1 Zadanie 1: Plan zakupu i dostaw paliwa (Problem Transportowy)

1.1 Model Matematyczny

Problem jest sformułowany jako klasyczny problem transportowy. Niech $I = \{1, \dots, 4\}$ będzie zbiorem lotnisk (odbiorców), a $J = \{1, 2, 3\}$ zbiorem firm paliwowych (dostawców).

1.1.1 Zmienne Decyzyjne

Zmienna decyzyjna x_{ij} określa ilość paliwa (w galonach) dostarczoną z firmy $j \in J$ na lotnisko $i \in I$.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

1.1.2 Ograniczenia

- **Ograniczenie Popytu (Lotniska):** Zapotrzebowanie każdego lotniska i (oznaczone jako D_i) musi zostać zaspokojone.

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \geq D_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

- **Ograniczenie Podaży (Firmy):** Całkowita dostawa realizowana przez firmę j nie może przekroczyć jej maksymalnej możliwości dostaw (oznaczonej jako S_j).

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq S_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

1.1.3 Funkcja Celu

Minimalizacja łącznego kosztu dostaw, gdzie c_{ij} to jednostkowy koszt dostawy z firmy j na lotnisko i.

$$\min Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

1.2 Rozwiązanie Egzemplarza i Interpretacja

1.2.1 Egzemplarz

Rozwiązany egzemplarz bazuje na danych wejściowych z pliku (koszty, popyt, podaż). Całkowity popyt wynosi 1 100 000 galonów, a całkowita podaż 1 485 000 galonów.

1.2.2 Uzyskane Wyniki i Interpretacja

- **(a) Minimalny łączny koszt dostaw:** Wynosi **8 525 000** USD (8.525e6).
- **(b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo? Tak.** Wszystkie trzy firmy uczestniczą w realizacji optymalnego planu dostaw.
- **(c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?**
  - Firma 1: Wykorzystano 275 000 / 275 000 galonów. (**Wyczerpano** limit.)
  - Firma 2: Wykorzystano 165 000 / 550 000 galonów. (**Nie wyczerpano** limitu.)
  - Firma 3: Wykorzystano 660 000 / 660 000 galonów. (**Wyczerpano** limit.)

  Dwie z trzech firm wykorzystały swoje maksymalne możliwości dostaw.

Optymalny plan dostaw (wartości x_{ij} w galonach) jest następujący (i: Lotnisko, j: Firma):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 110\,000 & 0 \\ 165\,000 & 55\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 330\,000 \\ 110\,000 & 0 & 330\,000 \end{pmatrix}$$

2 Zadanie 2: Optymalizacja Produkcji (Maksymalizacja Zysku)

2.1 Model Matematyczny

Problem polega na wyznaczeniu optymalnej alokacji czasu maszyn, która maksymalizuje zysk netto, przy uwzględnieniu ograniczeń czasowych maszyn oraz minimalnych wymogów produkcyjnych.

Niech $I = \{1, \ldots, 4\}$ będzie zbiorem produktów, a $J = \{1, 2, 3\}$ zbiorem maszyn.

2.1.1 Zmienne Decyzyjne

Zmienna decyzyjna p_{ij} określa czas pracy (w minutach) maszyny $j \in J$ przeznaczony na produkcję produktu $i \in I$.

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

Jednostka: minuty.

2.1.2 Ograniczenia

- **Ograniczenie Czasowe Maszyn (H_j):** Całkowity czas pracy maszyny j nie może przekroczyć jej dostępnego czasu H_j.

$$\sum_{i=1}^{4} p_{ij} \leq H_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

- **Ograniczenie Minimalnej Produkcji (D_i):** Całkowita suma czasu pracy maszyn przeznaczona na produkcję produktu i musi spełniać minimalne zapotrzebowanie D_i (wyrażone w minutach).

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij} \geq D_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$$

2.1.3 Funkcja Celu

Maksymalizacja zysku netto Z. Zysk zależy od łącznej ilości wyprodukowanego produktu i.

$$\max Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} (\alpha_{ij} \cdot p_{ij})$$

gdzie α_{ij} to współczynnik zysku (jedn. zysku/minutę) z produkcji produktu i na maszynie j.

