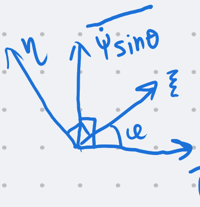
Кинематич. углы Эйлера



$$\bar\omega = \dot{\bar\psi} + \dot{\bar\theta} + \dot{\bar\varphi}$$

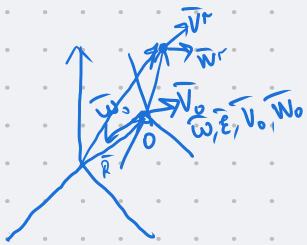
$$\bar\omega_\xi = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot\psi = \dfrac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \dot\theta = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\ \dot\varphi = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\theta \end{cases}}$$

– кинематич. ур-ия Эйлера

Сложное движение точки.



$$\bar r = \bar R + \bar\rho$$

$$\dot{\bar r} = \bar V = \dot{\bar R} + \dot{\bar\rho}$$

$$\dot{\bar R} = \bar V_0$$

$$\dot{\bar\rho} = \underbrace{\frac{d'\bar\rho}{dt}}_{\bar V^r} + \bar\omega \times \bar\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar V = \underbrace{\bar V_0 + \bar\omega \times \bar\rho}_{\bar V^e} + \bar V^r}$$

$$\dot{\bar V}^r = \underbrace{\frac{d'\bar V^r}{dt}}_{\bar W^r} + \bar\omega \times \bar V^r$$

$$\bar W = \underbrace{\dot{\bar V}_0}_{\bar W_0} + \bar\varepsilon \times \bar\rho + \bar\omega \times \underbrace{\dot{\bar\rho}}_{= \bar V^r + \bar\omega \times \bar\rho} + \dot{\bar V}^r$$

$\bar W^e$ – пер. уск.

$\bar W^c$ – уск. Кориолиса

$$\boxed{\bar W = \underbrace{\bar W_0 + \bar\varepsilon \times \bar\rho + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar\rho)}_{\bar W^e} + \underbrace{2\bar\omega \times \bar V^r}_{\bar W^c} + \bar W^r}$$

– ф-ла Кориолиса

Кватернионы и их использование в кинематике твердого тела

Алгебра кватернионов H:

$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ – четырехмерный вектор

Умножение:

$i_0 \circ i_k = i_k \circ i_0 = i_k,\ k = \overline{0,3}$

$i_1 \circ i_2 = i_3,\ i_2 \circ i_3 = i_1,\ i_3 \circ i_1 = i_2$

$i_2 \circ i_1 = -i_3,\ i_3 \circ i_2 = -i_1,\ i_1 \circ i_3 = -i_2$

$i_k \circ i_k = -i_0$

$\mathbb{C}:\ z = x i_0 + y i_1,\ i_0 = 1,\ i_1 = i,\ i^2 = -1$

$$i_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ i_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Геометро-числовая интерпретация:

$\Lambda = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3}_{\text{вект. часть кватерниона}}$

$\{\bar{i}_k\}$ – ОНБ в R_3

$i_k \circ i_m = \bar{i}_k \times \bar{i}_m - \bar{i}_k \cdot \bar{i}_m$

Таким образом: $\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$, $\lambda_0 = \text{scal}\,\Lambda$; $\bar{\lambda} = \text{vect}\,\Lambda$

$$\boxed{\Lambda \circ M = \lambda_0 m_0 - \bar{\lambda} \cdot \bar{m} + \lambda_0 \bar{m} + m_0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times \bar{m}} \quad (1)$$ – произвед. кватернионов

$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$ – сопр. кват-н

$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

$|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$ – модуль кватерниона

Св-ва умножения в $\mathbb{H}$:

1. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

2. $\widetilde{\Lambda \circ M} = \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda}$ – пр. по ф-ле 1

