

# Metody obliczeniowe w nauce i technice - laboratorium 2b - ćwiczenie 1

Kacper Klimas

## Treść zadania

Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Hermita wielomian interpolujący.

Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np.  $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$ ). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa\* .

Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.

Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.

Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Rungego (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Zadana funkcja, wartości oraz przedział

$$f(x) = x * \sin\left(\frac{k * \pi}{x}\right)$$

$$x \in < 0.5, 4 >$$

$$k = 4$$

Legenda:

(\*) - węzły równoodległe

(\*\*) - węzły Chebysheva

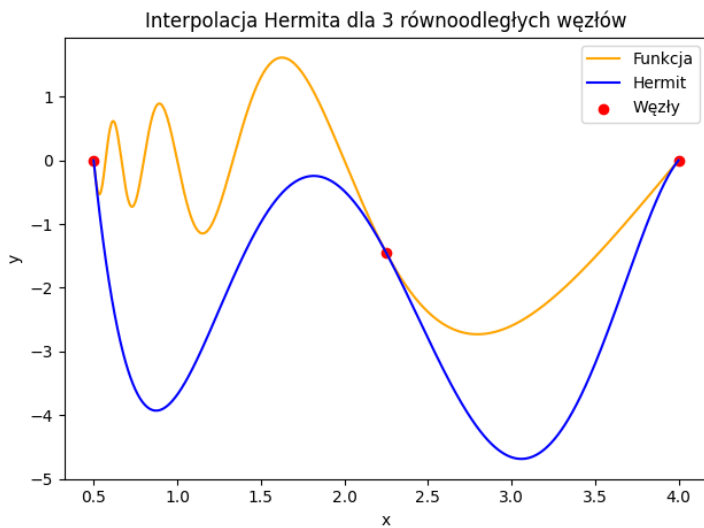
Wykresy zależności rzeczywistych wartości funkcji od przybliżonych wartościami wielomianów interpolujących zostały narysowane przy udziale 1000 punktów.

# Wielomian interpolujący dla zagadnienia Hermita

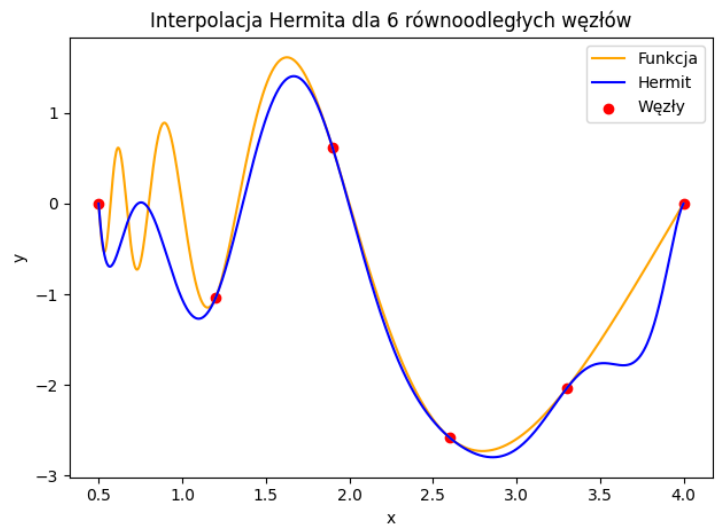
## Węzły równoodległe

Wykresy

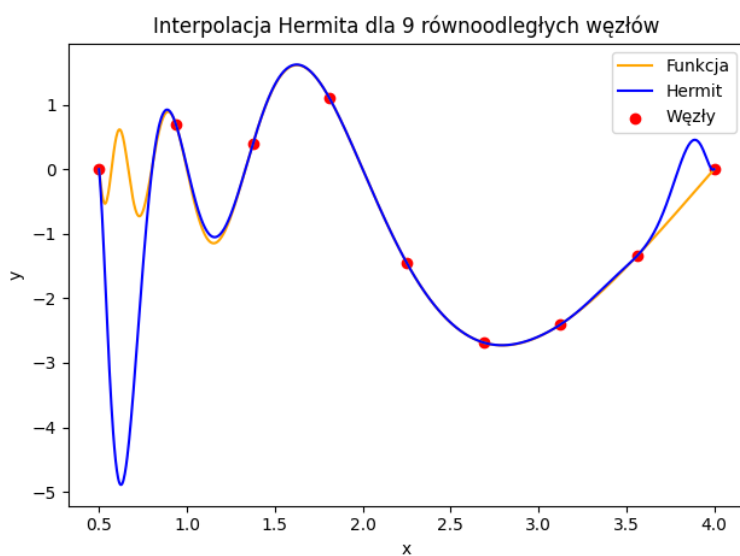
Wielomian interpolujący udało się wyznaczyć dla maksymalnej ilości węzłów = 23.



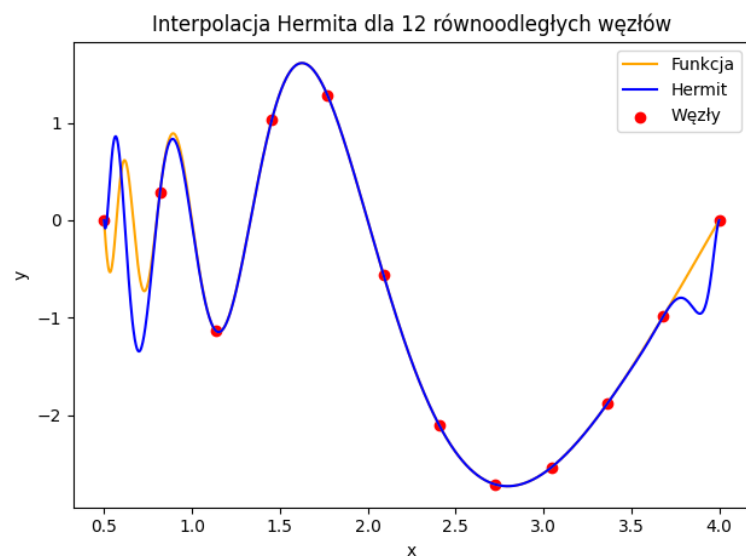
Wykres nr 1



Wykres nr 2

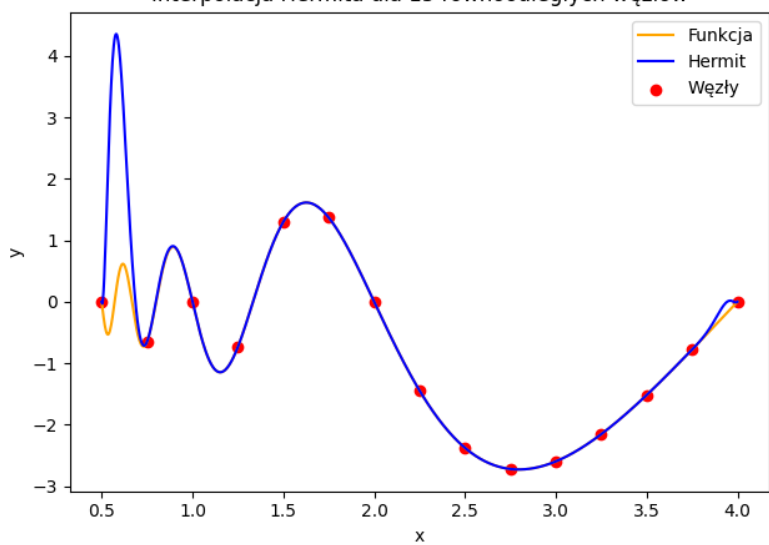


Wykres nr 3



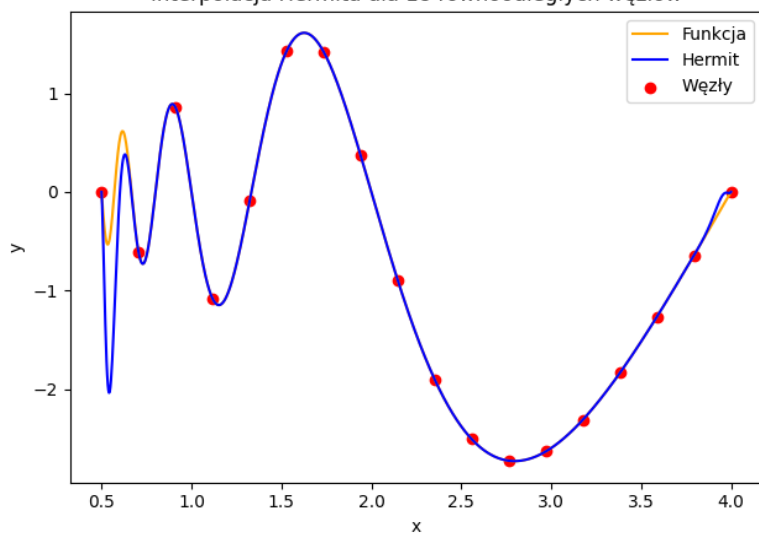
Wykres nr 4

Interpolacja Hermita dla 15 równoodległych węzłów



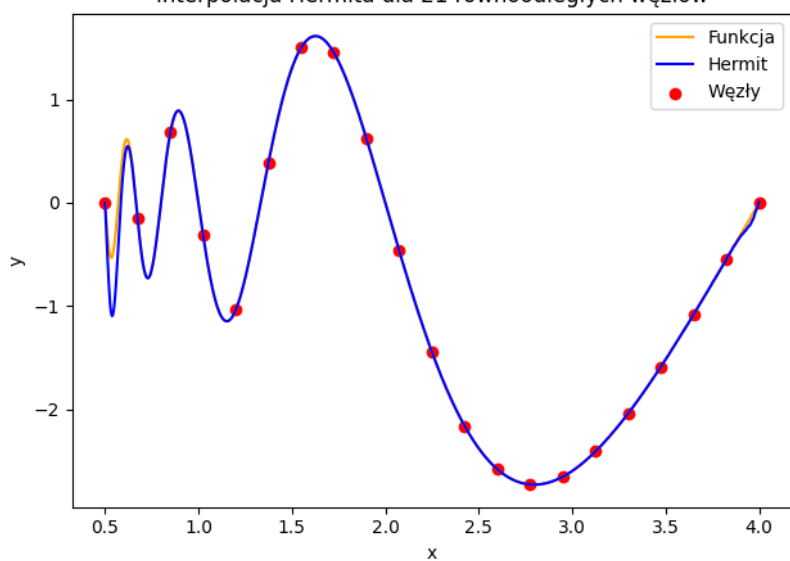
Wykres nr 5

Interpolacja Hermita dla 18 równoodległych węzłów



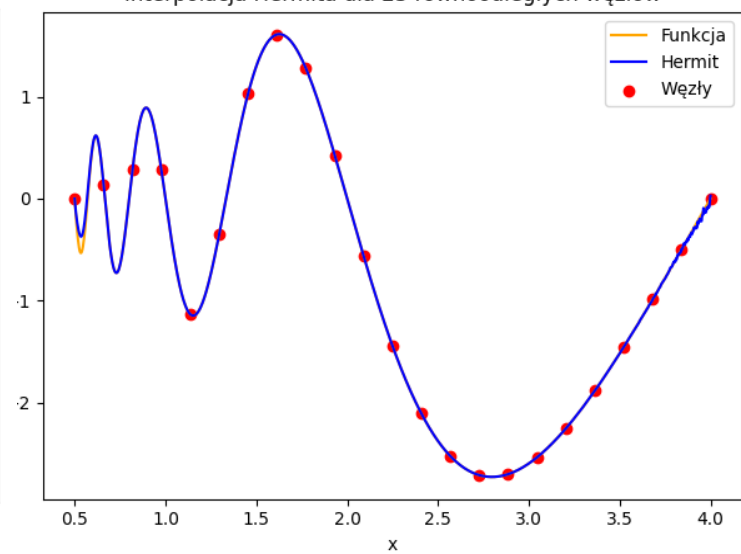
Wykres nr 6

Interpolacja Hermita dla 21 równoodległych węzłów



Wykres nr 7

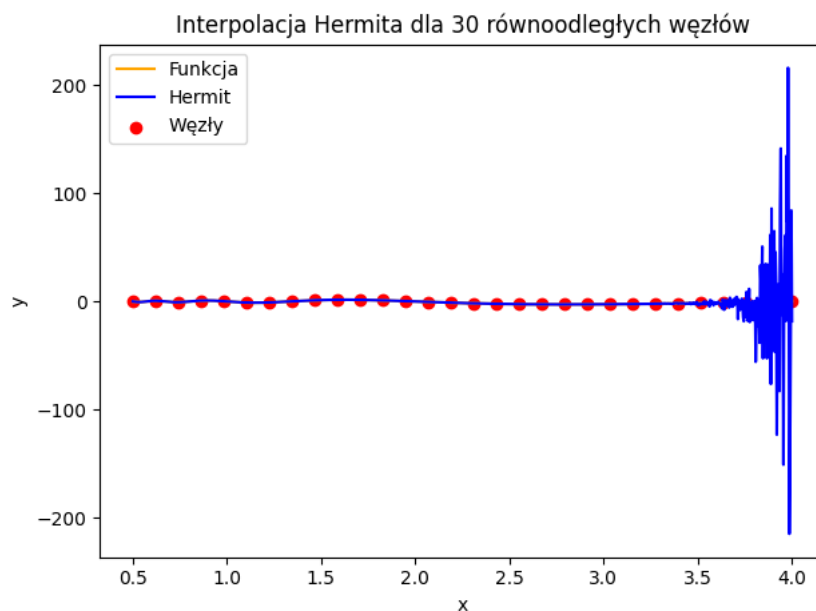
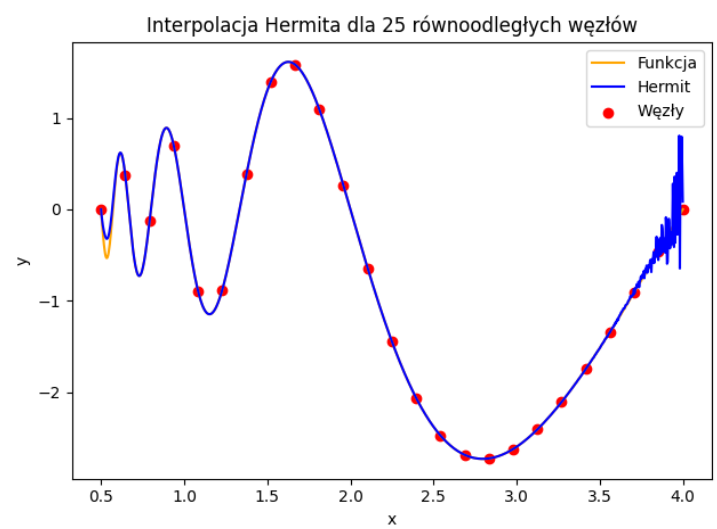
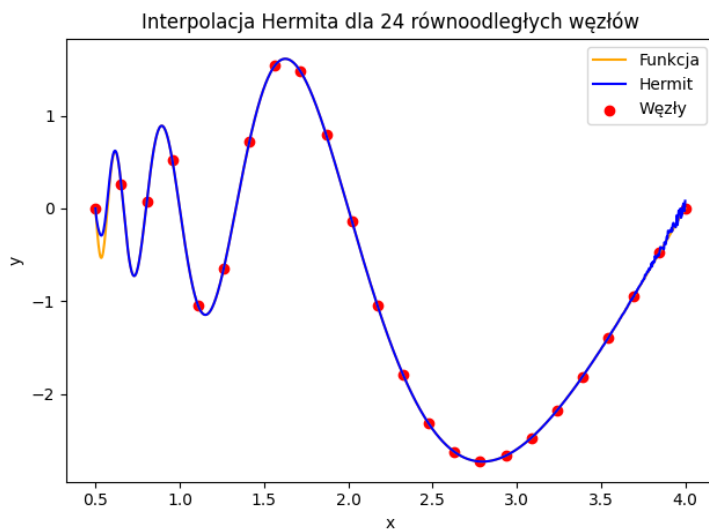
Interpolacja Hermita dla 23 równoodległych węzłów



Wykres nr 8

Dla kolejnych węzłów dokładność wielomianu drastycznie spada, wartości bardzo oscylują (wykresy 9, 10, 11).

W porównaniu do wielomianu interpolacyjnego Newtona jest to aż dwa razy wcześniej (dla węzłów o dwa razy mniejsze wartości).



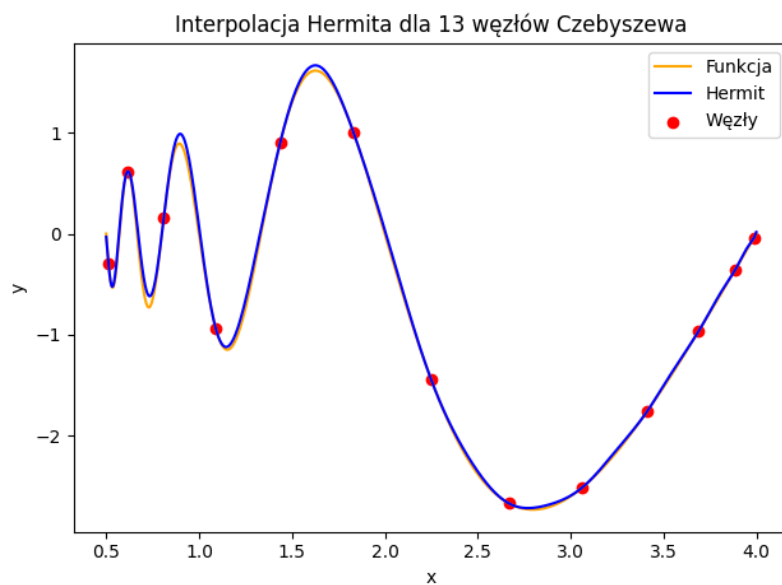
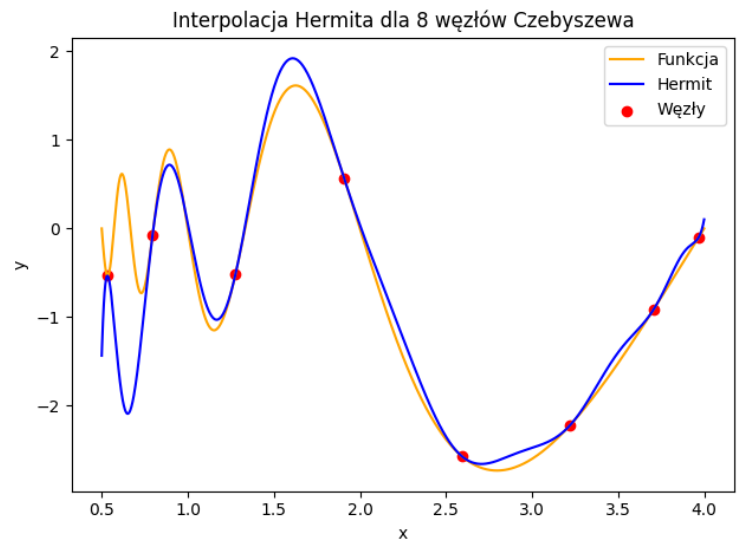
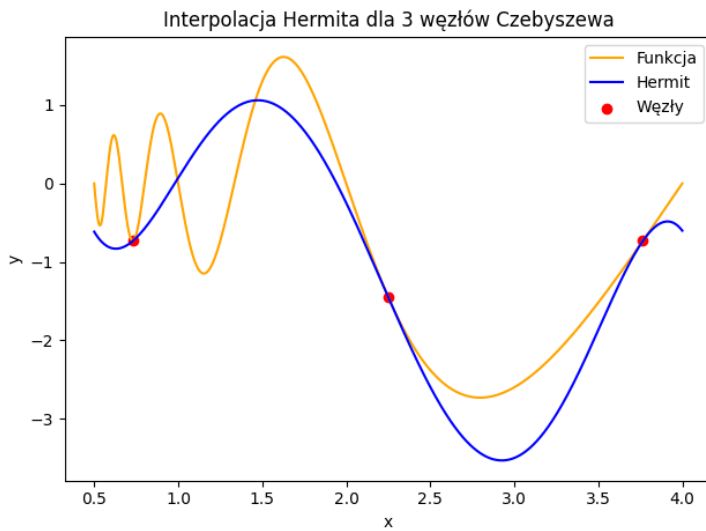
Efekt Rungego

Dla wykresów o numerach 3, 5, 6 widoczny jest efekt Rungego. Dla węzłów nieparzystych występuje on wcześniej.

## Węzły Czebyszewa

### Wykresy

Wielomian interpolujący udało się wyznaczyć dla maksymalnej ilości węzłów = 32.

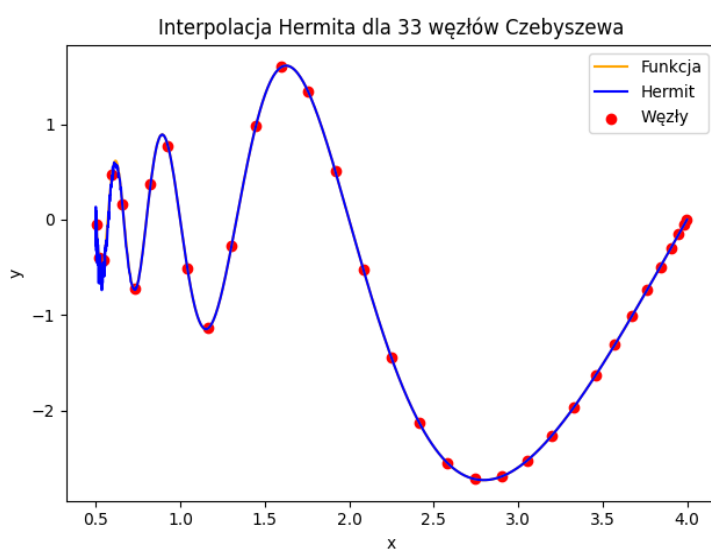


Wykres nr 13

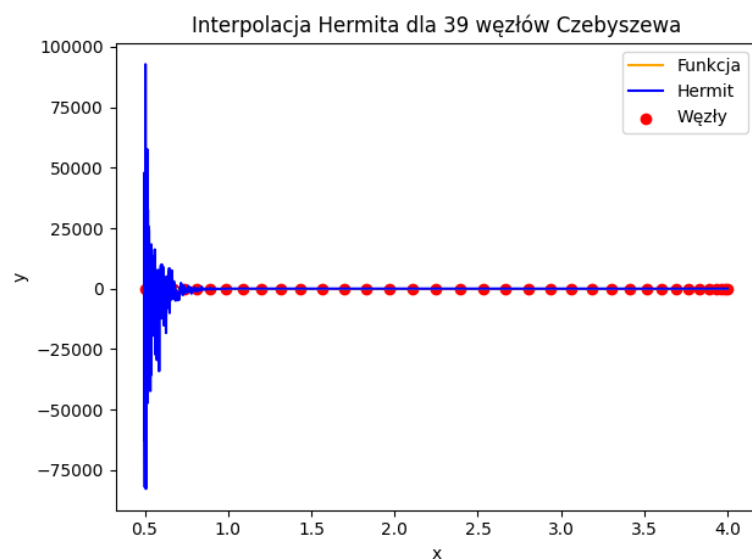
Dla kolejnych wartości węzłów interpolowany wielomian niemal w całości pokrywa się z wartościami funkcji.

Dla węzłów powyżej 32 podobnie jak poprzednio dokładność wielomianu spada, wartości bardzo oscylują (wykresy 14, 15).

W przeciwieństwie do węzłów równo oddalonych, wartości wielomianu dla węzłów Czebyszewa oscylują na początku przedziału, a nie na końcu.



Wykres nr 14



Wykres nr 15

## Efekt Rungego

Dla węzłów Czebyszewa jest on w całości niwelowany.

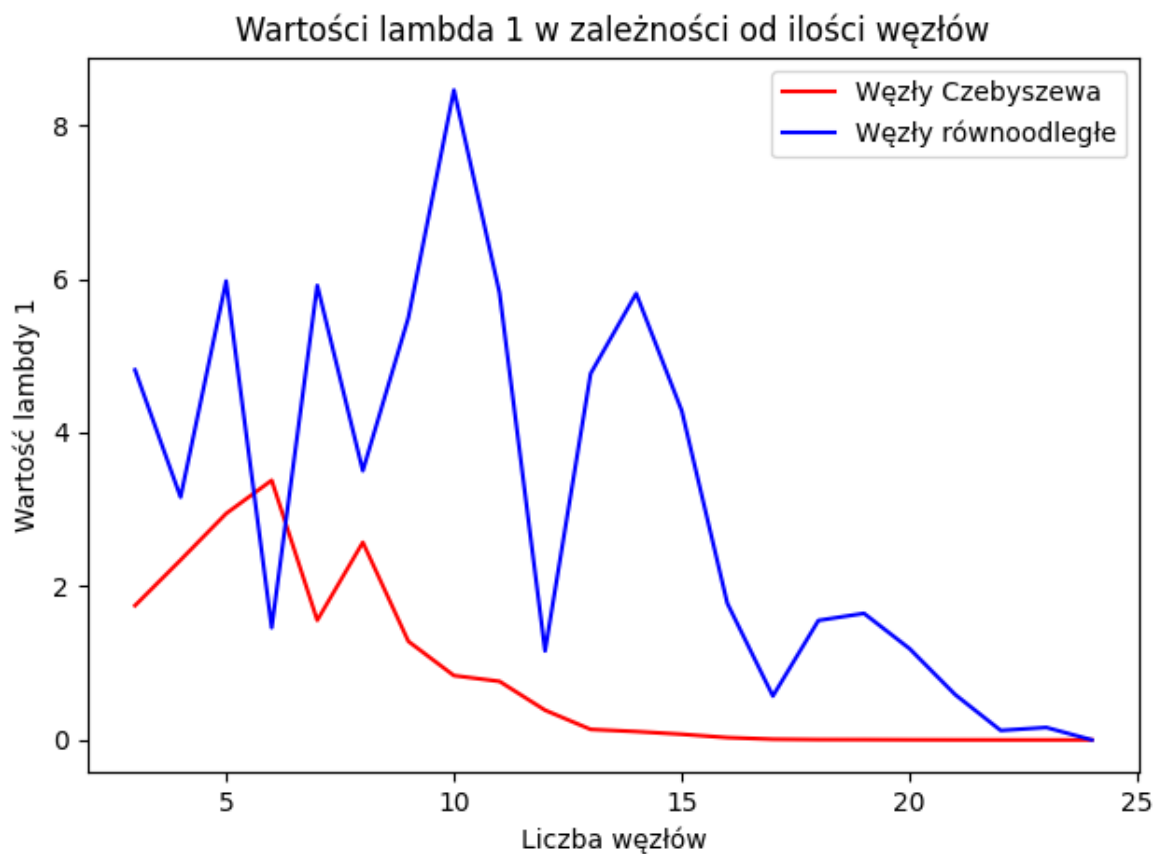
## Dokładności

Dla każdego z węzłów w przedziale  $\langle 3, 30 \rangle$  i dla różnego ich rozłożenia (równoodległe / Chebyszeva) zostały policzone wartości lambda 1 oraz lambda 2, które odpowiednio są równe:

$$\lambda_1 = \max(|f(x_i) - w(x_i)|) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

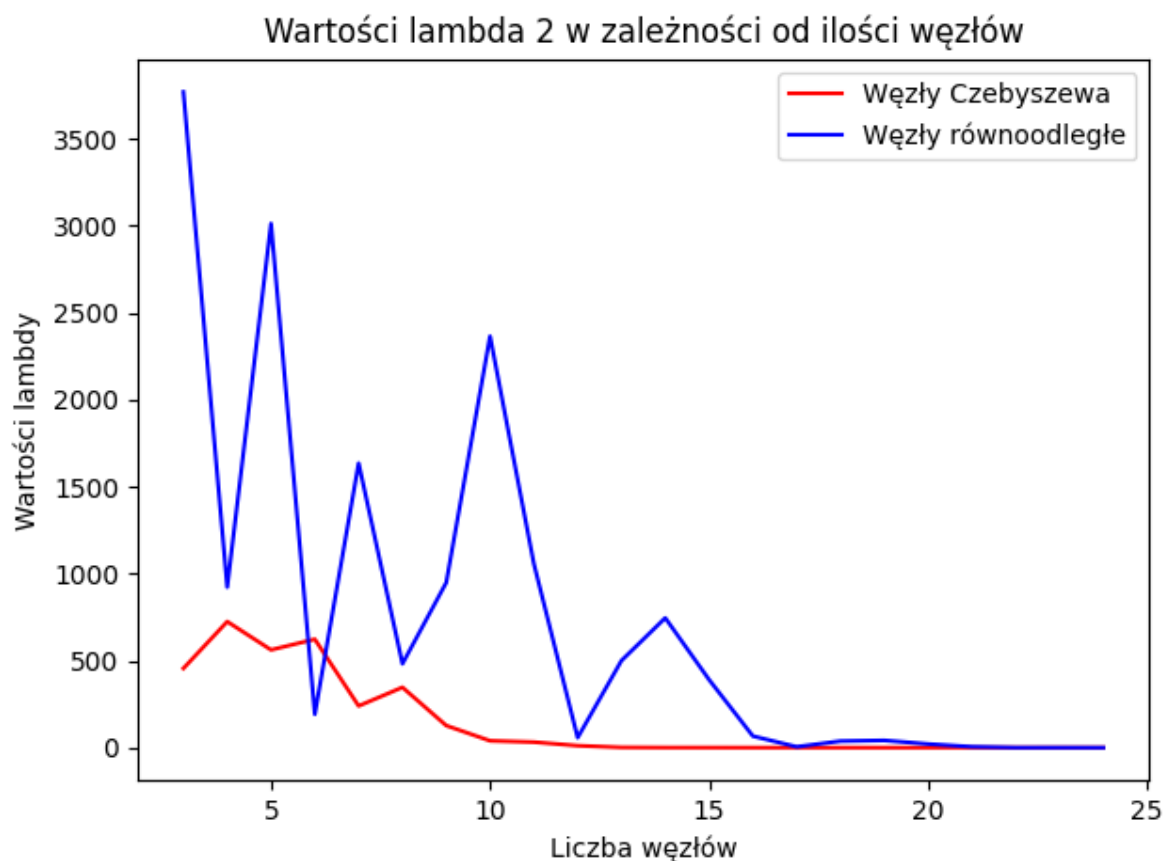
$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2$$

Dla  $N = 1000$



Wykres nr 16





Wykres nr 17

Wykresy (nr 16 i 17) pokazują, że w miarę wzrastania ilości węzłów niezależnie od ich rodzaju (jednorodne / Czebyszewa) wielomian przybliżający funkcję staje się coraz to dokładniejszy.

Podobnie jak w wielomianach Lagrange'a / Newtona, dla węzłów równoodległych, wartości lambda oscylują, natomiast ostatecznie zbiegają do 0.

Dla (\*) najdokładniejszy wielomian jest tworzony przy użyciu 24 węzłów, natomiast dla (\*\*) przy użyciu 30 węzłów.

Zależność węzłów od wartości  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dla wielomianu Hermita oraz węzłów Czebyszewa.

Liczba węzłów	$\lambda_1$	$\lambda_2$
3	1.74830	455.54212
6	3.37757	622.80123
9	1.28230	126.81830
12	0.38659	11.17514
15	0.07347	0.27607
18	0.00440	0.00073
21	0.00056	$2.61795 \cdot 10^{-5}$
24	$7.52140 \cdot 10^{-5}$	$1.82209 \cdot 10^{-7}$

Tabela nr 1

Zależność węzłów od wartości  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dla wielomianu Hermita oraz węzłów równoodległych.

Liczba węzłów	$\lambda_1$	$\lambda_2$
3	4.81390	3768.16847
6	1.46091	192.09326
9	5.49463	948.67243
12	1.15812	57.33128
15	4.28305	390.61527
18	1.55470	37.55846
21	0.59014	5.05736
24	0.16175	0.32655

Tabela nr 2

## Podsumowanie

Porównując wielomian Hermita do wielomianów Lagrange'a oraz Newtona jego dokładność / stabilność jest około dwa razy gorsza. Może to wynikać z faktu, że do wyznaczenia go potrzeba pochodnych.

Mimo gorszej stabilności, wielomian Hermita dla 30 węzłów (\*\*) uzyskuje podobną dokładność co Newtona dla 60 węzłów (\*\*).