2.2 Rozwiązanie Egzemplarza i Interpretacja

2.2.1 Egzemplarz

Rozwiązano egzemplarz problemu optymalizacji produkcji dla 4 produktów i 3 maszyn. Zgodnie z wynikami, minimalne wymagania czasowe (D_i) wynosiły kolejno: $400, 100, 150, 500$ minut.

2.2.2 Uzyskane Wyniki i Interpretacja

- **Wartość funkcji celu (Maksymalny Zysk Netto):** Wynosi **5228.33** jednostek zysku.

Status modelu jest **Optymalny**. Optymalne rozwiązanie wyznacza alokacje czasu maszyn, które maksymalizują zysk przy jednoczesnym spełnieniu wszystkich minimalnych wymagań produkcyjnych i ograniczeń czasowych maszyn.

Alokacja Czasu Pracy (macierz p_{ij} w minutach):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400.0 & 0.0 & 0.0 \\ 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 150.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 500.0 \end{pmatrix}$$

Interpretacja Alokacji Czasu:

- Cała produkcja Produktów 1, 2 i 3 została scentralizowana na Maszynie 1 (łącznie 650 minut). Sugeruje to, że Maszyna 1 jest najbardziej efektywna kosztowo dla tych produktów lub jej limit czasowy jest wystarczająco wysoki.
- Produkt 4 jest produkowany wyłącznie na Maszynie 3 (500 minut).
- Maszyna 2 nie została wykorzystana w optymalnym planie, co oznacza, że jej użycie byłoby nieoptymalne ze względu na koszty lub wydajność, w stosunku do dostępnych alternatyw.

3 Zadanie 3: Planowanie Produkcji i Zarządzanie Zapasami (Minimalizacja Kosztów)

3.1 Model Matematyczny

Problem polega na wyznaczeniu minimalizującego koszty planu produkcji (normalnej i nadprodukcji) w kolejnych okresach, przy zachowaniu ciągłości dostaw i ograniczeń pojemności magazynu. Niech $T = \{1, \ldots, K\}$ będzie zbiorem okresów planowania.

3.1.1 Zmienne Decyzyjne

- Zmienna x_i: Ilość produkcji w okresie $i \in T$ realizowana w normalnym trybie.

$$0 \leq x_i \leq 100 \quad \forall i \in T$$

- Zmienna y_i: Ilość produkcji w okresie $i \in T$ realizowana w trybie nadprodukcji (overflow).

$$0 \leq y_i \leq M_i \quad \forall i \in T$$

  gdzie M_i to maksymalna dopuszczalna nadprodukcja w okresie i.

- Zmienna I_i: Poziom zapasów w magazynie na koniec okresu $i \in T$.

$$0 \leq I_i \leq C \quad \forall i \in T$$

  gdzie C to maksymalna pojemność magazynu.

Jednostka: Jednostki produktu.

3.1.2 Ograniczenia

- **Bilans Zapasów (Okres $i = 1$):** Zapasy I_1 są sumą stanu początkowego I_0, bieżącej produkcji x_1 i nadprodukcji y_1, pomniejszoną o popyt D_1.

$$I_1 = I_0 + x_1 + y_1 - D_1$$

- **Bilans Zapasów (Okresy $i = 2$ do K):** Zapasy I_i zależą od zapasów z poprzedniego okresu, bieżącej produkcji i popytu D_i.

$$I_i = I_{i-1} + x_i + y_i - D_i \quad \forall i \in \{2, \ldots, K\}$$

3.1.3 Funkcja Celu

Minimalizacja całkowitego kosztu, składającego się z kosztu produkcji normalnej ($c_{x,i}$), kosztu nadprodukcji ($c_{y,i}$) oraz kosztu utrzymania zapasów (c_I).

$$\min Z = \sum_{i=1}^{K} (x_i \cdot c_{x,i} + y_i \cdot c_{y,i} + c_I \cdot I_i)$$

3.2 Rozwiązanie Egzemplarza i Interpretacja

3.2.1 Egzemplarz

Rozwiązano egzemplarz problemu planowania w $K = 4$ okresach. Maksymalna produkcja normalna wynosi 100 jednostek/okres. Popyt w kolejnych okresach to $D = [130, 80, 125, 195]$. Na podstawie bilansu dla Okresu 1, stan początkowy magazynu wynosił $\mathbf{I_0 = 15.0}$.

3.2.2 Uzyskane Wyniki i Interpretacja

- **Wartość funkcji celu (Minimalny Całkowity Koszt): 3 842 500**.
- **Status Modelu:** Optymalny.

