Студент: Майоров Артемий
Группа: 2375
Вариант: 14
Дата: 22 апреля 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №2

Задание 1. *Распределение случайной величины ξ задано таблицей:*

ξ	-3	-2	-1	0	1	$\sum$
$\mathbb{P}$	2/9	1/3	1/9	2/9	1/9	1

Вычислить $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{H}\xi$ (в натах). Вычислить распределение $\eta = \sin(\pi\xi/2)$. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. $\operatorname{supp}\xi = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. ξ - дискретная случайная величина (ДСВ). Тогда ее математическое ожидание можно найти по формуле:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i:p_i>0} a_i \cdot p_i = -3 \cdot \frac{2}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{4}{3} \approx -1{,}3333$$

Для нахождения $\mathbb{D}\xi$ воспользуемся свойством: $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$; а также формулой для начального момента k-го порядка ДСВ: $\mathbb{E}\xi^k = \sum_{i:p_i>0} a_i^k \cdot p_i$.
Тогда:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{i:p_i>0} a_i^2 \cdot p_i = 9 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{32}{9} - \frac{16}{9} = \frac{16}{9} \approx 1{,}7778$$

Энтропию в натах найдем по известной формуле:

$$\mathbb{H}\xi = -\sum_{i:p_i>0} p_i \ln p_i \approx 1{,}1887 \text{ нат}$$

$\eta = \sin(\pi\xi/2)$ и $\operatorname{supp}\xi = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

$$\eta(-3) = 1$$
$$\eta(-2) = 0$$
$$\eta(-1) = -1$$
$$\eta(0) = 0$$
$$\eta(1) = 1$$

Значит $\operatorname{supp}\eta = \{-1, 0, 1\}$.

$$\mathbb{P}(\eta = -1) = \mathbb{P}(\xi = -1) = \frac{1}{9}$$
$$\mathbb{P}(\eta = 0) = \mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = -2) = \frac{5}{9}$$
$$\mathbb{P}(\eta = 1) = \mathbb{P}(\xi = -3) + \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{3}$$

η	-1	0	1	$\sum$
$\mathbb{P}$	1/9	5/9	1/3	1

Теперь найдем $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

$$\mathrm{F}_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -3] \\ \frac{2}{9}, & x \in (-3; -2] \\ \frac{5}{9}, & x \in (-2; -1] \\ \frac{6}{9}, & x \in (-1; 0] \\ \frac{8}{9}, & x \in (0; 1] \\ 1, & x \in (1; \infty) \end{cases} \quad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1] \\ \frac{1}{9}, & x \in (-1; 0] \\ \frac{2}{3}, & x \in (0; 1] \\ 1, & x \in (1; \infty) \end{cases}$$

