Filière MP - ENS de Paris-Saclay, Lyon, Rennes et Paris - Session 2018
Page de garde du rapport de TIPE

NOM : GRIRA	Prénoms : Khaled
Classe : MP*	
Lycée : Condorcet	Numéro de candidat : 5215
Ville : Paris	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS Cachan	MP - Option MP		MP - Option MPI	
	Informatique	X		
ENS Lyon	MP - Option MP		MP - Option MPI	
	Informatique - Option M	X	Informatique - Option P	
ENS Rennes	MP - Option MP		MP - Option MPI	
	Informatique			
ENS Paris	MP - Option MP		MP - Option MPI	
	Informatique			

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique		Mathématiques	X	Physique	

Titre du TIPE :
Marche aléatoire simple sur un graphe fini et la grille $\mathbb{Z}^d$

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	8	Illustration	2	Bibliographie	1

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :
On étudie les propriétés de la marche simple sur un graphe et uniforme sur la grille $\mathbb{Z}^d$ par les chaînes de Markov, on établit en particulier le théorème ergodique.

À Paris

Le 13 Juin 2018

Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

Cachet de l'établissement

LYCEE CONDORCET
8, rue du Havre
75009 PARIS
Tél. 01 48 74 25 95
Fax 01 42 82 95 66

Marche aléatoire simple sur un graphe fini et sur la grille Z^d

GRIRA Khaled

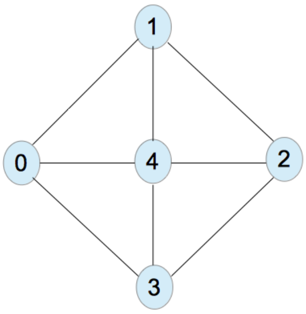
Lundi 28 Mai 2018

Table des matières

1 L'origine du TIPE

1.1 Introduction

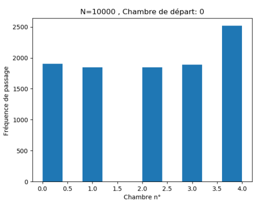
L'objectif est d'étudier l'effet de certains objets dans les choix de déplacement d'un sujet qui n'a pas de mémoire à travers un labyrinthe, chaque salle ayant un objet spécifique. On conduit l'expérience cependant il faut disposer d'un étalon avec lequel comparer, c'est pourquoi on va chercher à déterminer les propriétés de la marche aléatoire simple sur ce labyrinthe.

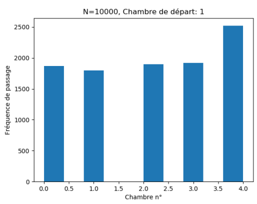


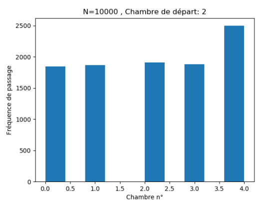
Formellement c'est un graphe simple, fini, connexe et non orienté. Notons le G=(V,E) , V les sommets, E les arrêtes. On définit la marche aléatoire simple comme suit : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Une famille de variables aléatoires. $X_0 \in V$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in E, P(X_n = i | X_{n-1} = j) = \dfrac{1}{|\{l;(j,l) \in E\}|}$.
Le but est l'étude des propriétés de la marche sur ce graphe, la fréquence de passage dans chaque salle et ce qui est un paramètre pour celle-ci.

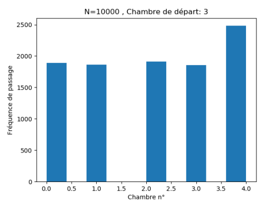
1.2 Simulation informatique

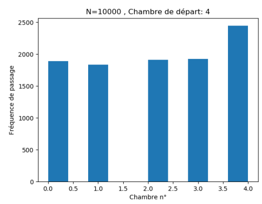
Les fréquences de passage ne dépendent pas de la salle de départ.



