Студент: Майоров Артемий
Группа: 2375
Вариант: 14
Дата: 27 мая 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3

Случайный вектор (ξ,η) имеет равномерное распределение в области D:

$$D = \{(x,y) \mid 4x + 4y \leqslant 12, x \geqslant -2, y \geqslant 1\}$$

$\zeta = 2\xi^3 - 3$, $\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$, $\mu = 8\xi + 8\eta$

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}(x,y)$, функции и плотности распределения компонент. Построить графики функций распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Будут ли компоненты независимыми?*

Решение. Равномерное распределение $\Rightarrow p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} C, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$

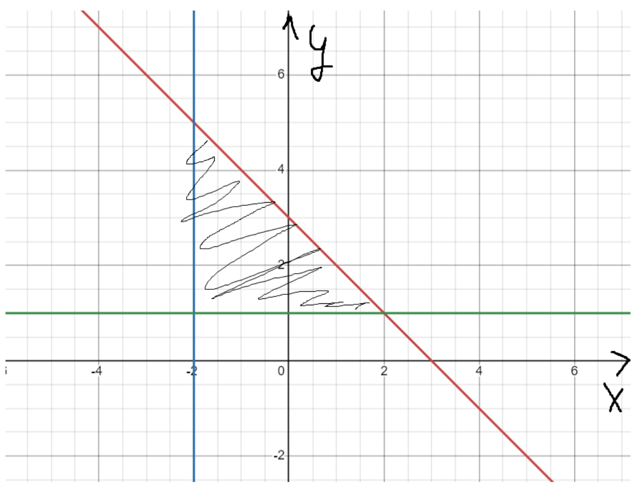

Рис. 1

$\iint_{\mathbb{R}^2} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = 1$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \iint_D p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_1^{3-x} Cdy = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$$

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Плотности распределений.
Для компоненты ξ:

$$\int_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)dy = \int_1^{3-x} \frac{1}{8}dy = \frac{2-x}{8}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{8}, & x \in [-2;2] \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Для компоненты η:

$$\int_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)dx = \int_{-2}^{3-y} \frac{1}{8}dx = \frac{5-y}{8}$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{5-y}{8}, & y \in [1;5] \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Проверка на независимость: $p_{\xi,\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$ во всех точках D.

$$\frac{1}{8} = \frac{2-x}{8} \cdot \frac{5-y}{8}$$

Рассмотрим точку (0,0):

$$\frac{1}{8} = \frac{2-x}{8} \cdot \frac{5-y}{8} = \frac{10}{64} - \text{неверно} \Rightarrow \text{зависимы}$$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;-2] \\ \frac{-x^2+4x+12}{16}, & x \in (-2;2] \\ 1, & x \in (2;\infty) \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\eta(t)dt = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;1] \\ \frac{-y^2+10y-9}{16}, & y \in (1;5] \\ 1, & y \in (5;\infty) \end{cases}$$

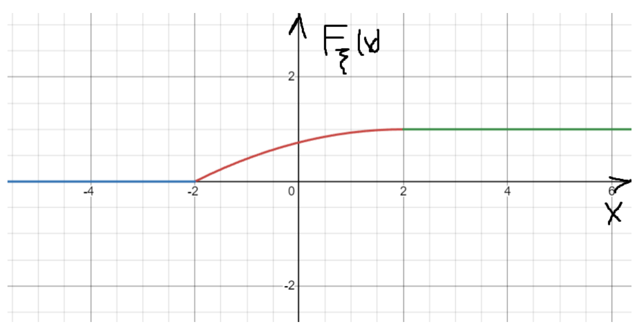

Рис. 2

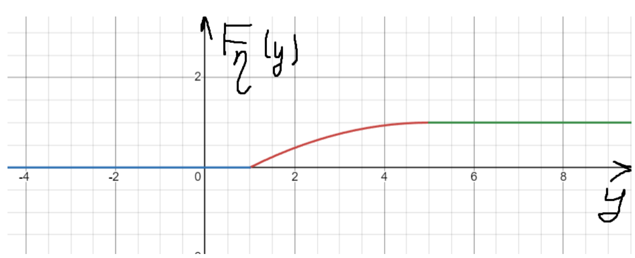

Рис. 3

Задание 2. *Найти распределения случайных величин ζ и ν. Вычислить $\mathbb{E}\zeta$, $\mathbb{D}\zeta$, $\mathbb{E}\nu$ и $\mathbb{D}\nu$. Построить графики функций распределений $F_\zeta(z)$ и $F_\nu(n)$.*