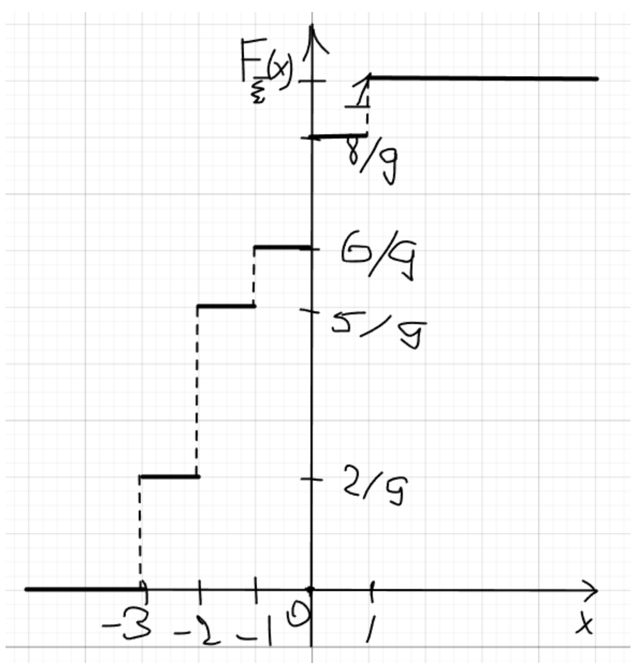

Рис. 1

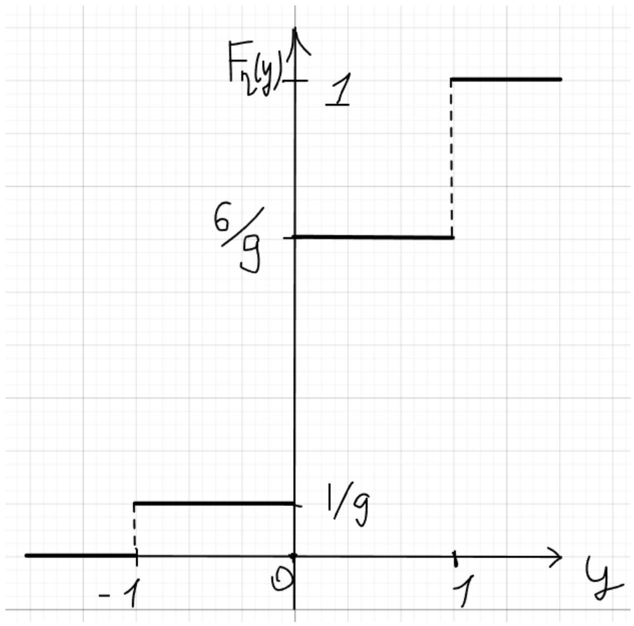

Рис. 2

Их графики на рисунках 1 и 2 соответственно. *Ответ:*
$\mathbb{E}\xi$ = -1.3333, $\mathbb{D}\xi$ = 1.7778, $\mathbb{H}\xi$ = 1.1887 нат

Задание 2. *Дана плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ:*

$$p_\xi(x) = \begin{cases} C|x|, & x \in [\frac{-2\pi}{3}; 2\pi] \\ 0, & \textit{в отс. сл.} \end{cases}$$

Вычислить C, $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{H}\xi$ (в натах). Вычислить распределение $\eta = \cos\xi$. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. Воспользуемся свойством плотности распределения абсолютно непрерывной случайной величины (АНСВ). Интеграл от плотности по всей числовой прямой должен равняться 1. Тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = C\int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{2\pi} xdx = -C\int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{0} xdx + C\int\limits_{0}^{2\pi} xdx = \frac{20\pi^2}{9}C = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{20\pi^2}$$

И тогда:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{9}{20\pi^2}|x|, & x \in [\frac{-2\pi}{3}; 2\pi] \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по известной формуле для АНСВ:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)dx = \int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{2\pi} x\frac{9}{20\pi^2}|x|dx = \int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} x\frac{9}{20\pi^2}|x|dx + \int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} x^2\frac{9}{20\pi^2}dx = 0 + \frac{52\pi}{45} \approx 3{,}6303$$

Найдем дисперсию по известному свойству:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{2\pi} x^2 \frac{9}{20\pi^2}|x|dx = \int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{0} x^2 \frac{9}{20\pi^2}|x|dx + \int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \frac{9}{20\pi^2}|x|dx = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} x^3 \frac{9}{20\pi^2}dx + \int\limits_{0}^{2\pi} x^3 \frac{9}{20\pi^2}dx = \frac{82\pi^2}{45} \approx$$
$$\approx 17{,}9846$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{82\pi^2}{45} - \frac{2704\pi^2}{2025} = \frac{986\pi^2}{2025} \approx 4{,}8056$$

Найдем энтропию по известной формуле:

$$\mathbb{H}\xi = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) \cdot \ln(p_\xi(x))dx = -\left(\int\limits_{\frac{-2\pi}{3}}^{0} -x\frac{9}{20\pi^2} \ln \frac{-9x}{20\pi^2}dx + \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{9}{20\pi^2} x \ln \frac{9x}{20\pi^2}dx \right) \approx 1{,}8599\text{нат}$$

$\operatorname{supp}\xi = [\frac{-2\pi}{3}; 2\pi], \eta = \cos\xi \Rightarrow \operatorname{supp}\eta = [-1; 1]$.
Поскольку функция не монотонна на промежутке $[\frac{-2\pi}{3}; 2\pi]$ разобьем его: $\operatorname{supp}\xi = [\frac{-2\pi}{3}; 0] \cup [0; \pi] \cup [\pi; 2\pi]$

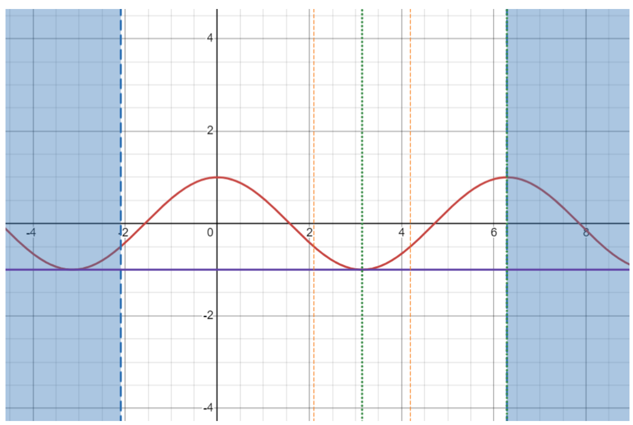

Рис. 3

1) $\eta \in [-1; -\frac{1}{2}], \xi \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$

$$A_{1,1} \in [\frac{2\pi}{3}; \pi] \Rightarrow \begin{cases} g_{1,1}(x) = \cos x \\ g_{1,1}^{-1}(y) = \arccos y \end{cases}$$

$$A_{1,2} \in [\pi; \frac{4\pi}{3}] \Rightarrow \begin{cases} g_{1,2}(x) = \cos x \\ g_{1,2}^{-1}(y) = 2\pi - \arccos y \end{cases}$$