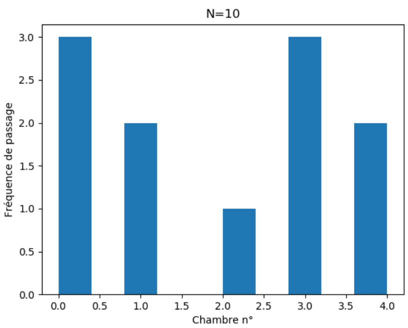


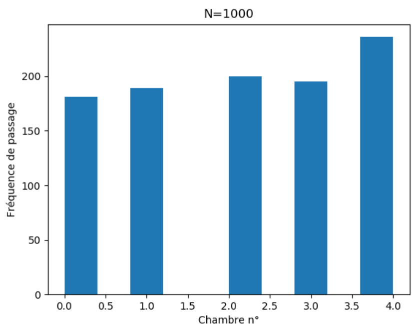


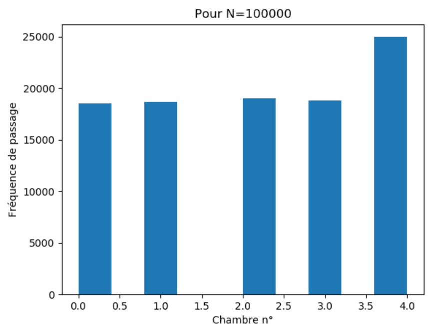




Les fréquences de passage dans chaque salle convergent et la plus grande fréquence est celle de la salle n°4, celle qui a le plus de voisins. Il semble de plus que la convergence soit très rapide.







Bien sûr, l'expérience ne peut que réfuter nos assertions et non les prouver mais c'est tout de même un indicateur et sur le chemin soulève plus de questions que n'apporte de réponses.

Le nombre de passage dans chaque salle diverge-t-elle nécessairement ? Si non sous quelles conditions ?
Quelle influence a la forme du graphe sur les fréquences de passages ?
Y a-t-il toujours convergence ? Si non sous quelles hypothèses ?
Est-ce qu'on peut étendre les résultats à un graphe non connexe ? Non fini ?

1.3 Cadre de l'étude

Premièrement on se donne un graphe G=(V,E) fini, non nécessairement connexe, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur G. On va chercher à déterminer les propriétés de cette marche aléatoire.

Remarque On remarque que l'état à un instant donné ne dépend que de l'état à l'instant précédent, c'est ce qu'on appelle un processus Markovien. La probabilité de passer d'une chambre A sachant qu'on est dans la chambre B est une constante, on dit que la marche est homogène. La marche aléatoire que l'on étudie est donc une chaîne de Markov puisqu'elle est à valeur dans un espace au plus dénombrable et qu'elle est à temps discret, c'est à dire indicée par un ensemble que l'on peut injecter dans $\mathbb{N}$.

Enfin nous finirons par étudier la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 1$. Cette étude est motivée en partie par l'envie de marcher très modestement dans les pas de Pólyà, et c'est le cas de le dire, mais surtout par le fait que la marche sur $\mathbb{Z}^d$ est un cas particulier de marche simple sur un graphe infini. Ce qui est particulier ici c'est que chaque sommet a un degré fini.

2 Formalisme des chaînes de Markov

Ici on fait l'étude dans des cas généraux, on ne suppose pas que le graphe est non orienté.

2.1 Qu'est ce qu'une chaîne de Markov ?

Définition 1 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Une famille de variables aléatoires à valeurs dans V un espace au plus dénombrable. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (x_{n+1}, ..., x_0) \in V^{n+2}$, on a :
$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$

Définition 2 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. On dit qu'elle est homogène lorsque : $\forall (n,(x,y)) \in \mathbb{N} \times V^2$ tel que $P(X_n = x) \neq 0$ on a $P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P(x,y)$ est indépendante de n.

Définition 3 On définit la matrice de transition pour une chaîne de Markov homogène à valeur dans un espace fini V comme suit : $M_X = [P(X_1 = y|X_0 = x)]_{(x,y)\in V^2}$.

Remarque On la définit également lorsque la chaîne est à valeur dans un espace dénombrable, et alors on utilise les arguments de sommabilité etc pour définir les produits et autres opérations.

Pour notre graphe en particulier : $M_X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 1 (Chapman-Kolmogorov) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X_n = y|X_0 = x) = M_X^n(x,y)$

Notation On va confondre l'ensemble V avec $\{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ on notera alors $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((P(X_n = v_j))_{j\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$, autre notation quand V est fini.

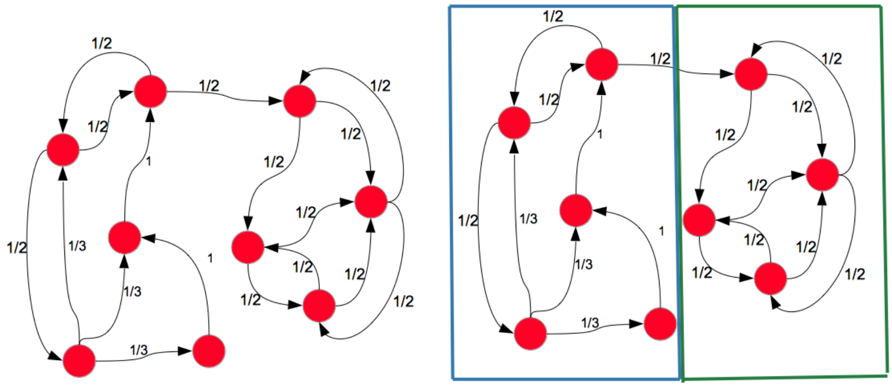
Corrollaire 1 $\forall n \in \mathbb{N}\ \mu_n = \mu_0 M_X^n$

Remarque La relation de Chapman-Kolmogorov nous donne accès aux outils de l'algèbre linéaire, la diagonalisation entre autres. En particulier pour notre graphe la matrice transition est diagonalisable car elle a 5 valeurs propres distinctes réelles.

