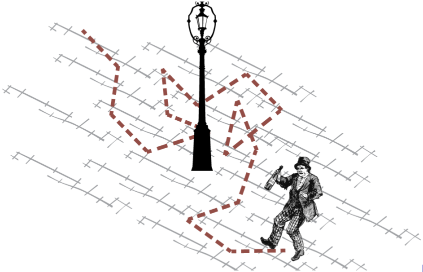
Étude de marches aléatoires par les chaînes de Markov

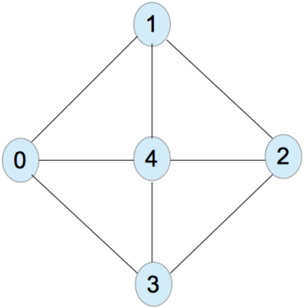
GRIRA Khaled

10 juin 2018



SOMMAIRE

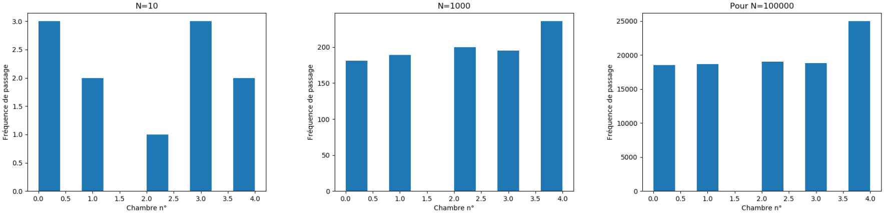
I/L'origine du TIPE et quelques constations



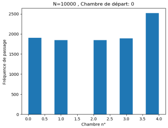
On étudie la marche uniforme sur ce graphe $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, $X_0 \in \mathbb{V}$ et

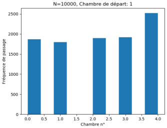
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in \mathbb{E}, P(X_n = i | X_{n-1} = j) = \frac{1}{|\{l; (j,l) \in \mathbb{E}\}|}$$

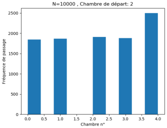
I/L'origine du TIPE et quelques constations

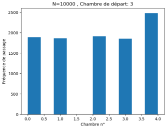


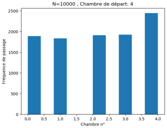
Il semblerait que le rapport du nombre de passages sur la durée de la marche,c'est à dire la fréquence de passage pour chaque salle, converge.





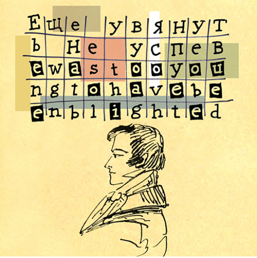






De plus cette fréquence limite il semblerait ne dépend pas de la salle initiale, ce à quoi on pouvait s'attendre puisque le graphe est connexe et que la marche est simple.

II/Cadre de l'étude



Les marches aléatoires que l'on étudie ont cette particularité qui est qu'elles vérifient la propriété de Markov. L'état à l'instant suivant ne dépend que de l'état présent.

Définition : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Une famille de variables aléatoires à valeurs dans V un espace au plus dénombrable. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (x_{n+1}, ..., x_0) \in \mathbb{V}^{n+2}$, on a :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

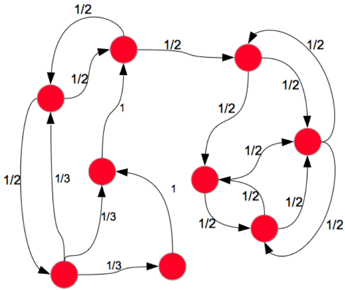
On s'intéresse plus particulièrement aux chaînes de Markov homogène.

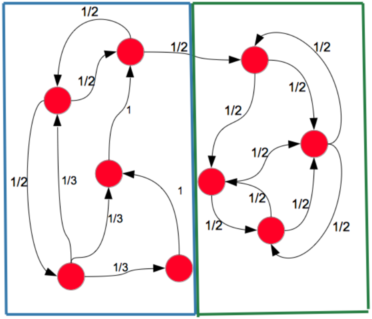
On définit la matrice de transition comme suit :
$M_X = [P(X_1 = y|X_0 = x)]_{(x,y)\in\mathbb{V}^2}$
Chapman-Kolmogorov :$\forall n \in \mathbb{N}^* \ P(X_n = y|X_0 = x) = M_X^n(x, y)$
On note $\mathbb{V}$=$\{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ on notera alors $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((P(X_n = v_j))_{j\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$.
Proposition :$\forall n \in \mathbb{N} \ \mu_n = \mu_0 M_X^n$

III/Formalisme des chaînes de Markov

Une relation d'équivalence sur les états $\underset{P}{\sim}$

$x \underset{P}{\sim} y$ si et seulement si $\exists (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(M_X^n)_{(x,y)} \neq 0$ et $(M_X^m)_{(y,x)} \neq 0$, les états d'une même classe d'équivalence communiquent. On dit que la chaîne est irréductible lorsqu'il y'a une seule classe d'équivalence.