Решение. $\zeta = 2\xi^3 - 3$. $\operatorname{supp}\xi = [-2;2]$, $\operatorname{supp}\zeta = [-19;13]$. $g(\xi) = 2\xi^3 - 3$ и $g(\xi)$ монотонно возрастает на $\operatorname{supp}\xi$. Тогда:

$$g^{-1}(z) = \sqrt[3]{\frac{z+3}{2}}$$
$$(g^{-1}(z))' = \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(z+3)^2}}$$

Воспользуемся формулой для нахождения плотности распределения:
$p_\zeta(z) = \frac{1}{|(g^{-1}(z))'|} \cdot p_\xi(g^{-1}(z))$

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(z+3)^2}} \cdot \frac{2-\sqrt[3]{\frac{z+3}{2}}}{8}, & z \in [-19;13] \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Функция распределения (график на рис. 3):

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} p_\zeta(t)dt = \begin{cases} 0, & z \in (-\infty;-19] \\ -\dfrac{(z+3)^{\frac{2}{3}} - 8\sqrt[3]{z+3} - 2^{\frac{13}{3}} - 2^{\frac{8}{3}}}{4^{\frac{8}{3}}}, & z \in (-19;13] \\ 1, & z \in (13;\infty) \end{cases}$$

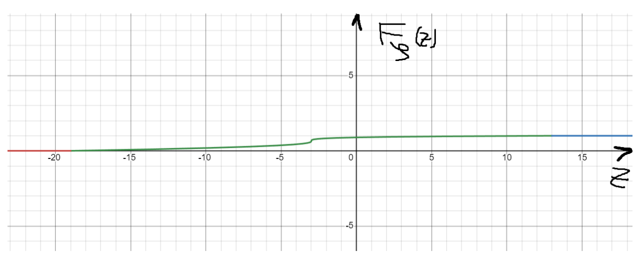

Рис. 4

$$\mathbb{E}\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot p_\zeta(z)dz = \int_{-19}^{13} z \cdot p_\zeta(z)dz = -6.2$$
$$\mathbb{E}\zeta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot p_\zeta(z)dz = \int_{-19}^{13} z^2 \cdot p_\zeta(z)dz = 64.7714$$
$$\mathbb{D}\zeta = \mathbb{E}\zeta^2 - (\mathbb{E}\zeta)^2 = 26.3314$$

$\nu = \lfloor 5\eta \rfloor$. $\operatorname{supp}\eta = [1;5]$, $\operatorname{supp}\nu = [5;24]$. $\mathbb{P}(\nu = k) = \mathbb{P}(\eta \in [k/5;(k+1)/5)) = \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{5-y}{8}dy = \frac{49-2k}{400}$
Для построения графика функции распределения будем подставлять целочисленные значения ν:

ν	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
p_i	0.0975	0.19	0.2775	0.36	0.4375	0.51	0.5775	0.64	0.6975	0.75	0.7975	0.84	0.8775
ν	18	19	20	21	22	23	24	$\sum$					
p_i	0.91	0.9375	0.96	0.9775	0.99	0.9975	1	1					

$$F_\nu(n) = \begin{cases} 0, & n \in (-\infty; 5] \\ 0.0975, & n \in (5; 6] \\ 0.19, & n \in (6; 7] \\ 0.2775, & n \in (7; 8] \\ 0.36, & n \in (8; 9] \\ 0.4375, & n \in (9; 10] \\ 0.51, & n \in (10; 11] \\ 0.5775, & n \in (11; 12] \\ 0.64, & n \in (12; 13] \\ 0.6975, & n \in (13; 14] \\ 0.75, & n \in (14; 15] \\ 0.7975, & n \in (15; 16] \\ 0.84, & n \in (16; 17] \\ 0.8775, & n \in (17; 18] \\ 0.91, & n \in (18; 19] \\ 0.9375, & n \in (19; 20] \\ 0.91, & n \in (20; 21] \\ 0.96, & n \in (21; 22] \\ 0.99, & n \in (22; 23] \\ 0.9975, & n \in (23; 24] \\ 1, & n \in (24; 25] \\ 1, & n \in (25; \infty) \end{cases}$$