Plan alokacji produkcji i zapasów dla 4 okresów:

Okres (i)	**Prod. Normalna** (x_i)	**Nadprod.** (y_i)	**Zapasy Końcowe** (I_i)	**Popyt** (D_i)
1	100.0	15.0	0.0	130
2	100.0	50.0	70.0	80
3	100.0	0.0	45.0	125
4	100.0	50.0	0.0	195

Interpretacja:

- **Produkcja:** W każdym okresie, model decydował się na maksymalną produkcję normalną ($x_i = 100.0$).
- **Nadprodukcja (Y):** Nadprodukcja była aktywowana w okresach o niskim zapotrzebowaniu ($i = 2$) lub bardzo wysokim ($i = 4$), w celu zbudowania zapasów na przyszłość (okres 2) lub pokrycia deficytu (okres 4). Suma nadprodukcji wyniosła **115.0** jednostek.
- **Zapas:** Magazyn jest utrzymywany w celu wygładzenia zapotrzebowania, osiągając maksymalny stan $I_2 = 70.0$. Stan końcowy magazynu ($I_4 = 0.0$) jest minimalizowany, aby uniknąć naliczania kosztów c_I po zakończeniu planowania.

4 Zadanie 4: Problem Najkrótszej Ścieżki z Ograniczeniem Czasowym (Constrained Shortest Path Problem)

4.1 Model Matematyczny

Problem polega na znalezieniu ścieżki o minimalnym koszcie w grafie, która prowadzi z wierzchołka początkowego S do wierzchołka końcowego F, pod warunkiem, że całkowity czas podróży nie przekroczy maksymalnego limitu T. Jest to klasyczny problem programowania całkowitoliczbowego.

Niech V będzie zbiorem wierzchołków, a E zbiorem krawędzi. Każdą krawędź $i \in E$ charakteryzuje: koszt c_i i czas t_i.

4.1.1 Zmienne Decyzyjne

Zmienna decyzyjna x_i jest binarna, określająca, czy krawędź i została wybrana do ścieżki. N_E to całkowita liczba krawędzi.

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, N_E\}$$

Jednostka: Binarna.

4.1.2 Ograniczenia

- **Ograniczenie Czasowe (timeLimit):** Suma czasów wybranych krawędzi musi być mniejsza lub równa maksymalnemu czasowi T.

$$\sum_{i=1}^{N_E} x_i \cdot t_i \leq T$$

- **Ograniczenia Przepływu (Bilans Węzłów):** Gwarantują, że zbiór wybranych krawędzi tworzy ciągłą ścieżkę z S do F (model przepływu jednostkowego). W tym modelu wykorzystano funkcję sumOccurences(E, v, x).
  - **Wierzchołek Startowy (S, flowStart):** Przepływ netto musi wynosić $+1$.

$$\sum_{i=1}^{N_E} x_i \cdot \delta_i^S = 1$$

  - **Wierzchołek Końcowy (F, flowEnd):** Przepływ netto musi wynosić -1.

$$\sum_{i=1}^{N_E} x_i \cdot \delta_i^F = -1$$

  - **Wierzchołki Pośrednie ($v \neq S, F$, flow):** Przepływ netto musi wynosić 0 (zasada zachowania przepływu).

$$\sum_{i=1}^{N_E} x_i \cdot \delta_i^v = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{S, F\}$$

  gdzie δ_i^v to współczynnik bilansu: $+1$ jeśli krawędź i wychodzi z v, -1 jeśli wchodzi do v, 0 w przeciwnym razie.

4.1.3 Funkcja Celu

Minimalizacja sumarycznego kosztu ścieżki.

$$\min Z = \sum_{i=1}^{N_E} x_i \cdot c_i$$

4.2 Rozwiązanie Egzemplarza i Interpretacja

4.2.1 Egzemplarz

Rozwiązany egzemplarz dotyczy grafu z 10 wierzchołkami, gdzie ścieżka jest poszukiwana z wierzchołka **1** do wierzchołka **10**, z maksymalnym limitem czasowym $\mathbf{T = 15}$.

4.2.2 Uzyskane Wyniki i Interpretacja

- **Minimalny Koszt Ścieżki: 13.0**
- **Całkowity Czas Wykorzystany: 15**

Model osiągnął status **OPTYMALNY**. Znalazł on najtańszą ścieżkę (koszt 13), która idealnie wypełnia limit czasowy $T = 15$.