2.2 Des classes d'états

Relation d'équivalence On définit $\underset{P}{\sim}$ par : $x \underset{P}{\sim} y$ si et seulement si $\exists (n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(M_X^n)_{(x,y)} \neq 0$ et $(M_X^m)_{(y,x)} \neq 0$. x et y équivalents signifient que y est atteignable à partir de x et réciproquement puisque $(M_X^r)_{(w,z)} = P(X_r = z|X_0 = w)$

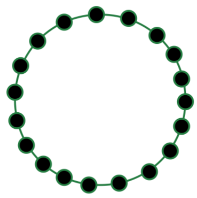
Remarque On découpe notre graphe en les classes d'équivalence pour notre probabilité. Pour le graphe que l'on avait il y en avait une seule, il peut y en avoir plusieurs.



Définition 4 On dit qu'une chaîne est irréductible lorsqu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence pour $\sim_P$. Autrement dit si tous les états communiquent.

Définition 5 Soit μ une probabilité on dit que μ est invariante pour P lorsque $\mu = \mu M_X$.

Remarque Une probabilité invariante est une distribution initiale qui est conservée par la marche aléatoire, comme une distribution uniforme pour la marche sur un cercle.



Théorème 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible. Alors cette chaîne possède au plus une probabilité invariante. De plus si elle est récurrente on dit qu'elle est positive lorsqu'il y'en a bien une μ qui vérifie $\forall x \in E\ \mu_x > 0$.

Remarque On verra plus tard que c'est l'inverse de l'espérance du temps d'atteinte.

2.3 Caractérisation des états

Définition 6 On dit qu'un état i est récurrent lorsqu'en partant de celui-ci on l'atteint encore une fois presque sûrement en temps fini, transitoire sinon. Autrement dit, i est récurrent si en notant $T_i = inf\{n \in \mathbb{N}^*; X_n = i\}$ on a $P(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$.

Remarque En pratique cela signifie que presque sûrement $|\{n \in \mathbb{N}; X_n = i\}| = \infty$.

Proposition 2 Soit i un état. On a :

x est récurrent $\Leftrightarrow \sum P(X_n = x|X_0 = x)$ diverge $\Leftrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{\{X_n=x\}} = \infty$ presque sûrement sachant que $X_0 = x$

Preuve Supposons x réccurent alors $P(T_x < \infty|X_0 = x) = 1$ soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(C_x \geq n+1|X_0) = \bigsqcup\limits_{p\in\mathbb{N}^*}(C_x \geq n+1 \cap T_x = p|X_0 = x)$ donc $P(C_x \geq n+1|X_0 = x) = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} P(C_x \geq n+1|T_x = p|X_0 = x)P(T_x = p|X_0 = x)$ or $(T_x = p) = (X_p = x, X_{p-1} \neq x, \ldots, X_1 \neq x)$ comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov $P(C_x \geq n+1|X_p = x, X_{p-1} \neq x, \ldots, X_1 \neq x|X_0 = x) = P(\sum\limits_{k\geq p} 1_{X_k=x} \geq n+1|X_p = x) = P(C_x \geq n|X_0 = x)$ puisqu'elle est homogène. $P(C_x \geq n+1|X_0 = x) = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} P(C_x \geq n|X_0 = x)P(T_i = p|X_0 = x) = P(C_x \geq n|X_0 = x)P(T_x < \infty|X_0 = x)$. $(P(C_x \geq n|X_0 = x))_n$ est une suite géométrique de raison $P(T_x < \infty|X_0 = x)$ on a bien l'équivalence entre x est récurrent et et la somme des indicatrices qui diverge presque sûrement.

Supposons $C_x = \infty$ p.s. donc $\mathbb{E}[C_x|X_0 = x] = \infty$ or $\mathbb{E}[C_x] = \mathbb{E}[\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{\{X_n=x\}}|X_0 = x] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}[1_{\{X_n=x\}}|X_0 = x] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} P(X_n = x|X_0 = x)$ Par contraposée supposons que $\sum P(X_n = x|X_0 = x)$ converge alors $P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\bigcup\limits_{k\geq n}(X_k = x))|X_0 = x) = 0$ par limite décroissante et majoration par le reste de la série, donc on atteint presque sûrement un nombre fini de fois x sachant que $X_0 = x$.