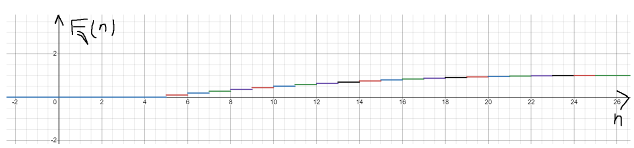

Рис. 5

$$\mathbb{E}\nu = \sum_{i:p_i>0} a_i p_i = 11{,}175$$
$$\mathbb{E}\nu^2 = \sum_{i:p_i>0} a_i^2 p_i = 147{,}075$$
$$\mathbb{D}\nu = \mathbb{E}\nu^2 - (\mathbb{E}\nu)^2 = 22{,}1944$$

Задание 3. *Вычислить вектор математических ожиданий, построить ковариационную и кореляционную матрицы для вектора* (ξ,η)*. Найти условное распределение* ξ *при условии* η*. Вычислить* $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ *и* $\mathbb{D}(\xi|\eta)$*.*

Решение. Мат.ожидание и дисперсия для ξ:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{2-x}{8}dx = -\frac{2}{3}$$
$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{2-x}{8}dx = \frac{4}{3}$$
$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

Мат.ожидание и дисперсия для η:

$$\mathbb{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_\eta(y)dy = \int_{1}^{5} y \cdot \frac{5-y}{8}dy = \frac{7}{3}$$
$$\mathbb{E}\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot p_\eta(y)dy = \int_{1}^{5} y^2 \cdot \frac{5-y}{8}dy = \frac{19}{3}$$
$$\mathbb{D}\eta = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{19}{3} - \frac{49}{9} = \frac{8}{9}$$

Вектор мат.ожиданий:

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\ 7/3\end{pmatrix}$$

Посчитаем ковариацию и корреляцию ξ и η:

$$\mathbb{E}\xi,\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \cdot p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{1}^{3-x} \frac{1}{8}xydy = -2$$
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta = -\frac{4}{9}$$
$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}} = -\frac{1}{2}$$

Матрицы:

$$\sum = \begin{pmatrix}\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Найдем условное распределение ξ при условии η:

$$p_{\xi|\eta=y_0} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}$$
$$p_{\xi|\eta=y_0} = \begin{cases}\frac{1}{5-y_0}, & x \in [-2;3-y_0]\\ 0, & \text{в отс. сл.}\end{cases}$$
$$p_{\xi|\eta} = \begin{cases}\frac{1}{5-\eta}, & x \in [-2;3-\eta]\\ 0, & \text{в отс. сл.}\end{cases}$$

Условное мат.ожидание и условная дисперсия:

$$\mathbb{E}(\xi|\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{\xi|\eta}(x)dx = \int_{-2}^{3-\eta} x \cdot p_{\xi|\eta}(x)dx = -\frac{\eta-1}{2}$$
$$\mathbb{E}(\xi^2|\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_{\xi|\eta}(x)dx = \int_{-2}^{3-\eta} x^2 \cdot p_{\xi|\eta}(x)dx = -\frac{\eta^2-4\eta+7}{3}$$
$$\mathbb{D}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi^2|\eta) - (\mathbb{E}(\xi|\eta))^2 = \frac{(\eta-5)^2}{12}$$

Проверим свойство $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{E}\xi$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{E}\left(\frac{1-\eta}{2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\eta\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{3}\right) = -\frac{2}{3} = \mathbb{E}\xi - \text{верно}$$

Проверим свойство $\mathbb{E}(\mathbb{D}(\xi|\eta)) + \mathbb{D}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{D}\xi$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{D}(\xi|\eta)) + \mathbb{D}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{E}\left(\frac{(\eta-5)^2}{12}\right) + \mathbb{D}\left(\frac{1-\eta}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9} = \mathbb{D}\xi - \text{верно}$$

Следовательно мат. ожидания и дисперсии найдены верно.

