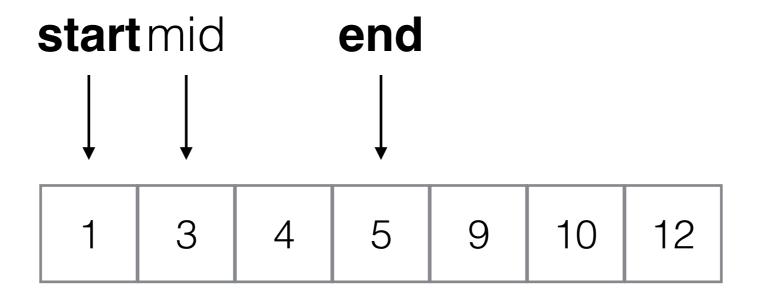
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

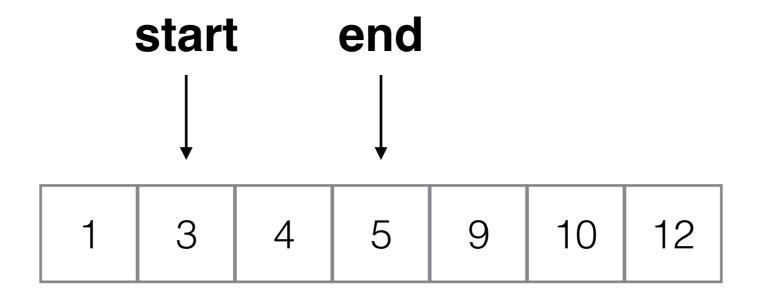
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

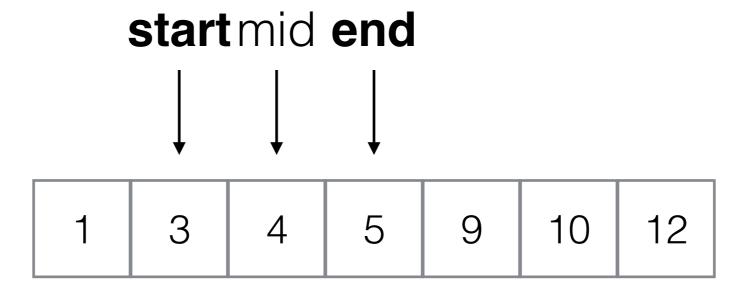
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

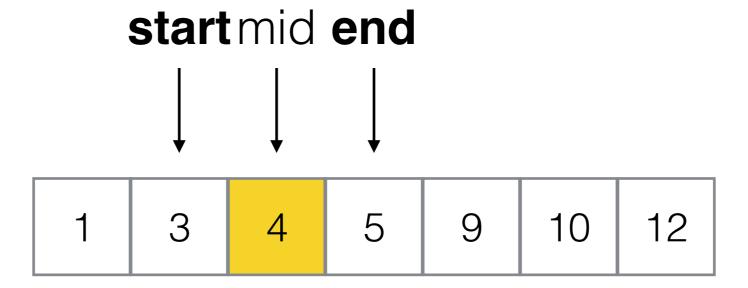
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

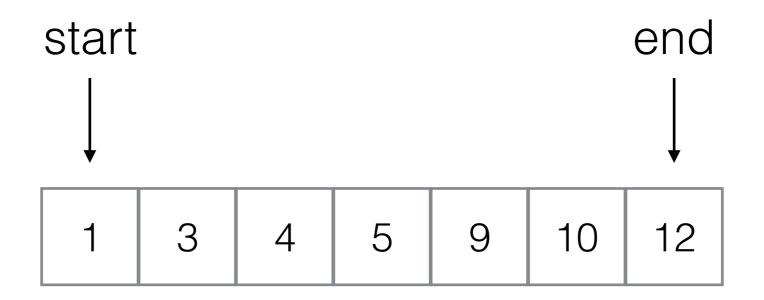
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 4를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

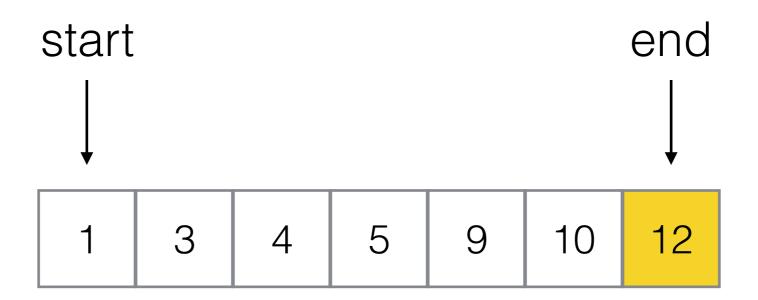
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 12를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