III/Formalisme des chaînes de Markov

Définition : Soit μ une probabilité on dit que μ est invariante pour P lorsque $\mu = \mu M_X$.

Théorème : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible. Alors cette chaîne possède au plus une probabilité invariante. De plus si elle est récurrente positive il y'en a bien une, μ, qui vérifie $\forall x \in E \; \mu_x > 0$.

Caractérisation des états

Définition : x un état est récurrent si en notant $T_x = inf\{n \in \mathbb{N}^*; X_n = x\}$ on a $P(T_x < \infty | X_0 = x) = 1$, transitoire sinon.
Proposition : Soit x un état. On a :

$$\text{x est récurrent} \Leftrightarrow \sum P(X_n = x | X_0 = x) \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{X_n = x\}} = \infty$$
$$\text{presque sûrement sachant que } X_0 = x$$

Proposition : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, tous les états sont soit transitoires soit récurrents.

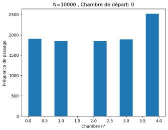
Théorème :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible à valeur dans un espace au plus dénombrable E. On note $\mu_x = \dfrac{1}{\mathbb{E}[T_x|X_0 = x]}$ alors : $\forall x \in E$

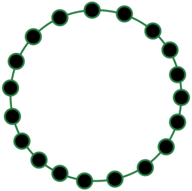
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{X_k=x} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mu_x$$

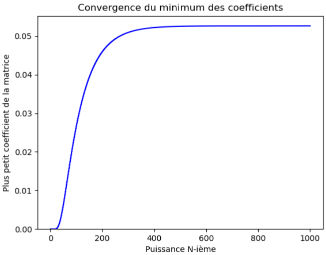
Pour le graphe de départ :

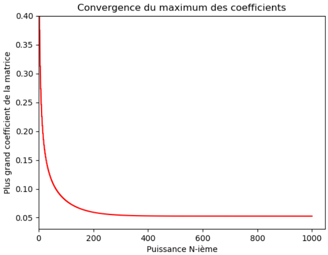
Convergence presque sûr des fréquences de passage vers $\mu = (\frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$, l'expérience est en cohérence avec le théorème ergodique.



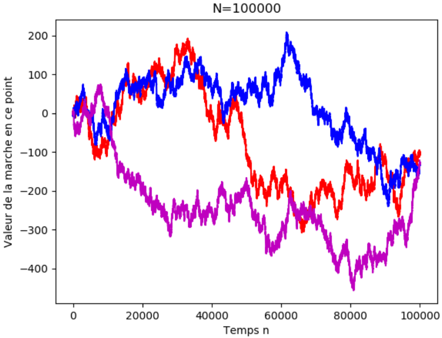
Le théorème ergodique pour le cercle Notons n le nombre de sommet du cercle alors les fréquences de passages convergent toutes presque sûrement vers $\frac{1}{n}$.

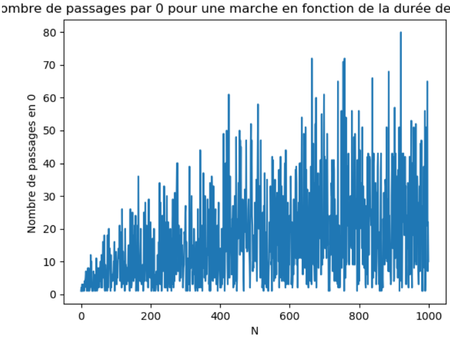






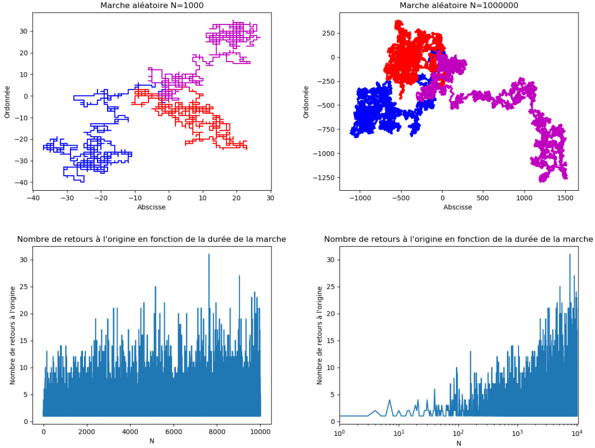
En dimension 1





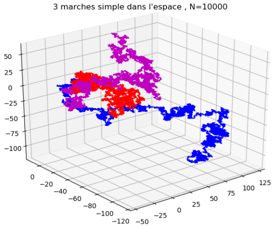
V/La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

