

Obliczenia Naukowe Laboratoria - Lista 4: Interpolacja Wielomianowa Newtona

Kajetan Plewa

5 grudnia 2025

1 Implementacja: Ilorazy Różnicowe (Zad. 1)

1.1 Krótki opis problemu

Celem zadania było obliczenie współczynników c_i wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona (ilorazów różnicowych) dla zadanych węzłów x_i i wartości funkcji $f(x_i)$. Wymogiem była implementacja algorytmu bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Rozwiązanie zaimplementowane w ilorazyRoznicowe.jl

Algorytm został zaimplementowany z użyciem rekurencji.

Dla każdego współczynnika c_i korzystamy z przedstawionego na wykładzie wzoru:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (1)$$

2 Implementacja: Wartość Wielomianu w Postaci Newtona (Zad. 2)

2.1 Krótki opis problemu

Zadanie polegało na obliczeniu wartości wielomianu $N_n(x)$ w zadanym punkcie $x = t$. Wymagano implementacji w czasie $O(n)$.

2.2 Rozwiążanie zaimplementowane w newton.jl

W celu osiągnięcia złożoności $O(n)$, skorzystano z postaci Newtona i **uogólnionego algorytmu Hornera**. Implementacja przetwarza współczynniki c_i i węzły x_i od najwyższego stopnia n do 0, iteracyjnie stosując wzór rekurencyjny

$$P_n(t) = c_i + (t - x_i) \cdot P_{n-1}(t) \quad (2)$$

3 Implementacja: Konwersja do Postaci Naturalnej (Zad. 3)

3.1 Krótki opis problemu

Zadanie polegało na przekształceniu współczynników wielomianu z postaci Newtona (c_i) do postaci naturalnej (a_i), czyli $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. Wymagana złożoność czasowa to $O(n^2)$.

3.2 Rozwiążanie zaimplementowane w normalna.jl

Zaimplementowany algorytm, podobnie jak poprzedni korzysta z własności postaci Newtona. Zastosowano podejście iteracyjne które *rozwija* składniki postaci Newtona.

$$P_n(t) = c_i + (t - x_i) \cdot P_{(n-1)}(t) \quad (3)$$

Poniżej znajduje się wytłumaczenie oznaczeń i działania kodu:

- Początkowo tablica a kopiuje zawartość przekazanej tablicy z ilorazami różnicymi.
- W każdej iteracji znajdujemy współczynniki postaci normalnych dla $P_{(n-i)}$ czyli dla wielomianu o stopniu i - idziemy od tyłu czyli zaczynamy od:

$$Q_{n-1} = c_{n-1} + (x - x_{n-1}) * a[n] \equiv Q_{n-1} = c_{n-1} + x * a[n] - x[n-1] * a[n] \quad (4)$$

- Widać więc że wartość $a[n-1]$ spełnia równanie $a[n-1] = a[n-1] + x[n-1] * a[n]$. Będziemy z niego korzystać w uogólnionej formie:

$$a[i-1] = a[i-1] + x[i-1] * a[i] \quad (5)$$

- Dla k -tej iteracji ciąg $a[k] \dots a[n]$ będzie przechowywać poprawne współczynniki dla Q_{n-k} w postaci normalnej.

Ostatecznie program zwraca a , które według powyższego założenia przechowuje współczynniki opisujące postać normalną:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (6)$$

4 Wybór Węzłów Interpolacyjnych (Zad. 4)

4.1 Krótki opis problemu

Zadanie to wymagało implementacji funkcji wyboru węzłów do interpolacji na przedziale $[a, b]$, umożliwiając wybór między węzłami równoodległymi a węzłami Czebyszewa.

4.2 Rozwiążanie: Konfiguracja Węzłów

W pliku `ex4.jl` zaimplementowano funkcję `select_nodes` obsługującą dwa typy węzłów, które są następnie wykorzystywane w głównej funkcji wizualizacyjnej `plotNewtonInterp`.

4.2.1 Węzły Równoodległe

Generowane są w równych odstępach $h = (b - a)/n$: $x_k = a + k \cdot h$.

