Processus de Hawkes

Khaled GRIRA

17 janvier 2023

Résumé

Pour l'instant je ne sais pas grand chose, mais je vais résumer le rien que je sais ici jusqu'à ce que ce soit quelque chose lol.

Table des matières

I. Processus ponctuels généraux

Il y'a plusieurs approches pour définir les processus ponctuels, comme des mesures aléatoires, à partir d'une collection de variables aléatoires. Explorons rapidement ces différentes approches et faisons le lien entre elles.

I.1 Définitions

I.1.1 Par les mesures

On se donne un espace polonais $(E, \mathcal{B}(E))$. On va supposer que notre espace E satisfait toutes les propriétés que l'on rencontrera dans le cadre classique, i.e. localement compact, à base dénombrable, des points distincts admettent des voisinages différents, chaque point a un voisinage compact.

Définition I.1.1. Une mesure localement finie est une mesure finie sur tout ensemble dont l'adhérence est compacte.

En particulier une mesure localement finie est σ-finie sur des espaces comme $\mathbb{R}^d$ On notera $M(E)$ l'espace des mesures localement finies sur $\mathcal{B}(E)$ et

$$\mathcal{M}(E) \text{ la tribu : } \sigma(\{\mu \in M(E) \mapsto \mu(C); C \in \mathcal{B}(E)\})$$

Définition I.1.2. Une mesure $\mu \in M(E)$ est dite **ponctuelle** si elle prend des valeurs entières ou infini i.e. $\forall C \in \mathcal{B}(E)$, $\mu(C) \in \overline{\mathbb{N}}$.

Une mesure ponctuelle sur E est dite **simple** si : $\forall a \in E$, $\mu(\{a\}) = 0$ ou 1. On note $M_p(E)$ l'ensemble des mesures ponctuelles sur $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{M}_p(E)$ la tribu associée

$$(M(E), \mathcal{M}(E)) \text{ et } (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)) \text{ les espaces des mesures localement finies (resp ponctuelles)}$$

Définition I.1.3. Si $N : \Omega \to M_p(E)$ est une variable aléatoire, on dit alors N est un **processus ponctuel**.

Plus généralement c'est une **mesure aléatoire** si c'est une variable aléatoire $N : \Omega \to M(E)$. Essentiellement un processus ponctuel est une variable aléatoire dont les réalisations sont des mesures i.e. une application $N : \Omega \to M(E)$ mesurable t.q. $N \in M_p(E)$.
Quand N est une mesure aléatoire on peut remarquer que $N(C)$ est une variable aléatoire pour $C \in \mathcal{B}(E)$ en effet ce n'est rien de plus que la composition de N avec $p_C : \mu \mapsto \mu(C)$ qui est bien une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{M}(E)$.
On peut définir une autre notion de mesure aléatoire - en réalité celle de noyau - qui vérifie bien les propriétés qui nous intéresse et qui est un peu plus générale que celle définie précédemment.

Une mesure aléatoire plus généralement sur $(E, \mathcal{E})$ serait une fonction $N : \Omega \times \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

(i) $\forall C \in \mathcal{E}$, $\omega \mapsto N(w, C)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.
(ii) $\forall w \in \Omega$, $N(\omega, \cdot)$ est une mesure sur $\mathcal{E}$

Alors une mesure aléatoire ponctuelle est une mesure aléatoire telle que $\forall w$, $N(w, \cdot)$ soit ponctuelle.

I.1.2 Par les configurations

Il y a une autre façon de définir les processus ponctuels, à partir des configurations.

Définition I.1.4. Une **configuration** m est un sous ensemble de E localement fini i.e. tel que $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $\#B(x,r) \cap m < \infty$

Ici on parle d'ensemble mais ce n'est pas exactement des ensembles car on autorise la répétition d'un élément, par exemple $\{x,x,x,x,a\}$ est une configuration qui est la même que $\{x,x,a,x,x\}$ mais qui est différente de $\{x,a\}$.

On notera N_E l'ensemble de ces configurations et qu'on munit de la tribu

$$\mathcal{N}_E := \sigma(m \in N_E \mapsto \#(m \cap B); B \in \mathcal{B}(E))$$

Définition I.1.5. Un **processus ponctuel** X est une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (N_E, \mathcal{N}_E)$ Le **processus de comptage** N associé est :

$$N : \Omega \times \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}_+ \; N(w,B) := \#(X(w) \cap B)$$

Ici la réalisation d'un processus ponctuel est une configuration, i.e. un "ensemble" de points localement fini, intuitivement c'est le sous-jacent du processus ponctuel défini en I.1.3. Par opposition à précédemment où la réalisation du processus ponctuel était une mesure ponctuelle, ici c'est le processus de comptage qui est la mesure aléatoire ponctuelle.

I.1.3 Par les variables aléatoires

On se donne une suite de variables aléatoires (T_n) définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B}(E))$. On notera dans la suite $\mathcal{B}^+(E)$ les fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout $f \in \mathcal{B}^+(E)$ on définit

$$N(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(T_n) \text{ et } \forall B \in \mathcal{B}(E), N(B) := N(1_B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_B(T_n)$$

Définition I.1.6. On dit que (T_n) définit un **processus ponctuel** si et seulement si $\forall B \in \mathcal{B}(E)$, $N(B) < \infty$ p.s.

Dans cette définition, issue de [4] on ne fait pas la distinction entre ce qui est le processus ponctuel : les (T_n) ou bien N, indifféremment. Mais on a fixé avant tout les variables qui sont sous-jacentes au processus.

I.1.4 Lien entre ces 3 approches

En réalité ces 3 approches sont à peu près équivalentes, néanmoins l'approche des configurations est un peu moins générale que les deux autres.

Comme on peut le voir dans les 3 approches, la mesure de comptage pour un ensemble fixé est toujours une variable aléatoire, et elle est toujours presque sûrement finie quand cet ensemble est borné.

Proposition I.1.1. Soit μ une mesure ponctuelle sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que :

$$(i)\ (t_n) \text{ est croissante } (ii)\ \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{t_n}(C)\ (iii)\ t_0 \leq 0 < t_1$$

De plus $\mu \mapsto t_n$ est mesurable de $(M_p(\mathbb{R}), \mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ et si μ est simple alors $|t_n| < \infty \Rightarrow t_n < t_{n+1}$

Poser $t_{n_0} = \pm\infty$ signifie que $\forall n \geq n_0($ resp $\leq)$, $t_n = \pm\infty$ et $\delta_{\pm\infty}$ est la mesure nulle sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les deux se produisent en même temps si la mesure est à support fini, ou compact, ou tendue, les 3 étant équivalent pour cette mesure car elle est ponctuelle.

Démonstration. On va définir récursivement les (t_n) comme les temps de saut de notre mesure. Notons premièrement $F(x) = \mu(]0,x])$, F est une fonction croissante, à valeurs entières et continue à droite. $F(0) = 0$ de façon évidente.

$$t_1 := \inf\{x > 0; F(x) > 0\}$$

Soit $\{x > 0; F(x) > 0\} = \emptyset$: alors $t_1 = \infty$ et pour tout $n \leq 1$, on pose $t_n = \infty$
Soit $\{x > 0; F(x) > 0\} \neq \emptyset$: alors $t_1 \neq 0$.
En effet par l'absurde si $t_1 = 0$ alors on prend $(x_n) \in \{x > 0; F(x) > 0\}^{\mathbb{N}}$ qui décroit vers $0 = t_1$ alors $(m_n) = (\mu(x_n))$ est une suite d'entiers qui décroit vers 0 par continuité à droite de μ, elle est donc constante à partir d'un certain rang et égal à 0, ce qui est absurde.
Nécessairement $t_1 > 0$. Notons $k_1 = \mu(\{t_1\}) = F(t_1) = F(t_1^+)$, $k_1 \geq 1$ alors on pose pour tout $1 \leq j \leq k_1$, $t_j = t_1$. Ensuite en définit t_{k_1+1} comme $t_{k_1+1} = \inf\{x > t_{k_1}; \mu(]t_{k_1}, x]) > 0\}$ on fait encore la même distinction.
Dans le cas où $t_{k_1+1} < \infty$ on pose $k_2 = \mu(\{t_{k_1+1}\}) = F(t_{k_1+1}) - F(t_{k_1})$ on pose pour tout j tel que $k_1 + 1 \leq j \leq k_1 + k_2$, $t_j := t_{k_1+1}$ et ainsi de suite.
Au final on aura donc construit une suite croissante $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que $t_n \to \infty$ et telle que

$$\mu(]0,x]) = \sum_{n\geq 1} \delta_{t_n}(]0,x])$$

De même on construit $t_0 \geq t_{-1} \geq ... \geq t_n$ $(n \in \mathbb{Z}_-)$ avec le sup cette fois-ci et tel que

$$\forall x \leq 0,\ \mu([x,0]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_-} \delta_{t_n}([0,x])$$

Ainsi pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ borné $\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{t_n}(C)$ et $t_0 \leq 0 < t_1$.
Dans le cas où μ est simple cette construction fait qu'il n'y a pas de répétition dans les temps de sauts, i.e. si on prend $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|t_n| < \infty$ alors nécessairement $t_n < t_{n+1}$ étant donné leur construction, en effet si $t_n = t_{n+1}$ alors $\mu(\{t_n\}) \geq 2$.
Ensuite l'application t_n est en effet mesurable,

$$t_n^{-1}(]a,b]) = \{m \in M_p(E); m([0,a]) < n; m(]a,b]) \geq n\} = p_{[0,a]}^{-1}([0,n-1]) \cap p_{]a,b]}^{-1}([n,\infty[) \in \mathcal{M}_p(E)$$

Avec $p_C(m) := m(C)$ □

Cette dernière proposition nous donne le lien entre ces différentes approches, seulement dans le cas où $E = \mathbb{R}$ mais la propriété reste vrai dans un cadre un peu plus général.
Les variables T_n sont en fait les $t_n \circ N$ i.e. $T_n(\omega) = t_n(N(w))$ le t_n pour la mesure ponctuelle $N(w)$ et donc T_n est bien une variable aléatoire par composition de fonctions mesurables d'après la proposition I.1.1 et la définition I.1.3.

Le résultat est en fait vrai dans un cadre plus général, cf [1].

Proposition I.1.2. Soit N un processus ponctuel sur $(E, \mathcal{B}(E))$ et notons γ un élément qui va représenter ∞ alors il existe une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans $E \cup \{\infty\}$ telle que : $\forall C \in \mathcal{B}(E)$, $N(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{X_n}(C)$ avec δ_γ la mesure nulle sur les boréliens.

Si on se donne un processus ponctuel au sens de I.1.3 alors on a bien un processus ponctuel au sens de I.1.6 i.e. une suite de variables aléatoires telle que $N(B) < \infty$ p.s. pour tout borélien borné.

Proposition I.1.3. Réciproquement donnons nous une suite de variables aléatoires (T_n) définies comme en I.1.6 i.e. de sorte que $N(B) < \infty$ pour tout borélien borné B. Alors N définit un processus ponctuel au sens de I.1.3.

Démonstration. $\forall B \in \mathcal{B}(E)$, $N(B) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1_B(T_n)$ est bien une variable aléatoire car fonction mesurable de (T_n), elle est de plus à valeurs entières et est p.s. finie donc N est un processus ponctuel. □

I.2 Outils et propriétés de base

Lorsque N est une mesure aléatoire (resp processus ponctuel), $N(C)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ pour tout borélien C et si de plus C est borné : $N(C) < \infty$ p.s. car les réalisations de N sont des mesures (ponctuelles) localement finies.

Proposition I.2.1. Soit N_1 et N_2 deux mesures aléatoires alors $N_1 + N_2$ en est encore une. De même si N_1 et N_2 sont des processus ponctuels.

I.2.1 Tribu et filtration engendrées, indépendance

Intuitivement $N(C)$ représente le nombre de points, du nuage de points généré aléatoire (T_n), qui tombent dans l'ensemble C.

On peut assez rapidement savoir si un processus définit un processus ponctuel. On peut les caractériser en donnant une collection d'ensemble assez particulière pour ce faire. Soit $\mathcal{E}_0$ une famille d'ensembles relativement compactes telle que $\mathcal{E}_0$ soit un π-système, $\sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{B}(E)$ et $\exists (E_n) \in \mathcal{E}_0^{\mathbb{N}}$ tq $E_n \uparrow E$ ou (E_n) soit une partition de E. RAJOUTER CHAPITRE ETC DE BREMAUD, RENDRE A CESAR :)

Proposition I.2.2. Soit $N : \Omega \to M(E)$, si $N(C) : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est une variable aléatoire pour tout $C \in \mathcal{E}_0$ alors N est une mesure aléatoire et donc pour qu'il soit ponctuel il suffit que $N(C) \in M_p(E)$ pour tout $C \in \mathcal{E}_0$

Démonstration. Pour que la variable aléatoire N soit mesurable il suffit que pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ on ait $p_B \circ N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ soit mesurable d'après la définition de $\mathcal{M}(E)$. Or $\mathcal{E}_0$ est un π-système tel que $\sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{B}(E)$ donc $B \in \sigma(\mathcal{E}_0)$ ainsi on peut exprimer $p_B \circ N = N(B)$ comme limite de $p_{C_n} \circ N$ où $C_n \in \sigma(\mathcal{E}_0)$ est une combinaison finie d'ensemble de $\mathcal{E}_0$ de sorte que $p_{C_n} \circ N$ est une variable pour tout n et donc par passage à la limite $p_B \circ N$ est une variable aléatoire. □

$$\mathcal{F}^N = \sigma(N(C); C \in \mathcal{B}(E)) \textbf{ la tribu engendré par } \mathrm{N}$$

Le nuage de points (T_n) généré est bien sûr $\mathcal{F}^N$ mesurable car pour tout n, T_n est une fonction mesurable de N d'après I.1.1, réciproquement N est une somme de diracs de (T_n) donc $N(C)$ est $\sigma(\{T_n\})$-mesurable pour tout borélien C.

Définition I.2.1. Une famille quelconque $(N_i)_{i\in I}$ de mesures aléatoires définies sur le même espace sont dites indépendantes si les $(\mathcal{F}^{N_i})_{i\in I}$ sont indépendantes, i.e. si toute sous famille finie l'est.

Définition I.2.2. N un processus ponctuel sur la droite des réels (ou la demi droite seulement) on notera $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N(]a,b]); a, b \leq t)$, $(\mathcal{F}_t^N)$ est la filtration du processus de comptage (N_t)

On étendra cette définition à l'occasion pour les processus marqués et multidimensionnels.

I.2.2 Intensité

On se donne une fonction φ mesurable de $(E, \mathcal{B}(E))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit N une mesure aléatoire on note indifféremment $N(\varphi)$ ou $\int_E \varphi(x)N(\mathrm{d}x)$ qui est la variable aléatoire (lorsque définie) :

$$N(\varphi)(\omega) := \int_E \varphi(x)N(\omega, \mathrm{d}x)$$

dans le cas du processus ponctuel

$$N(\varphi) = \sum \varphi(T_n)$$

.

Définition I.2.3 (intensité)**.** Soit N un processus ponctuel sur $(E, \mathcal{B}(E))$ on appelle **mesure intensité** de N la mesure sur $\mathcal{B}(E)$ définie par

$$\nu(C) := \mathbb{E}[N(C)]$$

lorsque ν admet une densité par rapport à une mesure de référence on appelle fonction intensité ou simplement **intensité** sa densité par rapport à une mesure de référence.

Les deux sont souvent confondus.

La mesure intensité est ce qui donne en moyenne le nombre de points qui se trouve dans un ensemble, c'est un indicateur important, surtout quand on fait des tests.

