

Metody obliczeniowe w nauce i technice - laboratorium 2 - ćwiczenie 1

Kacper Klimas

Treść zadania

Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona.

Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa* .

Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.

Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.

Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Rungego (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Zadana funkcja, wartości oraz przedział

$$f(x) = x * \sin\left(\frac{k * \pi}{x}\right)$$

$$x \in < 0.5, 4 >$$

$$k = 4$$

Legenda:

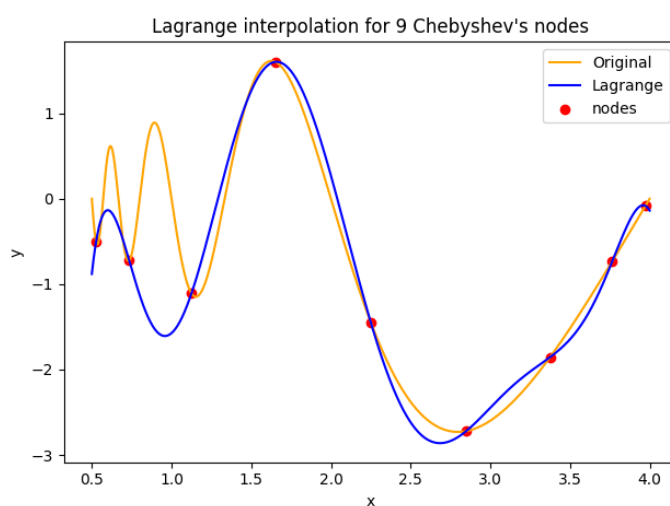
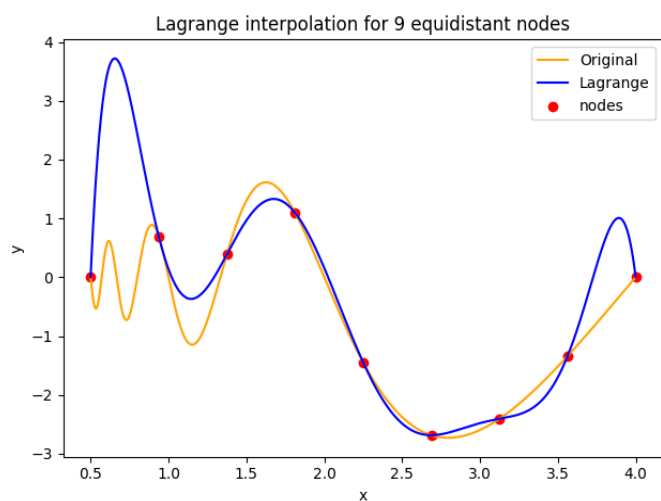
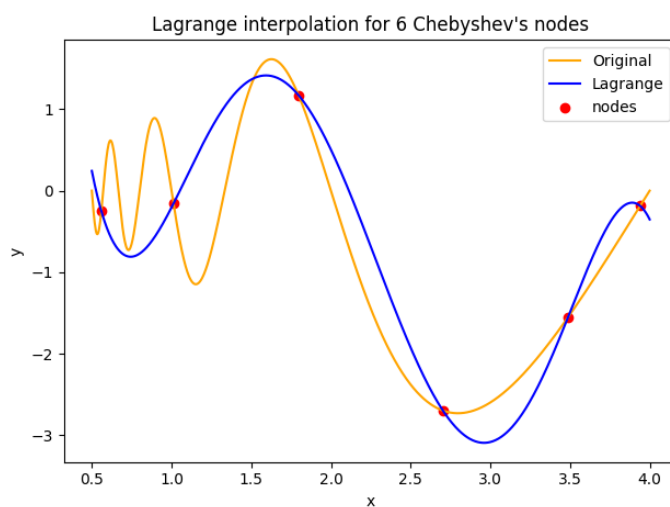
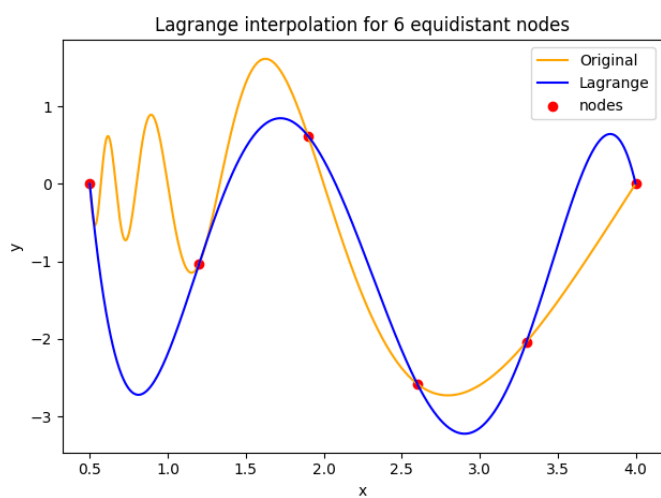
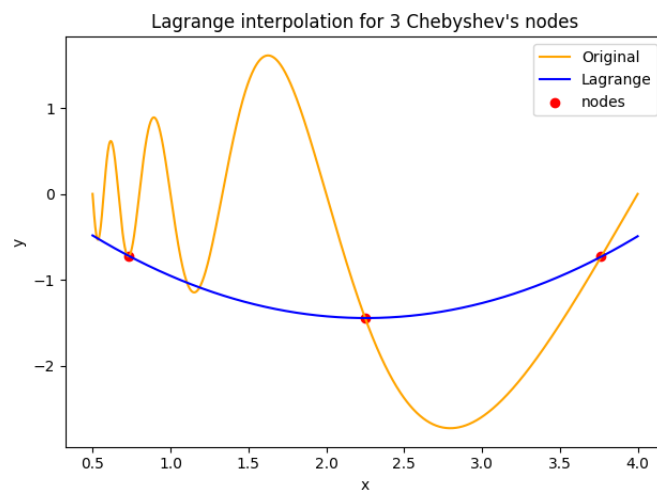
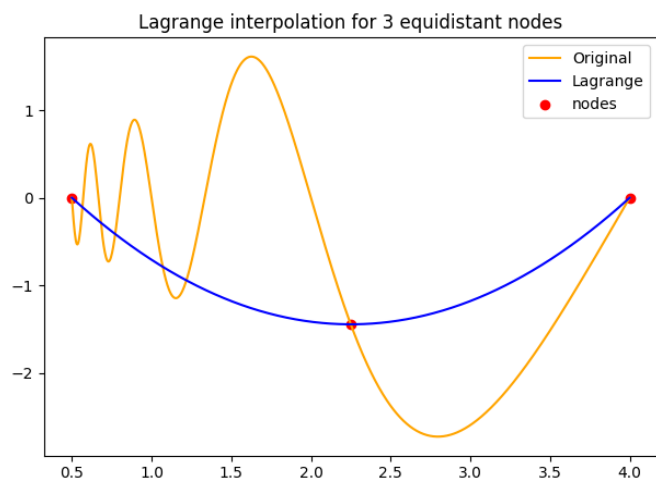
(*) - węzły równoodległe

(**) - węzły Chebysheva

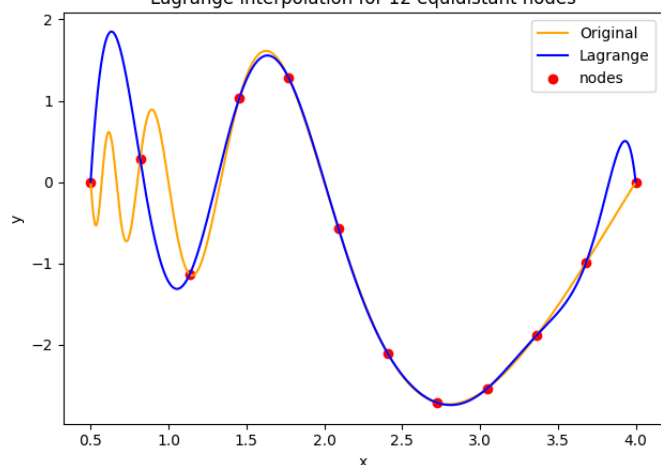
Wykresy zależności rzeczywistych wartości funkcji od przybliżonych wartościami wielomianów interpolujących zostały narysowane przy wygenerowaniu 1000 punktów.

Wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a

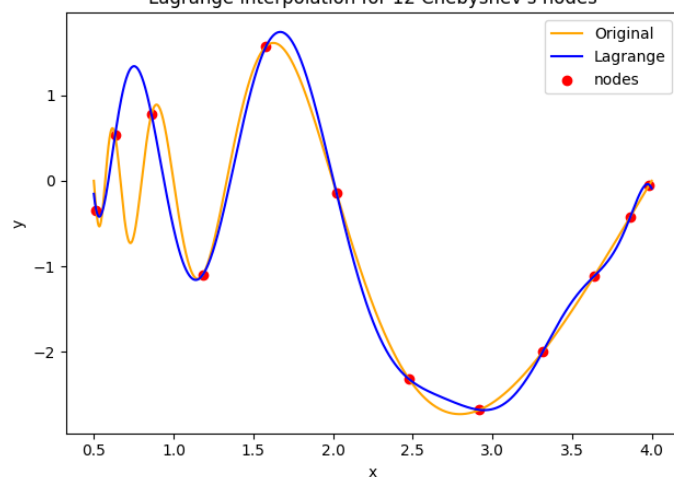
Wykresy dla różnych rodzajów i ilości węzłów



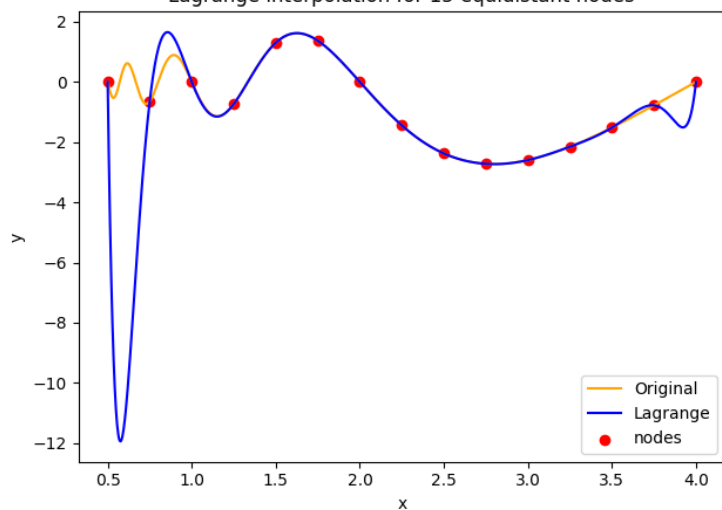
Lagrange interpolation for 12 equidistant nodes



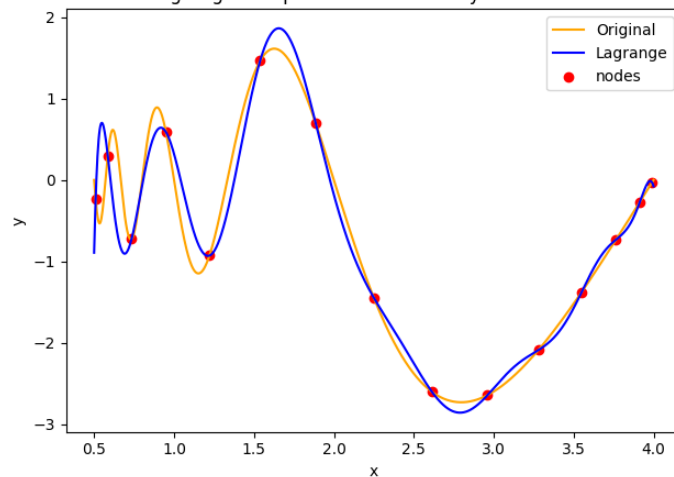
Lagrange interpolation for 12 Chebyshev's nodes



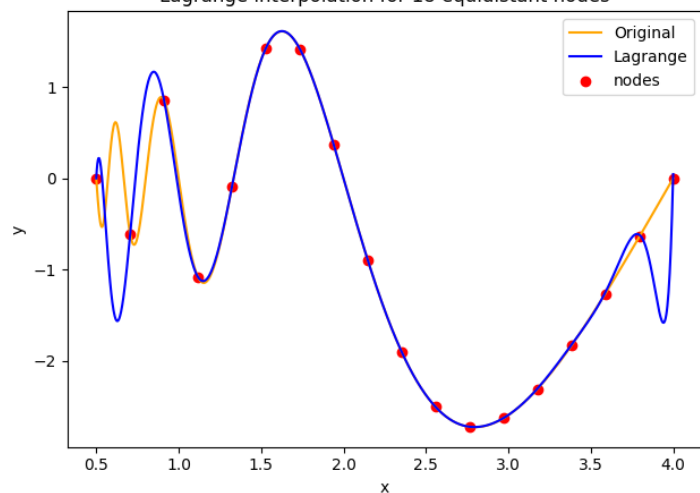
Lagrange interpolation for 15 equidistant nodes



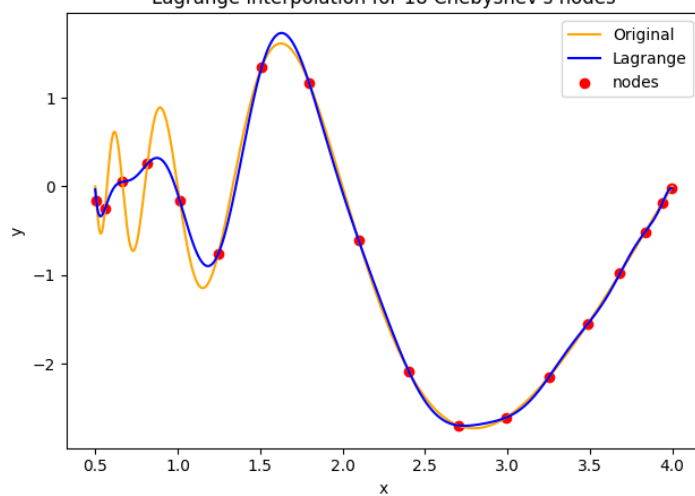
Lagrange interpolation for 15 Chebyshev's nodes



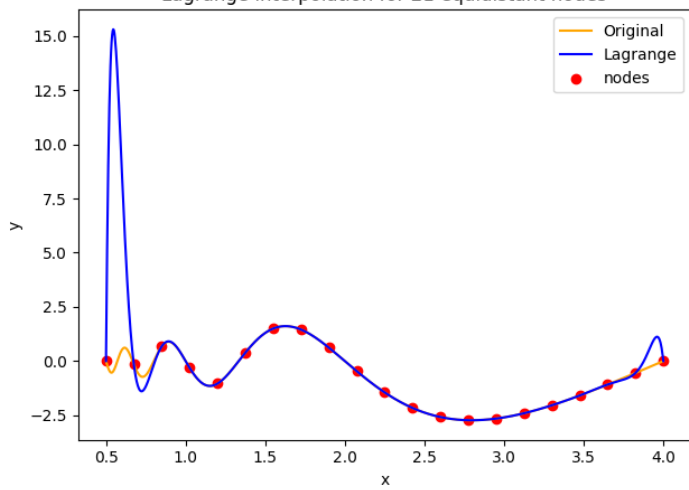
Lagrange interpolation for 18 equidistant nodes



