Студент: Майоров Артемий
Группа: 2375
Вариант: 14
Дата: 3 апреля 2024 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *5 красных карточек и 7 синих карточек наудачу разложены по 4-м папкам. Найти вероятность того, что в каждой папке будут карточки двух цветов.*

Решение. Пусть событие A — "В каждой папке карточки двух цветов". Разложим 5 красных карточек по 4-м папкам. $\binom{5+1+(4-1)-1}{4-1} = \binom{8}{3}$. Аналогично для синих карточек: $\binom{7+1+(4-1)-1}{4-1} = \binom{10}{3}$, следовательно общее число исходов будет равно: $\#\Omega = \binom{8}{3} \cdot \binom{10}{3} = 6720$. Число благоприятных исходов будет считаться аналогично, только теперь нам необходимо, чтобы хотя бы 1 карточка была в папке. Для красных карточек: $\binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3}$, для синих: $\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3}$, следовательно общее число благоприятных исходов будет равно: $\#A = \binom{4}{3} \cdot \binom{6}{3} = 80$. Тогда по определению вероятности:
$\mathbb{P}A = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{80}{6720} \approx 0{,}0119$

Ответ: 0,0119

Задание 2. *Прямые разбивают плоскость на полосы ширины 6. Определить вероятность того, что отрезок длины 2, наугад брошенный на плоскость, не пересечет ни одной прямой*

Решение.
$a = 3$
$r = 1$
$\mathbb{P}A$ — вероятность, что отрезок не пересечет прямую.
$\mathbb{P}B$ — вероятность, что отрезок пересечет прямую.

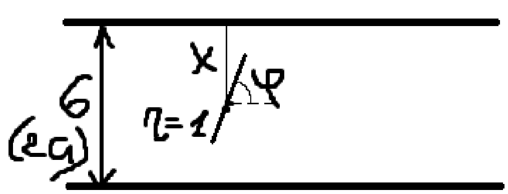

Рис. 1 "— Геометрическое представление задачи

Возможные положения отрезка на плоскости полностью определяются положением центра отрезка и углом поворота отрезка относительно какого-либо направления – для удобства выберем в качестве направления прямую, параллельную исходным двум, и зададим положение отрезка углом между иголкой и этой прямой (он будет от 0 до π обозначим его через φ). Причём две эти переменные (положение центра и угол поворота) меняются независимо друг от друга. Обозначим через расстояние от середины отрезка до ближайшей прямой, это расстояние находится в промежутке от 0 до a. Следовательно, можно посчитать меру всего пространства исходов. Это будет некий прямоугольник, одна сторона которого π, а другая a. Площадь этого прямоугольника:
$S = \pi \cdot a$

Посчитаем благоприятные исходы. Отрезок пересекает ближайшую прямую, если расстояние от середины отрезка до ближайшей прямой не превосходит $r \cdot \sin\varphi$
Найдем площаль синусоиды P:
$P = \int_0^\pi r \cdot \sin\varphi d\varphi = 2 \cdot r$

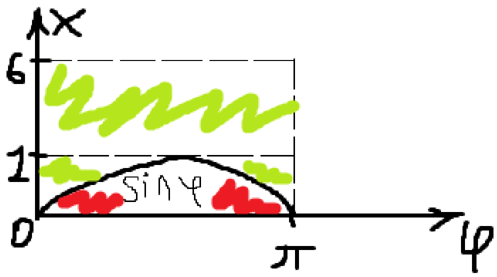

Рис. 2 "— График

Для нахождения вероятность того, что отрезок пересечёт какую-нибудь прямую, необходимо разделить площадь синусоиды P на площадь прямоуольника S:
$\mathbb{P}B = \frac{\#P}{\#S} = \frac{2 \cdot r}{a \cdot \pi} = \frac{2}{3 \cdot \pi}$
Вероятность того, что отрезок НЕ пересечет $\mathbb{P}A = 1 - \mathbb{P}B = 1 - \frac{2}{3 \cdot \pi} \approx 0{,}7878$

Ответ: 0,7878

Задание 3. *В первой урне находится 8 белых и 8 черных шаров, во второй — 8 белых и 18 черных шаров. Одновременно из первой и второй урн вытаскивают по шару, перемешивают и возвращают по одному в каждую урну. Затем из каждой урны вытаскивают по шару. Они оказались одного цвета. Определить вероятность того, что в первой урне осталось столько же белых шаров, сколько было вначале.*