Proposition 3 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, tous les états sont soit transitoires soit récurrents.

Preuve Soit (x,y) deux états. Supposons y récurrent, x et y communiquent puisque la marche est irréductible. remarquons que $\forall (n,r,m) \in \mathbb{N}$ $P(X_{n+m+r} = x|X_0 = x) \geq P(X_n = y|X_0 = x)P(X_m = y|X_0 = y)P(X_r = x|X_0 = y)$ en effet $P(X_{n+m+r} = x|X_0 = x) = (M_X^{n+m+r})_{(x,x)}$ est le produit de trois matrice à coefficients positifs. Comme x et y communiquent on pose n et r tels que $P(X_n = y|X_0 = x) > 0$ et $P(X_r = x|X_0 = y)$ alors $\dfrac{P(X_{n+m+r} = x|X_0 = x)}{P(X_n = y|X_0 = x)P(X_r = x|X_0 = y)} \geq P(X_m = y|X_0 = y)$ et donc par minoration, en sommant sur m $\sum P(X_n = x|X_0 = x)$ diverge bien, x est récurrent.

2.4 Théorème ergodique

Théorème 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible à valeur dans un espace au plus dénombrable E. On note

$$\mu_x = \frac{1}{\mathbb{E}[T_x|X_0 = x]} \text{ alors : } \forall x \in E \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{X_k=x} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mu_x$$

Essentiellement ce que signifie le théorème ergodique c'est que la fréquence passage par un état x d'une chaîne de Markov irréductible converge presque sûrement vers la probabilité de l'état x pour la distribution stationnaire.

3 Retour au labyrinthe

3.1 Notre graphe de départ

Le caractère irréductible de notre marche se voit graphiquement, en effet le labyrinthe est connexe et la marche est simple, donc tous les états communiquent. Le théorème ergodique assure donc que que les fréquences de passage par chaque état convergent presque sûrement vers leur probabilité selon la probabilité invariante, qui existe bien et est unique. L'indépendance de la fréquence limite est assurée par le théorème ergodique. On cherche μ tel que $\mu M_X = \mu$, on obtient que $\mu = (\frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$ ce qui confirme bien les affirmations faites en I. (voir graphe du nombre de passage par chaque états).

Beaucoup de mathématiques pour ce simple résultat ? Peut-être ...

3.2 Pour les graphes connexes non orientés

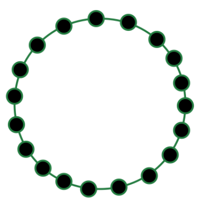
Dans le cas général, si on se donne un graphe connexe fini G=(V,E). Notons $\delta_x = |\{y \in V ; (x,y) \in E\}|$ alors $\forall x \in V$ $\delta_x \neq 0$. Soit $(x,y) \in V^2$ il existe un chemin $(a_0 = x, \dots, a_k = y) \in V^{k+1}$ tel que $\forall i \in [\![0\ ;\ k-1]\!]$ $(a_i, a_{i+1}) \in E$ on a alors $P(X_k = y|X_0 = x) \geq P(X_k = y, X_{k-1} = a_{k-1}, \dots, X_1 = a_1|X_0 = x) = \dfrac{1}{\delta_{a_{k-1}} \dots \delta_{a_1}\delta_x} > 0$ donc tous les états communiquent. La marche sur un graphe fini connexe est irréductible. Le théorème ergodique assure que les fréquences de passage dans chaque chambre converge presque sûrement.

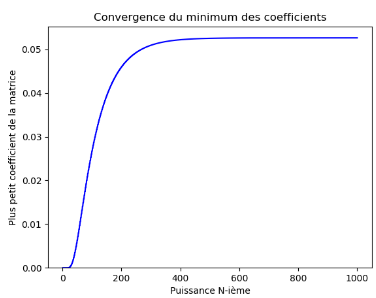
3.3 En général

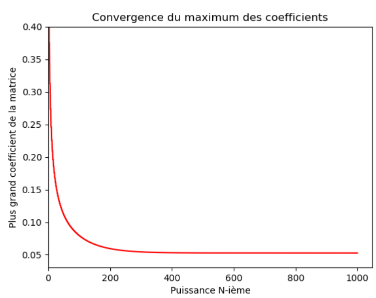
Dans le cas où on travaille sur un graphe orienté ou non connexe, on va toujours tenter de se ramener aux cas où les théorèmes s'appliquent. On regarde les composantes fortement connexes du graphe puis on cherche à trouver celles qui sont absorbantes, c'est à dire des quelles on ne peut sortir presque sûrement, quand il y'en a.Dans l'exemple fourni pour la relation d'équivalence ce serait celle encadrée en vert (à droite). On considère les classes d'état une par une et on regarde la distribution initiale, à partir de celles-ci on peut utiliser le théorème ergodique et autres résultats.