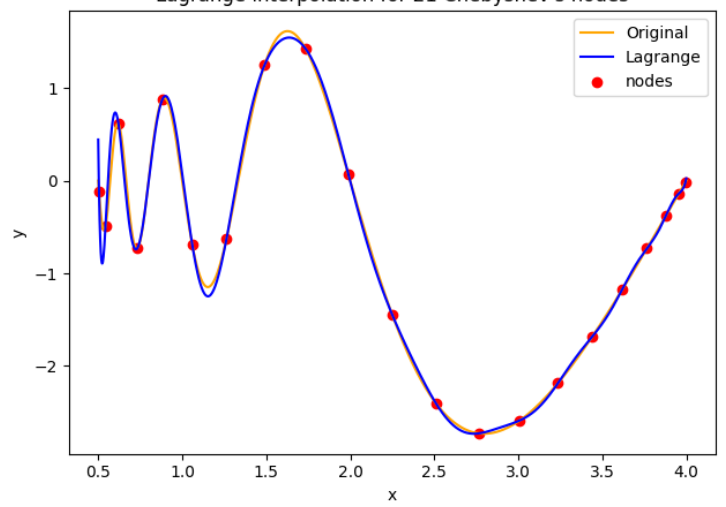
Lagrange interpolation for 18 Chebyshev's nodes



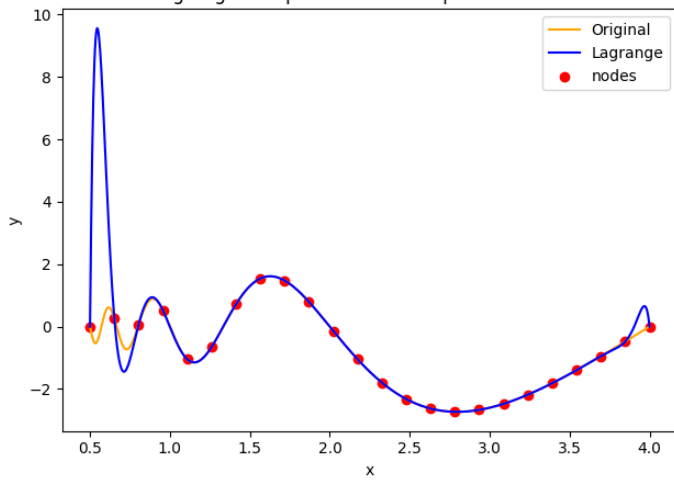
Lagrange interpolation for 21 equidistant nodes



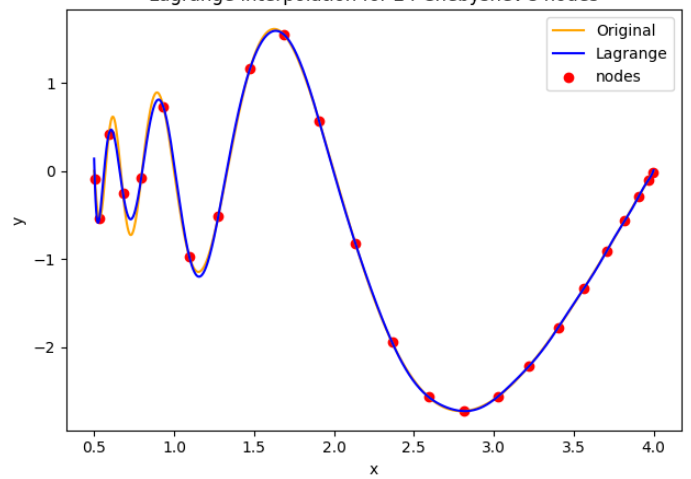
Lagrange interpolation for 21 Chebyshev's nodes



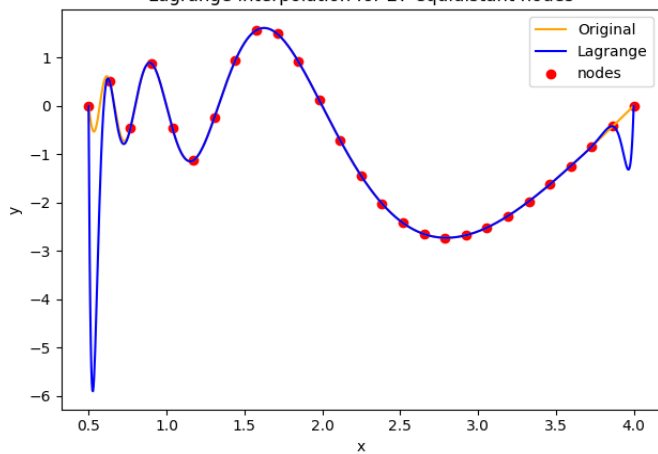
Lagrange interpolation for 24 equidistant nodes



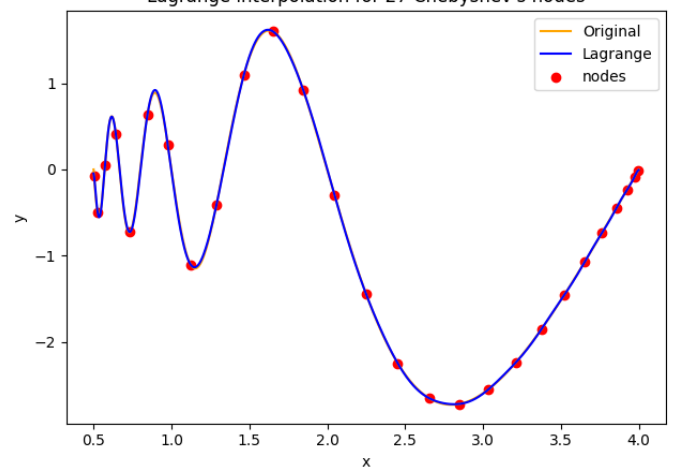
Lagrange interpolation for 24 Chebyshev's nodes

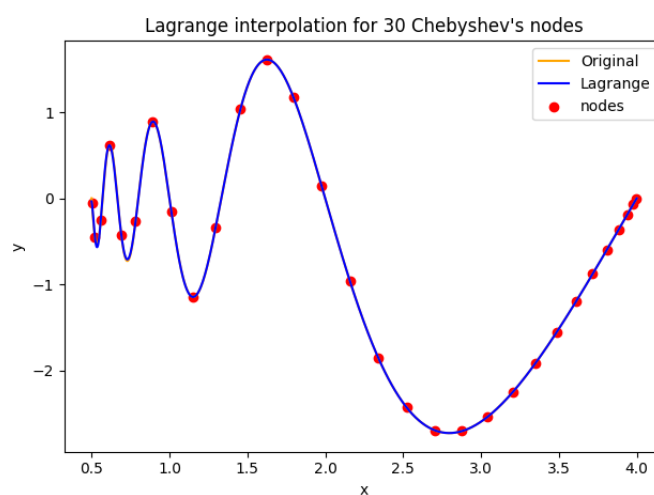
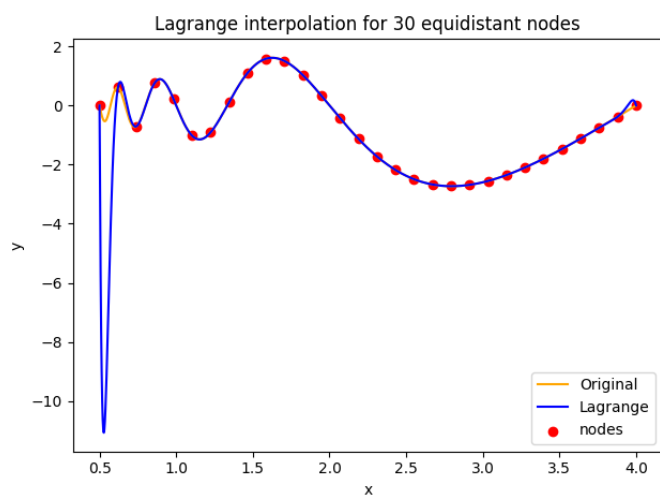