Théorème I.2.1 (Campbell)**.** Soit N une mesure aléatoire sur $(E, \mathcal{B}(E))$ de mesure intensité ν et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ positive ou $L^1(\nu)$. Alors

$$N(\varphi) \text{ est défini et } \mathbb{E}[N(\varphi)] = \int \varphi(x)\nu(\mathrm{d}x)$$

Pour être consistant dans les notations on notera $\nu(\varphi) := \int \varphi \mathrm{d}\nu$

Démonstration. On le montre dans le cas des fonctions positives, le cas L^1 n'étant que la distinction de la partie positive et négative.
Soit $A \in \mathcal{B}(E)$, $N(1_A) = N(A)$ est bien définie et c'est une variable aléatoire positive, $\mathbb{E}[N(A)] = \nu(A)$ par définition $\nu(A) = \nu(1_A)$ donc c'est bien vrai pour les indicatrices.
Soit une fonction simple φ notons $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}$ où $\lambda_k \geq 0$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ alors $N(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k N(A_k)$ par σ-additivité et on a donc l'égalité

$$\mathbb{E}[N(\varphi)] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nu(A_k)\nu(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nu(A_k)$$

Soit finalement φ une fonction mesurable positive, alors elle est limite croissante de fonctions simples (φ_n). $N(\varphi) = \int \varphi N(\mathrm{d}x)$ est bien définie car c'est pour tout ω l'intégrale par rapport à une mesure d'une fonction positive, de plus $N(\varphi)$ est donc bien une variable aléatoire d'après Fubini. On a $N(\varphi_n)(\omega) \uparrow N(\varphi)(\omega)$ pour tout ω. Donc $\mathbb{E}[N(\varphi_n)] \uparrow \mathbb{E}[N(\varphi)]$ et pour tout n, $\mathbb{E}[N(\varphi_n)] = \int \varphi_n \mathrm{d}\nu$ qui elle même croît vers $\int \varphi \mathrm{d}\nu$. D'où le résultat. $\square$

Remarque I.2.1. En particulier lorsque $\varphi \in L^1(\nu)$, $N(\varphi)$ est p.s. finie. Le théorème de Campbell permet d'accéder à la valeur moyenne d'une fonction sur le nuage de points généré uniquement à travers l'intensité. Ce résultat peut s'étendre aux fonctions aléatoires i.e. aux fonctions $\varphi : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ mesurables.

I.2.3 Fonctionnelle de Laplace

Définition I.2.4. N une mesure aléatoire sur E on définit la fonctionnelle de Laplace comme

$$\begin{array}{rccc} L_N : & \mathcal{B}^+(E) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \mathbb{E}[\exp(-N(f))] \end{array}$$

On définit la distribution de N comme $\mathbb{P}_N = \mathbb{P} \circ N^{-1}$, la mesure sur $(M(E), \mathcal{M}(E))$.

En définissant la distribution de N on a donc

$$L_N(f) = \int_{M(E)} \exp(-\int_E f \mathrm{d}\mu)\mathbb{P}_N(\mathrm{d}\mu)$$

La fonctionnelle de Laplace joue un similaire à la fonction caractéristique à la fonction caractéristique, il va totalement définir la distribution du processus ponctuel et même caractériser l'indépendance.

Théorème I.2.2. La fonctionnelle de Laplace caractérise totalement la mesure aléatoire N

Démonstration. Soit $C_1, \cdots, C_n$ des boréliens et $0 < t_1, \cdots, t_n < 1$

$$\begin{array}{cc} f := \sum_{k=1}^{n} -\log(t_k)1_{C_k} \text{ alors } f \in \mathcal{B}^+(E) & N(f) = \sum_{k=1}^{n} -\log(t_k)N(C_k) \\ \exp(-N(f)) = \prod_{k=1}^{n} t_k^{N(C_k)} & L_N(f) = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} t_k^{N(C_k)}] \end{array}$$

Ainsi $L_n(f)$ est la fonction génératrice de $(N(C_1), \cdots, N(C_n))$ en $(t_1, \cdots, t_n)$. Donc la fonctionnelle de Laplace caractérise les distributions fidis et par extension donc la mesure aléatoire N. ☐

Proposition I.2.3. Soit N_1 et N_2 deux processus ponctuels, N_1 et N_2 sont indépendants si et seulement si $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{B}^+(E)$ on a $\mathbb{E}[\exp(-(N_1(f_1) + N_2(f_2))] = L_{N_1}(f_1)L_{N_2}(f_2)$

Démonstration. Les deux processus sont indépendants si et seulement leurs distributions fidi le sont i.e. les $(N_1(C_1), \cdots, N_1(C_n))$ et $(N_2(B_1), \cdots, N_2(B_p))$.

$\Rightarrow$ Supposons que N_1 et N_2 sont indépendants et soient $C_1, ..., C_n$ et $B_1, ..., B_p$ des boréliens alors

$$(N_1(C_1), ..., N_1(C_n)) \perp\!\!\!\perp (N_2(B_1), ..., N_2(B_p)) \quad \text{a fortriori} \quad \exp(-\sum \lambda_k N_1(C_k)) \perp\!\!\!\perp \exp(-\sum \mu_k N_2(B_k))$$

ainsi pour toutes fonction simples à valeurs positives f_1 et f_2 on a

$$\mathbb{E}[\exp(-(N_1(f_1) + N_2(f_2))] = L_{N_1}(f_1)L_{N_2}(f_2)$$

par passage à la limite on obtient le sens direct de l'équivalence.

$\Leftarrow$ Soient $C_1, ..., C_n$ et $B_1, ..., B_p$ des boréliens et $0 < y_1, ..., y_n < 1$ et $0 < t_1, ..., t_p < 1$ posons

$$\begin{array}{ccc} f_1 := -\sum \log(y_k)1_{C_k} & f_2 := -\sum \log(t_k)1_{B_k} & \text{alors } f_1, f_2 \in \mathcal{B}^+(E) \\ \mathbb{E}[\exp(-(N_1(f_1) + N_2(f_2))] = & \mathbb{E}[y_1^{N_1(C_1)} ... y_n^{N_1(C_n)} t_1^{N_2(B_1)} ... t_p^{N_2(B_p)}] & = L_{N_1}(f_1)L_{N_2}(f_2) \end{array}$$

$$L_{N_1}(f_1)L_{N_2}(f_2) = \mathbb{E}[y_1^{N_1(C_1)} ... y_n^{N_1(C_n)}]\,\mathbb{E}[t_1^{N_2(B_1)} ... t_p^{N_2(B_p)}]$$

Donc $(N_1(C_1), ..., N_1(C_n)) \perp\!\!\!\perp (N_2(B_1), ..., N_2(B_p))$ puisque la fonction génératrice est le produit des fonctions génératrices. ☐

Dans toute la suite de ce texte on ne considérera que les processus ponctuels simples, i.e. à chaque fois qu'on dira processus ponctuel, simple sera sous entendu.

I.3 Processus ponctuels définis par une intensité stochastique

On se donne un processus ponctuel N simple et localement fini sur $\mathbb{R}$. On notera ici $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration associée à ce processus qu'on aurait ailleurs notée $(\mathcal{F}_t^N)$

Définition I.3.1. Soit (λ_t) un processus positif, $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable et localement intégrable. Si $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (T_n^a)$ une suite croissante de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que $T_n^a > a$, $T_n^a \to \infty$, $\mathbb{E}[N(]a, T_n^a])] < \infty$ et

$$\forall a \leq c \leq d, \mathbb{E}\left[N(]c \wedge T_n^a, d \wedge T_n^a])\middle|\mathcal{F}_c\right] = \mathbb{E}\left[\int_c^d \lambda(s)\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_c\right]$$

On dit alors que N admet λ comme $\mathcal{F}_t$-intensité stochastique

Cette définition un peu technique, donnée par P. Brémaud [1] a l'avantage d'être très générale. Expliquons un à un le rôle de chacun des éléments. Le rôle de l'intensité stochastique est de généraliser celui de l'intensité comme définie précédemment i.e. la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure intensité. Et plus intuitivement le taux moyen d'arrivée de nouveaux individus. Ici l'intensité est un processus aléatoire là où auparavant elle était déterministe. Pour un processus de Poisson homogène d'intensité $N(]a, b]) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_a$ et $\mathbb{E}[N(]a, b])] = (b - a)\lambda = \int\limits_a^b \lambda \mathrm{d}t$.
La condition de mesurabilité progressive et d'intégrabilité locale assure que pour tout $\infty < a, b, < \infty$, $\int\limits_a^b \lambda(s)\mathrm{d}s$ est une variable aléatoire presque sûrement finie. On pourra ainsi en définir l'espérance conditionnelle puisque c'est une variable positive.
Pour la plupart des processus ponctuels que l'on sera amené à considérer il suffira simplement de vérifier que $\mathbb{E}[N(]a, b])|\mathcal{F}_a] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \lambda(s)\mathrm{d}s|\mathcal{F}_a\right]$ avec λ qui vérifie les propriétés de la définition pour conclure que λ est une intensité stochastique de N. Mais considérer les temps d'arrêt plutôt que cette approche là directe permet de définir une intensité stochastique pertinente pour plus de processus ponctuels, notamment ceux pour lesquels les espérances conditionnelles considérées sont infinies.

Proposition I.3.1. Soit λ une intensité stochastique pour N alors

$$\forall b \in \mathbb{R} \text{ le processus } (X_t)_{t \geq b} = \left(N(]b, t]) - \int_b^t \lambda(s)\mathrm{d}s\right) \text{ est une } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale locale.}$$

Dans le cas où les quantités considérées sont L^1 c'est alors une vraie martingale.

Démonstration. Par définition de l'intensité stochastique $\exists (T_n^b)$ une suite de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que dans I.3.1. . Soit $b \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t^{T_n^b}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N(]b, t \wedge T_n^b]) - \int_b^{t\wedge T_n^b} \lambda(u)\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s] = X_s^{T_n^b} + \mathbb{E}[N(]s \wedge T_n^b, t \wedge T_n^b]) - \int_{s\wedge T_n^b}^{t\wedge T_n^b} \lambda(u)\mathrm{d}u|\mathcal{F}_s] = X_s^{T_n^b}$ □

En se restreignant à un processus ponctuel seulement sur la demi droite $\mathbb{R}_+$, notre processus de comptage N est un processus cadlàg (continu à droite et admettant une limite à gauche en tout point), c'est de plus une sous martingale, en effet

$$\forall s < t, \; \mathbb{E}[N_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_s + (N_t - N_s)|\mathcal{F}_s] = N_s + \mathbb{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] \geq N_s$$

Théorème I.3.1 (Doob-Meyer)**.** Le processus de comptage $(N_t) = (N(]0, t]))$ est la somme de deux processus : (A_t) et (M_t) tels que A est croissant et $(\mathcal{F}_t)$-prévisible et M soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Définition I.3.2. On appelle **compensateur** pour N tout processus croissant continu à droite et prévisible A tel que $(N_t - A_t)$ soit une martingale locale.

Remarque I.3.1. Si on se donne une intensité stochastique λ alors le processus intégré $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$ est bien prévisible car continu à gauche et tel que $(N_t - \Lambda(t))$ soit une martingale locale. Et inversement isi le compensateur est absolument continu on a alors une intensité stochastique.

Pour les processus définis par une intensité stochastique on a une version du théorème de Campbell, qui permet encore d'accéder à la moyenne d'une fonction sur les points générés mais qui permet également de caractériser une intensité.

Théorème I.3.2. Soit N un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ et λ une $(\mathcal{F}_t)$-intensité pour N alors pour tout processus prévisible positif H on a :

$$\mathbb{E}\Big[\int H(t)N(\mathrm{d}t)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int H(t)\lambda(t)\mathrm{d}t\Big]$$

Démonstration. On le montre d'abord pour des processus prévisibles simples puis on conclura par la version fonctionnelle du lemme de classe monotone. Soit a, b et $A \in \mathcal{F}_a$. Notons

$$H(t) = 1_{]a,b]}(t)1_A \quad \text{alors} \quad \textstyle\int H(t)N(\mathrm{d}t) = 1_A N(]a,b])$$

λ est une intensité pour N , on dispose donc de $(T_n^{(a)})$ suite de temps d'arrêt telle que dans I.3.1

$$1_A N(]a \wedge T_n^{(a)}, b \wedge T_n^{(a)}]) = \; 1_A N(]a, b \wedge T_n^{(a)}]) \uparrow \textstyle\int H(t)N(\mathrm{d}t)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_A N(]a \wedge T_n^{(a)}, b \wedge T_n^{(a)}])\right] &= \mathbb{E}\left[1_A \,\mathbb{E}[N(]a, b \wedge T_n^{(a)}])|\mathcal{F}_a]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_A \,\mathbb{E}[\textstyle\int_a^{b\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t|\mathcal{F}_a]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_A \textstyle\int_a^{b\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

Par limite croissante on obtient

$$\mathbb{E}[1_A N(]a, b \wedge T_n^{(a)}])] \uparrow \mathbb{E}[1_A N(]a,b])] = \mathbb{E}\left[\int H(t)N(\mathrm{d}t)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[1_A \int_a^{b\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t\right] \uparrow \mathbb{E}\left[1_A \int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\left[\int H(t)\lambda(t)\mathrm{d}t\right]$$

Ainsi pour toute processus de la forme $H(t) = 1_{]a,b]}(t)1_A$ où $A \in \mathcal{F}_a$ la propriété est vérifiée. On conclut par le lemme des classes montones. ☐

Théorème I.3.3. Soit N un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ et λ un processus positif localement intégrable et progressivement mesurable. Si pour tout processus positif et continu à gauche et $(\mathcal{F}_t)$-adapté H on a : $\mathbb{E}\Big[\int H(t)N(\mathrm{d}t)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int H(t)\lambda(t)\mathrm{d}t\Big]$ alors λ est une $(\mathcal{F}_t)$-intensité pour N.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ notons $T_n^{(a)} := \inf\{t >; \int_a^t \lambda(u)\mathrm{d}u \geq n\}$ alors $(T_n^{(a)})$ est une suite de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt car $\int_a^t \lambda$ est continu à droite, cf B.2. De plus comme λ est localement intégrable on a : $T_n^{(a)} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \infty$. Soit $[c,d] \subset]a, \infty[$ et $c \in \mathcal{F}_c$ on définit

$$H^{(n)}(t) := 1_{]c,d]}(t)1_{]a,T_n^{(a)}]}(t)1_C$$

alors $(H^{(n)}(t))_t$ est un processus continu à gauche et $(\mathcal{F}_t)$-adapté (car $T_n^{(a)}$ temps d'arrêt).

$$\int H^{(n)}(t)N(\mathrm{d}t) = 1_C N\big(1_{]c,d]}(\cdot)1_{]a,T_n^{(a)}]}(\cdot)\big) = 1_C N(]c \wedge T_n^{(a)}, d \wedge T_n^{(a)}])$$

$$
\begin{array}{rclc}
\mathbb{E}[1_C N(]c\wedge T_n^{(a)}, d\wedge T_n^{(a)}])] & = & \mathbb{E}[\int H^{(n)}(t)\lambda(t)\mathrm{d}t] & \text{d'après I.3.2} \\
\int H^{(n)}\lambda(t)\mathrm{d}t & = & 1_C \int_{c\wedge T_n^{(a)}}^{d\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t & \text{en prenant l'espérance} \\
\mathbb{E}[1_C N(]c\wedge T_n^{(a)}, d\wedge T_n^{(a)}])] & = & \mathbb{E}[1_C \int_{c\wedge T_n^{(a)}}^{d\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t] & \text{ainsi} \\
\mathbb{E}[N(]c\wedge T_n^{(a)}, d\wedge T_n^{(a)}])|\mathcal{F}_c] & = & \mathbb{E}[\int_{c\wedge T_n^{(a)}}^{d\wedge T_n^{(a)}} \lambda(t)\mathrm{d}t|\mathcal{F}_c] &
\end{array}
$$

λ est une $(\mathcal{F}_t)$-intensité pour N □

I.4 Des classes particulières

I.4.1 Les processus marqués

Définition I.4.1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui définit un processus ponctuel N et (K_n) de variables aléatoires sur l'espace des marquages $(K, \mathcal{K})$. On définit alors le processus ponctuel marqué associé comme :

$$\{(X_n, K_n)\} \text{ ou } \tilde{N} = \sum \delta_{(X_n,K_n)} \text{ indifféremment}$$

Les processus marqués sont donc des processus ponctuels, ils généralisent les processus ponctuels de façon conceptuelle, les variables aléatoires (K_n) sont des variables dites de marquages. Là où auparavant la seule information qu'on tirait du processus de comptage était simplement le nombre de points dans une région, où le nombre de sauts avant un temps t donné, ici on a une information en plus, celle d'une valeur associée à un point tiré. On peut donc accéder au nombre de points qui sont dans une région et dont les marquages valent tant.
Attention, le nouveau processus formé n'est pas nécessairement un processus ponctuel sur $E \times K$ car les marquages (K_n) ne vérifient pas nécessairement les propriétés que doivent vérifier les temps de saut d'un processus ponctuel.

Exemple : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ avec (ε_k) iid de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, i.e $T_n \sim \Gamma(n, 1)$ et (K_n) i.i.d de loi χ_k^2 indépendants des (T_n). Le processus ponctuel marqué par les K_n est alors $N = \sum \delta_{(T_n,K_n)}$. K_n pourrait représenter le poids d'un individu, $N(]0, T]\times]a, b])$ serait alors le nombre de personnes arrivés avant T dont le poids est compris entre a (non inclus) et b.