3.4 Sur le cercle

Notons n le nombre de sommet du cercle alors les fréquences de passages convergent toutes presque sûrement vers $\frac{1}{n}$. La matrice de passage converge vers $[\frac{1}{n}]_{(x,y)\in V^2}$.







4 La marche aléatoire uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

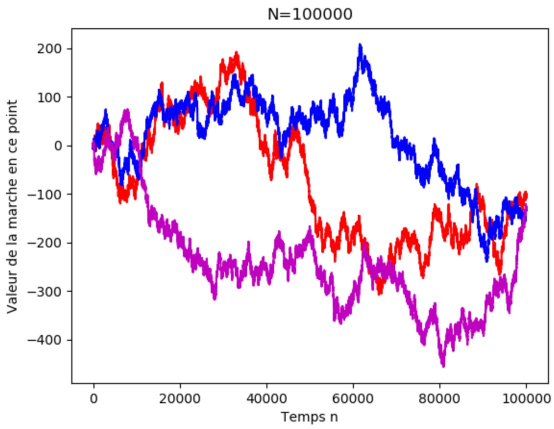
Le but de cette partie est l'étude de la marche aléatoire uniforme sur Z^d pour $d \geq 1$ et plus précisément la détermination du caractère transitoire ou récurrent voire aucun des deux de cette marche.

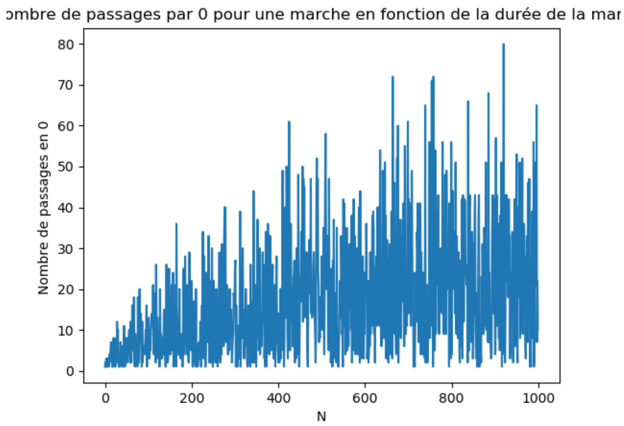
4.1 Définition formelle de la marche uniforme

On note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On définit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ $P(Y_0 = e_i) = P(Y_0 = -e_i) = \dfrac{1}{2d}$, elle existe bien. On définit la marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$ comme suit : $X_0 = 0_{\mathbb{R}^d}$ et $\forall n \geq 1$ $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