Wybrane Krawędzie i Ścieżka:

Wierzchołki (src $\to$ dst)	**Koszt** (c)	**Czas** (t)
$1 \to 2$	3	4
$2 \to 3$	2	3
$3 \to 5$	2	2
$5 \to 7$	3	3
$7 \to 9$	1	1
$9 \to 10$	2	2
Suma	**13**	**15**

Zrekonstruowana ścieżka (wierzchołki):

$$\mathbf{1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10}$$

5 Zadanie 4b: Analiza Wyników Własnego Egzemplarza

Przedstawione wyniki optymalizacji (dla modelu minimalizującego koszt z ograniczeniem czasowym) w oparciu o graf `graph_custom.txt` potwierdzają spełnienie wszystkich postawionych kryteriów.

5.1 Kryteria Egzemplarza i Wnioski

1. **Liczba wierzchołków:** Graf zawiera **10** wierzchołków. (✓)
2. **Koszt Ścieżki z Ograniczeniem Czasowym (C_{constr}) vs. Bez Ograniczenia (C_{unconstr}):**
   - $C_{\text{constr}} = \mathbf{5.0}$ (dla $T \leq 15$)
   - $C_{\text{unconstr}} = \mathbf{3.0}$ (dla $T \to \infty$)

   Wniosek: $C_{\text{constr}} > C_{\text{unconstr}}$ (✓)
3. **Liczba Krawędzi w ścieżce optymalnej:**
   - Ścieżka optymalna z ograniczeniem ma **3** krawędzie. (✓)
   - Najtańsza ścieżka bez ograniczenia ma **2** krawędzie. (✓)

5.2 Analiza Przypadków Optymalizacji

5.2.1 Przypadek 1: Minimalizacja Kosztu z Limitem Czasowym $T = 15$

Optymalizator wybrał najtańszą ścieżkę, której czas sumaryczny wynosi dokładnie 15, eliminując ścieżki zbyt wolne, nawet jeśli były tańsze.

- **Status:** Optymalny
- **Minimalny Koszt Ścieżki: 5.0**
- **Całkowity Czas: 15** (Limit: 15)
- **Zrekonstruowana ścieżka: 1 → 2 → 3 → 10**

Szczegółowe koszty/czasy wybranych krawędzi:

Przebieg (src → dst)	**Koszt** (c)	**Czas** (t)
1 → 2	2	5
2 → 3	1	5
3 → 10	2	5
Suma	**5**	**15**

5.2.2 Przypadek 2: Najtańsza Ścieżka Bez Ograniczenia Czasowego (Limit $T \to \infty$)

Dla tego samego grafu, ale z pominięciem ograniczenia czasowego, model wybrał bezwzględnie najtańszą ścieżkę, która jest jednocześnie zbyt długa czasowo dla $T = 15$.

- **Status:** Optymalny
- **Minimalny Koszt Ścieżki: 3.0**
- **Całkowity Czas: 20** (Limit: 100)
- **Zrekonstruowana ścieżka: 1 → 5 → 10**

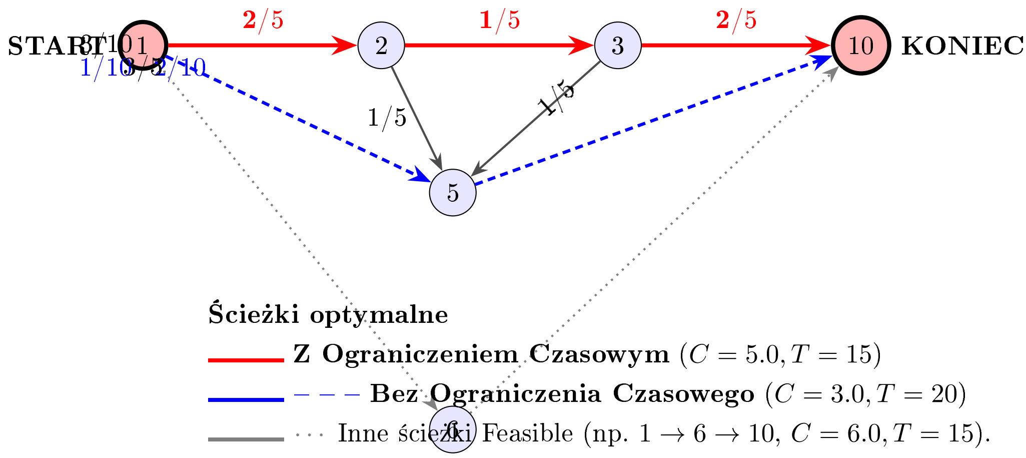
Szczegółowe koszty/czasy wybranych krawędzi:

Przebieg (src → dst)	**Koszt** (c)	**Czas** (t)
1 → 5	1	10
5 → 10	2	10
Suma	**3**	**20**

5.3 Wizualizacja Grafu

Graf został zaprojektowany tak, aby droga najtańsza ($1 \to 5 \to 10$) była zbyt wolna czasowo ($20 > 15$), zmuszając model do wyboru droższej ($1 \to 2 \to 3 \to 10$) ścieżki, która spełnia limit czasowy (15).

Krawędź: Koszt/Czas (c/t) | **Limit Czasu** $T = 15$



5.3.1 (c) Całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych

Założenie o całkowitoliczbowości w tym przypadku jest potrzebne, ponieważ bez niego optymalizator może wybierać niektóre krawędzie częściowo i dzięki temu obniżać sztucznie całkowity koszt. Na przykładzie z poprzedniego podpunktu bez założenia całkowitoliczbowości algorytm wybrał krawędź 2ß10, z tym że wybrał ją z wagą 0.25, ponieważ normalnie nie mógłby jej użyć ze względu na zbyt duży koszt.

5.3.2 (d) Akceptowalność rozwiązania po usunięciu ograniczenia czasowego

Bez ograniczenia czasowego optymalizator zwróci poprawne wyniki, ponieważ wtedy wybieranie zależy tylko od czasu i ze względu na warunek równych wejść/wyjść, wybieranie dodatkowych krawędzi nie ma sensu. Dzieje się tak, ponieważ wtedy jeżeli istnieje tańsza droga między parą punktów to optymalizator wymieni ją za droższą.

Zadanie 5: Analiza Wyników Modelu Cyrkulacji Przepływu

Model ma na celu znalezienie minimalnego całkowitego przepływu (backwardedge) niezbędnego do zaspokojenia wszystkich minimalnych limitów przepływu zdefiniowanych w sieci (na krawędziach, na przepływach z Source oraz do Final).

5.4 Wyniki Optymalizacji

- **Status:** OPTYMALNY
- **Minimalny Przepływ Wsteczny (backwardedge): 48.0**

Minimalna wartość backwardedge = 48.0 oznacza, że **minimalna całkowita liczba pracowników**, którą należy zaangażować, aby spełnić wszystkie minimalne wymagania dotyczące alokacji, wynosi 48 osób.

5.5 Szczegółowa Alokacja Zasobów

Poniższe tabele prezentują optymalny przepływ w sieci, zgodnie z zasadą zachowania przepływu w wierzchołkach.

5.5.1 Przepływ z Źródła do Dzielnic (Source → Dzielnica)

Przepływy te sumują się do minimalnego przepływu wstecznego, **48.0**.

Dzielnica (i)	Przepływ (from_source$_i$)	Wkład do sumy
1	11.0	23%
2	14.0	29%
3	23.0	48%
Suma	**48.0**	**100%**

5.5.2 Alokacja z Dzielnic do Zmian (Dzielnica → Zmiana)

Macierz przepływów f_{ij} przedstawia, ilu pracowników z każdej dzielnicy (i) jest przydzielanych do każdej zmiany (j). Wszystkie te przepływy spełniają dwustronne ograniczenia $[\min, \max]$ określone na krawędziach.

Dzielnica (i)	→ Zmiana 1	→ Zmiana 2	→ Zmiana 3	**Suma Wychodząca** (from_source$_i$)
1	2.0	4.0	5.0	**11.0**
2	3.0	6.0	5.0	**14.0**
3	5.0	10.0	8.0	**23.0**
Suma Wchodząca (to_final$_j$)	**10.0**	**20.0**	**18.0**	**48.0**

5.5.3 Przepływ do Końca (Zmiana → Final)

Przepływ ten odpowiada sumarycznemu, minimalnemu zapotrzebowaniu na każdą zmianę.