I.4.2 Les clusters

Définition I.4.2. Donnons nous un processus ponctuel N_0 de sauts (X_n) Soit (Z_n) une suite de fonctions $Z_n : E \times \Omega \times \mathcal{B}(E)$ telle que

1. $\forall x \in E, \forall \omega \in \Omega$, $Z_n(x, \omega, \cdot) \in M_p(E)$
2. $\forall C \in \mathcal{B}(E)$, $Z_n(\cdot, \cdot, C)$ est $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}$-mesurable
3. $\forall x \in E$, $(Z_n(x))_n$ est indépendant de N

On appelle processus ponctuel de cluster de parent N et de cluster (descendance) $Z_n(X_n, \cdot - X_n)$ le processus ponctuel défini par $N(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(X_n, C - X_n)$

Un cluster, comme défini par P. Brémaud [1] , est un processus ponctuel pour lequel chaque saut du processus originel engendre un nouveau processus indépendant des autres. On peut l'imaginer comme le comptage d'une population qui immigre et de sa descendance, les (X_n) sont les parents, ceux qui immigrent et ils engendrent des descendances indépendantes $Z_n(X_n, \cdot - X_n)$

Quand $Z_n(x)$ ne dépend pas de x on dit que le cluster est homogène en espace (ou temps), ça signifie simplement que les descendances ont toutes la même distribution, leurs origines sont simplement décalées.

Proposition I.4.1 (Laplace d'un cluster). $\forall \varphi \in \mathcal{B}^+(E)$ $L_N(\varphi) = L_{N_0}\big(-\log(L_{Z(\cdot_1)}(\varphi(\cdot + \cdot_1)))\big)$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{B}^+(E)$, $N(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(X_n, \cdot - X_n)(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(X_n, \varphi(\cdot + X_n))$ et donc

$$\begin{aligned} L_N(\varphi) &= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(X_n,\varphi(\cdot+X_n))}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{-\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n(X_n,\varphi(\cdot+X_n))}|N_0]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\prod_{n\in\mathbb{N}} e^{-Z_n(X_n,\varphi(\cdot+X_n))}|N_0]\right] \end{aligned}$$

Comme $N_0 \perp\!\!\!\perp (Z_n)$ on en déduit que

$$\mathbb{E}[e^{-Z_n(X_n,\varphi(\cdot+X_n)}|N_0] = L_{Z_n(y)}(\varphi(\cdot + y))_{|y=X_n} = L_{Z_n(X_n)}(\varphi(\cdot + X_n))$$

et comme les (Z_n) sont i.i.d. notons alors $L_{Z(y)} = L_{Z_1(y)}$

$$L_N(\varphi) = \mathbb{E}[\prod_{n\in\mathbb{N}} L_{Z(X_n)}(\varphi(\cdot + X_n))] = L_{N_0}\big(-\log(L_{Z(\cdot_1)}(\varphi(\cdot + \cdot_1)))\big)$$

pour l'écrire de manière explicite :

$$\text{Notons } \psi(x) = -\log(\mathbb{E}[e^{-\int \varphi(y+x)Z(x,\mathrm{d}y)}]) \text{ alors } L_N(\varphi) = L_{N_0}(\psi)$$

□

II. Processus de Poisson

Les processus de Poisson **origine des processus de Poisson**

II.1 Définition et caractérisation

Définition II.1.1. Un processus ponctuel N est un **processus de Poisson**, si il est d'intensité μ finie sur tout compact et

$$\begin{array}{lll} \forall C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{B}(E) & \text{2 à 2 disjoints} & (N(C_1), \cdots, N(C_n)) \perp\!\!\!\perp \\ \forall C \in \mathcal{B}(E) & N(C) \sim \mathcal{P}(\mu(C)) & \end{array}$$

Proposition II.1.1. N un processus de Poisson d'intensité μ alors

$$\forall f \in \mathcal{B}^+(E),\ L_N(f) = e^{\int e^{-f(x)}-1\mathrm{d}\mu(x)}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(E)$ borné, et $\lambda \geq 0$, $\lambda 1_A \in \mathcal{B}^+(E)$. $L_N(\lambda 1_A) = \mathbb{E}[e^{-\lambda N(A)}]$, comme N est de Poisson, $N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$ et donc

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda N(A)}] = e^{\mu(A)(e^{-\lambda}-1)} = e^{\int(e^{-\lambda 1_A(x)}-1)\mathrm{d}\mu(x)}$$

De même l'égalité est vrai pour toute fonction simple $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}$ tel que les (A_k) soient bornés et deux à deux disjoints. Soit $h \in \mathcal{B}^+(E)$ alors h est limite croissante d'une suite de fonctions simples positives à support compact (h_n).

$$\begin{array}{cc} L_N(h_n) = e^{\int(e^{-h_n(x)}-1)\mathrm{d}\mu(x)} & \int(e^{-h_n(x)} - 1)\mathrm{d}\mu(x) \downarrow \int(e^{-h(x)} - 1)\mathrm{d}\mu(x) \\ \text{car } h_n \text{ est simple} & \text{par limite décroissante} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
L_N(h_n) = \mathbb{E}[e^{-N(h_n)}] & \text{et} & N(h_n) \uparrow N(h) & \text{par convergence monotone} \\
L_N(h) = \mathbb{E}[e^{-N(h)}] & \text{et} & \mathbb{E}[e^{-N(h_n)}] \downarrow \mathbb{E}[e^{-N(h)}] & \text{par convergence montone}
\end{array}
$$

D'où le résultat. □

Proposition II.1.2 (superposition)**.** Soit (ν_j) une suite de mesure telle que $\forall A \in \mathcal{B}(E)$ borné $\sum \nu_j(A) < \infty$ et (N_j) une famille de processus de Poisson indépendants d'intensités (ν_j) alors

$$N = \sum N_j \text{ est un processus de Poisson d'intensité } \sum \nu_j$$

Démonstration. Soit $(C_1, \cdots, C_n)$ des boréliens deux à deux disjoints et bornés. $N(C_1) = \sum N_j(C_1), \cdots,$ $N(C_n) = \sum N_j(C_n)$ sont bien indépendants car les processus ponctuels N_j sont indépendants et de Poisson. $N(C) = \sum N_j(C)$ une somme de processus de Poisson indépendants de moyenne $\nu_j(C)$, les sommes partielles des $N_j(C)$ suivent des lois de Poisson de paramètre la somme partielle des $\nu_j(C)$. En passant à la limite en loi, on en déduit que $N(C) \sim \mathcal{P}(\sum \nu_j(C))$ (tout ça fonctionne car ce sont des lois de Poisson et que $\sum \nu_j(C) < \infty$) □

Définition II.1.2. On dit que le processus de Poisson N sur $\mathbb{R}^m$ est homogène si sa mesure intensité ν est telle que $\nu(\mathrm{d}x) = \lambda \times \ell^m(\mathrm{d}x)$ où ℓ^m est la mesure de Lebesgue et λ une constante.

Proposition II.1.3. Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ telles que $f, g \in L^2(\nu) \cap L^1(\nu)$, N Poisson d'intensité ν alors $N(f)$ et $N(g)$ ayant des moments d'ordre 2 et :

$$\sigma(N(f), N(g)) = \nu(fg)$$

Nous allons maintenant nous intéresser au processus de Poisson homogènes.

II.2 Poisson homogène

Donnons nous une suite (ε_k) de variables aléatoires réelles i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et notons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ des temps de saut. Le processus de comptage $N_t = \sum 1_{T_n \leq t}$ est alors un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\lambda\ell$.

II.2.1 Propriétés

Cela définit bien un processus ponctuel : $T_n < T_{n+1}$ p.s. et $T_n \to \infty$ par la loi forte des grands nombres, puisque $\frac{T_n}{n} \to \frac{1}{\lambda}$

Proposition II.2.1 (Loi du processus de comptage)**.**

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$$

Démonstration. Soit $t > 0$,, $(N_t = n) = (T_n \leq t < T_{n+1})$ et donc

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}(N_t = n) & = & \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) & = & \mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \varepsilon_{n+1}) \\
\mathbb{P}(N_t = n) & = & \mathbb{E}\big[\,\mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \varepsilon_{n+1} | T_n)\big] & = & \mathbb{E}\left[1_{T_n \leq t}\, \mathbb{P}(t - T_n < \varepsilon_{n+1} | T_n)\right] \\
\mathbb{P}(N_t = n) & = & \mathbb{E}\left[1_{T_n \leq t} \exp(-\lambda(t - T_n))\right] & &
\end{array}
$$

Comme T_n est une somme de n $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes alors $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ donc

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(N_t = n) & = & \mathbb{E}\left[1_{T_n \leq t} \exp(-\lambda(t - T_n))\right] \\
& = & \int_0^t e^{-\lambda(t-y)} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\
& = & \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{array}
$$

□

Proposition II.2.2 (Loi conjointe et indépendance des accroissements).

$$N_{t+s}-N_s \sim \mathcal{P}(\lambda t) \text{ et } N_{t+s}-N_s \perp\!\!\!\perp N_s$$

Démonstration. Soit r et p des entiers, calculons $\mathbb{P}(N_{t+s}-N_s=r, N_s=p)$.
$(N_s=p)=(T_p\le s<T_{p+1})$ et $(N_{t+s}-N_s=r)\cap(N_s=p)=(N_{t+s}=r+p)\cap(N_s=p)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+s}-N_s=r,N_s=p) &= \mathbb{E}[1_{T_p\le s<T_{p+1}}1_{T_{r+p}\le t+s<T_{r+p+1}}]\\ &= \mathbb{E}[1_{T_p\le s}1_{s-T_p<\varepsilon_{p+1}}1_{\varepsilon_{p+2}+...+\varepsilon_{r+p}\le t+s-T_p-\varepsilon_{p+1}<\varepsilon_{p+2}+...+\varepsilon_{r+p+1}}]\\ &= \mathbb{E}[1_{T_p\le s}\,\mathbb{E}[1_{s-T_p<\varepsilon_{p+1}}1_{\varepsilon_{p+2}+...+\varepsilon_{r+p}\le t+s-T_p-\varepsilon_{p+1}<\varepsilon_{p+2}+...+\varepsilon_{r+p+1}}|T_p]]\end{aligned}$$

Par indépendance de T_p et des ε_k pour $k>p$ il suffit de calculer la deuxième espérance. en un point y puis de remplacer par T_p. Notons $Y_k:=\varepsilon_{p+2}+...+\varepsilon_{p+2+k}$.

$$\mathbb{E}[1_{s-y<\varepsilon_{p+1}}1_{Y_{r-2}\le t+s-y-\varepsilon_{p+1}<Y_{r-1}}]=\int_{s-y}^{t+s-y}\lambda e^{-\lambda\epsilon}\,\mathbb{P}[Y_{r-2}\le t+s-y-\epsilon<Y_{r-1}|\varepsilon_{p+1}=\epsilon]\mathrm{d}\epsilon$$

Par indépendance des Y_k et de ε_{p+1} la probabilité conditionnelle est simplement la probabilité normale. Y_k étant une somme de $k+1$ $\mathcal{E}(\lambda)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_{r-2}\le t+s-y-\epsilon<Y_{r-1}|\varepsilon_{p+1}=\epsilon] &= \mathbb{P}[Y_{r-2}\le t+s-y-\epsilon<Y_{r-1}]\\ &= \tfrac{(\lambda(t+s-y-\epsilon))^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda(t+s-y-\epsilon)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1_{s-T_p<\varepsilon_{p+1}}1_{Y_{r-2}\le t+s-T_p-\varepsilon_{p+1}<Y_{r-1}}|T_p]|_{T_p=y} &= \textstyle\int_{s-y}^{t+s-y}\lambda e^{-\lambda\epsilon}\frac{(\lambda(t+s-y-\epsilon))^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda(t+s-y-\epsilon)}\mathrm{d}\epsilon\\ &= \tfrac{\lambda^r}{(r-1)!}e^{-\lambda(t+s-y)}\textstyle\int_0^t(t-u)^{r-1}\mathrm{d}u\\ &= \tfrac{(\lambda t)^r}{r!}e^{-\lambda(t+s-y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+s}-N_s=r,N_s=p) &= \mathbb{E}[1_{T_p\le s}\,\mathbb{E}[1_{s-T_p<\varepsilon_{p+1}}1_{Y_{r-2}\le t+s-T_p-\varepsilon_{p+1}<Y_{r-1}}|T_p]]\\ &= \mathbb{E}[1_{T_p\le s}\tfrac{(\lambda t)^r}{r!}e^{-\lambda(t+s-T_p)}]\\ &= \tfrac{(\lambda t)^r}{r!}e^{-\lambda(t+s)}\textstyle\int_0^s e^{\lambda t_p}\frac{\lambda^p}{(p-1)!}t_p^{r-1}e^{-\lambda t_p}\mathrm{d}t_p\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(N_{t+s}-N_s=r,N_s=p)=\frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!}\frac{(\lambda s)^p e^{-\lambda s}}{p!}$$

On a donc la loi conjointe de $N_{t+s}-N_s$ et N_s, on en déduit que $N_{t+s}-N_s\sim\mathcal{P}(\lambda t)$ et l'indépendance.

□

Le processus de Poisson homogène est la classe la plus simple de processus ponctuel que l'on puisse imaginer, le nombre de points qui tombe dans un intervalle donné ne dépend que du taux d'arrivée (λ) et de la longueur de l'intervalle et est indépendant du nombre d'arrivées avant.

Proposition II.2.3 (Distribution du comptage sachant les sauts).

$N_t|(T_1,...,T_n)$ est la loi d'un processus de Poisson dont l'origine a été décalée de T_n

Démonstration. Fixons n. Si $k < n$ alors $\mathbb{P}(N_t = k|T_1, ..., T_n) = 1_{T_k \leq t < T_{k+1}}$.
Si $k = n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k|T_1, ..., T_n) &= \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}|T_1, ..., T_n) \\
&= \mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \varepsilon_{n+1}|T_1, ..., T_n) \\
&= 1_{T_n \leq t}\mathbb{P}(t - T_n < \varepsilon_{n+1}) \\
&= 1_{T_n \leq t}e^{-\lambda(t-T_n)}
\end{aligned}$$

Enfin si $k > n$,

$$\mathbb{P}(N_t = k|T_1, ..., T_n) = 1_{T_n \leq t}\mathbb{P}(T_n + Z_{k-n} \leq t < T_n + Z_{k-n} + \varepsilon_{k+1}|T_1, ..., T_n)$$

avec Z_{k-n} la somme $k - n$ exponentielles indépendantes de $(T_1, ..., T_n)$ et donc

$$\mathbb{P}(N_t = k|T_1, ..., T_n) = 1_{T_n \leq t}\frac{(\lambda(t - T_n))^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda(t-T_n)}$$

□

Proposition II.2.4 (Distribution des sauts sachant le comptage).

$$(T_1, ..., T_n)|N_t = n \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)}) \text{ avec } U_k \sim \mathcal{U}([0, t])$$

Démonstration. $\begin{bmatrix} T_1 \\ . \\ . \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ . & 1 & 0 & . \\ . & . & 1 & 0 \\ 1 & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$

Par changement de variable et en notant

$$\Delta = \{(t_1, ..., t_n)|0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n\} \text{ donc } f_{(T_1,...,T_n)}(t_1, ..., t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}1_\Delta(t_1, ..., t_n)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, ..., T_n \leq t_n, N_t = n) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, ..., T_n \leq t_n, T_n \leq t < T_n + \varepsilon_{n+1}) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, ..., T_n \leq \min(t_n, t), t - T_n < \varepsilon_{n+1}|(T_1, ..., T_n))] \\
&= \mathbb{E}[1_{T_1 \leq t_1,...,T_n \leq \min(t_n,t)}e^{-\lambda(t-T_n)}]
\end{aligned}$$

Il est suffisant de déterminer la loi sur des instants croissants posons

$$t_1 = u_1, t_2 = u_1 + u_2, ..., t_n = u_1 + ... + u_n$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, ..., T_n \leq t_n, N_t = n) &= \int 1_{y_1 \leq t_1,...,y_n \leq \min(t_n,t)}e^{-\lambda(t-y_n)}\lambda^n e^{-\lambda y_n}1_\Delta(y_1, ..., y_n)\mathrm{d}y_1..\mathrm{d}y_n \\
&= \lambda^n e^{-\lambda} \int ...
\end{aligned}$$ et

donc en divisant par $P(N_t = n) = \frac{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}}{n!}$ on obtient bien le résultat.

□

II.2.2 Simulation

Cette dernière propriété nous donne les outils pour simuler les temps d'arrivée d'un processus de poisson homogène dans un intervalle de temps donné. On simule d'abord N_t qui nous donnera le nombre de points dans l'intervalle puis on simule des variables uniformes dans celui-ci et on les ordonne pour avoir les temps de saut.