4.2 Simulation informatique

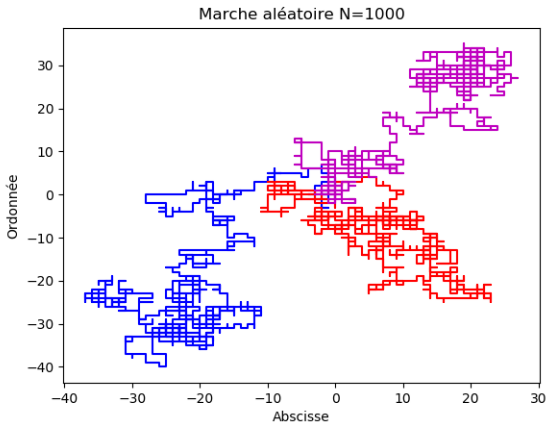
En dimension 1

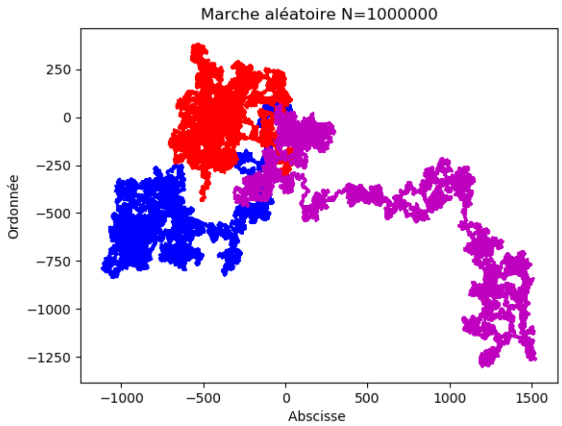


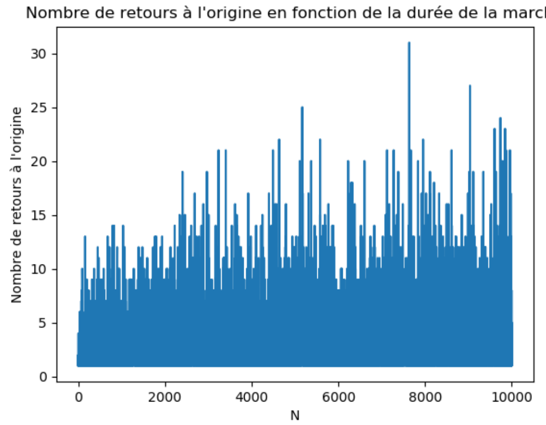


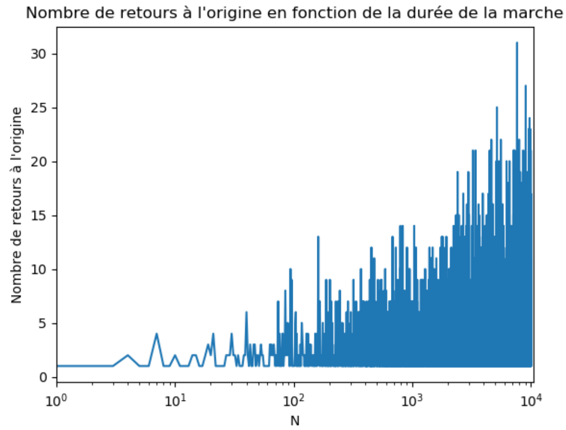
Il semblerait que le nombre de passage par 0 diverge avec N et donc que 0 est récurrent. Intuitivement à transaltion près on peut conjecturer que tous les états sont récurrents.

En dimension 2



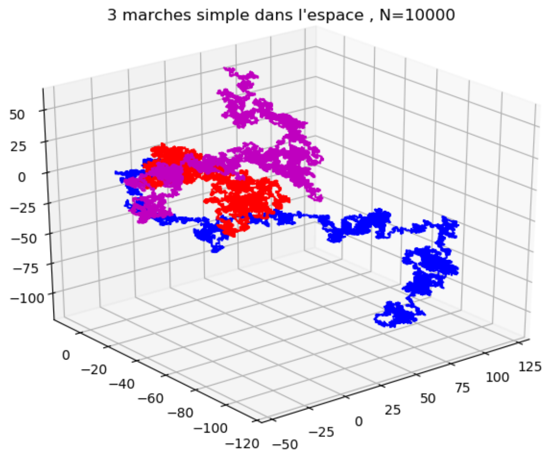


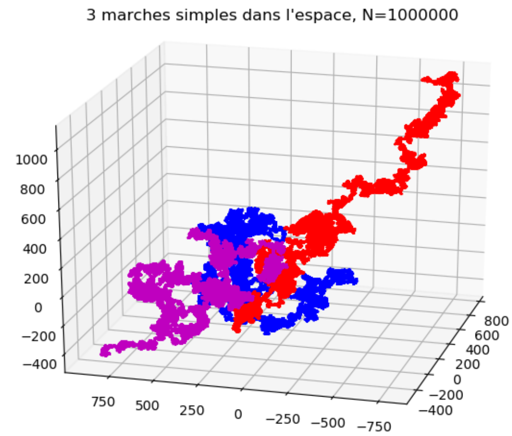


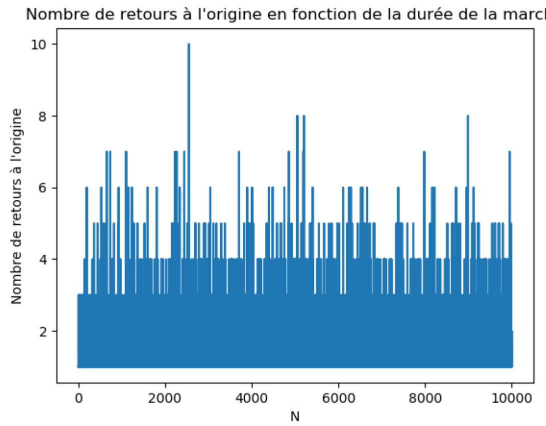


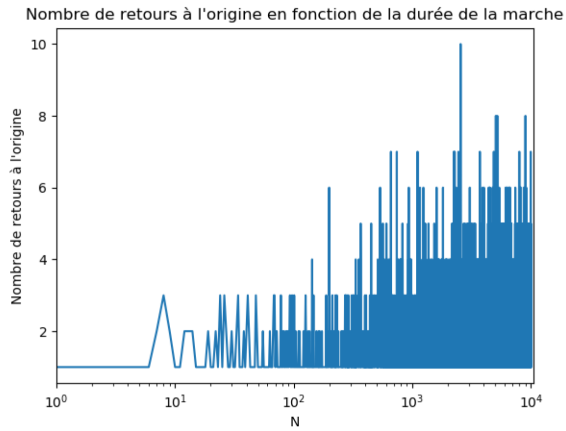
Ici aussi ll semblerait que le nombre de passage par 0 diverge, la masse du fond bleu grandit lentement mais sûrement. On voit mieux les choses en logarithmique. La marche aléatoire uniforme sur Z^2 serait récurrente.