Lagrange interpolation for 27 equidistant nodes



Lagrange interpolation for 27 Chebyshev's nodes





Dokładności

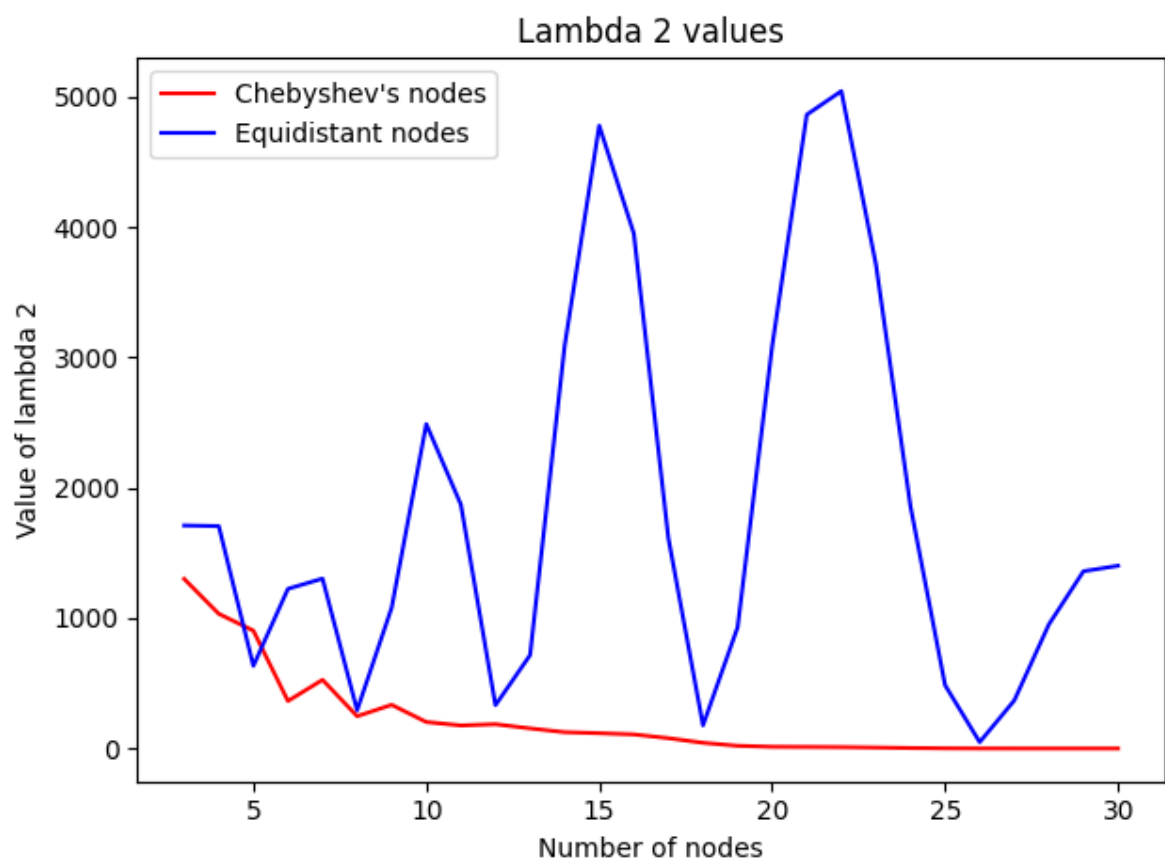
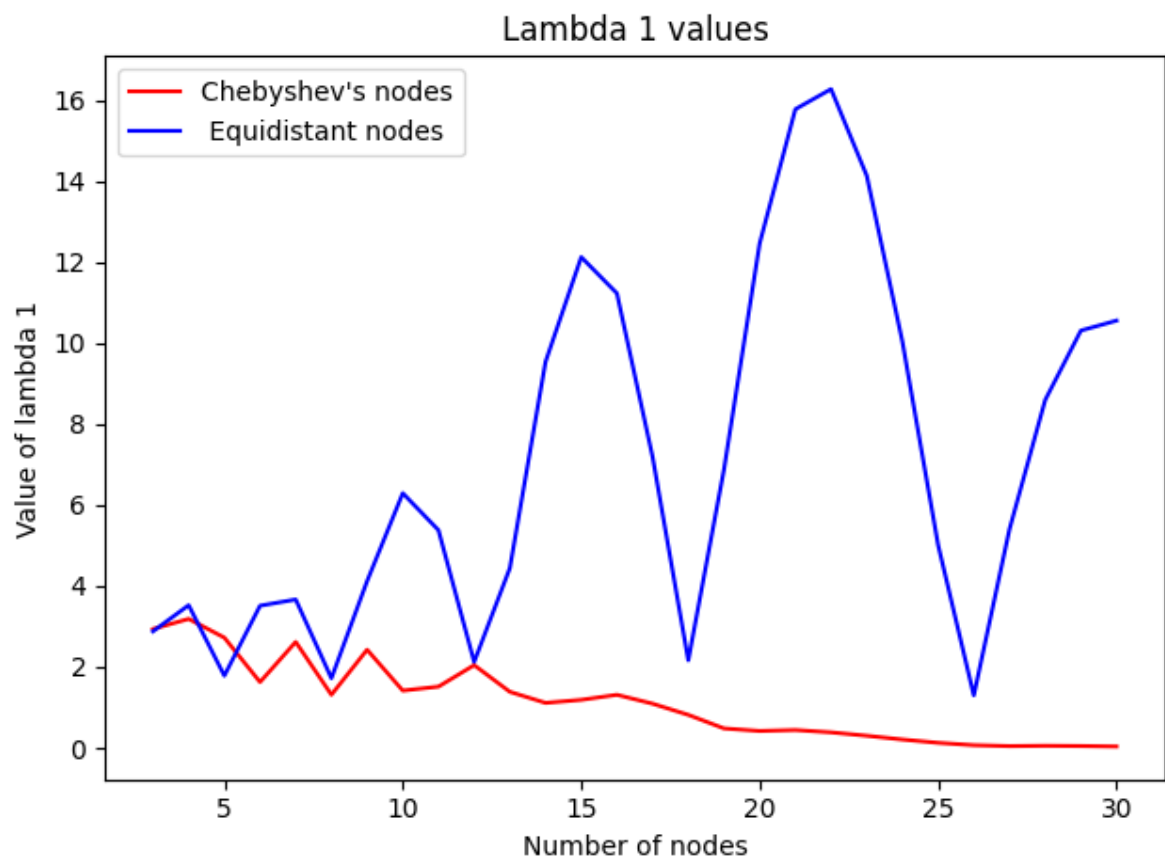
Dla każdego z węzłów w przedziale $<3, 30>$ i dla różnego ich rozłożenia (równoodległe / Chebysheva) zostały policzone wartości λ_1 oraz λ_2 , które odpowiednio są równe:

$$\lambda_1 = \max(|f(x_i) - w(x_i)|) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2$$

Gdzie $N = 1000$

Im mniejsza wartość danego λ , tym dokładność przybliżającego funkcję wielomianu większa.



Zależność węzłów od wartości λ_1 i λ_2 dla wielomianu Lagrange'a oraz węzłów Czebyszewa.

Liczba węzłów	λ_1	λ_2
3	2.938	1300.890
6	1.628	364.419
9	2.427	334.865
12	2.046	186.272
15	1.189	117.390
18	0.818	43.707
21	0.443	12.115
24	0.443	3.730
27	0.046	0.176
30	0.037	0.092

Tabela nr 1

W przypadku wykorzystania (**) wyraźnie widać, że dokładność wielomianu rośnie wraz ilością węzłów (wartości lambda maleją). W przypadku (*) nie można stwierdzić podobnie. Wartości lambda 1 oraz lambda 2 wahają się.

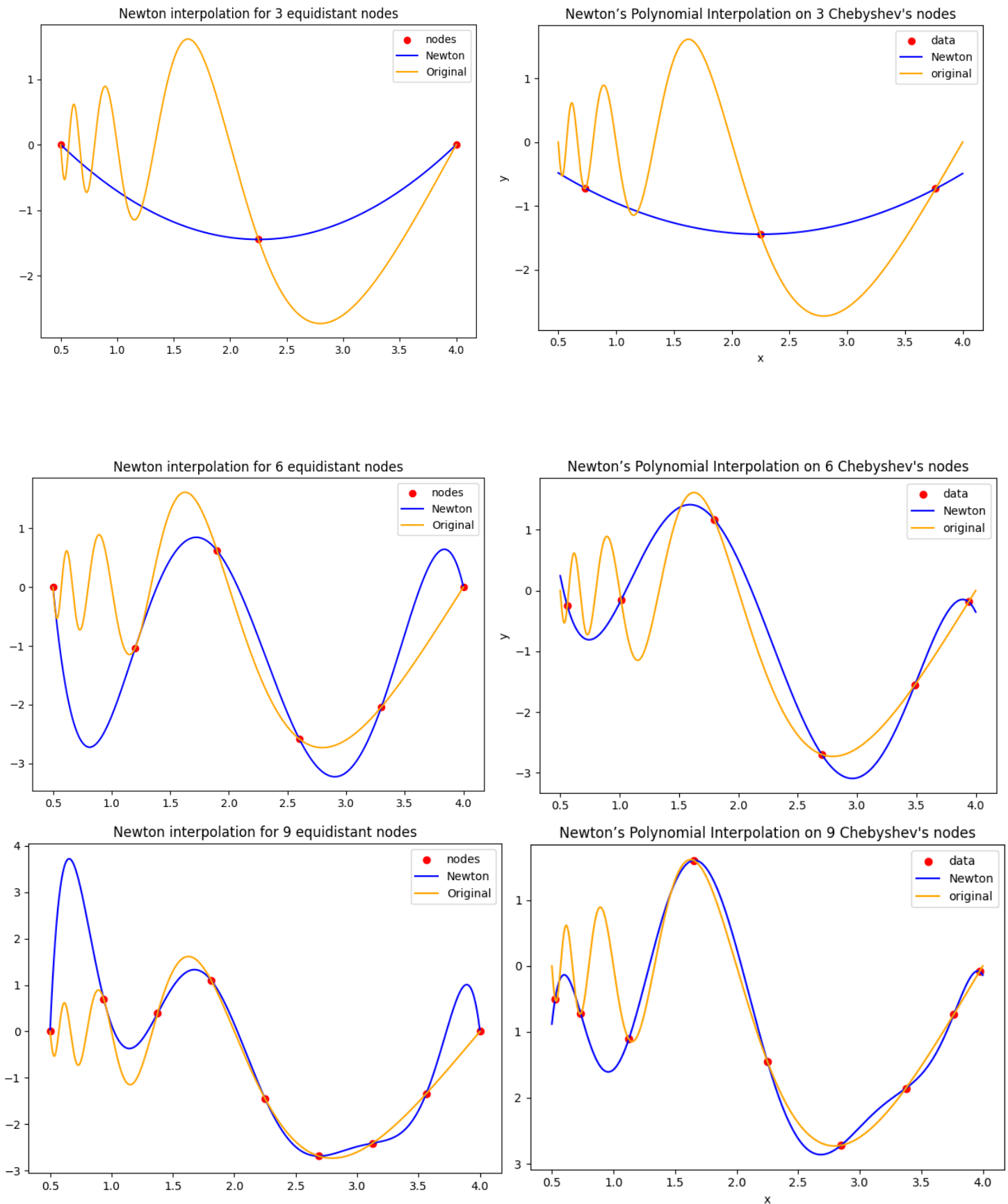
Dla węzłów Chebysheva wielomian przyjmuje najdokładniejsze wartości dla 30 węzłów. W przypadku węzłów równo oddalonych jest to 18.

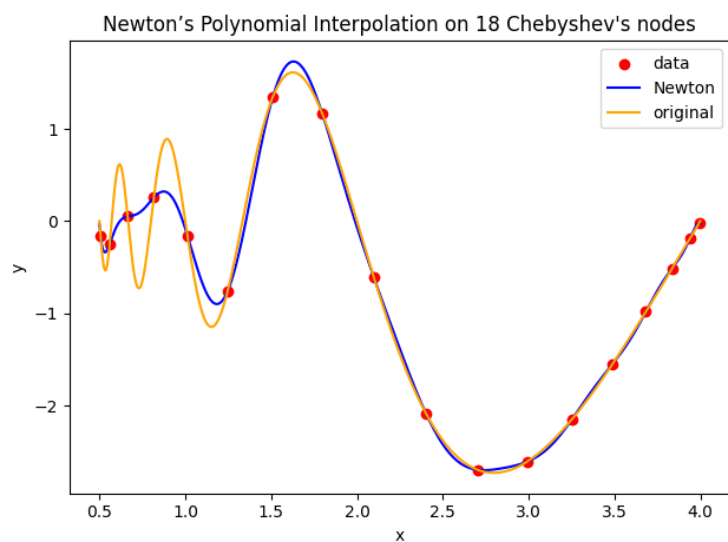
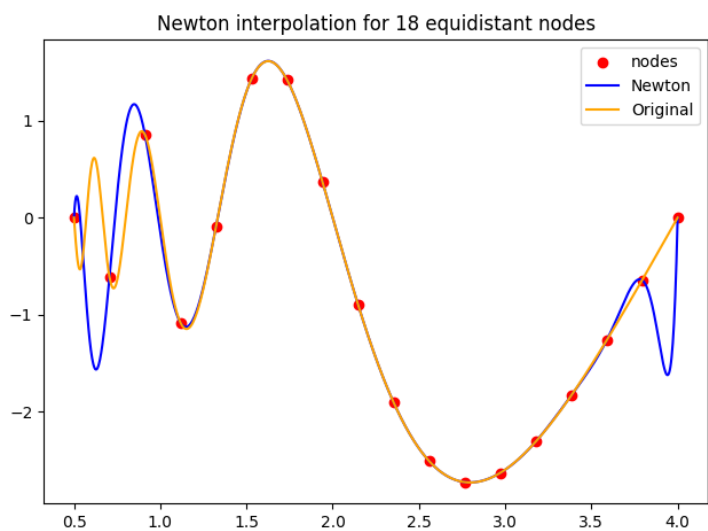
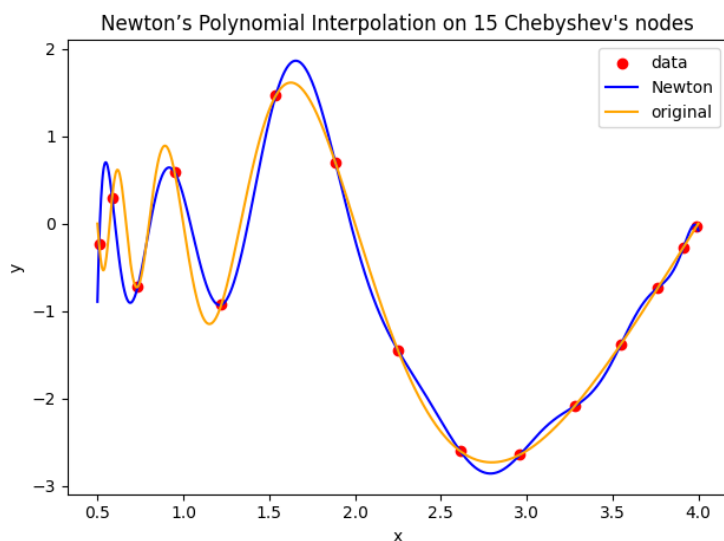
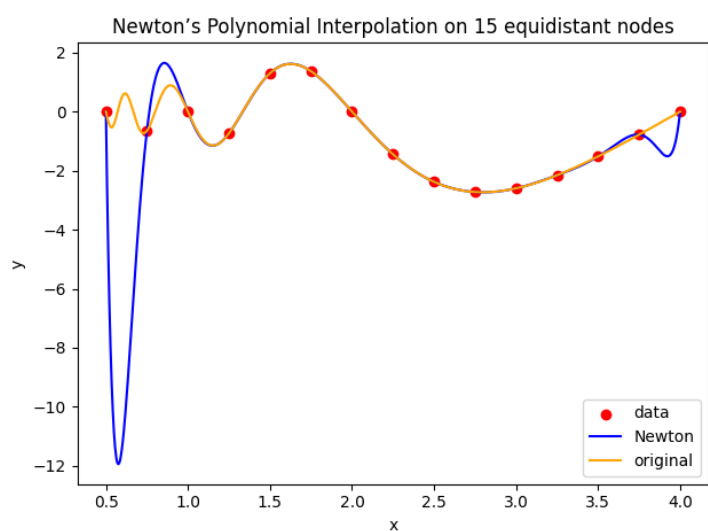
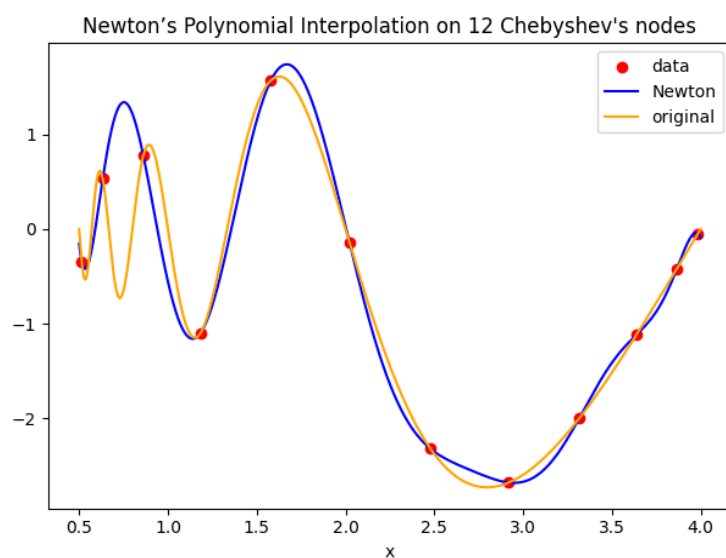
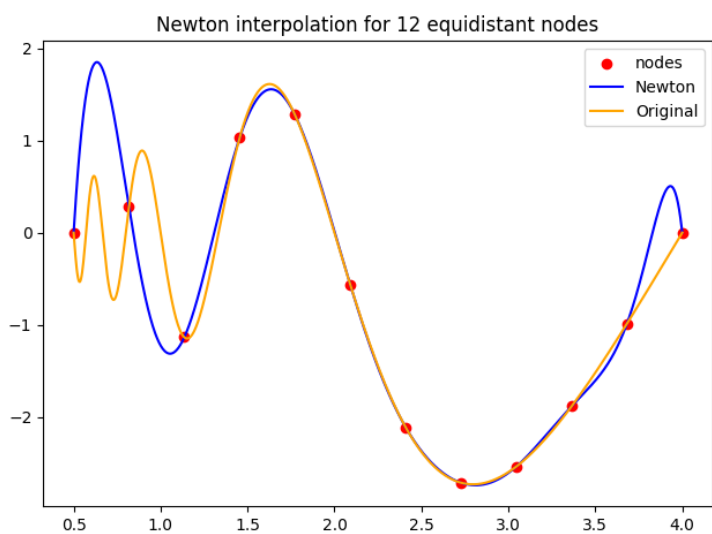
Efekt Rungego

Jest on szczególnie widoczny w przypadku (*). Do 20 węzłów występuje on przy ilościach nieparzystych (9, 15). Po przekroczeniu 20 występuje on w każdym wypadku (21, 24, 27, 30). W przypadku (**), które są specyficznym rozmieszczone praktycznie jest on niezauważalny.

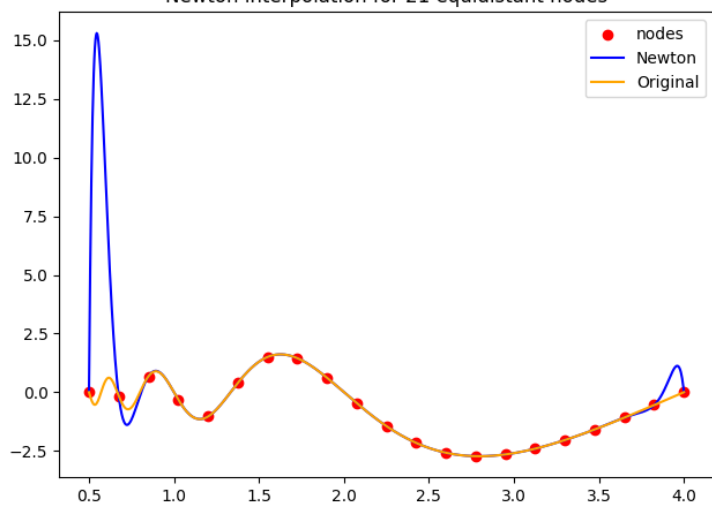
Wielomian interpolujący w postaci Newtona

Wykresy dla różnych rodzajów i ilości węzłów

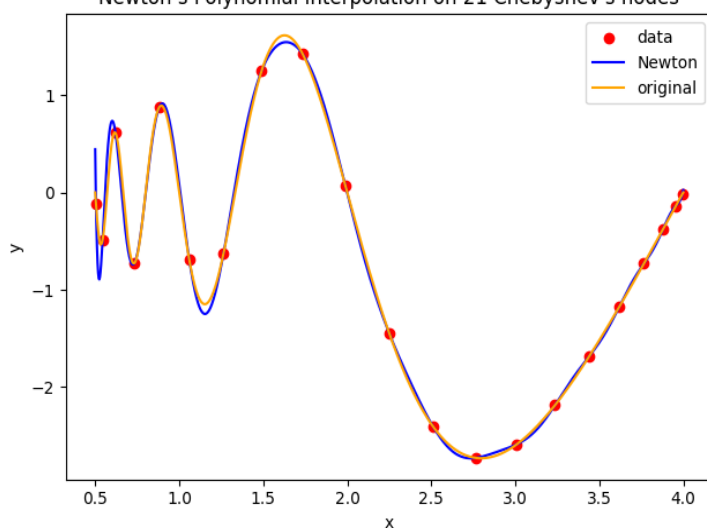




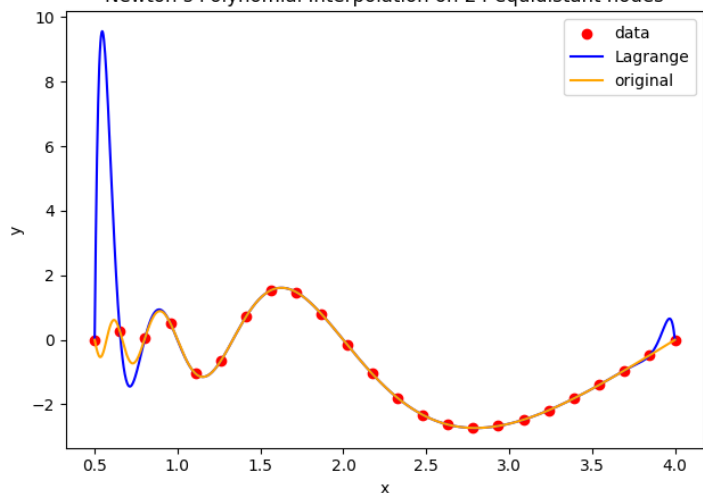
Newton interpolation for 21 equidistant nodes



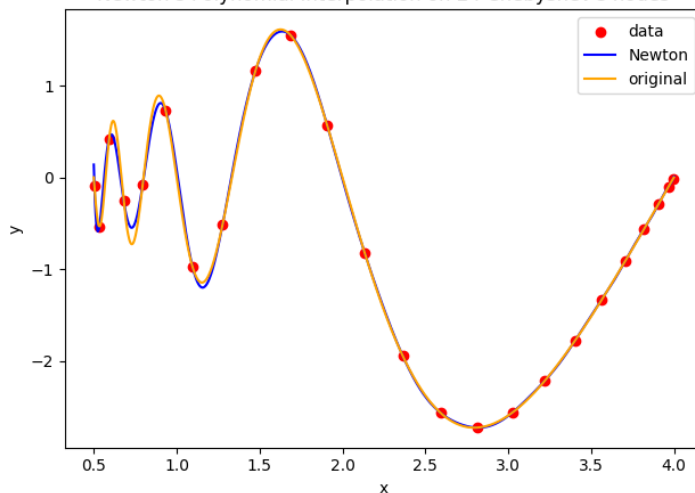
Newton's Polynomial Interpolation on 21 Chebyshev's nodes



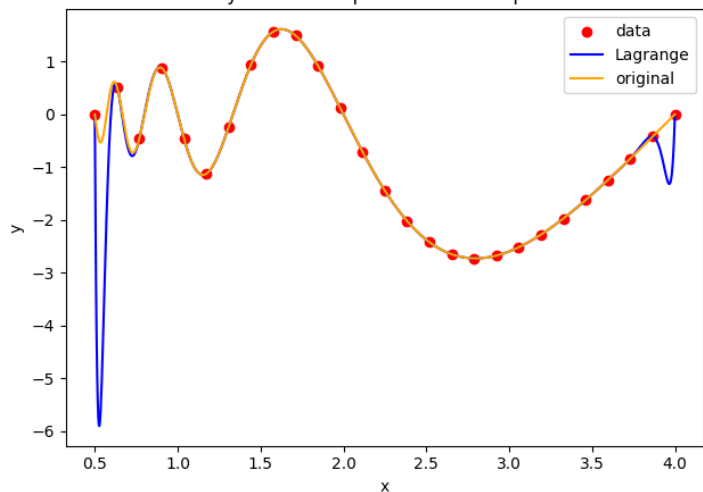
Newton's Polynomial Interpolation on 24 equidistant nodes



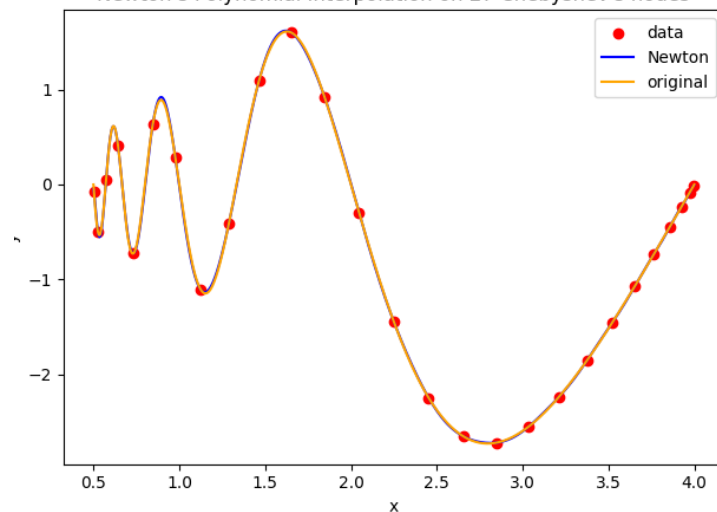
Newton's Polynomial Interpolation on 24 Chebyshev's nodes

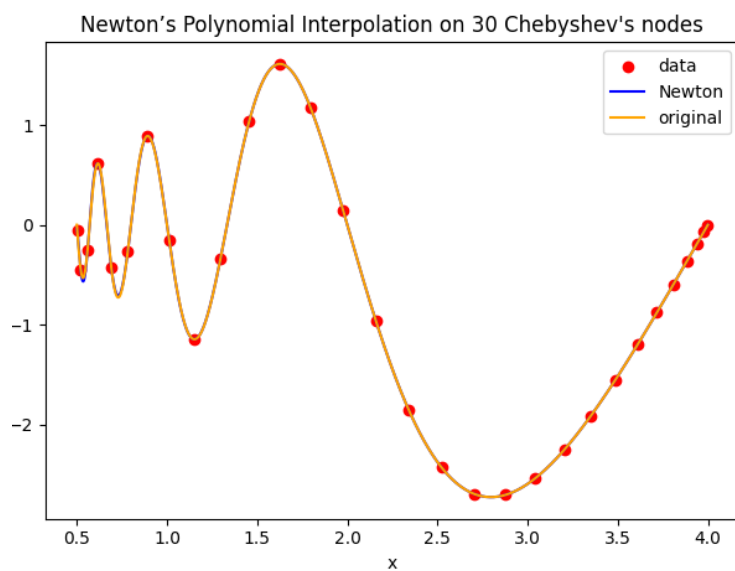
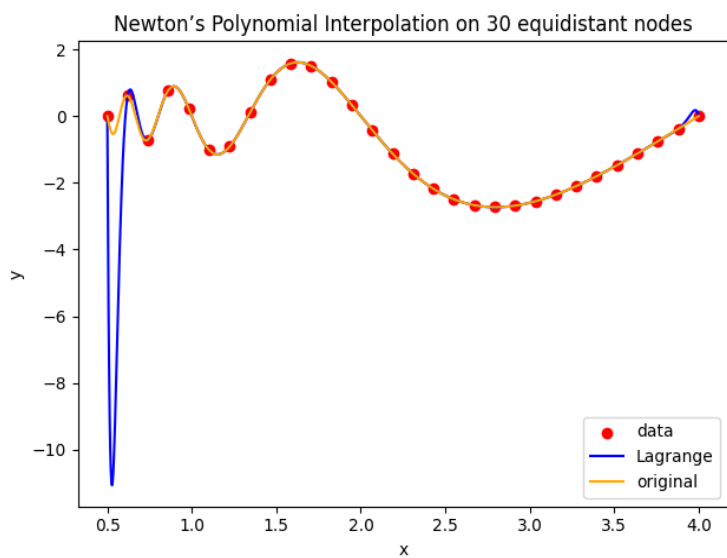


Newton's Polynomial Interpolation on 27 equidistant nodes



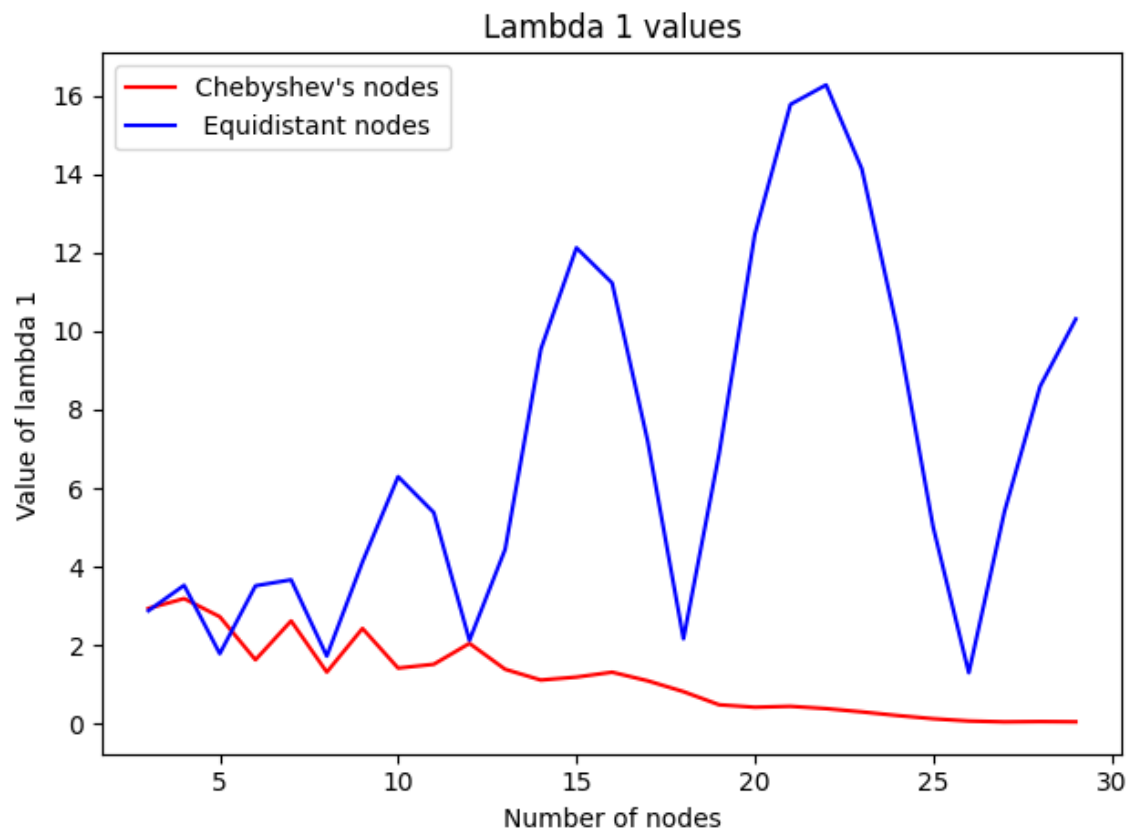
Newton's Polynomial Interpolation on 27 Chebyshev's nodes

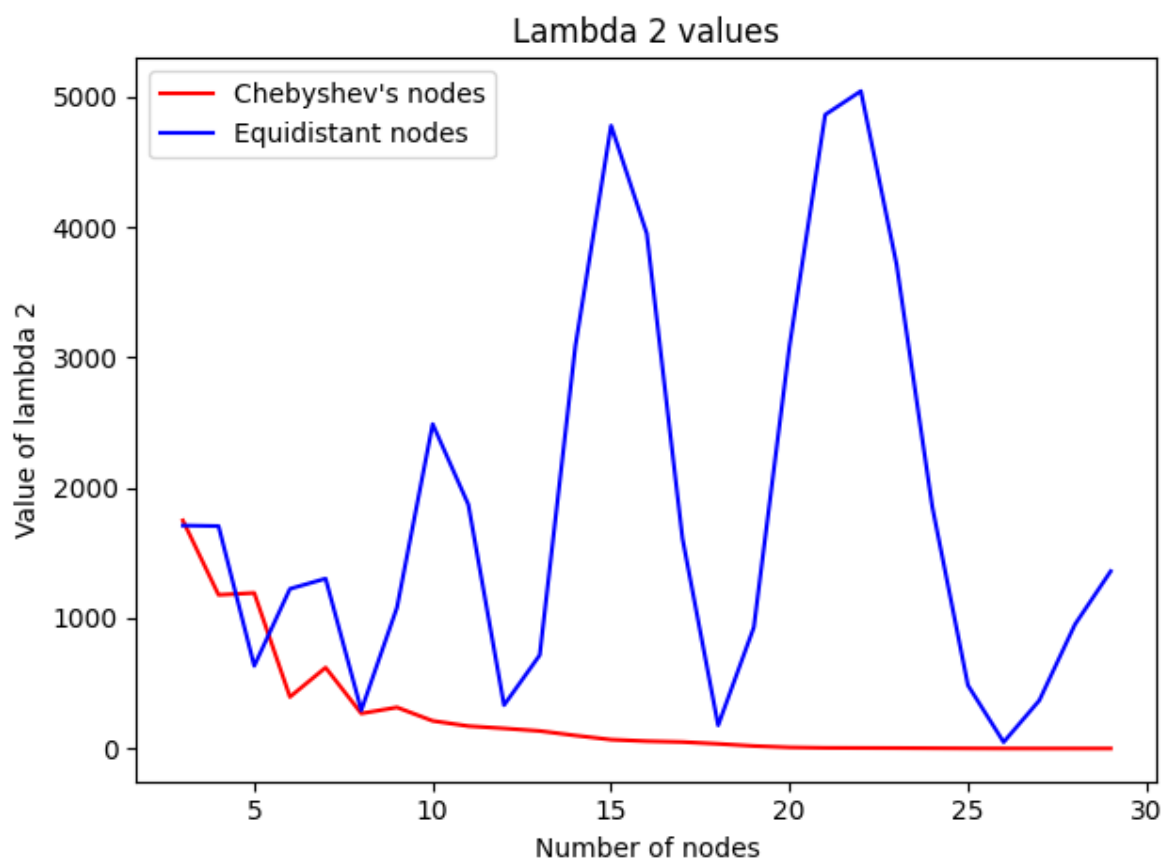




Dokładności

Podobnie jak w poprzednim przypadku zostały policzone wartości λ_1 oraz λ_2 . Oto wyniki:





Zależność węzłów od wartości λ_1 i λ_2 dla wielomianu Lagrange'a oraz węzłów Czebyszewa.

Liczba węzłów	λ_1	λ_1
3	2.938	1748.732
6	2.938	395.649
9	1.514	315.356
12	1.188	154.129
15	0.482	67.796
18	0.301	35.692
21	0.126	4.736
24	0.054	2.238
27	0.048	0.139
30	0.036	0.035

Tabela nr 2

W przypadku wielomianu interpolującego w postaci Newtona dokładność wielomianu interpolującego dla (**) rośnie wraz ze wzrostem ilości węzłów natomiast dla (*) bardzo się waha (w porównaniu dla postaci Lagrange'a -> z większą częstotliwością).

Najdokładniejszym wielomianem dla (*) jest wielomian przy 26 węzłów.

Najdokładniejszym wielomianem dla (**) jest wielomian przy 30 węzłów.

Efekt Rungego

Dla (*) i małych ilościach węzłów jest on szczególnie widoczny przy nieparzystych ilościach węzłów poczynając od 9 węzłów a kończąc na 21(9, 15, 21). Potem jest on widoczny przy każdej liczbie węzłów. Dla (**) natomiast efekt Rungego jest niezauważalny. Im większa ilość węzłów tym odchylenia od oryginalnego wykresu funkcji coraz mniejsze.

Podsumowanie

Wielomiany interpolujące dla zagadnienia Lagrange'a i Newtona są do siebie bardzo podobne co pokazują wykresy.

Dla węzłów równo oddalonych w obu przypadkach jest zauważalny efekt Rungego. Występuje on wcześniej (mniejsza ilość) dla nieparzystych węzłów.

Dla węzłów Chebysheva efekt Rungego jest niwelowany.

Wielomiany interpolujące różnią się stabilnością. Wzór Lagrange'a daje wyniki dla maksymalnie 100 węzłów. Wzór Newtona natomiast 'psuje się' już w okolicach 70 węzłów.