$p_{1\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot \arccos y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot (2\pi - \arccos y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9 \cdot 2\pi}{20\pi^2}$

2) $\eta \in [-\frac{1}{2}; 0], \xi \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}]$

$$A_{2,1} \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \begin{cases} g_{2,1}(x) = \cos x \\ g_{2,1}^{-1}(y) = -\arccos y \end{cases}$$

$$A_{2,2} \in [\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}] \Rightarrow \begin{cases} g_{2,2}(x) = \cos x \\ g_{2,2}^{-1}(y) = \arccos y \end{cases}$$

$$A_{2,3} \in [\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \begin{cases} g_{2,3}(x) = \cos x \\ g_{2,3}^{-1}(y) = 2\pi - \arccos y \end{cases}$$

$$p_{2\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot \arccos y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot \arccos y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot (2\pi - \arccos y) = \frac{9\arccos y + 18\pi}{20\pi^2\sqrt{1-y^2}}$$

3) $\eta \in [0;1], \xi \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \cup [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

$$A_{3,1} \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \Rightarrow \begin{cases} g_{3,1}(x) = \cos x \\ g_{3,1}^{-1}(y) = -\arccos y \end{cases}$$

$$A_{3,2} \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \begin{cases} g_{3,2}(x) = \cos x \\ g_{3,2}^{-1}(y) = \arccos y \end{cases}$$

$$A_{3,3} \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} g_{3,3}(x) = \cos x \\ g_{3,3}^{-1}(y) = 2\pi - \arccos y \end{cases}$$

$$p_{3\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot \arccos y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot \arccos y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9}{20\pi^2} \cdot (2\pi - \arccos y) = \frac{9\arccos y + 18\pi}{20\pi^2\sqrt{1-y^2}}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{9 \cdot 2\pi}{20\pi^2}, & y \in [-1; -0{,}5] \\ \frac{9\arccos y + 18\pi}{20\pi^2\sqrt{1-y^2}}, & y \in [-0{,}5; 1] \\ 0, & else \end{cases}$$

Найдем $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; \frac{-2\pi}{3}] \\ \frac{4\pi^2 - 9x^2}{40\pi^2}, & x \in (\frac{-2\pi}{3}; 0] \\ \frac{4\pi^2 + 9x^2}{40\pi^2}, & x \in (0; 2\pi] \\ 1, & x \in (2\pi; +\infty) \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} p_\eta(t)dt = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; -1] \\ \frac{9\arcsin y + 4{,}5\pi}{10\pi}, & y \in (-1; -\frac{1}{2}] \\ 1 + \frac{-9(\arccos y)^2 - 36\pi\arccos y}{40\pi^2}, & y \in (-\frac{1}{2}; 1] \\ 1, & y \in (1; \infty) \end{cases}$$

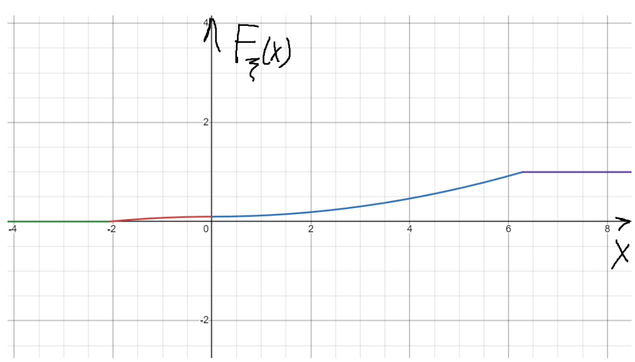

Рис. 4

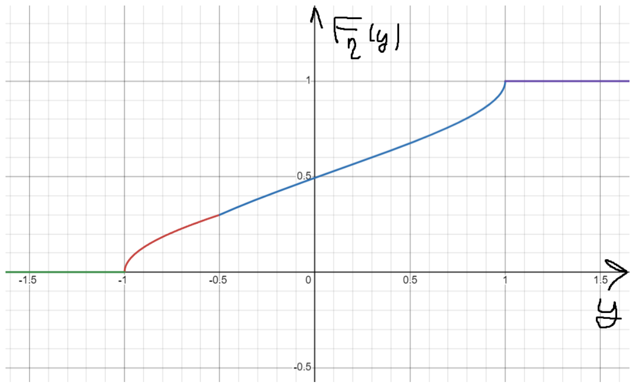

Рис. 5

Их графики на рисунках 4 и 5 соответственно.
Ответ:
$\mathbb{E}\xi = 3.6303$, $\mathbb{D}\xi = 4.8056$, $\mathbb{H}\xi = 1.8599$ нат