Simulation d'un processus de Poissons de homogène

Algorithme 1 Utilisant $T_{n+1}|(T_1, ..., T_n)$

Require: $a, b \in \mathbb{R}$ et le taux λ

  $V_{\text{jumps}} \leftarrow \{\}$, $x \leftarrow a$

  while $x < b$ **do**

    Générer $y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ($y = \frac{-\log(U)}{\lambda}$)

    $x \leftarrow x + y$,

    $V_{\text{jumps}} \leftarrow V_{\text{jumps}} \cup \{x\}$

  end while

  return V_{jumps} le vecteur des instants de sauts, $|V_{\text{jumps}}|$ est le nombre de sauts.

Supposons que l'on simule une loi exponentielle : $\mathcal{E}(\lambda)$ en $O(1)$. A paramètre λ fixé cet algorithme a une complexité moyenne en $O(\lambda(b-a))$ qui est le nombre moyen de sauts à simuler avant l'arrêt du programme, cela grandit donc linéairement en fonction de l'intervalle en moyenne.

Algorithme 2 Utilisant la loi conditionnelle $(T_1, ..., T_n)|N_t = n$

Require: $a, b \in \mathbb{R}$ et le taux λ

  Générer $N \sim \mathcal{P}(\lambda(b-a))$

  Générer $U_1, ..., U_n \sim \mathcal{U}([a, b])$ indépendantes.

  $V_{\text{jumps}} \leftarrow \{U_1, ..., U_n\}$

  Trier V_{jumps}

  return V_{jumps} le vecteur des instants de sauts, $|V_{\text{jumps}}|$ est le nombre de sauts (vaut N).

La complexité de cet algorithme dépend de la façon de trier les instants de sauts, en moyenne la génération de N et ensuite de $U_1, ..., U_N$ se fait en $O(\lambda(b-a))$ et le tri peut se faire au mieu en $O(\lambda(b-a)\log(\lambda(b-a)))$. Ce qui n'est pas mieux que l'algorithme naïf. Mais cet algorithme peut se vectoriser.

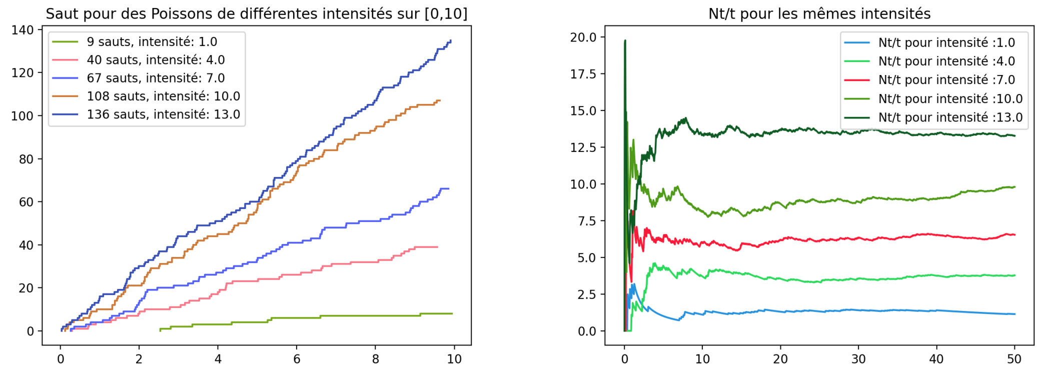

FIGURE 1 – Exemple de trajectoire et convergence de $\frac{N_t}{t}$ vers λ

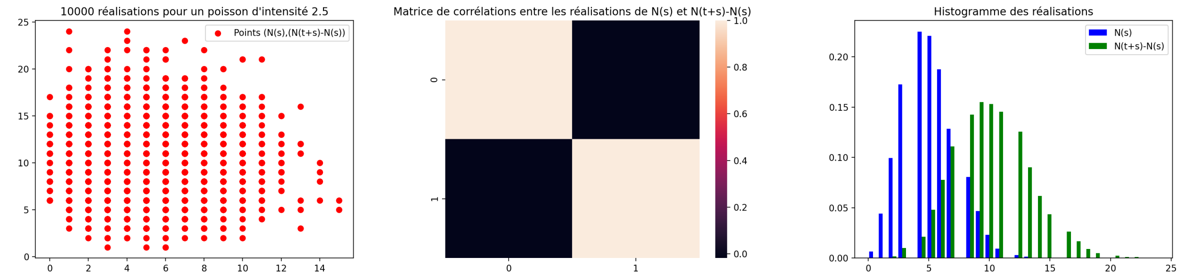

FIGURE 2 – Indépendance des accroissements : $N_{t+s} - N_s \perp\!\!\!\perp N_s$ et tracé de leur répartitions. $t = 4, s = 2, \lambda = 2.5$ on a tracé $N = 10^4$ réalisations $(N_s^{(i)}, N_{t+s}^{(i)})_{1 \leq i \leq N}$, leurs corrélation et histogramme respectifs.

Le processus de Poisson homogène peut être généralisé, en effet on pourrait souhaiter que le nombre de sauts dépende des instants auxquels on regarde, i.e. que le taux de saut λ qui était considéré comme constant jusque là soit en fait dépendant du temps. Et donc le paramètre sur un intervalle $]a,b]$ ne serait plus $\lambda(b-a)$ mais $\int_a^b \lambda(s)\mathrm{d}s$

II.3 Poisson inhomogène

Un processus de Poisson inhomogène est un processus pour lequel la mesure intensité n'est pas uniforme i.e. un multiple de la mesure de Lebesgue et qui admette une densité. N un processus de Poisson inhomogène sur $\mathbb{R}_+$ de mesure intensité μ telle que $\mu(A) = \int_A \lambda(s)\mathrm{d}s$.

II.3.1 Propriétés et caractérisation

$$N_t \sim \mathcal{P}(\Lambda(t)) \text{ avec } \Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$$

Par extension on notera $\Lambda(a,b] = \int_a^b \lambda(u)\mathrm{d}u = \Lambda(b) - \Lambda(a)$. Le processus de Poisson inhomogène vérifient les mêmes propriétés d'indépendance des accroissements que le Poisson homogène (cf **II.1.1.**) par définition.

$$N_{t+s} - N_s \perp\!\!\!\perp N_s \textbf{ et } N_{t+s} - N_s \sim \mathcal{P}(\Lambda(s,t])$$

L'existence d'un tel processus ne pose pas problème grâce au théorème d'extension de Kolmogorov mais la construction de celui-ci (ou d'une version plutôt) à partir des temps de saut comme pour le cas homogène est a priori moins évidente, décrivons quelques-une de ses propriétés. On va supposer que λ est telle que Λ est dérivable partout de dérivée λ.

Proposition II.3.1 (Distribution du comptage sachant les sauts)**.** $N_t|T_1,...,T_n$ est la loi d'un processus de Poisson inhomogène de même intensité mais dont l'origine a été décalée de T_n

Démonstration. Fixons n. Si $k < n$ alors $\mathbb{P}(N_t = k|T_1,...,T_n) = 1_{T_k \le t < T_{k+1}}$.
Si $k \geq n$,

$$\mathbb{P}(N_t = k|T_1,...,T_n) = \mathbb{P}(N(T_n,t] = (k-n)|T_1,...,T_n)$$

comme N est un processus de Poisson inhomogène

$$\begin{array}{ccc} N(T_n,t]|T_1,...,T_n & \sim & \mathcal{P}(\Lambda(T_n,t]) \quad \text{alors} \\ \mathbb{P}(N_t = k|T_1,...,T_n) & = & 1_{T_n \le t} \frac{\Lambda(T_n,t]^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\Lambda(T_n,t]} \end{array}$$

□

Proposition II.3.2 (Distribution du n-ième temps de saut)**.**

$$f_{T_n}(t) = \lambda(t)\Lambda(t)^{n-1} \frac{e^{-\Lambda(t)}}{(n-1)!}$$

Démonstration. $(N_t \geq n) \Leftrightarrow (T_n \leq t)$ on peut donc calculer la fonction de répartition

$$F_{T_n}(t) = \mathbb{P}(T_n \leq t) = e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^k}{k!}$$

alors F_{T_n} est dérivable de dérivée :

$$\begin{array}{rcl} F'_{T_n}(t) & = & -\lambda(t)e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k\lambda(t)\Lambda(t)^{k-1}}{k!} \\ f_{T_n}(t) & = & \lambda(t)\Lambda(t)^{n-1} \frac{e^{-\Lambda(t)}}{(n-1)!} \end{array}$$

□

Si on suppose que $\lambda > 0$ partout alors Λ est une injection dérivable,

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) = \int_0^t \lambda(u)\Lambda(u)^{n-1} \frac{e^{-\Lambda(u)}}{(n-1)!} \mathrm{d}u = \int_0^{\Lambda(t)} \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} e^{-v} \mathrm{d}v$$

grâce au changement de variable $v = \Lambda(u)$ et donc $\mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq \Lambda(t))$ où $Y \sim \Gamma(n, 1)$.

Remarque II.3.1.

$$\text{Asymptotiquement si } \lim_{t\to\infty} \Lambda(t) < \infty \text{ alors } \mathbb{P}(T_n < \infty) < 1$$

Ce résultat est vrai même sans les hypothèses de régularité, en effet si $\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) < \infty$ notons $\Lambda(\infty)$ cette limite alors $N(0, \infty] < \infty$ p.s. et donc il y'a un nombre presque sûrement fini de sauts, i.e. $T_n = \infty$ APCR. $N(0, \infty]$ admet même une espérance dans ce cas : $\Lambda(\infty)$

Proposition II.3.3 (Distribution conditionnelle du temps de saut suivant)**.**

$$\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | T_1, ..., T_n) = 1_{T_n \leq t}(1 - e^{-\Lambda(T_n, t]})$$

Démonstration.

$$\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | T_1, ..., T_n) = \mathbb{P}(N_t \geq n + 1 | T_1, ..., T_n) = \mathbb{P}(N(T_n, t] \geq 1 | T_1, ..., T_n)$$

or $N(T_n, t] | (T_1, ..., T_n) \sim \mathcal{P}(\Lambda(T_n, t])$ donc

$$\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | T_1, ..., T_n) = 1_{T_n \leq t}(1 - e^{-\Lambda(T_n, t]})$$

□

Remarque II.3.2. conditionnellement à $T_1, ..., T_n$ la loi de T_{n+1} est une exponentielle décalée dont le paramètre est variable, plus précisément si on note $Z \sim \mathcal{E}(1)$ alors $\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | T_1, ..., T_n) = 1_{T_n \leq t} P(Z + \Lambda(T_n) \leq \Lambda(t))$

Proposition II.3.4 (Distribution des sauts)**.**

$$f_{T_1,...,T_n}(t_1, ..., t_n) = 1_{t_1 \leq ... \leq t_n} \lambda(t_1)...\lambda(t_n)e^{-\Lambda(t_n)}$$

Démonstration. Etant donné le résultat précédent en déduit que

$$\begin{array}{rcl} f_{T_{n+1}|(T_1,...,T_n)}(t|t_1, ..., t_n) & = & 1_{t_n \leq t}\lambda(t)e^{-\Lambda(t_n, t]} \quad \text{ainsi} \\ f_{T_1,...,T_{n+1}}(t_1, ..., t_n, t) & = & 1_{t_n \leq t}\lambda(t)e^{-\Lambda(t_n, t]} f_{T_1,...,T_n}(t_1, ..., t_n) \end{array}$$

Par récurrence on obtient : $f_{T_1,...,T_n}(t_1, ..., t_n) = 1_{t_1 \leq ... \leq t_n} \lambda(t_1)...\lambda(t_n)e^{-\Lambda(t_n)}$ □

En faisant le changement de variable $(Y_1, ..., Y_n) = (\Lambda(T_1), ..., \Lambda(T_n))$ On voit que $(T_1, ..., T_n)$forme un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ ssi $(\Lambda(T_1), ..., \Lambda(T_n))$ forme un processus de Poisson d'intensité 1.

Proposition II.3.5 (Distribution des temps de saut sachant le comptage)**.**

$$(T_1, ..., T_n)|N_t = n \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)}) \text{ avec } U_k \overset{\text{i.i.d}}{\sim} 1_{\cdot \leq t} \frac{\lambda(\cdot)}{\Lambda(t)}$$

Démonstration.

$$\mathbb{P}(T_1 \leq u_1, ..., T_n \leq u_n, N_t = n) = \mathbb{P}(T_1 \leq u_1, ..., T_n \leq \min(u_n, t), t < T_{n+1})$$

Notons $A = \{(r_1, ..., r_n); r_1 \leq u_1, ..., r_n \leq u_n\}$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}((T_1, ..., T_n) \in A, N_t = n) & = & \mathbb{E}[1_A(T_1, ..., T_n)\, \mathbb{E}[1_{t<T_{n+1}}|T_1, ..., T_n]] \\
\mathbb{E}[1_{t<T_{n+1}}|T_1, ..., T_n] & = & 1 - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t|T_1, ..., T_n) \\
 & = & 1 - (1 - e^{-\Lambda(T_n,t]})1_{T_n \leq t} \\
 & = & 1_{T_n>t} + 1_{T_n \leq t} e^{-\Lambda(T_n,t]} \\
\mathbb{E}[1_A(T_1, ..., T_n)(1_{T_n>t} + 1_{T_n \leq t} e^{-\Lambda(T_n,t]})] & = & \mathbb{E}[1_A(T_1, ..., T_n)1_{T_n \leq t} e^{-\Lambda(T_n,t]}] \\
\mathbb{P}((T_1, ..., T_n) \in A|N_t = n) & = & \mathbb{E}[1_A(T_1, ..., T_n)1_{T_n \leq t} e^{-\Lambda(T_n,t]} \frac{n! e^{\Lambda(t)}}{\Lambda(t)^n}] \\
 & = & \mathbb{E}[1_A(T_1, ..., T_n)1_{T_n \leq t} \frac{n! e^{\Lambda(T_n)}}{\Lambda(t)^n}] \\
 & = & \int 1_A(t_1, ..., t_n)1_{t_1 \leq ... \leq t_n} \lambda(t_1)...\lambda(t_n) \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \mathrm{d}t_1..\mathrm{d}t_n
\end{array}$$

$$\mathbb{P}((T_1, ..., T_n) \in A|N_t = n) = \int_A 1_{t_1 \leq ... \leq t_n} \lambda(t_1)...\lambda(t_n) \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \mathrm{d}t_1..\mathrm{d}t_n$$

□

On reconnait là la densité d'une statistique d'ordre, comme dans le cas homogène, exceptée ici les variables ne sont pas uniformes, c'est la statistique d'ordre de n variables indépendantes de distribution $\frac{\lambda(t)}{\Lambda(T)}$.

Quelques généralisations utiles pour la simulation :

$$(T_{N_a+1}, ..., T_{N_a+n})|N(a, b] = n \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)}) \text{ avec } U_k \overset{\text{iid}}{\sim} 1_{a<\cdot \leq b} \frac{\lambda(\cdot)}{\Lambda(a, b]}$$

II.3.2 Simulation

Comme dans le cas homogène, ayant la distribution conditionnelle de $T_{n+1}|(T_1, ..., T_n)$ et la distribution de T_1 on peut en déduire un moyen de simuler les temps de saut. Une autre façon de simuler les temps de saut est d'utiliser la dernière propriété démontrée : simuler une loi de Poisson de $\mathcal{P}(\Lambda(t))$ puis simuler des variables indépendantes qui suivent $\frac{\lambda(\cdot)}{\Lambda(t)}$ et les classer. Mais la méthode utilisée et la plus pratique ne sera aucune de celles-ci, ce sera le *thinning* que l'on développera dans la suite.

Les résultats précédents donnent plusieurs façons de générer un Poisson inhomogène :

1. En utilisant la loi conditionnelle $(T_1, ..., T_n)|N_t = n$
2. En utilisant $\mathcal{L}(T_{n+1}|T_1, ..., T_n)$

Et chacune de ces deux approches peut être résolu de plusieurs façons, les deux façons se résument à du rejet ou savoir inverser l'intensité intégrée.

Algorithme 3 Utilisant la loi conditionnelle $(T_1, ..., T_n)|N_t = n$ en n'ayant accès qu'à λ

Require: $a, b \in \mathbb{R}$, le taux λ
Calculer $\Lambda(a, b]$ numériquement en intégrant λ sur $]a, b]$ (Monte-Carlo ou trapèzes)
Générer $N \sim \mathcal{P}(\Lambda(a, b])$
Générer $U_1, ..., U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \dfrac{\lambda(\cdot)}{\Lambda(a, b]}$ par rejet en majorant $\lambda(\cdot)$ par $\bar{\lambda}$ sur $]a, b]$
$V_{\text{jumps}} \leftarrow \{U_1, ..., U_n\}$
Trier V_{jumps}
return V_{jumps} le vecteur des instants de sauts, $|V_{\text{jumps}}|$ est le nombre de sauts (vaut N).