4.2.2 Węzły Czebyszewa

Obliczenia oparto na pierwiastkach wielomianu Czebyszewa $T_{n+1}(x)$ - funkcja była podana na wykładzie nr 7:

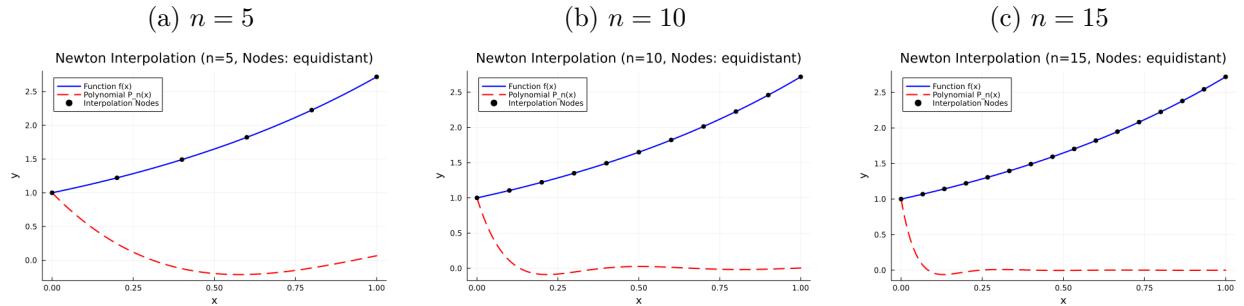
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

5 Analiza Interpolacji dla Węzłów Równoodległych (Zad. 5)

Testy przeprowadzono dla funkcji $f(x) = e^x$ na $[0, 1]$ oraz $f(x) = x^2 \sin(x)$ na $[-1, 1]$, dla stopni $n = 5, 10, 15$.

5.1 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = e^x$ na $[0, 1]$

Rysunek 1: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)

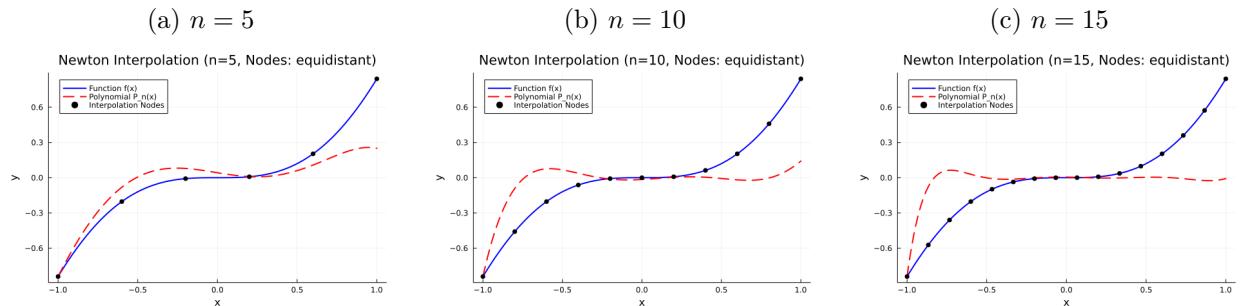


Rysunek 2: Interpolacja funkcji $f(x) = |x|$ z punktem nierozróżnialności $x = 0$.

Interpretacja:

5.2 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = x^2 \sin(x)$ na $[-1, 1]$

Rysunek 3: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)



Rysunek 4: Interpolacja funkcji $f(x) = x^2 * \sin(x)$.

5.3 Interpretacja:

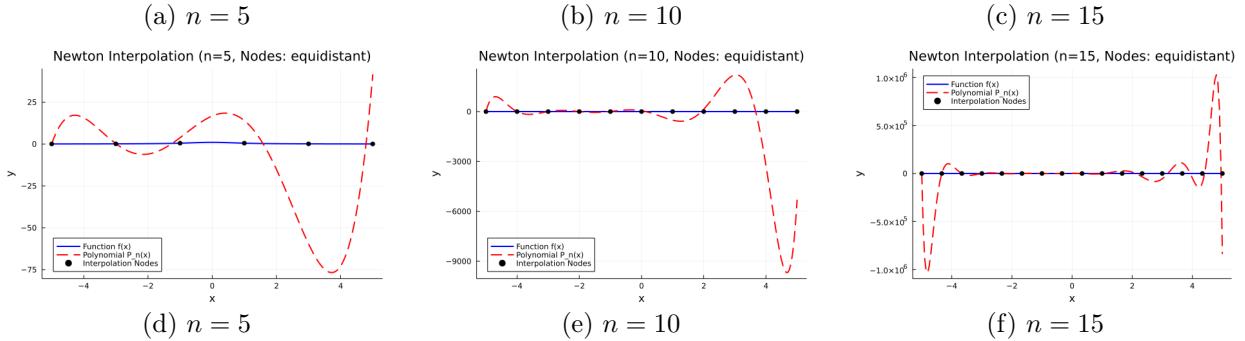
5.4 Wnioski:

6 Analiza Zbieżności i Zjawisk Rozbieżności (Zad. 6)

Zadanie polegało na porównaniu węzłów równoodległych i Czebyszewa na przykładach prowadzących do niestabilności lub wolnej zbieżności.