Задание 4. *Найти распределение μ. Вычислить $\mathbb{E}\mu$ и $\mathbb{D}\mu$. Построить график функции распределения $F_\mu(m)$.*

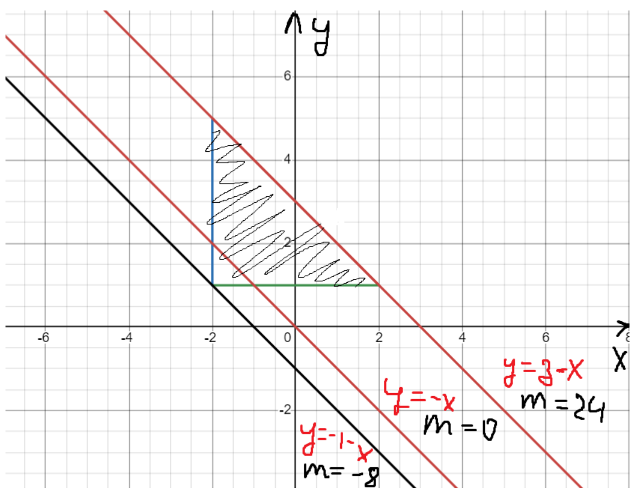

Рис. 6

Решение. $\mu = 8\xi + 8\eta$. $F_\mu(m) = \mathbb{P}(8\xi + 8\eta \leqslant m)$.
$m = 8x + 8y \Rightarrow y = \frac{m-8x}{8} \Rightarrow x = \frac{m-8y}{8}$

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\xi = [-2;2] \\ \operatorname{supp}\eta = [1;5] \end{cases} \Rightarrow \operatorname{supp}\mu = [-8;24]$$

$F_\mu(m) = \int_D \int p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-2}^{\frac{m-8}{8}} dx \int_1^{\frac{m-8x}{8}} \frac{1}{8}dy = \frac{1}{8}\int_{-2}^{\frac{m-8}{8}} \frac{m-8x-8}{8}dx = \frac{1}{8}\left(\frac{m-8}{8}\cdot\frac{m+8}{8} - \frac{(m-8)^2-256}{128}\right) = \frac{m^2+16m+64}{1024}$

$$F_\mu(m) = \begin{cases} 0, & m \in (-\infty;-8] \\ \frac{m^2+16m+64}{1024} & m \in (-8;24] \\ 1, & m \in (24;\infty) \end{cases}$$

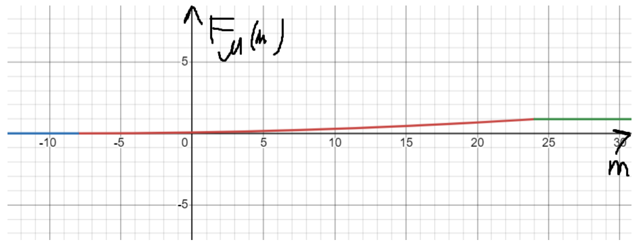

Рис. 7

Находим плотность:

$$p_\mu(m) = (F_\mu(m))' = \begin{cases} \dfrac{m+8}{512} & m \in [-8;24] \\ 0, & \text{в отс. сл.} \end{cases}$$

Мат.ожидание и дисперсия:

$$\mathbb{E}\mu = \int_{-\infty}^{\infty} m \cdot p_\mu(m) dm = \int_{-8}^{24} m \cdot \dfrac{m+8}{512} dm = \dfrac{40}{3}$$

$$\mathbb{E}\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} m^2 \cdot p_\mu(m) dm = \int_{-8}^{24} m^2 \cdot \dfrac{m+8}{512} dm = \dfrac{704}{3}$$

$$\mathbb{D}\mu = \mathbb{E}\mu^2 - (\mathbb{E}\mu)^2 = \frac{704}{3} - \frac{1600}{9} = \frac{512}{9}$$