



TAREA 1: CONVEX HULL

INF-221 Algoritmos y Complejidad

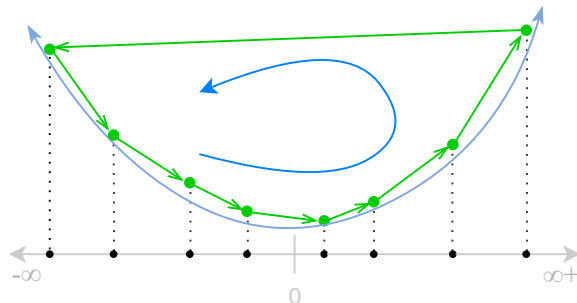
Profesor Diego Arroyuelo

Integrantes Joaquín Castillo, María Paz Morales, Axel Reyes

24 de octubre de 2019

Una técnica común para estudiar la cota inferior de un problema es la reducción de un problema con cota conocida a ese problema con cota desconocida. Al demostrar que un problema P se reduce a otro problema Q , entonces la cota inferior de P también aplica para el problema Q . Utilizando esta técnica, se pretende demostrar que la cota inferior del problema Convex Hull de n puntos en el plano es $\Omega(n \log(n))$ reduciendo el problema de ordenamiento a Convex Hull.

Para ordenar una lista de n números $\{a, b, c, d, \dots\}$ utilizando Convex Hull, primero se deben transformar en una serie de puntos. Para esto, es necesario transformar los números de tal forma de que todas las coordenadas estén en el Convex Hull, y que además estén ordenadas de igual forma que los números (tomando en cuenta tanto los números negativos como positivos). Una forma es transformar los números en puntos de una parábola, de forma que todos formen parte de la figura convexa, y que además queden ordenados de izquierda a derecha por su componente x (ver figura referencial de abajo). Entonces, la lista de puntos quedaría $\{(a, a^2), (b, b^2), (c, c^2), (d, d^2), \dots\}$.



Luego de tener los n puntos, se aplica Convex Hull a ese conjunto de puntos. Finalmente, para obtener la lista ordenada de números se saca como *output* la primera coordenada de cada vértice convexo, comenzando desde el vértice más a la izquierda y yendo en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Al analizar los tiempos, se tiene que transformar los números en puntos toma tiempo $O(n)$. Ya que el *output* del Convex Hull es una lista circular (el último nodo apunta al primero) doblemente enlazada, leer la lista ordenada de números también toma tiempo $O(n)$. Esto quiere decir que si se tiene un algoritmo de Convex Hull que funciona como caja negra, se pueden ordenar un conjunto de n números utilizando ese algoritmo agregando un tiempo extra lineal. En este caso, se dice que hay una reducción en tiempo lineal desde el ordenamiento al Convex Hull.

La reducción da la siguiente desigualdad que relaciona las complejidades de los dos problemas:

$$T_{\text{ordenamiento}}(n) \leq T_{\text{ConvexHull}}(n) + O(n)$$

Al invertir la desigualdad anterior, se puede obtener una cota inferior para el algoritmo de Convex Hull:

$$T_{\text{ConvexHull}}(n) \geq T_{\text{ordenamiento}}(n) - O(n)$$

Ya que se conoce que la cota inferior del problema de ordenamiento para n números en el modelo computacional basado en comparaciones es de $\Omega(n \log(n))$, entonces de la desigualdad anterior se puede obtener que la cota inferior para el problema de Convex Hull de n puntos en el mismo modelo computacional es de $\Omega(n \log(n))$.