Algorithme 4 Utilisant la loi conditionnelle $(T_1, ..., T_n)|N_t = n$ en ayant une expression de Λ

Require: $a, b \in \mathbb{R}$, le taux intégré Λ
Générer $N \sim \mathcal{P}(\Lambda(a, b])$ $(\Lambda(a, b] = \Lambda(b) - \Lambda(a))$
Générer $U_1, ..., U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(]0, 1[)$, inverser numériquement $\Lambda(a, \cdot)$ ou en en ayant une expression puis $Y_1, ..., Y_n = \frac{\Lambda^{-1}(a,U_1)}{\Lambda(a,b]}, ..., \frac{\Lambda^{-1}(a,U_n)}{\Lambda(a,b]}$
$V_{\text{jumps}} \leftarrow \{Y_1, ..., Y_n\}$
Trier V_{jumps}
return V_{jumps} le vecteur des instants de sauts, $|V_{\text{jumps}}|$ est le nombre de sauts (vaut N).

Thinning

La méthode du *thinning* pour la simulation d'un processus de Poisson inhomogène a été introduite en 1978 [6], l'idée sous jacente est très similaire à une méthode de rejet. On génère un processus d'intensité majorante et on garde ou non les sauts (T_n) avec probabilité $\frac{\lambda(T_n)}{\bar{\lambda}}$

Proposition II.3.6. Soit λ une intensité (déterministe) sur $\mathbb{R}_+$ majorée par $\bar{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit N^* un processus de Poisson d'intensité $\bar{\lambda}$, notons (T_k) ses sauts. $N^*(A) = \sum\limits_{k \geq 1} 1_A(T_k)$ et soit $(U_n) \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}([0, 1])$, $(U_n) \perp\!\!\!\perp N^*$.

$$\text{Alors } N(A) := \sum_{n \geq 1} 1_{U_n \leq \frac{\lambda(T_n)}{\bar{\lambda}}} 1_A(T_n) \text{ est un Poisson d'intensité } \lambda(\cdot)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}_+)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-N(f)}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-N(f)}|(T_n)]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-\sum\limits_{n\geq 1} 1(U_n \leq \frac{\lambda(T_n)}{\bar{\lambda}}) f(T_n)}|(T_n)]] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod(1 + \tfrac{\lambda(T_n)}{\bar{\lambda}}(e^{-f(T_n)} - 1)\right] \\
\text{ainsi } L_N(f) &= \mathbb{E}\left[e^{-\sum -\log(1 + \frac{\lambda(T_n)}{\bar{\lambda}}(e^{-f(T_n)}-1))}\right] \\
&= \quad = L_{N^*}(h) \\
\text{avec } h(x) &= -\log(1 + \tfrac{\lambda(x)}{\bar{\lambda}}(e^{-f(x)} - 1))
\end{aligned}$$

Comme N^* est un processus de Poisson d'intensité $\bar{\lambda}$ alors

$$L_{N^*}(h) = e^{-\int 1 - e^{-h(x)} \bar{\lambda} \mathrm{d}x} = e^{-\int (1 - e^{-f(x)}) \lambda(x) \mathrm{d}x}$$

$$\forall f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}_+), \ L_N(f) = e^{-\int (1 - e^{-f(x)}) \lambda(x) \mathrm{d}x}$$

N est donc un processus de Poisson d'intensité $\lambda(\cdot)$ ☐

Algorithme 5 *Thinning*

Require: $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda(\cdot) \leq \bar{\lambda}$ sur $[a, b]$
  $V_{\text{jumps}} \leftarrow \{\}$, $x \leftarrow a$
  while $x < b$ **do**
    Générer $y \sim \mathcal{E}(\bar{\lambda})$, $(y = \frac{-\log(U)}{\bar{\lambda}})$
    $x \leftarrow x + y$
    Générer $V \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$
    if $U \leq \frac{\lambda(x)}{\bar{\lambda}}$ **then**
      $V_{\text{jumps}} \leftarrow V_{\text{jumps}} \cup \{x\}$
    end if
  end while
  return V_{jumps} le vecteur des instants de sauts, $|V_{\text{jumps}}|$ est le nombre de sauts.

Remarque II.3.3. Cet algorithme a plusieurs avantages, pas besoin de calculer d'intégrale, pas besoin d'inverser de fonction, ni de simuler des variables par rejet, ni de trier sans qu'il n'y ait un excès de complexité en matière de code et de temps.
Le *thinning* est en réalité une méthode très générale et que l'on peut généraliser aux processus ponctuels qui ont une intensité stochastique.

III. Processus de Hawkes

III.1 Mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ et génération de processus ponctuels

Fixons un processus de Poisson homogène M sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Définition III.1.1. On notera S_t l'opérateur de translation par rapport à la première variable i.e. S_tM le processus ponctuel $S_tM(A) = M((A + t) \times \mathbb{R})$

$$S_tM^+(A) := M\big(((A + t) \cap \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}\big) \text{ et } S_tM^-(A) := M\big(((A + t) \cap \mathbb{R}_-) \times \mathbb{R}\big)$$

Plus généralement pour toute mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^2$, $S_tm(A \times L) = M((A + t) \times L)$ On peut voir le processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ comme un processus de Poisson marqué et $S_tM^{\pm}$ comme les événements qui se passent avant t et après t

Remarque III.1.1. Comme M est un processus de Poisson et que pour tout $s < t$ et tout $[c, d] \subset]-\infty, s]$ et $[e, f] \subset [t, \infty[$ on a $[c, d] \times \mathbb{R} \cap [e, f] \times \mathbb{R} = \emptyset$ alors $M([c, d] \times \mathbb{R}) \perp\!\!\!\perp M([e, f] \times \mathbb{R})$

On notera $\mathcal{F}_t = \sigma(M(]a, b] \times \mathbb{R}); a, b \leq t)$. $\tilde{N}_t := M(]-\infty, t] \times \mathbb{R})$ est alors adapté etd'après la remarque précédente on déduit que $S_tM^+ \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ pour tout $s < t$. Dans la suite on notera $(\mathcal{F}_t)$ toute filtration qui vérifie ces deux propriétés.

Proposition III.1.1. Soit λ un processus positif $(\mathcal{F}_t)$-prévisible, localement intégrable.

$$N(C) := \int_C \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\lambda(t)]}(z) M(\mathrm{d}z \times \mathrm{d}t) \text{ est un processus ponctuel d'intensité } \lambda$$

Démonstration. λ est bien progressivement mesurable car prévisible. M est un processus de Poisson d'intensité 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a \leq c, d$, $A \in \mathcal{F}_c$ alors $\mathbb{E}[1_A N(c, d]] = \mathbb{E}[\int_{c^+}^d \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\lambda(t)]}(z) 1_A M(\mathrm{d}z \times \mathrm{d}t)] =$

$\mathbb{E}[\int_{c^+}^{d}\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,\lambda(t)]}(z)1_A \mathrm{d}z \times \mathrm{d}t] = \mathbb{E}[1_A \int_c^d \lambda(t)\mathrm{d}t]$, c'est une conséquence des résultats I.3. puisque 1 est une intensité de M et que $1_{[0,\lambda(t)]}(z)1_A$ est prévisible.

$$\mathbb{E}[N(]c,d])|\mathcal{F}_c] = \mathbb{E}[\int_c^d \lambda(t)\mathrm{d}t|\mathcal{F}_c]$$

□

Si on connait l'intensité stochastique λ et qu'on la suppose prévisible il suffit alors de générer les sauts d'un poisson sur $\mathbb{R}^2$ (X_n, Y_n) et de garder les sauts X_n pour lesquels Y_n vérifie $0 < Y_n \leq \lambda(X_n)$, le processus qui en résulte est d'intensité λ.

Proposition III.1.2. *N un processus ponctuel simple sur $\mathbb{R}$, (T_n) ses sauts. λ son $(\mathcal{F}_t)$-intensité, supposons la prévisible. Soit $(U_n) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$ indépendant de $\mathcal{F}_\infty = \vee \mathcal{F}_t$. Soit $\hat{M}$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité 1 indépendant de $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{F}_\infty^U$.*

$$\bar{N}(]a,b] \times L) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1_{]a,b]}(T_n)1_L(\lambda(T_n)U_n) + \int_{]a,b]} \hat{M}[\mathrm{d}t \times (L\backslash]0,\lambda(t)])]$$

Alors $\bar{N}$ est un processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}^2$ tel que $S_t\bar{N}^+ \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \vee \mathcal{F}_s^{\bar{N}}$ pour tout $s < t$ i.e. c'est $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ processus de Poisson.

III.2 Définition et existence

Définition III.2.1. Un processus de Hawkes sur $\mathbb{R}$ est un processus ponctuel simple N qui admet une $(\mathcal{F}_t^N)$-intensité de la forme $\lambda(t) = \phi\Big(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s)\Big)$ où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

On appellera la dynamique du processus de Hawkes :

$$\lambda(t) = \phi\Big(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s)\Big) \tag{III.2.1}$$

Lorsque ϕ est de la forme $\phi(x) = \nu + x$ on dit alors que c'est processus de Hawkes linéaire, en notant (T_k) les sauts de ce processus.

$$\lambda(t) = \nu + \int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s) = \nu + \sum_{T_k<t} h(t-T_k) \tag{III.2.2}$$

Définition III.2.2 (Stabilité)**.** On dit que la dynamique III.2.1 est stable en distribution (respectivement en variation) par rapport à une condition initiale $\mathcal{P}_-$ si : $\forall N'$ vérifiant $\mathcal{P}_-$ et ayant la dynamique III.2.1 sur $\mathbb{R}_+$ il existe N tel que

1. N suit la dynamique III.2.1 sur $\mathbb{R}$ et est stationnaire
2. $S_tN'^+ \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} N^+$ (resp en variation)

Théorème III.2.1 (Brémaud et Massoulié 1996)**.** *Soit ϕ une fonction α-Lipschitzienne avec $\alpha > 0$ et h telle que $\alpha \int_{\mathbb{R}_+} |h| < 1$ alors :*

1. *Il existe une unique distribution de sorte que N soit de Hawkes i.e. vérifie III.2.1 et tel que $\mathbb{E}[N(0,1]] < \infty$.*

2. La dynamique est stable en distribution par rapport aux conditions initiales suivantes :

$$\sup_{t\geq 0} \epsilon_a(t) < \infty \text{ p.s. et } \lim_{t\to\infty} \epsilon_a(t) = 0 \text{ p.s. pour tout } a > 0 \tag{III.2.3}$$

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] < \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] = 0 \text{ pour tout } a > 0 \tag{III.2.4}$$

où $\epsilon_a(t) := \int\limits_{t-a}^{t} \int_{\mathbb{R}_-} |h(u-s)|N(\mathrm{d}s)\mathrm{d}u$

3. Si $\int_{\mathbb{R}_+} t|h(t)|\mathrm{d}t < \infty$ alors la dynamique est stable en variation par rapport à la condition initiale :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |h(t)|N[-t,0[\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-\infty}^{0} |h(t-s)|N(\mathrm{d}s)\mathrm{d}t < \infty \text{ p.s.} \tag{III.2.5}$$

Théorème III.2.2. Si ϕ est α-Lipschitz et bornée par $\Lambda > 0$ et h telle que $\int_{\mathbb{R}_+} |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}_+} t|h(t)|\mathrm{d}t < \infty$ alors : Il existe une unique distribution stationnaire ayant la dynamique III.2.1 de plus elle est stable en variation par rapport à la condition initiale

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} \int_{\mathbb{R}_-} |h(s-u)N(\mathrm{d}u)\mathrm{d}s = 0 \text{ p.s.}$$

Théorème III.2.3. Supposons $\phi \geq 0$, croissante et continue à gauche telle que

$$\forall x, \phi(x) \leq \lambda + \alpha x \quad \text{avec} \quad \lambda > 0, \alpha \geq 0 \quad h \geq 0 \quad \alpha \int_{\mathbb{R}_+} h(t)\mathrm{d}t < 1$$

Alors il existe un processus N avec la dynamique III.2.1

Ces trois théorèmes, issus de [5], donnent premièrement l'existence dans différents cas d'un processus de Hawkes stationnaire. Les théorèmes III.2.1 et III.2.2 donnent l'unicité et la stabilité par rapport à des conditions initiales particulières. Le théorème III.2.3 donne simplement l'existence dans le cas croissant, dans ce cas on peut construire une solution stationnaire maximale.

Démonstration. Voir les démonstrations détaillées dans l'appendice A □

III.3 Propriétés du Hawkes linéaire

On suppose que notre processus ponctuel N vérifie la dynamique suivante :

$$\lambda(t) = \nu + \int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s) \text{ avec } \nu > 0, h \geq 0 \text{ causale, et } \int_{\mathbb{R}_+} h < 1$$

Alors d'après III.1.1 il existe une unique distribution de sorte que N vérifie cette dynamique et soit de moyenne finie sur $]0,1]$.

Proposition III.3.1 (Moyenne)**.** N une version stationnaire de moyenne fini alors

$$\mathbb{E}[N(]0,t])] = \frac{\nu t}{1-\int h}$$

Démonstration. Cette version existe d'après III.2.1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(]0,t])] &= \mathbb{E}[\textstyle\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u] \\
&= \mathbb{E}\left[\textstyle\int_0^t \nu + \int_{-\infty}^u h(u-s)N(\mathrm{d}s)\mathrm{d}u\right] \\
&= \nu t + \mathbb{E}\left[\textstyle\int_0^t \int_{-\infty}^u h(u-s)\lambda(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right] \\
&= \nu t + \textstyle\int_0^t \int_{-\infty}^u h(u-s)\,\mathbb{E}[\lambda(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&= \nu t + \textstyle\int_0^t \int_{-\infty}^u h(u-s)\,\mathbb{E}[\lambda(0)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \quad \lambda \text{ stationnaire} \\
&= \nu t + t\,\mathbb{E}[\lambda(0)]\textstyle\int_{\mathbb{R}_+} h
\end{aligned}$$

0r $\mathbb{E}[\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u] = t\,\mathbb{E}[\lambda(0)]$ par le même argument de stationnarité et finalement comment $\int_{\mathbb{R}_+} h < 1$ on obtient $\mathbb{E}[\lambda(0)] = \dfrac{\nu}{1 - \int_{\mathbb{R}_+} h}$ d'où le résultat. $\square$

Proposition III.3.2.

IV. Appendices

A Preuve d'existence de Hawkes

A.1 Théorème III.1.3 : le cas croissant

On va travailler sur l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F})$ des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}^2$, ainsi $\forall \omega \in \Omega$, ω est une mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^2$, on munit cet espace d'une probabilité $\mathbb{P}$ de sorte que le processus ponctuel canonique soit un processus de Poisson d'intensité 1 i.e. $\bar{N}$ défini par $\bar{N}(\omega) = \omega$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}^2$. En II.4.1 on a défini la translation par rapport à la première variable et que l'on a noté S_t, on notera θ_t ce même opérateur de translation défini sur Ω. C'est en particulier un flot. On va construire par récurrence la solution.

Posons $\lambda^0(t) = 0$ l'intensité nulle et $N^0 = 0$ le processus ponctuel vide. Par récurrence définissons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda^{n+1}(t) := \phi\left[\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s)\right] \tag{A.1}$$

$$\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), N^{n+1}(C) = \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^{n+1}(t)]) \tag{A.2}$$

Proposition A.1. $\forall n$, λ^n et N^n sont tous deux θ-compatibles, λ^n est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible et que N^n est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté

Remarque A.1. (λ^n) et (N^n) ainsi définis font que d'après II.4.1. N^n est un processus d'intensité λ^n

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence, notons H_n : " λ^n et N^n sont θ-compatibles λ^n est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible et que N^n est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté "

Initialisation : $\lambda^0 = 0$ et $N^0 = 0$ (i.e. aucun saut) ils sont donc bien tous les deux θ compatibles. λ^0 est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible et que N^0 est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté, H_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \lambda^{n+1}(t) & = & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s)) \\
 & \lambda^{n+1}(t)(\theta_y\omega) & = & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\theta_y\omega)(\mathrm{d}s)) \\
\text{(HR)} & N^n(\theta_y\omega) & = & S_y N(\omega) \\
\text{donc} & \lambda^{n+1}(t)(\theta_y\omega) & = & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)S_y N^n(\omega)(\mathrm{d}s)) \\
 & & = & \phi(\int_{-\infty}^{(t+y)^-} h(t-(s-y))N^n(\omega)(\mathrm{d}s)) \\
\text{ainsi} & \lambda^{n+1}(t)(\theta_y\omega) & = & \phi(\int_{-\infty}^{(t+y)^-} h(t+y-s)N^n(\omega)(\mathrm{d}s))
\end{array}$$

$$\lambda^{n+1}(t) \circ \theta_y = \lambda^{n+1}(t+y) \text{ i.e. } \lambda^{n+1} \text{ est } \theta\text{-compatible}$$

Par hypothèse de récurrence N^n est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \lambda^{n+1}(t) & = & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s)) \\
\text{comme} & \int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s) & = & \lim\limits_{y<t, y\to t} \uparrow \int_{-\infty}^{y} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s)
\end{array}$$

λ^{n+1} est limite croissante - par positivité de h - de processus $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisibles par continuité à gauche de ϕ et le fait que N^n soit adapté. λ^{n+1} est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible.

