Obliczenia Naukowe Laboratoria - Lista 4: Interpolacja Wielomianowa Newtona

Kajetan Plewa

7 grudnia 2025

1 Implementacja: Ilorazy Różnicowe (Zad. 1)

1.1 Krótki opis problemu

Celem zadania było obliczenie współczynników c_i wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona (ilorazów różnicowych) dla zadanych węzłów x_i i wartości funkcji $f(x_i)$. Wymogiem była implementacja algorytmu bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Rozwiązanie zaimplementowane w `ilorazyRoznicowe.jl`

Algorytm został zaimplementowany z użyciem rekurencji.
Dla każdego współczynnika c_i korzystamy z przedstawionego na wykładzie wzoru:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{1}$$

2 Implementacja: Wartość Wielomianu w Postaci Newtona (Zad. 2)

2.1 Krótki opis problemu

Zadanie polegało na obliczeniu wartości wielomianu $N_n(x)$ w zadanym punkcie $x = t$. Wymagano implementacji w czasie $O(n)$.

2.2 Rozwiązanie zaimplementowane w `newton.jl`

W celu osiągnięcia złożoności $O(n)$, skorzystano z postaci Newtona i **uogólnionego algorytmu Hornera**. Implementacja przetwarza współczynniki c_i i węzły x_i od najwyższego stopnia n do 0, iteracyjnie stosując wzór rekurencyjny

$$P_n(t) = c_i + (t - x_i) \cdot P_{n-1}(t) \tag{2}$$

3 Implementacja: Konwersja do Postaci Naturalnej (Zad. 3)

3.1 Krótki opis problemu

Zadanie polegało na przekształceniu współczynników wielomianu z postaci Newtona (c_i) do postaci naturalnej (a_i), czyli $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Wymagana złożoność czasowa to $O(n^2)$.

3.2 Rozwiązanie zaimplementowane w `normalna.jl`

Zaimplementowany algorytm, podobnie jak poprzedni korzysta z własności postaci Newtona. Zastosowano podejście iteracyjne które *odwija* składniki postaci Newtona.

$$P_n(t) = c_i + (t - x_i) \cdot P_(n-1)(t) \tag{3}$$

Poniżej znajduje się wytłumaczenie oznaczeń i działania kodu:

- Początkowo tablica a kopiuje zawartość przekazanej tablicy z ilorazami różnicy.
- W każdej iteracji znajdujemy współczynniki postaci normalnych dla $P_(n-i)$ czyli dla wielomianu o stopniu i - idziemy od tyłu czyli zaczynamy od:

$$Q_{n-1} = c_{n-1} + (x - x_{n-1}) * a[n] \equiv Q_{n-1} = c_{n-1} + x * a[n] - x[n-1] * a[n] \tag{4}$$

- Widać więc że wartość $a[n-1]$ spełnia równanie $a[n-1] = a[n-1] + x[n-1] * a[n]$. Będziemy z niego korzystać w uogólnionej formie:

$$a[i-1] = a[i-1] + x[i-1] * a[i] \tag{5}$$

- Dla k-tej iteracji ciąg $a[k] \dots a[n]$ będzie przechowywać poprawne współczynniki dla Q_{n-k} w postaci normalnej.

Ostatecznie program zwraca a, które według powyższego załozenia przechowuje współczynniki opisujące postać normalną:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{6}$$

4 Wybór Węzłów Interpolacyjnych (Zad. 4)

4.1 Krótki opis problemu

Zadanie to wymagało implementacji funkcji wyboru węzłów do interpolacji na przedziale $[a, b]$, umożliwiając wybór między węzłami równoodległymi a węzłami Czebyszewa. Zadaniem opierało się na wykorzystaniu napisanych przez nas funkcji z zadania 1 oraz 2.

4.2 Rozwiązanie: Konfiguracja Węzłów

W pliku `ex4.jl` zaimplementowano funkcję `select_nodes` obsługującą dwa typy węzłów, które są następnie wykorzystywane w głównej funkcji wizualizacyjnej `plotNewtonInterp`.

4.2.1 Węzły Równoodległe

Generowane są w równych odstępach $h = (b - a)/n$: $x_k = a + k \cdot h$.