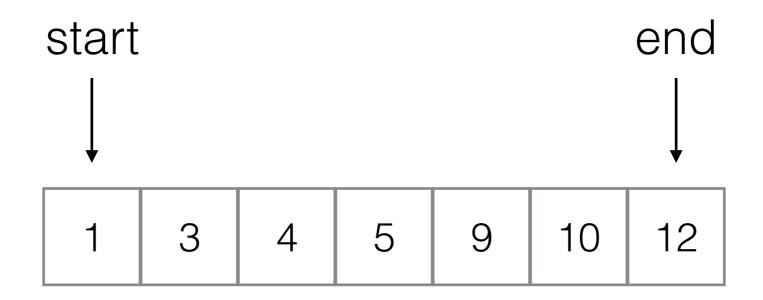
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 12를 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

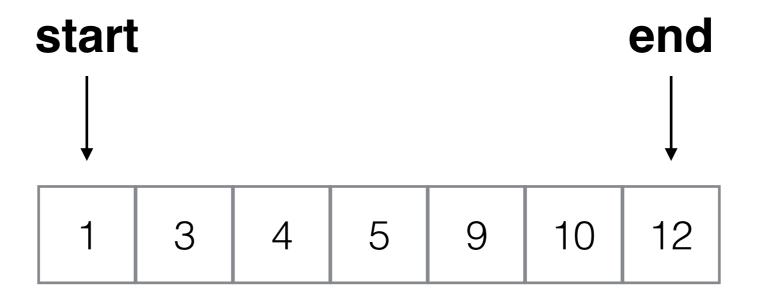
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

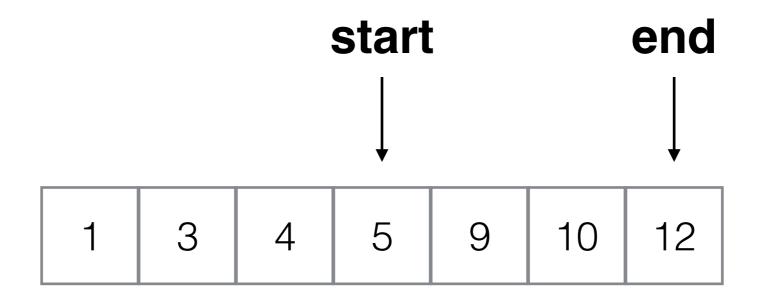
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

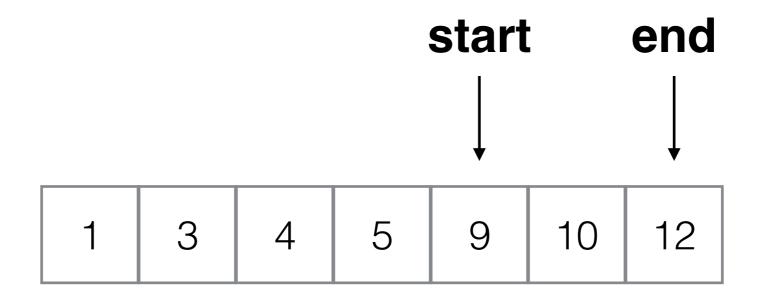
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

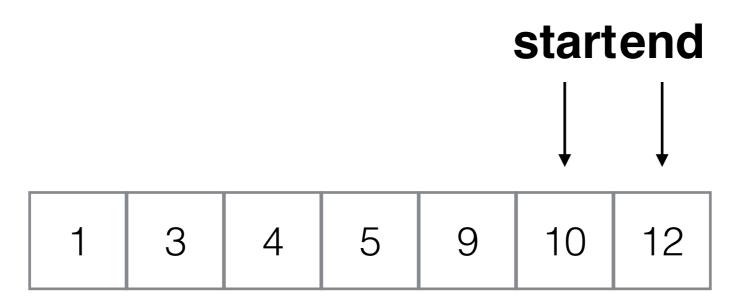
모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자!

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다

모든 단계에 "왜"를 생각하자



#### 11을 찾자! 없음

start : 항상 찾는 수보다 작은 숫자만 가리킨다



### 요약:문제풀이과정

- 1. 문제를 정확히 이해한다
- 2. 문제를 해결하는 알고리즘을 개발한다
- 3. 알고리즘이 문제를 해결한다는 것을 증명한다
- 4. 알고리즘이 제한시간 내에 동작한다는 것을 보인다
- 5. 알고리즘을 코드로 작성한다
- 6. 제출 후 만점을 받고 매우 기뻐한다

### 퀴즈와설문

퀴즈 URL은 강의 목록을 참고해주세요



### 감사합니다!

### 신현규

E-mail: hyungyu.sh@kaist.ac.kr

Kakao: yougatup

### /\* elice \*/

### 문의 및 연락처

academy.elice.io
contact@elice.io
facebook.com/elice.io
blog.naver.com/elicer