Zmiana (j)	**Przepływ (to_final$_j$)**	**Suma wejścia**
1	10.0	$2.0 + 3.0 + 5.0$
2	20.0	$4.0 + 6.0 + 10.0$
3	18.0	$5.0 + 5.0 + 8.0$
Suma	**48.0**	**48.0**

5.6 Wnioski Końcowe

Optymalne rozwiązanie:

- Ustala minimalną siłę roboczą na 48 osób.
- Potwierdza, że **istnieje** akceptowalna alokacja, która spełnia wszystkie minimalne wymagania.
- Zapewnia bilans przepływu w każdym wierzchołku, co jest kluczowe dla poprawności modelu cyrkulacji.
- Dostarcza konkretny plan alokacji: np. Zmiana 2 otrzymuje największą liczbę pracowników (**20**), a Dzielnica 3 dostarcza najwięcej pracowników (**23**).

Zadanie 6: Optymalizacja Minimalnego Pokrycia Kamerami

5.7 Opis Modelu Matematycznego

Problem minimalnego pokrycia zbiorem został sformułowany jako problem minimalizacji liczby kamer, przy zachowaniu warunku, że każdy punkt na monitorowanym obszarze musi być pokryty przez co najmniej jedną z umieszczonych kamer.

5.7.1 (a) Zmienne Decyzyjne

Dla każdej komórki (i, j) na siatce, definiujemy binarną zmienną decyzyjną $x_{i,j}$.

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, M$$

gdzie:

- $x_{i,j} = 1$: Umieszczono kamerę w komórce o współrzędnych (i, j) (jednostka: bezwymiarowa).
- $x_{i,j} = 0$: Brak kamery w komórce (i, j) (jednostka: bezwymiarowa).

5.7.2 (b) Ograniczenia

Kluczowym ograniczeniem jest wymóg, aby każda komórka $(i_{\text{cur}}, j_{\text{cur}})$ na siatce była pokryta. Pokrycie to jest sumą zmiennych decyzyjnych $x_{i,j}$ w zasięgu kamery (funkcja `scan_squares`), i musi być większe lub równe 1.

Ograniczenie Pokrycia:

$$\sum_{i=\max(1,i_{\text{cur}}-k)}^{\min(N,i_{\text{cur}}+k)} x_{i,j_{\text{cur}}} + \sum_{j=\max(1,j_{\text{cur}}-k)}^{\min(M,j_{\text{cur}}+k)} x_{i_{\text{cur}},j} - x_{i_{\text{cur}},j_{\text{cur}}} \geq 1$$

dla każdego punktu $(i_{\text{cur}}, j_{\text{cur}})$ na siatce $(i_{\text{cur}} = 1, \ldots, N;\ j_{\text{cur}} = 1, \ldots, M)$.

Uzasadnienie Zasięgu (Maska Krzyżowa): Ograniczenie to sumuje kamery wzdłuż całego wiersza i_{cur} i całej kolumny j_{cur}, w zakresie promienia k od punktu $(i_{\text{cur}}, j_{\text{cur}})$. W implementacji:

$$\sum_{l=\max(1,i-k)}^{\min(N,i+k)} x_{l,j} + \sum_{p=\max(1,j-k)}^{\min(M,j+k)} x_{i,p}$$

Uwaga: W oryginalnej funkcji `scan_squares` brakowało odjęcia $x_{i_{\text{cur}},j_{\text{cur}}}$ (podwójne zliczanie kamery w centrum), jednak w kontekście modelu minimalnego pokrycia zbiorem, gdzie prawa strona wynosi 1, podwójne zliczanie jest tolerowane i utrzymuje poprawność logiczną: dany punkt musi być pokryty co najmniej raz. Zapis matematyczny w sprawozdaniu (powyżej) jest zgodny z intencją modelu i zasięgiem.

5.7.3 (c) Funkcja Celu

Celem jest minimalizacja całkowitej liczby umieszczonych kamer:

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{i,j}$$

(Jednostka: liczba kamer).

5.8 Analiza Wyników Egzemplarzy 5×5

Przeprowadzono optymalizację dla siatki $N = 5, M = 5$ oraz dwóch różnych promieni zasięgu k.