En dimension 3









Ici on voit mieux sur le graphe en linéaire que le nombre de retours est borné. L'oeil de celui qui connait déjà le résultat a tendance à voir plus clairement...

Théorème de Pòlya La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d \leq 2$ et transitoire si $d \geq 3$.

4.3 La marche sur $\mathbb{Z}$

On veut démontrer le caractère récurrent de la marche uniforme sur $\mathbb{Z}$. La proposition 3 permet de court-circuiter toute preuve qui ferait appel à la notion de trajectoire et au calcul de la probabilité de passer d'un endroit à l'autre sans passer par 0 lorsque c'est possible. On va chercher à calculer $P(X_n = 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que S_n a presque sûrement même parité que n, donc si n impair $P(X_{2n+1} = 0) = 0$. Ensuite par dénombrement on cherche le nombre de 2n-uplets $(k_1, \ldots, k_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n}$ tel que $\sum_{j=1}^{2n} k_j = 0$ car $P(S_{2n} = 0) = P(\exists \sigma \in \mathbb{S}_{2n}, Y_{\sigma(1)} = \ldots = Y_{\sigma(n)} = 1, Y_{\sigma(n+1)} = \ldots = Y_{\sigma(2n)} = -1)$ par indépendance des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette probabilité se calcule par produit des probabilités. $P(X_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, la formule de Stirling donnant $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n\sqrt{2n\pi}$ on a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{4n\pi}}{((\frac{n}{e})^n\sqrt{2n\pi})^2} = \frac{2^{2n}n^{2n}\sqrt{4n\pi}}{e^{2n}}\frac{e^{2n}}{n^{2n}2n\pi} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$ finalement $P(X_{2n}=0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ comme $\frac{1}{2} \leq 1$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ diverge et donc $\sum P(X_n=0)$ diverge. 0 est un état récurrent. Puisque la marche sur $\mathbb{Z}$ est irréductible et que 0 est récurrent, tous les états sont récurrents. La marche uniforme sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.

4.4 La marche sur $\mathbb{Z}^2$

De la même façon qu'en dimension 1 S_n ne peut s'annuler que si n pair. Ce qui est miraculeux en dimension 2 c'est qu'on peut presque appliquer la même preuve qu'en dimension en se ramenant à des scalaires. On note $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ et $Y_n = (Y_n^1, Y_n^2)$, en posant $H_n = Y_n^1 + Y_n^2$ et $J_n = Y_n^1 - Y_n^2$ alors H et J sont indépendants et de même loi. En effet $P(H_n = 1) = P(H_n = -1) = \frac{1}{2}$, et $P(J_n = 1) = P(J_n = -1) = \frac{1}{2}$, $P(J_n = 1, H_n = 1) = P(Y_n^1 = 1) = \frac{1}{4}$ de même pour les autres combinaisons. $P(S_{2n} = 0) = P(X_{2n}^1 = S_{2n}^2 = 0) = P(X_{2n}^1 + X_{2n}^2 = X_{2n}^1 - X_{2n}^2 = 0) = P(J_1 + \ldots + J_{2n} = H_1 + \ldots + H_{2n} = 0) = P(J_1 + \ldots + J_{2n})P(H_1 + \ldots + H_{2n})$ par indépendance. $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des marches aléatoires uniformes sur $\mathbb{Z}$, donc d'après la partie précédente $P(H_{2n} = 0) = P(J_{2n} = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Finalement $P(X_{2n} = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$, on a bien $\sum P(X_n = 0)$ diverge et encore une fois comme la marche est irréductible et que 0 est récurrent, la marche est récurrente.