4.2.2 Węzły Czebyszewa

Obliczenia oparto na pierwiastkach wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}(x)$ - funkcja była podana na wykładzie nr 7:

$$x_k = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k + 1}{2(n + 1)}\pi\right)$$

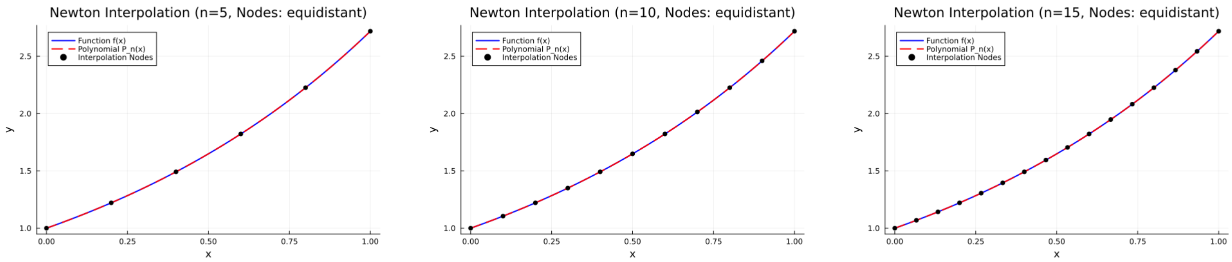
5 Analiza Interpolacji dla Węzłów Równoodległych (Zad. 5)

Testy przeprowadzono dla funkcji $f(x) = e^x$ na $[0,1]$ oraz $f(x) = x^2 \sin(x)$ na $[-1,1]$, dla stopni $n = 5, 10, 15$.

5.1 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = e^x$ na $[0,1]$

Rysunek 1: Interpolacja funkcji $f(x) = e^x$ na $[0,1]$

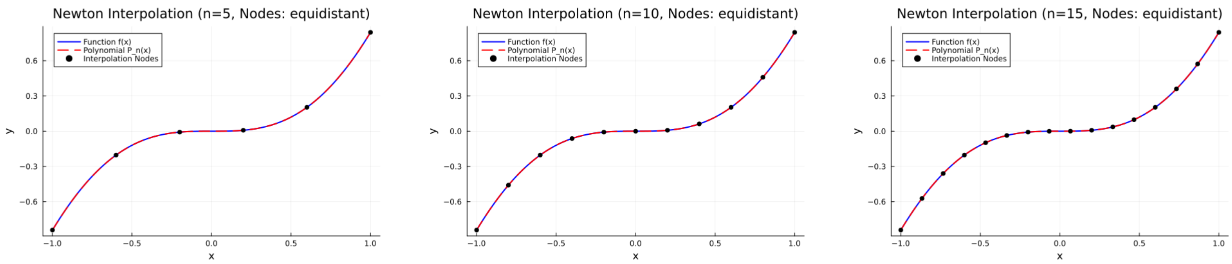
(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 15$



5.2 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = x^2 \sin(x)$ na $[-1,1]$

Rysunek 2: Interpolacja funkcji $f(x) = x^2 \sin(x)$ na $[-1,1]$

(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 15$



5.3 Interpretacja:

Niezależnie od wyboru funkcji i stopnia n wykresy dowodzą iż interpolacja prawidłowo dopasowała wielomian do wierzchołków. Jest to dowód na poprawne zaimplementowanie owej metody.

5.4 Wnioski:

Pozwala wysunąć tezę, że, metoda ta jest skutecznym sposobem dopasowania wielomianów. Jej efektywność w ogólności zostanie natomiast zweryfikowana w kolejnym zadaniu.

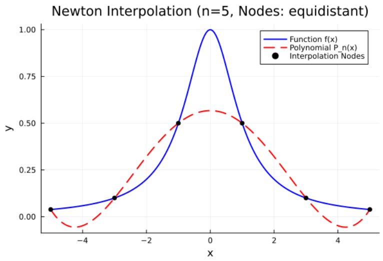
6 Analiza Zbieżności i Zjawisk Rozbieżności (Zad. 6)

Zadanie polegało na porównaniu węzłów równoodległych i Czebyszewa, a dokładnie ich wpływu na skuteczność dopasowania wielomianu do wierzchołków.

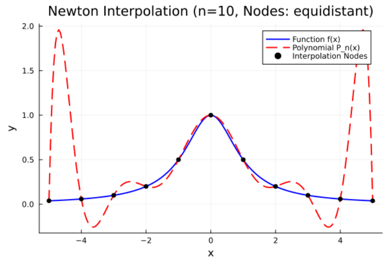
6.1 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $[-5, 5]$ (Zjawisko Runge'go)

Rysunek 3: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)