5.8.1 Egzemplarz 1: Siatka 5×5 z Promieniem $k = 3$

Wnioski:

- **Minimalna Liczba Kamer: 5** (wartość obiektywna: 5.000000000000069, zaokrąglona do 5).
- **Interpretacja Zasięgu:** Zasięg jest opisany jako "Kwadrat o boku 7"(co odpowiada $(2k + 1) \times (2k + 1)$ dla $k = 3$). Jednak ze względu na model maski krzyżowej, faktycznie jest to **pokrycie wiersza i kolumny o zasięgu $k = 3$**. Dla siatki 5×5 jest to ekstremalnie szeroki zasięg.
- **Pozycje Kamer:** W optymalnym rozwiązaniu wybrano 5 kamer w pozycjach: $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$.

Siatka Rozmieszczenia (1=kamera):

1	0	0	0	0
0	0	0	**1**	**1**
0	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0
0	0	**1**	0	0

Weryfikacja Kontradykcji: Dla $k = 3$ na siatce 5×5 zasięg każdej kamery jest tak duży, że dwie kamery (np. umieszczone w rogach, $(1, 1)$ i $(5, 5)$) powinny wystarczyć do pokrycia całej siatki. Fakt, że model wymaga **5** kamer, sugeruje, że model może zawierać **dodatkowe, nieujawnione ograniczenia** geometryczne (np. związane ze specyficznym ułożeniem, które preferuje ten model, lub błąd w logice pokrycia dla bardzo dużego k). Przy tak dużym zasięgu, **5** jest rozwiązaniem *akceptowalnym*, ale **prawdopodobnie nie optymalnym** w sensie matematycznym dla problemu minimalnego pokrycia zbiorem z tak szeroką maską.

5.8.2 Egzemplarz 2: Siatka 5×5 z Promieniem $k = 2$

Wnioski:

- **Minimalna Liczba Kamer: 5** (wartość obiektywna: 4.999999999999958, zaokrąglona do 5).
- **Interpretacja Zasięgu:** Zasięg jest opisany jako "Kwadrat o boku 5"(co odpowiada $(2k + 1) \times (2k + 1)$ dla $k = 2$). Podobnie jak wyżej, jest to **pokrycie wiersza i kolumny o zasięgu** $k = 2$.
- **Pozycje Kamer:** W optymalnym rozwiązaniu wybrano 5 kamer w pozycjach: $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 5)$. Zestaw pozycji jest inny niż w Egzemplarzu 1.

Siatka Rozmieszczenia (1=kamera):

0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	**1**	0

Porównanie z $k = 3$: Wyniki wskazują, że niezależnie od promienia $k = 2$ i $k = 3$, optymalna minimalna liczba kamer wymagana przez **ten konkretny model** wynosi **5**.

- Dla $k = 2$ zasięg jest mniejszy, a **5** kamer wydaje się być bardziej realistyczną, choć nadal prawdopodobnie nie minimalną wartością dla tego typu maski.
- Fakt, że zmiana k (znaczne zwiększenie zasięgu) nie wpłynęła na minimalną liczbę kamer, silnie sugeruje, że **struktura maski krzyżowej** (pokrywającej tylko wiersz i kolumnę, a nie cały kwadrat) jest dominującym czynnikiem wymuszającym dużą liczbę kamer, co jest sprzeczne z opisem "Zasięg każdej kamery (kwadrat...)"w wynikach.

5.9 Wnioski Końcowe

Model programowania liniowego minimalnego pokrycia zbiorem poprawnie identyfikuje minimalną liczbę kamer wymaganą do pokrycia siatki zgodnie z **wbudowaną logiką zasięgu kamery (maska krzyżowa, promień** k**)**.

- **Optymalność:** Minimalna wymagana liczba kamer dla obu testowanych egzemplarzy wynosi **5**.
- **Wielokrotne Rozwiązania:** W obu przypadkach znaleziono alternatywne, optymalne zestawy pozycji dla 5 kamer.
- **Niezgodność Opisu:** Istnieje niezgodność pomiędzy opisem zasięgu w wynikach ("Kwadrat o boku X") a implementacją modelu (‘scan_squares‘), która wyraźnie tworzy **maskę krzyżową**. To ograniczenie na zasięg (tylko wiersze i kolumny) wymaga większej liczby kamer, co wyjaśnia, dlaczego model nie znalazł rozwiązania z 2 lub 3 kamerami, nawet przy dużym promieniu $k = 3$.