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$N^{n+1}(C)(\theta_y\omega) = \int_C \bar{N}(\theta_y\omega)(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^{n+1}(t)(\theta_y\omega)])$$

$\bar{N}$ est θ compatible car c'est un processus de Poisson sur notre espace canonique, λ^{n+1} est θ-compatible cf plus haut.

$$\begin{array}{rcl} N^{n+1}(C)(\theta_y\omega) & = & \int_C S_y\bar{N}(\omega)(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^{n+1}(t+y)(\omega)]) \\ & = & \int_{C+y} \bar{N}(\omega)(\mathrm{d}u \times [0, \lambda^{n+1}(u)(\omega)]) \\ & = & S_y N^{n+1}(C)(\omega) \end{array}$$

N^{n+1} est θ-compatible.

Soit $]a,b] \subset]-\infty, t]$

$$N^{n+1}]a,b] = \int_{a^+}^b \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^{n+1}(t)]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1_{]a,b]}(T_n) 1_{[0,\lambda^{n+1}(T_n)]}(Z_n)$$

$N^{n+1}]a,b]$ est $\mathcal{F}_b^{\bar{N}}$ mesurable car λ^{n+1} est $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$-prévisible. N^{n+1} est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté . On a bien H_{n+1}. H_0 est vrai et $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ donc H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. □

Proposition A.2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(\lambda^n(t))_n$ est un processus croissant et $(N^n(C))_n$ est un processus croissant.

Démonstration. H_n : " $\forall t\ \lambda^{n+1}(t) \geq \lambda^n(t)$ et $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $N^{n+1}(C) \geq N^n(C)$"

Initialisation : Soit $t \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\lambda^0(t) = 0$ et $N^0(C) = 0$, $\lambda^1(t) = \phi(0) \geq 0 = \lambda^0(t)$ et

$$N^1(C) = \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^1(t)]) \geq 0 = N^0(C)$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vrai. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcccccc} \lambda^{n+2}(t) & = & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^{n+1}(\mathrm{d}s)) & \geq & \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^n(\mathrm{d}s) & = & \lambda^{n+1}(t) \\ N^{n+2}(C) & = & \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^{n+1}(t)]) & \geq & \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^n(t)]) & = & N^{n+1}(C) \end{array}$$

H_0 est vrai et $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ donc H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

□

On notera $\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \lambda^n(t)$ et $N(C) = \lim_{n\to\infty} \uparrow N^n(C)$ alors N est un processus de Hawkes de $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-intensité λ, prouvons le.

Proposition A.3. N est un processus d'intensité λ

Démonstration. Comme λ est limite de processus θ-compatibles alors λ est θ compatible, de même pour N donc λ et N sont tous les deux stationnaires.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[\lambda^{n+1}(0)] & = & \mathbb{E}\left[\phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^n(\mathrm{d}s)\right] \\ & \leq & \lambda + \alpha\,\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^n(\mathrm{d}s)\right] \\ & \leq & \lambda + \alpha\,\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)\lambda^n(s)\mathrm{d}s\right] \\ \mathbb{E}[\lambda^{n+1}(0)] & \leq & \lambda + \alpha\int_{-\infty}^{0} h(-s)\,\mathbb{E}[\lambda^n(s)]\mathrm{d}s \end{array}$$

λ^n stationnaire donc

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{E}[\lambda^{n+1}(0)] & \leq & \lambda + \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, \mathbb{E}[\lambda^n(0)]\mathrm{d}s \\ \text{or} & \mathbb{E}[\lambda^n(0)] & \leq & \mathbb{E}[\lambda^{n+1}(0)] \\ \text{donc} & \mathbb{E}[\lambda^{n+1}(0)] & \leq & \frac{\lambda}{1-\alpha\int_{\mathbb{R}_+} h} \end{array}$$

$$\mathbb{E}[\lambda(0)] \leq \frac{\lambda}{1-\alpha\int_{\mathbb{R}_+} h} < \infty$$

λ (le processus) est presque sûrement fini, c'est un processus $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible car limite des λ^n de plus,

$$N(C) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times \times[0, \lambda^n(t)]) = \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)] \text{ par limite croissante}$$

D'après III.1.1 puisque N est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté et que λ est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible on en déduit que N est d'intensité λ . □

Proposition A.4. $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda(t) = \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s))$ p.s.

Démonstration.

$$\lambda^n(t) = \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^{n-1}(\mathrm{d}s)) \leq \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s))$$

par croissance, en passant à la limite on a bien $\lambda(t) \leq \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s))$
De même

$$\lambda(t) \geq \lambda^n(t) = \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N^{n-1}(\mathrm{d}s))$$

en passant à la limite par croissance et puisque ϕ est continue à gauche on obtient alors

$$\lambda(t) \geq \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s)) \text{ ainsi } \lambda(t) = \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s))$$

□

Conclusion : On a construit le processus ponctuel N et son intensité λ par récurrence, c'est bien un processus de Hawkes.

A.2 Théorème III.1.

Existence

De même que pour la preuve précédente on va travailler sur l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, le processus ponctuel canonique $\bar{N}$ tel que sous $\mathbb{P}$ ce soit un Poisson d'intensité 1. On va définir les mêmes processus λ^n et N^n : A.1 Par construction $\forall n$, λ^n et N^n sont θ-compatibles donc stationnaires puisque θ préserve $\mathbb{P}$ cf A.1

Proposition A.5. $\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda^n(t) \xrightarrow{L^1} \lambda(t)$ et $\lambda^n(t) \xrightarrow{p.s.} \lambda(t)$

Démonstration. Puisque tous les λ^n sont θ-compatibles par construction il suffit de le montrer pour $t=0$ et on pourra alors conclure.

$$
\begin{array}{rcl}
|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)| & = & \left|\phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^n(\mathrm{d}s)) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^{n-1}(\mathrm{d}s))\right| \\
& \leq & \alpha\left|\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^n(\mathrm{d}s) - N^{n-1}(\mathrm{d}s)\right| \\
& \leq & \alpha\int_{-\infty}^{0^-} |h(-s)|\left|N^n(\mathrm{d}s) - N^{n-1}(\mathrm{d}s)\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
|N^n(C)-N^{n-1}(C)| & = & \left|\int_C \bar{N}(\mathrm{d}t\times[0,\lambda^n(t)]) - \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t\times[0,\lambda^{n-1}(t)])\right| \\
& = & \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t\times[0,|\lambda^n(t)-\lambda^{n-1}(t)|])
\end{array}
$$

Ainsi $|N^n - N^{n-1}|$ est d'intensité $|\lambda^n-\lambda^{n-1}|$.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|] & \leq & \alpha\,\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-} |h(-s)|\left|N^n(\mathrm{d}s)-N^{n-1}(\mathrm{d}s)\right|\right] \\
\text{donc} & \mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|] & \leq & \alpha\,\mathbb{E}[\int_{-\infty}^{0^-} |h(-s)||\lambda^n(s)-\lambda^{n-1}(s)|\mathrm{d}s] \\
 & & \leq & \alpha\int_{-\infty}^{0^-} |h(-s)|\,\mathbb{E}[|\lambda^n(s)-\lambda^{n-1}(s)|]\mathrm{d}s \\
\text{stationnarité} & & \leq & \alpha\int_{\mathbb{R}_+} |h|\times\mathbb{E}[|\lambda^n(0)-\lambda^{n-1}(0)|]
\end{array}
$$

Comme $q := \alpha\int_{\mathbb{R}_+}|h| < 1$ par hypothèse on a alors :

$$
\begin{array}{rrcl}
\forall n\in\mathbb{N} & \mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|] & \leq & q^n\phi(0) \\
\text{donc} & \sum\mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|] & < & \infty
\end{array}
$$

Ainsi $\sum\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)$ converge normalement dans L^1 alors par complétude de L^1 cette série converge.

$$(\lambda^n(0))_n \text{ converge vers un } \lambda(0)\in L^1$$

La convergence est également presque sûre en effet en notant $\epsilon_n = q^{n/2}$ on a $\epsilon_n\to 0$ et $\sum\epsilon_n<\infty$.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \mathbb{P}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|>\epsilon_n] & \leq & \frac{\mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|]}{\epsilon_n} \\
 & & \leq & \frac{q^n\phi(0)}{\epsilon_n} = \epsilon_n\phi(0) \\
\text{alors} & \sum\mathbb{P}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|>\epsilon_n] & < & \infty
\end{array}
$$

D'après C.2 on a bien la convergence presque sûre de $(\lambda^n(0))_n$ vers un $\lambda(0)$, ces deux limites L^1 et celle-ci coincident presque sûrement. Par θ compatibilité λ est ainsi construit. □

$$\lambda \text{ est } (\mathcal{F}_t^{\bar{N}})\text{-prévisible car limite de tels processus.}$$

Proposition A.6. $\forall C\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(N^n(C))_n$ est constant p.s. à partir d'un certain rang.

Démonstration. Soit $C\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(|N^{n+1}-N^n|(C)\neq 0) & = & \mathbb{P}(|N^{n+1}-N^n|(C)\geq 1) \\
& \leq & \mathbb{E}[|N^{n+1}-N^n|(C)] \\
& \leq & \mathbb{E}[\int_C|\lambda^{n+1}(s)-\lambda^n(s)|\mathrm{d}s|] \\
& \leq & |C|\,\mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0)-\lambda^n(0)|] \\
& \leq & |C|q^n\phi(0)
\end{array}
$$

ainsi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|N^{n+1}-N^n|(C)\neq 0)<\infty$ ainsi p.s. à partir d'un certain rang $|N^n-N^{n-1}|(C)=0$ d'après C.1 i.e. $N^n(C)$ est constant à partir d'un certain rang. □

On notera N ce processus limite, alors puisque pour tout n, N^n est θ-compatible alors N est θ-compatible et $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté.

Proposition A.7. λ est une intensité pour N

Démonstration. Pour montrer que λ est une intensité pour N on pourrait par exemple montrer que p.s. $N(C) = \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])$ pour tout C et on pourra conclure grâce à III.1.1 puisque N est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-adapté et λ est $(\mathcal{F}_t^{\bar{N}})$-prévisible.
Soit -$C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$
\begin{array}{rcl}
|N(C) - \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])| & \leq & \int_C |N(\mathrm{d}t) - \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])| \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \int_C |N^n(\mathrm{d}t) - \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])| \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \int_C |\bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda^n(t)]) - \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])| \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, |\lambda^n(t) - \lambda(t)|]) \\
\mathbb{E}[\int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, |\lambda^n(t) - \lambda(t)|])] & = & \mathbb{E}[\int_C |\lambda^n(t) - \lambda(t)|\mathrm{d}t] \\
& = & |C|\,\mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0) - \lambda^n(0)|] \to 0
\end{array}
\tag{A.5}
$$

Ainsi d'après le lemme de Fatou C.2 on a

$$
\mathbb{E}[|N(C) - \int_C \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])|] \leq |C| \lim \mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0) - \lambda^n(0)|] = 0
$$

□

Proposition A.8. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) = \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s))$

Démonstration. Encore une fois puisque λ est θ compatible il suffit de montrer que c'est le cas en un point particulier, par exemple 0.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & |\lambda(0) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))| & \leq & |\lambda(0) - \lambda^{n+1}(0)| + |\lambda^{n+1}(0) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))| \\
\text{d'après A.5} & |\lambda(0) - \lambda^{n+1}(0)| \xrightarrow{L^1} 0 & & \\
\text{et} & |\lambda^{n+1}(0) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))| & = & |\phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N^n(\mathrm{d}s)) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))| \\
\text{ainsi} & \mathbb{E}[|\lambda^{n+1}(0) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))|] & \leq & \alpha\,\mathbb{E}[\int_{-\infty}^{0^-} |h(-s)||N^n(\mathrm{d}s) - N(\mathrm{d}s)|] \\
 & & \leq & \alpha \int_{\mathbb{R}_+} h(u)\mathrm{d}u\,\mathbb{E}[|\lambda^n(0) - \lambda(0)|] \to 0
\end{array}
$$

On a donc $\mathbb{E}[|\lambda(0) - \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s)|] = 0$ i.e. $\lambda(0) = \phi(\int_{-\infty}^{0^-} h(-s)N(\mathrm{d}s))$ p.s. , par θ compatibilité on peut conclure. □

Conslusion : On a bien démontré l'existence de ce processus de Hawkes de moyenne finie.

1. N et λ sont stationnaires car θ-compatibles
2. N est un processus de Hawkes i.e. vérifie III.2.1
3. $\mathbb{E}[\lambda(0)] < \infty$ (par convergence dans L^1) donc $\mathbb{E}[N(]0,1])] = \mathbb{E}[\lambda(0)] < \infty$

Stabilité par rapport aux conditions initiales et unicité

On va se donner N' un processus ponctuel ayant la dynamique III.2.1 sur $\mathbb{R}_+$ et ensuite montrer les propriétés de convergence.

Proposition A.9. λ' l'intensité de N' est telle que $t \mapsto \mathbb{E}[\lambda'(t)|\mathcal{F}_0^{N'}]$ est p.s. localement intégrable.

Démonstration. On va construire un deuxième processus N'' d'intensité λ'' par récurrence de sorte que celui-ci vérifie $t \mapsto \mathbb{E}[|\lambda'(t)|\mathcal{F}_0^{N'}]$ est localement intégrable et que ce nouveau processus va coïncider avec N' et λ'' avec λ' sur $\mathbb{R}_+^*$. On se donne $\bar{N}$ un processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}^2$ que l'on peut construire à partir de III.1.2.

$$\begin{array}{rrcc} & \lambda'^0(t) & := & \phi\big(\int_{\mathbb{R}_-} h(t-s)N'(\mathrm{d}s)\big) \\ & N'^0(C) & := & N'^-(C) + \int_{C\cap\mathbb{R}_+} \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda'^0(t)]) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, & \lambda'^{n+1}(t) & := & \phi\Big[\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N'^n(\mathrm{d}s)\Big] \\ \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) & N'^{n+1}(C) & := & N'^-(C) + \int_{C\cap\mathbb{R}_+} \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda'^{n+1}(t)]) \end{array}$$

□

Proposition A.10. Soit N' d'intensité λ' un processus ponctuel ayant la dynamique III.2.1 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\begin{array}{ccc} \text{III.2.3 ou III.2.4} & \text{alors} & S_t N'^+ \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{D}} N^+ \\ \text{III.2.5} & \text{alors} & S_t N'^+ \xrightarrow[t\to\infty]{\text{var}} N^+ \end{array}$$

Démonstration. D'après $t \mapsto \mathbb{E}[\lambda'(t)|\mathcal{F}_0^{N'}]$ est p.s. localement intégrable.

Si on suppose III.2.4

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] < \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] = 0 \text{ pour tout } a > 0$$

.