Решение. Определим полную группу событий:
$H1$ — "Из первого ящика достали белый и вернули белый"
$H2$ — "Из первого ящика достали белый и вернули черный"
$H3$ — "Из первого ящика достали черный и вернули белый"
$H4$ — "Из первого ящика достали черный и вернули черный"
Событие A — "В первом ящике осталось столько же белых шаров".
$\mathbb{P}(H1) = \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{26} = \frac{2}{13}$
$\mathbb{P}(H2) = \frac{8}{16} \cdot \frac{18}{26} = \frac{9}{26}$
$\mathbb{P}(H3) = \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{26} = \frac{2}{13}$
$\mathbb{P}(H4) = \frac{8}{16} \cdot \frac{18}{26} = \frac{9}{26}$

$\mathbb{P}(A|H1) = \frac{8}{16} \cdot \frac{18}{26} = \frac{9}{26}$ (чч)
$\mathbb{P}(A|H2) = 0$ (т.к. в 1-ой урне недостаточно белых)
$\mathbb{P}(A|H3) = \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{26} = \frac{63}{416}$ (бб)
$\mathbb{P}(A|H4) = \frac{8}{16} \cdot \frac{18}{26} = \frac{9}{26}$ (чч)

Hi	$H1$	$H2$	$H3$	$H4$	Σ
$\mathbb{P}(Hi)$	$\frac{2}{13}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{9}{26}$	1
$\mathbb{P}(A\|Hi)$	$\frac{9}{26}$	0	$\frac{63}{416}$	$\frac{9}{26}$	—

Найдем вероятность события A, используя формулу полной вероятности:
$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(A|Hi) \cdot \mathbb{P}(Hi) = \frac{2}{13} \cdot \frac{9}{26} + 0 + \frac{2}{13} \cdot \frac{63}{416} + \frac{9}{26} \cdot \frac{9}{26} = \frac{531}{2704} \approx 0{,}1964$

Ответ: 0,1964

Задание 4. *При посылке сообщения, состоящего из 20-ти символов вероятность искажения каждого символа равна 0.01. Для надежности сообщение передается трижды. При этом известно, что при первой передаче были точно искжены первые 11 символов, а при последней передаче были искажены символы с 10-го по 20-й. Определить вероятность того, что на основании трех передач сообщение удастся восстановить.*

Решение. Обозначим события, вероятность которого требуется найти: A — на основании трёх передач сообщение удастся восстановить.
B — есть неискаженный символ среди двух сообщений
C — получены символы 1–9
D — получены символы 10–11
E — получены символы 12–20
$p = 0{,}01$ — вероятность искажения любого символа.
В событиях C и E в одном из сообщений символы искажены, поэтому там считаем вероятность из двух сообщений. В событии D символы не искажены лишь в одном сообщении, поэтому там будем считать вероятность из одного сообщения:
$\mathbb{P}(B) = 1 - 0{,}01^2 = 0{,}9999$
$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)^9 = 0{,}9991$
$\mathbb{P}(D) = (1 - 0{,}01)^2 = 0{,}9801$
$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B)^9 = 0{,}9991$
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(E) = 0{,}9783$

Ответ: 0,9783

Задание 5. *Вероятность успеха в схеме Бернулли равна $\frac{1}{4}$. Проводится 500 испытаний. Написать точную формулу и вычислить приближенную вероятность того, что число успехов попадет в интервал 115–135.*

Решение.
$p = \frac{1}{4}$
$n = 500$
$np = 125 > 10$, следовательно будем использовать алгоритм Муавра-Лапласа. Сначала найдем общую формулу:
1) $\mathbb{P}(A) = \sum_{m=115}^{135} \binom{500}{m} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{500-m}$
Теперь найдем вероятность:
2) $\Phi(x2) - \Phi(x1) = \Phi(\frac{135-125}{\sqrt{125 \cdot 0{,}75}}) - \Phi(\frac{115-125}{\sqrt{125 \cdot 0{,}75}}) = \Phi(1{,}0328) \cdot 2 = 0{,}697$

Ответ: 0,697