6.1 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na $[-5, 5]$ (Zjawisko Runge'go)

Rysunek 5: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)



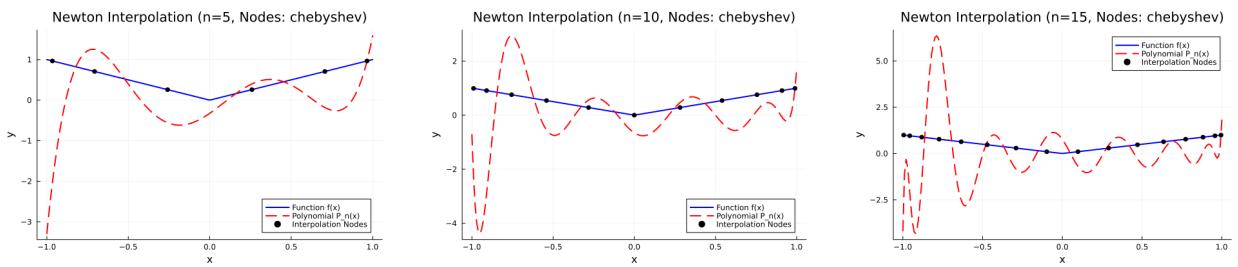
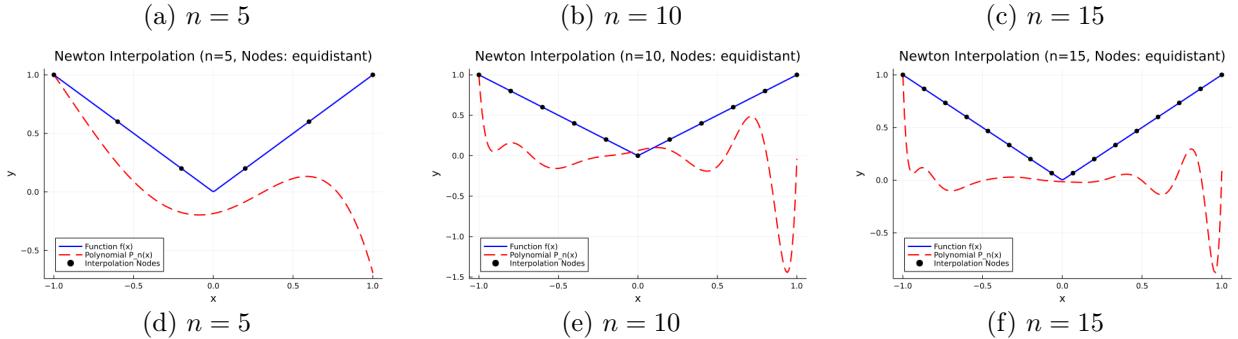
Rysunek 6: Interpolacja funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Interpretacja (Węzły Równoodległe): Dla tej funkcji, zwanej funkcją Runge'go, zwiększanie stopnia n prowadzi do gwałtownego wzrostu oscylacji i błędu w pobliżu krańców przedziału. Jest to klasyczny przypadek **Zjawiska Runge'go**, gdzie interpolacja dla węzłów równoodległych jest niestabilna.

Interpretacja (Węzły Czebyszewa): Zastosowanie węzłów Czebyszewa, charakteryzujących się zagęszczeniem przy brzegach, skutecznie eliminuje problem oscylacji. Błąd jest utrzymany na niskim poziomie w całym przedziale, potwierdzając optymalne własności tych węzłów.

6.2 Wyniki i ich interpretacja dla $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$

Rysunek 7: Interpolacja $f(x) = |x|$ na $[-1, 1]$ (węzły równoodległe)



Rysunek 8: Interpolacja funkcji $f(x) = |x|$.

Interpretacja: Funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Wielomian interpolacyjny próbuje wygładzić ten "narożnik". Mimo zwiększania n , błąd w otoczeniu $x = 0$ pozostaje znaczący, co pokazuje, że brak gładkości funkcji limituje efektywność interpolacji wielomianowej, nawet przy zwiększaniu stopnia.

6.3 Wnioski: