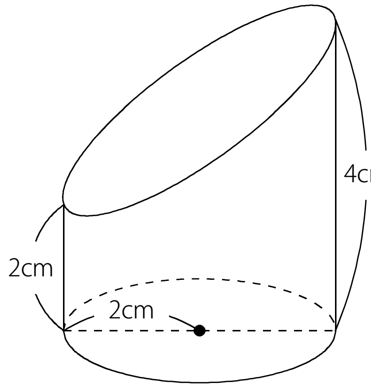
中学受験Unit.42- 2　5年　立体図形４
柱の切断

例題と解説

例題１

円柱を平面で切って右図のような立体を作りました。

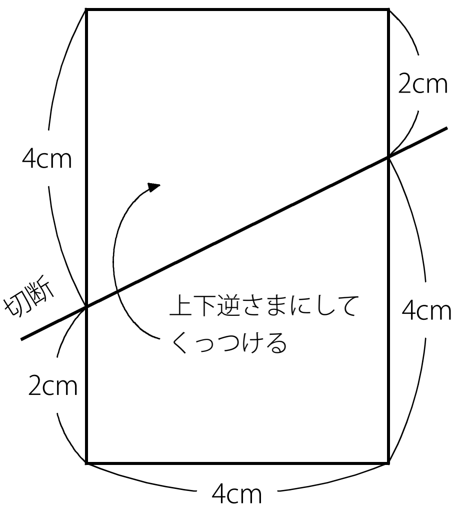
この立体の体積を求めなさい。



答え 37.68cm³

[例題１の解説]

この立体は右図のように高さ 2＋4＝6cm の円柱を半分に切断してできる形です。



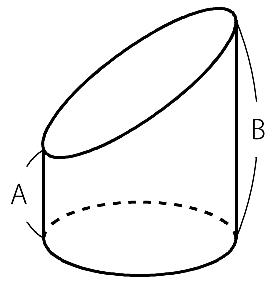
つまり底面が半径２cmの円で、高さが６cmの円柱のちょうど半分です。

この立体の体積は $2 \times 2 \times 3.14 \times 6 \div 2 = 12 \times 3.14 = 37.68\text{cm}^3$

(別解)

(切断された円柱の体積)＝(底面積)×$\dfrac{A+B}{2}$ となります。

よって $2 \times 2 \times 3.14 \times \dfrac{2+4}{2} = 37.68\text{cm}^3$

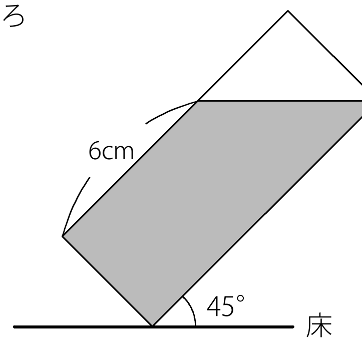


中学受験Unit.42- 2　5年　立体図形４
柱の切断

例題と解説

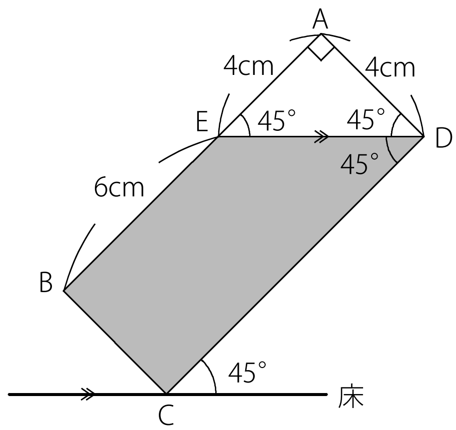
例題２

水で満たされた高さ10cmの円柱の容器を床から45度かたむけて水をこぼしたところ右図のようになりました。こぼれた水の体積を求めなさい。



答え 25.12cm^3

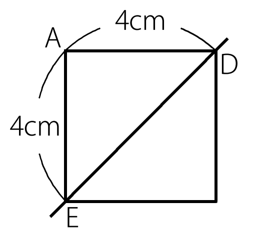
[例題２の解説]



床と水面DEは平行なので錯角より 角CDE＝45° です。
また角ADCは90度なので 角ADE＝90－45＝45° となります。

角DAEは90度なので、三角形ADEは直角二等辺三角形であることがわかります。
円柱の高さは10cmなので AE＝10－6＝4cm。 AE＝AD より AD＝4cm。

AD＝4cm なので円柱の底面の直径は４cmです。



水がこぼれてできた空間は底面の半径が2cmで高さが4cmの円柱を
右図のようにちょうど半分に切断してできる形です。

よってこぼれた水の体積は 2×2×3.14×4÷2＝25.12cm^3

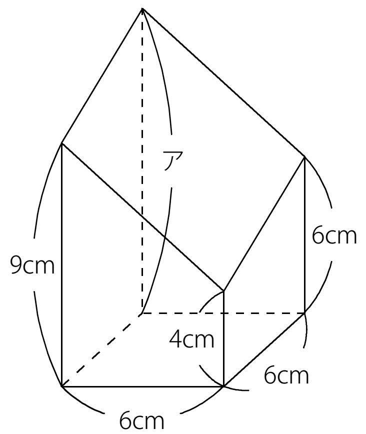
中学受験Unit.42- 2　5年　立体図形４
柱の切断

例題と解説

例題３

直方体を平面で切って右図のような立体を作りました。
この立体について次の問いに答えなさい。

（１）　アの長さを求めなさい。
（２）　体積を求めなさい。



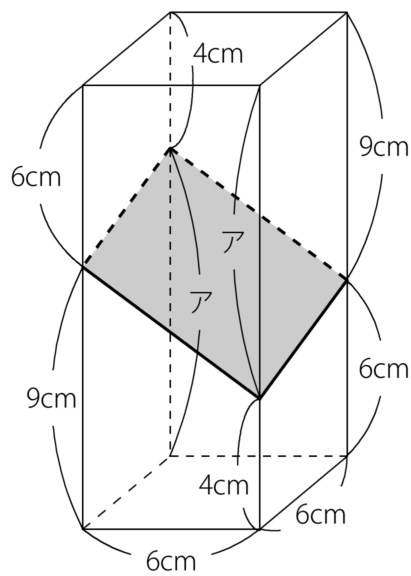
答え　（１）11cm（２）$270cm^3$

[例題３の解説]

（１）　同じ立体を上下逆さまにしてくっつけると、右図のように
高さ　9＋6＝15cm　の直方体になります。
※ 上と下の立体は、正確には「同じ立体」ではありません。
鏡にうつして左右反対にした立体です。

よって　ア＝15－4＝11cm

(別解)
切断された直方体では向かい合う辺の長さの和が等しくなります。
よって　ア＋4＝9＋6　より　ア＝11cm
※ 覚えておきましょう。



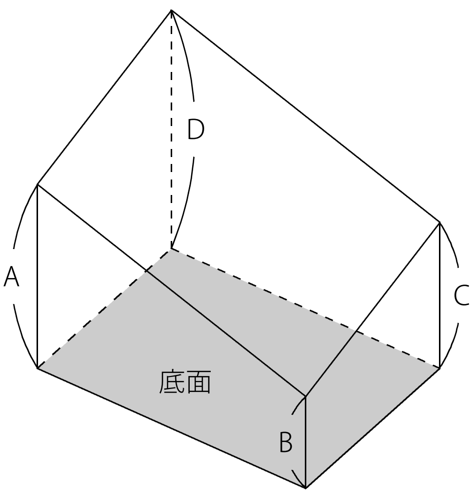
切断された直方体では向かい合う辺の長さの和が等しくなりますが、
底面が長方形、またはひし形や平行四辺形の四角柱でも成り立ちます。
※ ただし底面が台形など、その他の四角形の場合は成り立たないので注意しましょう。

例題と解説

（２）　体積は高さ15cmの四角柱(直方体)の半分なので $6\times6\times15\div2=270\text{cm}^3$

(別解)
底面が正方形や長方形の角柱（つまり直方体）か、もしくは底面がひし形や平行四辺形の角柱を切断してできる立体の体積は (底面積)×(高さの平均) もしくは (底面積)×(向かい合う辺の長さの平均) で求めることができます。

$$(\text{体積})=(\text{底面積})\times\frac{A+B+C+D}{4}$$



A＋C＝B＋D なので

$$(\text{体積})=(\text{底面積})\times\frac{A+C}{2}\quad\text{または}\quad(\text{底面積})\times\frac{B+D}{2}$$

と求めることもできます。

よって、この問題の立体の体積は $6\times6\times\frac{6+9}{2}=270\text{cm}^3$

このように切断された四角柱を**断頭(だんとう)四角柱**と言います。
(断頭四角柱の体積)＝(底面積)×(高さの平均) と覚えておきましょう。受験では頻出です。

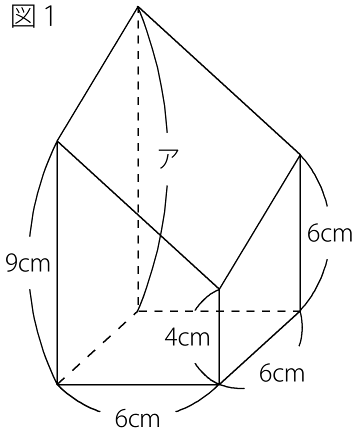
くり返しになりますが、底面が正方形や長方形、またはひし形や平行四辺形の四角柱で成り立つ公式であることに注意しおいて下さい。

例題と解説

(別解)

図１の立体の図２のように分割します。

図２から ア＝6＋5＝11cm と求めることができます。



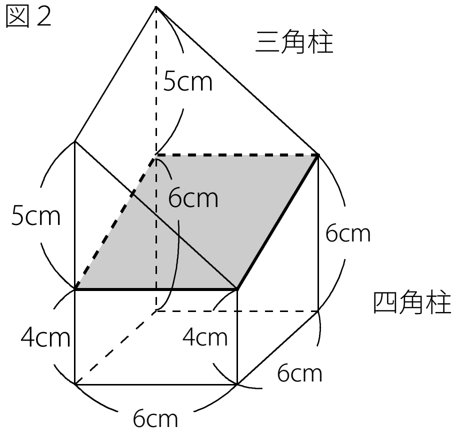
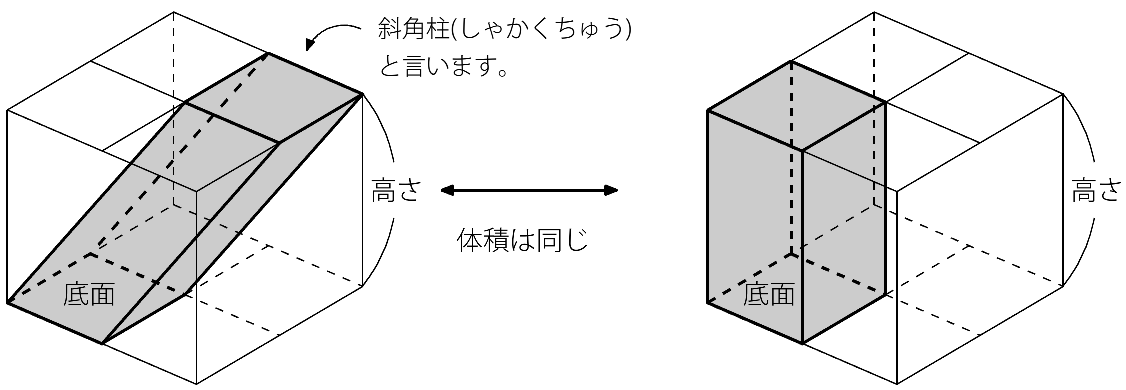


図２の上の三角柱は底面積が 5×6÷2＝15cm^3 で高さが６cmと考えることができるので 15×6＝90cm^3

図２の下の立体は底面が台形で高さが６cmの四角柱なので (4＋6)×6÷2×6＝180cm^3

よって全体の体積は 90＋180＝270cm^3

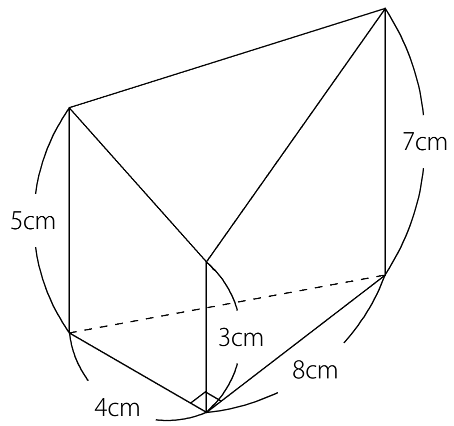
※ 図２の上の三角柱はななめに傾いた三角柱ですが、平行四辺形の面積が (底辺)×(高さ) で求められるのと同様に、ななめに傾いていても (底面積)×(高さ) で求めることができます。



例題と解説

例題４

直角三角形を底面とする三角柱を平面で切って、右図のような立体を作りました。この立体の体積を求めなさい。



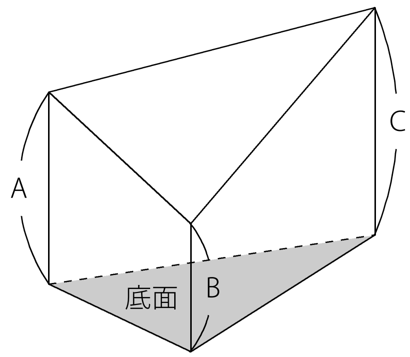
答え 80cm³

[例題４の解説]

このように切断された三角柱を**断頭三角柱**と言います。
断頭三角柱の体積は断頭四角柱の体積と同様に (底面積)×(高さの平均) で求めることができます。

(断頭三角柱の体積)＝(底面積)×$\dfrac{A+B+C}{3}$

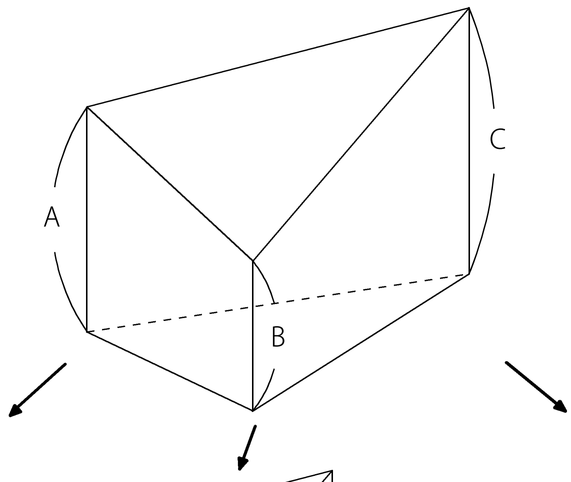
よって 4×8÷2×$\dfrac{5+3+7}{3}$＝80cm³



例題と解説

(参考)

断糖三角柱の体積が (断頭三角柱の体積)＝(底面積)×$\frac{A+B+C}{3}$ で求めることができる理由を考えます。

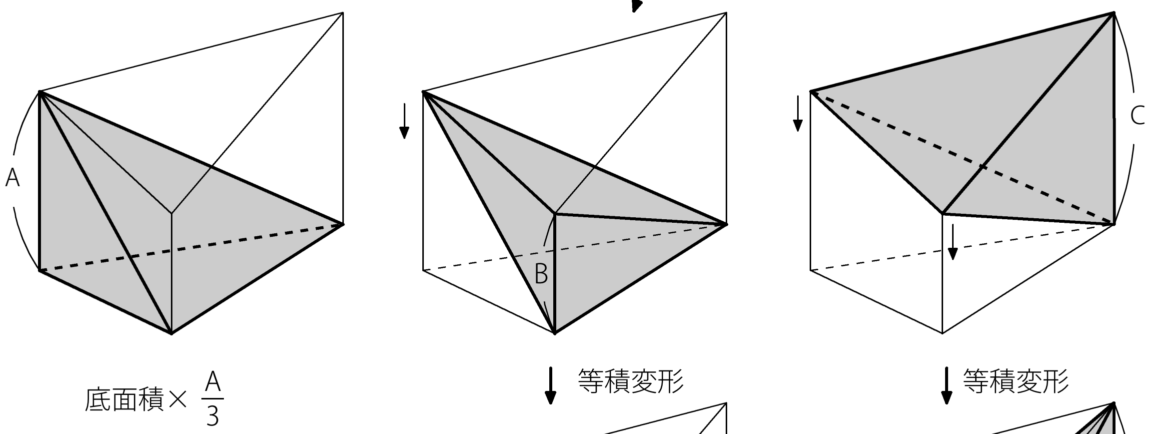


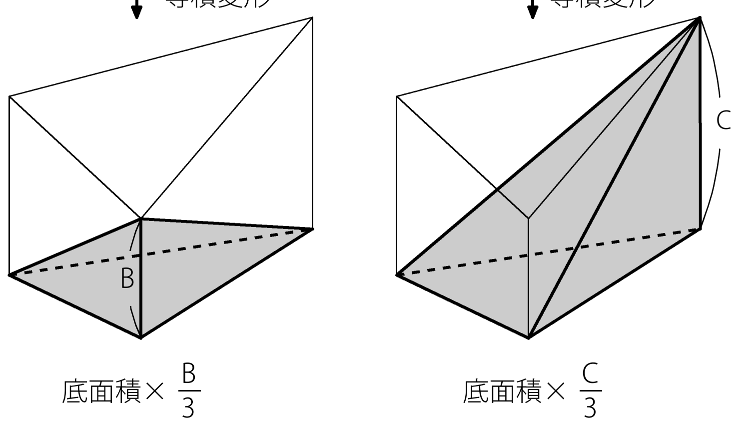
図のようになるので

(断頭三角柱の体積)

＝(底面積)×$\frac{A}{3}$＋(底面積)×$\frac{B}{3}$＋(底面積)×$\frac{C}{3}$

＝(底面積)×$\frac{A+B+C}{3}$





図中の「等積変形」は

底面積と高さを変えずに形を

変えているので「立体の等積変形」です。

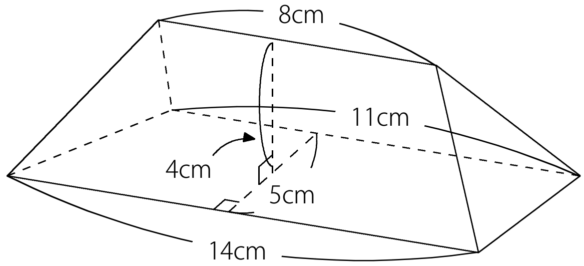
中学受験Unit.42- 2　5年　立体図形４
柱の切断

例題と解説

例題５

三角柱の両はしを平面で切って、右図のような立体を作りました。

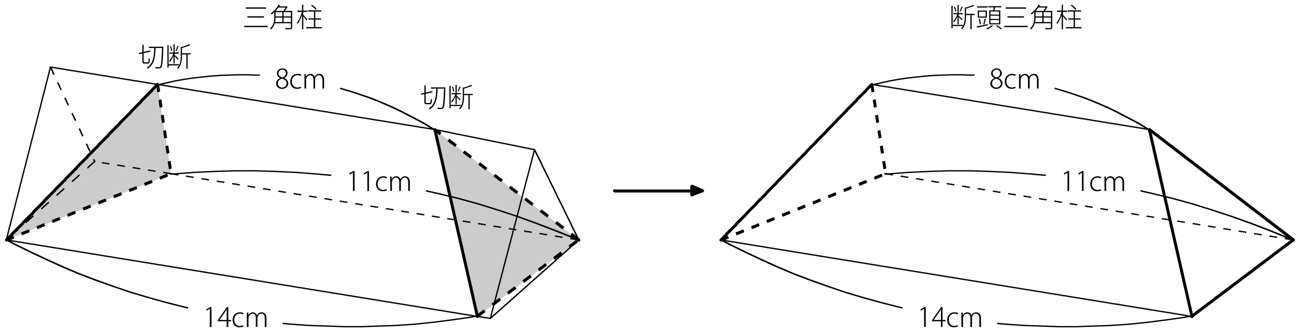
この立体の体積を求めなさい。



答え 110cm³

[例題５の解説]

下図のようにもとの三角柱の両はしを切断してできる立体なので、断頭三角柱です。

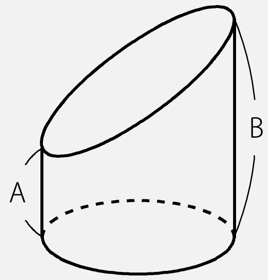


(断頭三角柱の体積)＝(底面積)×$\frac{A+B+C}{3}$ で (底面積)＝5×4÷2＝10cm² なので 10×$\frac{8+14+11}{3}$＝110cm³

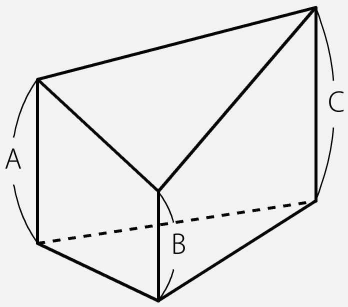
例題と解説

ポイントまとめ

・(切断された円柱の体積)＝(底面積)×$\frac{A+B}{2}$

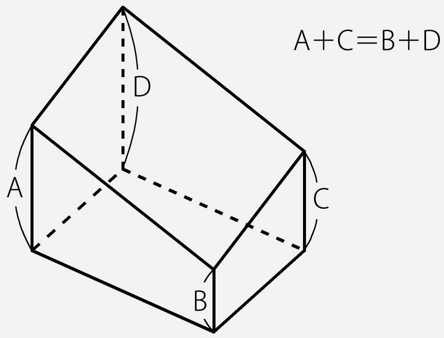


・(断頭三角柱の体積)＝(底面積)×$\frac{A+B+C}{3}$



・(断頭四角柱の体積)＝(底面積)×$\frac{A+B+C+D}{4}$

または (底面積)×$\frac{A+C}{2}$ ，(底面積)×$\frac{B+D}{2}$



ただしこの公式が使えるのは
底面の四角形の向かい合う２組の辺が平行なときのみ。