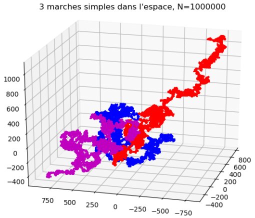
En dimension 2

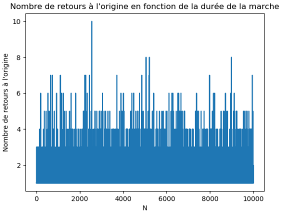


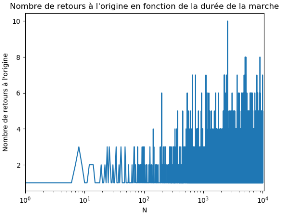
V/La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

En dimension 3









Définition formelle de la marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

On note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On définit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ $P(Y_0 = e_i) = P(Y_0 = -e_i) = \dfrac{1}{2d}$, elle existe bien. On définit la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ comme suit : $X_0 = 0_{\mathbb{R}^d}$ et $\forall n \geq 1$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

C'est bien une chaîne de Markov.

V/La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

Théorème de Pòlya : La marche aléatoire uniforme sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $d \leq 2$ et transitoire sinon.

V/La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

La preuve repose sur le résultat suivant :
Proposition : Soit x un état. On a :

$$x \text{ est récurrent} \Leftrightarrow \sum P(X_n = x | X_0 = x) \text{ diverge} \Leftrightarrow C_x = \infty \text{ presque sûrement sachant que } X_0 = x$$

On cherche à évaluer $P(X_n = 0)$ par dénombrement.

V/La marche uniforme sur $\mathbb{Z}^d$

En dimension 1 : $P(X_{2n} = 0) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

En dimension 2 : $P(X_{2n} = 0) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi n}$

En dimension $d \geq 3$ **:** $P(X_{2n} = 0)$ est majorée par une quantité équivalente à $(\dfrac{1}{\pi n})^{\dfrac{d}{2}}$

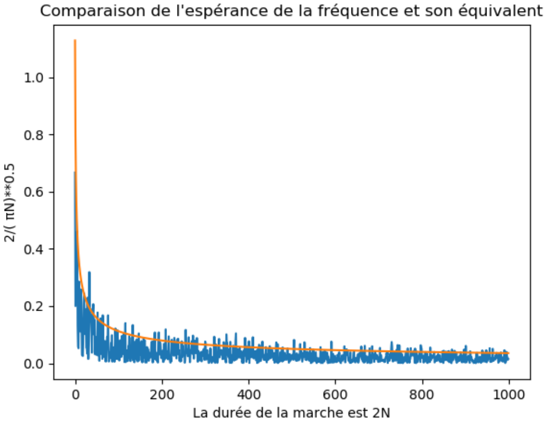
V/La marche uniforme $\mathbb{Z}^d$

Positivité de la marche ?

$C_{x,m} = \sum_{k=1}^{m} 1_{X_k=x}$, $\mathbb{E}[C_{x,m}] = \sum_{k=1}^{m} P(X_k = x)$ le nombre de passage par x pendant une durée m. On définit la fréquence $f_{x,m} = \dfrac{C_{x,m}}{m}$.

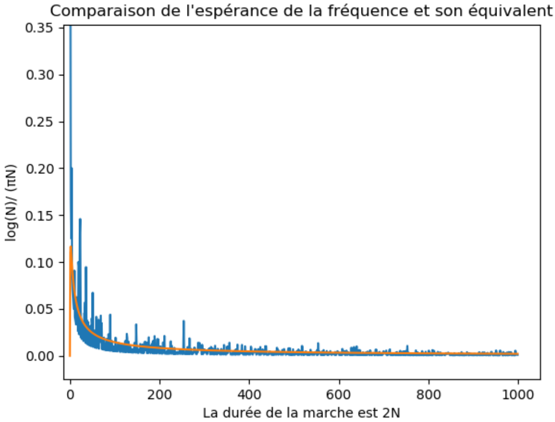
V/La marche uniforme $\mathbb{Z}^d$

En dimension 1 : $E[f_{0,2m}] \underset{m\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{\pi m}}$



V/La marche uniforme $\mathbb{Z}^d$

En dimension 2 : $E[f_{0,2m}] \underset{m\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(m)}{\pi m}$



Merci pour votre attention !