On construit $\bar{N}$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité 1 comme dans III.1.2 à partir du processus N' i.e.

$$\bar{N}(]a,b] \times L) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1_{]a,b]}(T_n) 1_L(\lambda(T_n)U_n) + \int_{]a,b]} \hat{M}[\mathrm{d}t \times L\backslash]0, \lambda(t)])$$

où (T_n) sont les sauts de N'. Alors $N'(]a,b]) = \int_{]a,b]} \bar{N}(\mathrm{d}t \times [0, \lambda(t)])$ i.e. N' compte les points du processus de poisson $\bar{N}$ pour lequel les points tombent entre la courbe de λ' et l'axe des abscisses. On construit alors par récurrence comme précédemment A.1 un processus de Hawkes N stationnaire et son intensité λ vérifiant la dynamique III.2.1 à partir du processus de Poisson $\bar{N}$, tout ce qu'on a supposé précédemment étant valable ici et donc la construction est bien possible. Posons

$$f(t) := \begin{cases} \mathbb{E}[|\lambda'(t) - \lambda(t)||\mathcal{F}_0^{N'}] & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'après A.2 λ' est localement intégrable et comme λ l'est également car stationnaire et de moyenne finie alors f est localement intégrable en conséquence. **On a défini cette fonction f car comme on le verra dans la suite f sera l'intensité conditionnelle de $|N - N'|$ ce qui ensuite par l'inégalité de Markov nous donnera une majoration de la probabilité que $|N - N'| \neq 0$ conditionnellement à $\mathcal{F}_0^{N'}$ car ils prennent des valeurs entières**.
Puisque λ et λ' vérifient la dynamique III.2.1 et que ϕ est α lipschitzienne alors

$$\begin{array}{rcl} |\lambda(t) - \lambda'(t)| & = & \big|\phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N(\mathrm{d}s) - \phi(\int_{-\infty}^{t^-} h(t-s)N'(\mathrm{d}s)\big| \\ & \leq & \alpha\big|\int_{\infty}^{t^-} h(t-s)(N-N')(\mathrm{d}s)\big| \\ & \leq & \alpha\Big(\int_{\infty}^{0^-} |h(t-s)|N(\mathrm{d}s) + \int_{\infty}^{0^-} |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s) + \big|\int_0^{t^-} h(t-s)(N-N')(\mathrm{d}s)\big|\Big) \\ & \leq & \alpha\Big(\int_{\infty}^{0^-} |h(t-s)|N(\mathrm{d}s) + \int_{\infty}^{0^-} |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s) + \int_0^{t^-} |h(t-s)||N-N'|(\mathrm{d}s)\Big) \end{array}$$

En définissant $|N-N'|$ le processus ponctuel qui compte les points entre les deux courbes λ et λ', peu importe lequel est en dessous ou au dessus i.e.

$$|N-N'|(A)=\int_A \bar{N}(\mathrm{d}t\times[\lambda(t)\wedge\lambda'(t),\lambda(t)\vee\lambda'(t)])$$

$|N-N'|$ est d'intensité $|\lambda-\lambda'|$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\lambda(t)-\lambda'(t)||\mathcal{F}_0^{N'}] &\leq \alpha\,\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N(\mathrm{d}s)+\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)+\int_0^{t^-}|h(t-s)||N-N'|(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\\
&\leq \alpha\Big(\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]+\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\\
&\qquad +\mathbb{E}\left[\int_0^{t^-}|h(t-s)||N-N'|(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\Big)
\end{aligned}$$

Dominons ces termes individuellement.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] && \text{car } \mathcal{F}_0^{N'}\subset(\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'})\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0}|h(t-s)|\lambda(s)\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0}|h(t-s)|\tilde{\lambda}\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] && \text{par stationnarité de}\lambda\\
&= \tilde{\lambda}\int_{-\infty}^{0}|h(t-s)|\mathrm{d}s && \text{avec } \tilde{\lambda}=\mathbb{E}[N]0,1]]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] = \int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\quad \text{car } \mathcal{F}_0^{N'}\text{-mesurable}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^{t^-}|h(t-s)||N-N'|(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^{t^-}|h(t-s)||N-N'|(\mathrm{d}s)\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{t}|h(t-s)||\lambda(s)-\lambda'(s)|\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\\
&= \int_0^{t}|h(t-s)|\,\mathbb{E}\left[|\lambda(s)-\lambda'(s)|\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\mathrm{d}s\\
&= \int_0^{t}|h(t-s)|f(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Pour récapituler on obtient :

$$f(t)\leq\alpha\Big(\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)+\tilde{\lambda}\int_{-\infty}^{0}|h(t-s)|\mathrm{d}s+\int_0^t|h(t-s)|f(s)\mathrm{d}s\Big)\tag{A.3}$$

On fixe a positif et on définit $F(t):=\int_{t-a}^t f(u)\mathrm{d}u$ en intégrant l'inégalité précédente :

$$F(t)\ \leq\ \alpha\Big(\int_{t-a}^{t}\int_{-\infty}^{0^-}|h(u-s)|N'(\mathrm{d}s)\mathrm{d}u+\tilde{\lambda}\int_{t-a}^{t}\int_{-\infty}^{0}|h(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u+\int_{t-a}^{t}\int_0^u|h(u-s)|f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\Big)$$

$$\int_{t-a}^{t}\int_{-\infty}^{0^-}|h(u-s)|N'(\mathrm{d}s)\mathrm{d}u = \epsilon_a(t)\quad\text{pour } N' \text{ cf 2}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}\int_{t-a}^{t}\int_{-\infty}^{0}|h(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u &= \tilde{\lambda}\int_{t-a}^{t}\int_{u}^{\infty}|h(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u &&= \tilde{\lambda}\int_{t-a}^{\infty}\int_{t-a}^{s\wedge t}|h(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
&= \tilde{\lambda}\int_{t-a}^{\infty}\int_{u}^{\infty}(s\wedge t-t+a)|h(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u &&\leq \tilde{\lambda}a\int_{t-a}^{\infty}|h|
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\int_{t-a}^t \int_0^u |h(u-s)| f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u & = & \int_{t-a}^t \int_0^u |h(u-s)| f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u & = & \int_{t-a}^t \int_0^u |h(s)| f(u-)\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
& = & \int_0^t \int_{s\vee(t-a)}^t |h(s)| f(u-)\mathrm{d}u\mathrm{d}s & = & \int_0^t |h(s)| \int_{s\vee(t-a)-s}^{t-s} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
& \leq & \int_0^t |h(s)| \int_{t-s-a}^{t-s} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s & \leq & \int_0^t |h(s)| F(t-s)\mathrm{d}s
\end{array}$$

En notant $\epsilon'_a(t) = \epsilon_a(t) + \tilde{\lambda} a \int_{t-a}^{\infty} |h|$ on a alors

$$\begin{array}{rrcc}
& F(t) & \leq & \alpha(\epsilon'_a(t) + \int_0^t |h(s)| F(t-s)\mathrm{d}s) \\
\text{i.e.} & F(t) & \leq & \alpha\epsilon'_a(t) + (\alpha|h|) * F(t) \\
& F(t) & \leq & \alpha\epsilon'_a(t) + (\alpha|h|) * (\epsilon'_a(t) + (\alpha|h|) * F)(t) \\
& F(t) & \leq & \alpha\epsilon'_a(t) + \alpha(\alpha|h|) * \epsilon'_a(t) + (\alpha|h|)^{*2} * F(t) \\
& F(t) & \leq & \alpha \sum_{k=0}^{n} (\alpha|h|)^{*k} * \epsilon'_a(t) + (\alpha|h|)^{*n+1} * F(t)
\end{array}$$

Comme $\alpha \int |h| < 1$ par hypothèse et que f est localement intégrable alors F est borné sur tout segment et donc en particulier sur $[0,t]$ comme

$$||F * (\alpha|h|)^{*n}|| \leq ||F||\ ||\alpha h||^n$$

avec la norme de F étant simplement l'intégrale sur $[0,t]$ alors

$$||F * (\alpha|h|)^{*n}|| \to 0 \text{ car} ||\alpha h|| < 1$$

Les produits de convolution étant considérés seulement sur le segment encore une fois. Ainsi en passant à la limite on obtient

$$F(t) \leq \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n} * \epsilon'_a(t) \text{ presque partout en } t$$

La somme à droite étant bien définie dans L^1, en effet puisque $||\alpha|h||| < 1$ on a :

$$\begin{array}{rcll}
\int \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n} & = & \sum_{n\in\mathbb{N}} \int (\alpha|h|)^{*n} & \text{car somme de fontion positives} \\
& = & \sum_{n\in\mathbb{N}} ||\alpha|h|||^n & \text{qui est une série convergente} \\
& = & \frac{1}{1-||\alpha|h|||} & \text{car } \alpha \int |h| < 1
\end{array}$$

Comme nous avons supposé que III.2.3 alors ϵ_a est borné et $\lim\limits_{t\to\infty} \epsilon_a(t) = 0$ à a fixé

$$\tilde{\lambda} a \int_{t-a}^{\infty} |h| \leq \tilde{\lambda} a \int |h| < \infty \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda} a \int_{t-a}^{\infty} |h| \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

Ainsi ϵ'_a est borné et $\lim \epsilon'_a(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Comme ϵ'_a est borné et $|| \sum (\alpha|h|)^{*n}|| < \infty||$ on en déduit qu'on peut majorer F par le produit de convolution sur $\mathbb{R}_+$ entier par le vrai produit de convolution sur $\mathbb{R}_+$ car convolution de fonction positive. Montrons alors que $F(t) \to 0$ q

1. $\forall t, s,\ \epsilon'_a(t-s)\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n}(s) \leq C\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n}(s)$ et $\sum (\alpha|h|)^{*n} \in L^1$
2. $\forall s$, $\lim\limits_{t\to\infty} \epsilon'_a(t-s)\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n}(s) = 0$

On en conclut par théorème de convergence dominée que

$$\begin{array}{rccc}
& \alpha \int_{\mathbb{R}_+} \epsilon'_a(t-s) \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n}(s)\mathrm{d}s & \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} & 0 \\
\text{i.e.} & F(t) & \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} & 0
\end{array}$$

Remarquons que

$$\begin{array}{rcll}
F(t) & = & \int_{t-a}^{t} f(s)\mathrm{d}s = \int_{t-a}^{t} \mathbb{E}\left[|\lambda(s)-\lambda'(s)|\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & \forall t \geq a \\
& = & \mathbb{E}\left[\int_{t-a}^{t} |\lambda(s)-\lambda'(s)|\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & \\
& = & \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{t-a}^{t} |\lambda(s)-\lambda'(s)|\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & (\mathcal{F}_0^{N'}\subset\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}) \\
& = & \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|N-N'|(]t-a,t])\middle|\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'}\right]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & \text{car } |\lambda-\lambda'| \text{ intensité } de|N-N'| \\
& = & \mathbb{E}\left[|N-N'|(]t-a,t])\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & (\mathcal{F}_0^{N'}\subset\mathcal{F}_0^{N}\vee\mathcal{F}_0^{N'})
\end{array}$$

$|N-N'|$ prend des valeurs entières uniquement puisque c'est un processus ponctuel on peut donc en déduire d'après l'inégalité de Markov que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(|N-N'|(]t-a,t])\neq 0|\mathcal{F}_0^{N'}) & = & \mathbb{P}(|N-N'|(]t-a,t])\geq 1|\mathcal{F}_0^{N'}) \quad \forall t\geq a \\
& \leq & \mathbb{E}[|N-N'|(]t-a,t])|\mathcal{F}_0^{N'}] \quad = \quad F(t)\to 0
\end{array}$$

$$S_tN'(]c,d])S_{d+t}N'(](c+t)-(d+t),0]) = S_{d+t}N'(]c-d,0]) = S_{d+t}N'^{+}(]c-d,0]) \text{ pour } t\geq c-d \quad \text{(A.4)}$$

Ainsi considérer seulement les $S_tN'(]-a,0])$ pour un passage à la limite nous donnera la distribution limite pour $S_tN'(]c,d])$ si elle existe, fixons $t\geq a$

$$\begin{array}{rcl}
d_V\left[S_tN'(]-a,0]),N(]-a,0])|\mathcal{F}_0^{N'}\right] & = & d_V\left[S_tN'(]-a,0]),S_tN(]-a,0])|\mathcal{F}_0^{N'}\right] \\
& = & \sup_{B\subset\mathbb{N}} |\,\mathbb{P}(S_tN'(]-a,0])\in B|\mathcal{F}_0^{N'})-\mathbb{P}(S_tN(]-a,0])\in B|\mathcal{F}_0^{N'})| \\
& \leq & \sup_{B\subset\mathbb{N}} |\,\mathbb{P}(S_t|N-N'|(]-a,0])\in B|\mathcal{F}_0^{N'})| \\
& \leq & \mathbb{P}(S_t|N-N'|(]-a,0])\neq 0|\mathcal{F}_0^{N'})\leq F(t)
\end{array}$$

Cela signifie que

$$d_V\left[S_tN'^{+}(]-a,0]),N(]t-a,t])|\mathcal{F}_0^{N'}\right]\leq\mathbb{P}(S_t|N-N'|(]-a,0])\neq 0|\mathcal{F}_0^{N'})\leq F(t)$$

$$\text{Ainsi } S_tN'^{+}(]-a,0]) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{var}} N(]-a,0]) \text{ par convergence dominée}$$

D'après la remarque A.4 et la stationnarité de N on a alors

$$\forall a<b,\quad S_tN'^{+}(]a,b]) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{var}} N^{+}(]a,b]) \text{ et donc } S_tN'^{+}(]a,b]) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{D}} N^{+}(]a,b])$$

Les distributions fidi de S_tN' convergent en distribution vers celles de N on peut donc en conclure que

$$S_tN'^{+} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{D}} N^{+}$$

Si on suppose III.2.4

$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[\epsilon_a(t)]<\infty \text{ et } \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[\epsilon_a(t)]=0 \text{ pour tout } a>0$$

Tous les calculs précédents sont valables et en reprenant l'inégalité A.3 et en prenant l'espérance on a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}[f(t)] & \leq & \alpha\left(\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\right]+\mathbb{E}\left[\tilde{\lambda}\int_{-\infty}^{0}|h(t-s)|\mathrm{d}s\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^t|h(t-s)|f(s)\mathrm{d}s\right]\right) \\
\mathbb{E}[F(t)] & \leq & \alpha\left(\int_{t-a}^{t}\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{0^-}|h(u-s)|N'(\mathrm{d}s)\right]+\mathbb{E}\left[\tilde{\lambda}\int_{-\infty}^{0}|h(u-s)|\mathrm{d}s\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^u|h(u-s)|f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u\right)
\end{array}$$

De la même façon en notant alors $\epsilon'_a(t) := \epsilon_a(t) + \tilde{\lambda} a \int_{t-a}^{\infty} |h|$ puisque h est intégrable et a est fixé :

$$\sup_{t\geq} \mathbb{E}[\epsilon'_a(t)] < \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\epsilon'_a(t)] = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
\int_{t-a}^{t} \mathbb{E}\left[\int_0^u |h(u-s)| f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u & = & \int_{t-a}^{t}\int_0^u |h(u-s)|\,\mathbb{E}[f(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
& = & \int_{t-a}^{t}\int_0^u |h(s)|\,\mathbb{E}[f(u-s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
& = & \int_0^t \int_{s\vee(t-a)}^{t} |h(s)|\,\mathbb{E}[f(u-s)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
& \leq & \int_0^t |h(s)| \int_{s\vee(t-a)-s}^{t-s} \mathbb{E}[f(v)]\mathrm{d}v\mathrm{d}s \\
& \leq & \int_0^t |h(s)| \int_{t-a-s}^{t-s} \mathbb{E}[f(v)]\mathrm{d}v\mathrm{d}s \\
& \leq & \int_0^t |h(s)|\,\mathbb{E}[F(t-s)]\mathrm{d}s
\end{array}$$

En notant $\Psi(t) := \mathbb{E}[F(t)]$ et $\gamma(t) := \mathbb{E}[\epsilon'_a(t)]$ par le même cheminement que précédemment on a

$$\begin{array}{rcll}
\Psi(t) & \leq & \alpha(\gamma(t) + |h| * \Psi(t)) & \text{et donc} \\
\Psi(t) & \leq & \alpha \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n} * \gamma(t) & \text{presque partout en t}
\end{array}$$

γ est bornée et tend vers 0 en ∞ et $\alpha \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\alpha|h|)^{*n} \in L^1$ donc par théorème de convergence dominée $\Psi(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ de la même façon que précédemment, les calculs étant les mêmes mis à part que ce ne soit plus une probabilité conditionnelle on a

$$\Psi(t) \geq \mathbb{P}(|N - N'|(]t-a,t]) \neq 0) \text{ , } \forall t \geq a$$

La conclusion est la même que précédemment et par les mêmes arguments.

$$S_t N'^{+} \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} N^{+}$$

Unicité de la loi limite

Si on se donne N' stationnaire vérifiant la même dynamique III.2.1. Alors N vérifie III.2.4 par exemple. En effet ,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}[\epsilon_a(t)] & = & \mathbb{E}\big[\int\limits_{t-a}^{t} \int_{\mathbb{R}_-} |h(u-s)| N(\mathrm{d}s)\mathrm{d}u\big] \quad = \quad \mathbb{E}\big[\int\limits_{t-a}^{t} \int_{\mathbb{R}_-} |h(u-s)| \lambda(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\big] \\
& = & \int\limits_{t-a}^{t} \int_{\mathbb{R}_-} |h(u-s)|\,\mathbb{E}[\lambda(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \qquad \text{donc par stationnarité} \\
& = & \tilde{\lambda} \int_{t-a}^{t} \int_{\mathbb{R}_-} |h(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \quad = \quad \tilde{\lambda} a \int_{t-a}^{\infty} |h|
\end{array}$$

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] < \infty \text{ et } \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\epsilon_a(t)] = 0 \text{ car } h \text{ est intégrable}$$

Ainsi N' va converger en distribution vers N mais par stationnarité on en déduit qu'ils sont de même loi, d'où l'unicité de la loi limite.