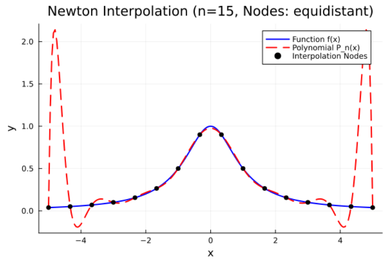
(a) $n = 5$



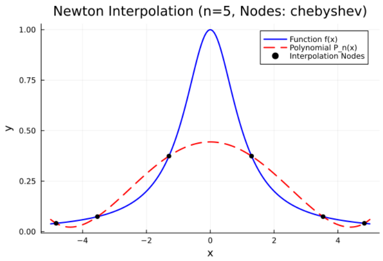
(b) $n = 10$



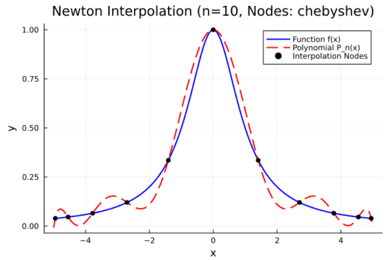
(c) $n = 15$



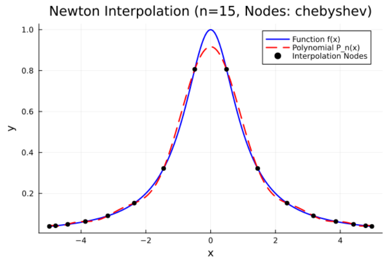
(d) $n = 5$



(e) $n = 10$



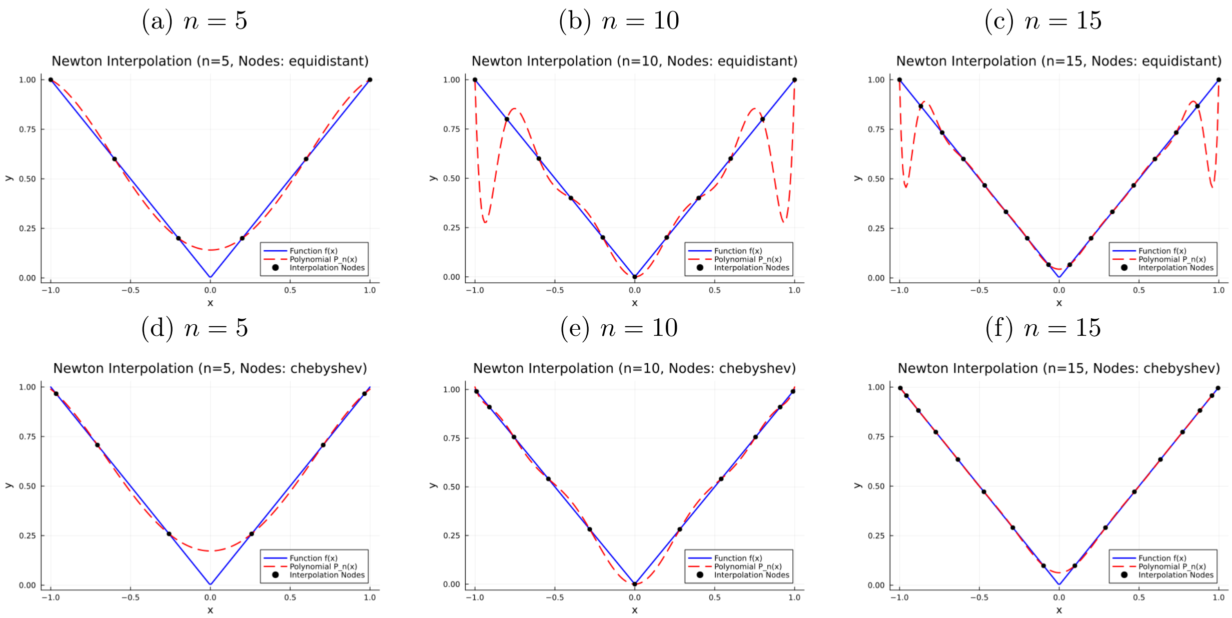
(f) $n = 15$



Rysunek 4: Interpolacja funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

6.2 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$

Rysunek 5: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)



(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 15$

(d) $n = 5$ (e) $n = 10$ (f) $n = 15$

Rysunek 6: Interpolacja funkcji $f(x) = |x|$.

Interpretacja: Dla tych dwóch funkcji widać różnicę między funkcją a dopasowanym wielomianem, nawet pomimo zwiększania stopnia wielomianu.
Dla obu tych funkcji widać otoczenie dla których szczególnie pojawiają się problemy. W przypadku $|x|$ takim miejscem jest punkt $x = 0$ - który nie jest różniczkowalny. Dlatego przedstawienie go za pomocą wielomianu jest trudne - widać więc taki łuk/wygładzenie.
Na wykresach funkcji $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest natomiast widoczny błąd na krańcach interesującego nas przedziału. Co ciekawe psuje się to jeszcze bardziej dla wyższych stopni. Można to wytlumaczyć korzystając z funkcji wprowadzonej przez prof. Zielińskiego

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta_x)}{(n+1)!} \tag{7}$$

Pochodna rośnie szybko w drugiej funkcji powodując wzrost niedokładności. (Zjawisko Runge'go) Aby to ograniczyć korzystamy z węzłów Czebyszewa.

6.3 Wnioski:

Wracając do tezy z poprzedniego zadania, widzimy że użyta w funkcji zadania 4 metodyka nie jest efektywna w ogólności. By zapewnić skuteczność dla danej funkcji należy przeanalizować funkcję różnic wprowadzoną pare linijek wyżej oraz w zależności od potrzeby stosować sposoby obniżające wartość tej funkcji - na przykład węzły Czebyszewa.