4.5 La marche sur $\mathbb{Z}^3$

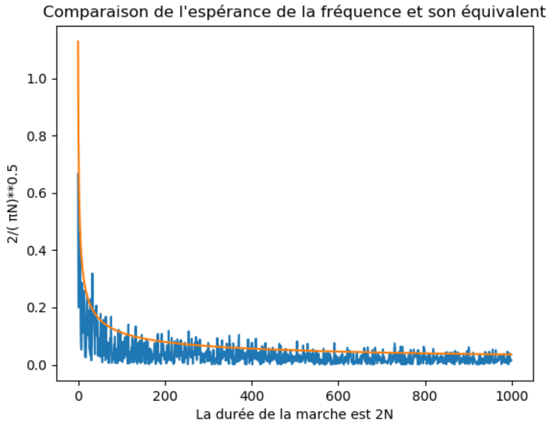
On fixe n, on cherche à faire en sorte que $S_{2n}^1 = S_{2n}^2 = S_{2n}^3 = 0$ et donc en choisissant (i,j,k) trois entiers naturels tels que $i+j+k=n$ le nombre de façons de répartir les $+e_1$ i fois et $-e_2$ i fois et les $+e_2$ j fois etc, il y'a $\frac{(2n)!}{(i!j!k!)^2}$ façons de le faire. $P(X_{2n} = 0) = \sum_{i+j+k=n} \frac{(2n)!}{(i!j!k!)^2}(\frac{1}{6})^{2n}$ or $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ donc $P(X_{2n}=0) = \binom{2n}{n}\sum_{i+j+k=n}(\frac{n!}{(i!j!k!)})^2(\frac{1}{6})^{2n}$. On va chercher à majorer la somme. Si on choisit $(x,y,z) \in]0;1]$ tels que $x+y+z=\alpha$, le produit xyz est maximal lorsque les 3 sont égaux, en effet : cela revient à étudier $f : (\mathbb{R}_+)^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{k=1}^{d} x_k$ sur une ligne de niveau $\{(x_1,\ldots,x_d); \sum_{k=1}^{d} x_k = \alpha\}$ l'inégalité arithmético-géométrique donne : $(\prod_{k=1}^{d} x_k)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{d} x_k}{d} = \frac{\alpha}{d}$, il y'a égalité lorsque tous sont égaux. D'où la majoration par $\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{(i!j!k!)}\frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!}$ en utilisant la formule du multinôme on a $\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!} = (1+1+1)^n = 3^n$ finalement $P(X_{2n}=0) \leq \frac{\binom{2n}{n}n!}{6^{2n}(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!}$ en utilisant la formule de Stirling on obtient $\frac{\binom{2n}{n}n!}{6^{2n}(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!} \underset{n\to\infty}{\sim} (\frac{1}{(\pi n)})^{\frac{3}{2}}$ finalement $\sum P(X_n=0)$ converge et donc comme la marche est irréductible et que (0,0,0) est transitoire, la marche est transitoire.

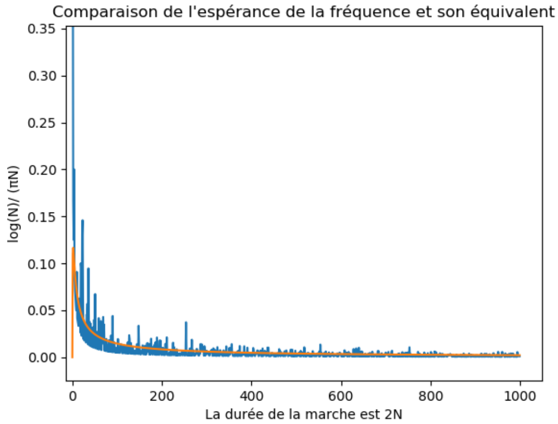
4.6 La marche sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 4$

L'idée de la preuve est exactement la même qu'en dimension 3 on utilise la formule du multinôme et on majore $P(X_{2n} = 0)$. Au final on majore cette probabilité par une quantité équivalente en ∞ à $(\frac{1}{\pi n})^{\frac{d}{2}}$ ce qui assure bien la convergence de $\sum P(X_n = 0)$ et donc le caractère transitoire de la marche sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 4$ et donc pour $d \geq 3$.

4.7 Espérance de la fréquence de passage

$C_{x,m} = \sum_{k=1}^{m} 1_{X_k=x}$, $\mathbb{E}[C_{x,m}] = \sum_{k=1}^{m} P(X_k = x)$ le nombre de passage par x pendant une durée m. On définit la fréquence $f_{x,m} = \frac{C_{x,m}}{m}$. **En dimension 1 :** $\mathbb{E}[f_{0,2m}] \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi m}}$ **En dimension 2 :** $\mathbb{E}[f_{0,2m}] \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\ln(m)}{\pi m}$





Bibliographie

[1] Jean-François Delmas, Benjamin Jourdain : **Modèles aléatoires, Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant** : Edition Springer, "Chaînes de Markov à temps discret"
[2] Etienne Pardoux, **Processus de Markov et applications** "Chaîne de Markov"