Si on suppose III.2.5

$$\int_{\mathbb{R}_+} |h(t)| N[-t, 0[\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-\infty}^{0} |h(t-s)| N(\mathrm{d}s)\mathrm{d}t < \infty \text{ p.s.}$$

On reprend l'inégalité A.3 et on intègre :

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \leq \alpha\Big(\int_0^T \int_{-\infty}^{0^-} |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s) + \tilde\lambda\int_{-\infty}^{0} |h(t-s)|\mathrm{d}s + \int_0^t |h(t-s)|f(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t\Big)$$

Etudions ces termes un à un et pour cela on notera $\Psi(y) := \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$

$$\begin{array}{rclcl}
\int_0^T\int_0^t |h(t-s)|f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &=& \int_0^T\int_0^t |h(s)|f(t-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &=& \int_0^T\int_s^T |h(s)|f(t-s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&=& \int_0^T |h(s)|\int_0^{T-s} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s &=& \int_0^T |h(s)|\Psi(T-s)\mathrm{d}s
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\tilde\lambda\int_0^T\int_{-\infty}^0 |h(t-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t &=& \tilde\lambda\int_0^T\int_t^\infty |h(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&=& \tilde\lambda\int_0^\infty\int_0^s |h(s)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&=& \tilde\lambda\int_0^\infty s|h(s)|\mathrm{d}s < \infty \quad \text{car III.2.5}
\end{array}$$

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{0^-} |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\mathrm{d}t \quad\leq\quad \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\infty}^0 |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\mathrm{d}t < \infty \quad \text{p.s. car III.2.5}$$

Finalement en notant $\Gamma = \tilde\lambda\int_0^\infty t|h(t)|\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{-\infty}^0 |h(t-s)|N'(\mathrm{d}s)\mathrm{d}t < \infty$ p.s. alors on obtient :

$$\begin{array}{rrcll}
& \Psi(T) &\leq& \alpha\Gamma + \int_0^T \alpha|h(s)|\Psi(T-s)\mathrm{d}s & \\
\text{i.e.} & \Psi(T) &\leq& \alpha\Gamma + \alpha|h| * \Psi(T) & \text{p.s.}
\end{array}$$

Par le même cheminement que précédemment on arrive finalement à

$$\Psi(T) \leq \alpha\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha|h|)^{*n} * \Gamma(T) = \alpha\frac{\Gamma}{1-\alpha\int|h|} < \infty \text{ et donc } \int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t < \infty \text{ p.s.}$$

Comme $|N-N'|$ est d'intensité $|\lambda-\lambda'|$ alors

$$\begin{array}{rcl}
\forall a\geq 0 \quad \mathbb{E}[|N-N'|([0,a])|\mathcal{F}_0^{N'}] &=& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|N-N'|([0,a])|\mathcal{F}_0^{N'}\vee\mathcal{F}_0^{N}]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] \\
&=& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\int_0^a |\lambda(t)-\lambda'(t)||\mathcal{F}_0^{N'}\vee\mathcal{F}_0^{N}]\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] \\
&=& \mathbb{E}\left[\int_0^a |\lambda(t)-\lambda'(t)|\middle|\mathcal{F}_0^{N'}\right] \\
&=& \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty f < \infty \text{ p.s.}
\end{array}$$

En passant à la limite $a\to\infty$ par croissance on obtient que $\mathbb{E}[|N-N'|(\mathbb{R}_+)|\mathcal{F}_0^{N'}] < \infty$ p.s. on peut donc en déduire que $|N-N'|(\mathbb{R}_+) < \infty$ p.s. donc en notant

$$T = \inf\{t\in\mathbb{R}_+; |N-N'|([t,\infty[) = 0\} \text{ alors } T<\infty \text{ p.s.}$$

N et N' couplent et donc S_tN' converge en variation vers N puisque N est stationnaire.

$$\begin{array}{rcll}
d_V(S_tN'^+, N^+) &=& \sup_{A\in\mathcal{M}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(S_tN'\in A) - \mathbb{P}(N^+\in A)| & \\
&=& \sup_{A\in\mathcal{M}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(S_tN'\in A) - \mathbb{P}(S_tN^+\in A)| & N \text{ est stationnaire} \\
&=& \sup_{A\in\mathcal{M}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(S_tN'\in A, T<t) + \mathbb{P}(S_tN'\in A, T\geq t) & \\
&& \quad - \mathbb{P}(S_tN^+\in A, T<t) - \mathbb{P}(S_tN^+\in A, T\geq t)| & \text{(probas totales)} \\
&=& \sup_{A\in\mathcal{M}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(S_tN'\in A, T\geq t) - \mathbb{P}(S_tN^+\in A, T\geq t)| & \\
&\leq& 2\,\mathbb{P}(T\geq t) &
\end{array}$$

Comme $T<\infty$ alors $\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(T\geq t) = 0$ et donc

$$S_tN'^+ \xrightarrow[t\to\infty]{\text{var}} N^+$$

□

B Définition et propriétés des processus en temps continu

On va noter $\mathbb{T}$ l'indexation pour les processus, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ presque toujours.

B.1 Mesurabilité

La notion de filtratioin est la même que celle en temps discret, des sous tribus telles que pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Définition B.1. Soit $X = (X_t)$ un processus. Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $\mathcal{F}$, on dit que :

1. X est mesurable si $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$-mesurable .
2. X est adapté si : $\forall t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
3. X est progressivement mesurable si $\forall a \leq b \in \mathbb{T}$ $X : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F}_b$-mesurable.

Définition B.2 (Tribu prévisible)**.** Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration on appelle la tribu prévisible notée $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $]a, b] \times A$ où $A \in \mathcal{F}_a$ i.e. la sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \sigma(]a, b] \times A|a < b \in \mathbb{T}, A \in \mathcal{F}_a)$$

lorsque $\inf \mathbb{T} \in \mathbb{T}$ on rajoute $\{\min \mathbb{T}\} \times A$ pour $A \in \mathcal{F}_{\min \mathbb{T}}$ dans le σ

Définition B.3 (Processus prévisible)**.** Un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible (X_t) est un processus tel que $X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ mesurable.

Remarque B.1. La tribu prévisible peut en fait être définie comme la tribu engendrée par les processus adaptés et continus à gauche.

Ainsi pour montrer qu'une propriété est vérifiée pour tout processus prévisible il suffit par exemple de montrer que c'est vérifié pour les $1_{]a,b]}(t)1_A(\omega)$ avec $A \in \mathcal{F}_a$ puis d'adapter le lemme des classes monotones, dans sa version fonctionnelle.

Proposition B.1. Soit (X_t) un processus adapté et continu à gauche, alors (X_t) est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible.

Démonstration. Notons $X_n(t, \omega) = \sum\limits_k X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)1_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}(t)$, $X_n^{-1}(C) = \bigcup\limits_k]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times X_{\frac{k}{2^n}}^{-1}(C)$ donc $\forall n$, X_n est $\mathcal{P}(\mathcal{F})$-mesurable donc X est $\mathcal{P}(\mathcal{F})$-mesurable car limite de ceux-ci donc (X_t) est prévisible $\square$

Définition B.4 (Temps d'arrêt)**.** Un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt est une fonction $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ telle que $\forall t \in \mathbb{T}$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

Proposition B.2. Soit (Y_t) est un processus continu à droite (resp à gauche) et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\tau := \{t \in \mathbb{T}; Y_t \geq c\}$ (resp $Y_t \leq c$) est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.

Proposition B.3. X un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible alors X est progressivement mesurable.

Démonstration. Soit $a \leq b \in \mathbb{T}$, $X_{|[a,b]}$ est limite simple de processus simples continus à gauche et adaptés $(Y_{(n)})$, et est donc mesurable par rapport à $\mathcal{B}([a, b]) \times \mathcal{F}_b$ i.e. X est progressivement mesurable. $\square$

C Convergences

Lemme C.1 (Borel-Cantelli)**.** Soit (A_n) une famille d'événements telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

Démonstration. $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\limsup A_n) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq p} A_k) \leq \sum_{k=p}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ et puisque $\sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$ alors en passant à la limite $p \to \infty$ on a le résultat. $\square$

Proposition C.1. (X_n) et X des V.A.. (ε_n) une suite telle que :

1. $\varepsilon_n \geq 0$ et $\lim \varepsilon_n = 0$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(||X_n - X|| > \varepsilon_n) < \infty$

$$\text{alors } X_n \overset{p.s.}{\to} X$$

Démonstration. D'après C.1 $\mathbb{P}[\limsup(||X_n - X|| > \varepsilon_n)] = 0$ ainsi $\mathbb{P}[(\limsup ||X_n - X|| > \varepsilon_n)^c] = 0$ i.e. $\mathbb{P}[\liminf(||X_n - X|| \leq \varepsilon_n)] = 1$, si $\omega \in \liminf(||X_n - X|| \leq \varepsilon_n)$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in \bigcap_{k\geq n} ||X_k - X|| \leq \varepsilon_k$ i.e. $\forall k \geq n, ||X_k(\omega) - X(\omega)|| \leq \varepsilon_k$ ainsi $X_k(\omega) \to X_(\omega)$ puisque $\varepsilon_k \to 0$ $\square$

Proposition C.2. (X_n) des V.A. à valeurs dans un espace complet (ε_n) une suite telle que :

1. $\varepsilon_n \geq 0$ et $\lim \varepsilon_n = 0$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(||X_{n+1} - X_n|| > \varepsilon_n) < \infty$

$$\text{alors } \exists X \text{ V.A. telle que } X_n \overset{p.s.}{\to} X$$

Démonstration. D'après C.1 $\mathbb{P}[\limsup(||X_{n+1} - X_n|| > \varepsilon_n)] = 0$ ainsi $\mathbb{P}[(\limsup ||X_{n+1} - X_n|| > \varepsilon_n)^c] = 0$ i.e. $\mathbb{P}[\liminf(||X_{n+1} - X_n|| \leq \varepsilon_n)] = 1$, si $\omega \in \liminf(||X_{n+1} - X_n|| \leq \varepsilon_n)$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in \bigcap_{k\geq n} ||X_{k+1} - X_k|| \leq \varepsilon_k$ i.e. $\forall k \geq n, ||X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)|| \leq \varepsilon_k$ ainsi $(X_k(\omega))_k$ est une suite de Cauchy puisque $\varepsilon_k \to 0$ donc $X_k(\omega) \to X(\omega)$. $\square$

Lemme C.2 (Fatou)**.** Soit (X_n) une suite de V.A. positives alors $\mathbb{E}[\liminf X_n] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n]$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \geq n$, $\inf_{p\geq n} X_p \leq X_k$ et donc $\mathbb{E}[\inf_{p\geq n} X_p] \leq \mathbb{E}[X_k]$ ainsi $\forall n$, $\mathbb{E}[\inf_{p\geq n} X_p] \leq \liminf \mathbb{E}[X_k]$ le membre de gauche est croissant en fonction de n et donc par théorème de convergence monotone $\mathbb{E}[\inf_{p\geq n} X_p] \uparrow \mathbb{E}[\liminf X_n]$ d'où le résultat. $\square$

Définition C.1. Distance en variation totale entre deux mesures est

$$d_V(m_1, m_2) := \sup_{A\in\mathcal{F}} |m_1(A) - m_2(A)|$$

Définition C.2 (Produit de convolution)**.** Soit f et g deux fonctions on note $f * g$ le produit de convolution entre f et g lorsqu'il est défini :

$$f * g(x) := \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

Dans la preuve de Brémaud Massoulié on tombera sur un produit de convolution défini sur un segment, il suffira aussi bien de considérer les fonctions désirées fois une fonction indicatrice du segment.

Proposition C.3 (Inégalité sur la norme 1).

$$f, g \in L^1 \text{ alors } \quad f * g \in L^1 \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \|f * g\| \leq \|f\|\ \|g\| \\ \int f * g = \int f \ \int g \end{array}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \int\int |f(y)||g(x-y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x & = & \int |f(y)| \int |g(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ & = & \int |f(y)| \|g\| \mathrm{d}y \\ & = & \|f\|\ \|g\| < \infty \end{array}$$

donc $f * g$ est bien défini et $f * g \in L^1$ ensuite par le même calcul en intervertissant les intégrales, ce qui est possible et justifié d'après Fubini-Tonnelli on obtient bien la valeur de l'intégrale. □

D Flot, ergodicité, stationnarité

Définition D.1 (Flot). Un flot $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est un ensemble d'applications telles que

1. $(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$ est mesurable de $(\mathbb{R} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, θ_t est une bijection
3. $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$

On généralise rapidement la définition sur tout espace vectoriel du genre $\mathbb{R}^d$, i.e. $t \in \mathbb{R}^d$. Par exemple l'ensemble des translations sur les mesures ponctuelles est un flot.

Définition D.2 (Ensembles invariants). Soit (θ_t) un flot sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui préserve $\mathbb{P}$ i.e. $\mathbb{P} \circ \theta_t = \mathbb{P}$, soit $A \in \mathcal{F}$ on dit que A est :

1. (θ_t)-strictement invariant si $\forall t$, $\theta_t^{-1} A = A$
2. (θ_t)-invariant si $\forall t$, $\mathbb{P}[(\theta_t^{-1} A) \Delta A] = 0$ i.e. $A = \theta_t^{-1} A$ à ensemble négligeable près.
3. (θ_t)-contractant si $\forall t$, $\mathbb{P}(\theta_t^{-1} A \cap A^c) = 1$

Proposition D.1. (θ_t)-contractant $\Rightarrow$ (θ_t)-invariant

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}$ (θ_t)-contractant. Soit t alors $\mathbb{P}(\theta_t^{-1} A \cap A^c) = 1$ comme $[(\theta_t^{-1} A) \cap A^c] \subset [\theta_t^{-1} A) \Delta A]$ alors $\mathbb{P}[\theta_t^{-1} A) \Delta A] = 1$ i.e. A est (θ_t)-invariant. □

Définition D.3 (Ergodicité). (θ_t) est dit ergodique si $\forall A \in \mathcal{F}$ (θ_t)-invariant on a : $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1

Définition D.4 (Mélange). (θ_t) est *mixing* si $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbb{P}(A \cap \theta_t^{-1} B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$

Proposition D.2. (θ_t) mélangeant $\Rightarrow$ (θ_t) ergodique

Démonstration. Supposons que (θ_t) est mélangeant et soit $A \in \mathcal{F}$ invariant i.e. $\mathbb{P}[(\theta_t^{-1} A) \Delta A] = 0$. Comme θ est mélangeant alors $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbb{P}(A \cap \theta_t^{-1} A) = \mathbb{P}(A)^2$ et comme $\mathbb{P}(A \cap \theta_t^{-1} A) = \mathbb{P}(A)$ par invariance de A on a finalement $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$ i.e. $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 □

Définition D.5. Un processus ponctuel simple est dit N est dit θ compatible si $S_y N(\omega) = \theta_y \omega$

Remarque D.1. Lorsque le flot θ préserve la probabilité $\mathbb{P}$ i.e. $\mathbb{P} \circ \theta_y = \mathbb{P}$ et que N est compatible alors N a une distribution stationnaire en effet si on prend $f : M_p(E) \to \mathbb{R}_+$ mesurable $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(S_y N)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P} \circ \theta_y}[f(N)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(N)]$. De même pour tout processus normal i.e. $(\lambda(t))_t$

Références

[1] Pierre Brémaud. *Probability Theory and Stochastic Processes.* Springer, 2020.

[2] Martin Jacobsen. *Point process theory and applications.* 2006.

[3] D.J. Daley D. Vere Jones. *An introduction to the theory of Point Processes.* Springer, 1988.

[4] Jean Lacroix. Chaînes de markov et processus de poisson. 2001-2002.

[5] L. Massoulié P. Brémaud. Stability of nonlinear hawkes processes. 1996.

[6] P. A. W Lewis G. S. Shedler. Simulation of nonhomogeneous poisson processes by thinning. 1978.

[7] Rizoiu Lee Mishra Xie. A tutorial on hawkes processes for events in social media. 2017.