3. $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$

4.
$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$
$M = \mu_0 + \bar{\mu}$ $\qquad N = \Lambda \circ M = \nu_0 + \bar{\nu}$
$\Lambda' = \lambda_0 + A\bar{\lambda}$ $\qquad N' = \Lambda' \circ M' = \nu_0 + A\bar{\nu}$
$M' = \mu_0 + A\bar{M}$

5. $\forall \Lambda \neq 0 \ \exists \Lambda^{-1} = \dfrac{\tilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|} : \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1$

Использование кват. в кинематике тв. тела

$\Lambda : \|\Lambda\| = 1$ – нормированный кватернион

$\bar{R}' = \Lambda \circ \bar{R} \circ \tilde{\Lambda} = Ad\, R$

$\Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ (r_0 + \bar{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$

$\widetilde{\Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}} = \Lambda \circ \tilde{\bar{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$ $\Rightarrow$ в $\Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$ отсутствует скалярная часть

$\Rightarrow \bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$ – преобр. $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \|\bar{r}'\| = \underbrace{\|\Lambda\|}_{1} \|\bar{r}\| \underbrace{\|\tilde{\Lambda}\|}_{1} = \|\bar{r}\| \\ \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda} \text{ – лин. преобр.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists A \in O(3) : \bar{r}' = A\bar{r}$$

Если $\|\Lambda\| = 1$, то всегда $\exists$ представление: $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar{e}\sin\frac{\varphi}{2}$, $|\bar{e}| = 1$

Теорема. Кватернион $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar{e}\sin\frac{\varphi}{2}$ задаёт при отобр. $\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$ поворот вокруг $\bar{e}$ на угол φ.

$\square$ $\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu} + \lambda_0 \bar{\mu} + \mu_0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times \bar{\mu}$

$\Lambda \circ M - M \circ \Lambda = 2\bar{\lambda} \times \bar{\mu}$

$$\Lambda\circ\bar r-\bar r\circ\Lambda=2\bar\lambda\times\bar r \Rightarrow \Lambda\circ\bar r=\bar r\circ\Lambda+2\bar\lambda\times\bar r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda\circ\bar r\circ\tilde\Lambda=\bar r+2(\bar\lambda\times\bar r)\circ\tilde\Lambda$$

$$\Rightarrow \bar r'=\bar r+2\lambda_0\bar\lambda\times\bar r-2(\bar\lambda\times\bar r)\times\bar\lambda=\bar r+2\lambda_0\bar\lambda\times\bar r+2\bar\lambda\times(\bar\lambda\times\bar r)=$$

$$=\bar r+2\lambda_0\bar\lambda\times\bar r+2(\bar\lambda(\bar\lambda\cdot\bar r)-\lambda^2\bar r)=\bar r\underbrace{(1-2\lambda^2)}_{1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}^{\cos\varphi}+\underbrace{2\lambda_0\bar\lambda\times\bar r}_{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\bar e\times\bar r}^{\sin\varphi}+\overbrace{2\bar\lambda(\bar\lambda\cdot\bar r)}^{1-\cos\varphi}_{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\bar e\bar e^T\bar r}-(1)$$

$$\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\bar e\times=\hat e$$

$$\Rightarrow \bar r'=\underbrace{\left(E\cos\varphi+\hat e\sin\varphi+(1-\cos\varphi)\bar e\bar e^T\right)}_{\text{выражение } A\in SO(3) \text{ через пар. Эйл. поворота}}\bar r$$

∎

Из ф-лы (1):

$$\bar r'=\bar r(1-2\lambda^2)+2\lambda_0\bar\lambda\bar r+2\bar\lambda\bar\lambda^T\bar r$$

$$\lambda_0^2+\lambda^2=1$$

$$\bar r'=\left[(2\lambda_0^2-1)E+2\lambda_0\hat\lambda+2\bar\lambda\bar\lambda^T\right]\bar r$$

$$\boxed{A=2\lambda_0^2-1)E+2\lambda_0\hat\lambda+2\bar\lambda\bar\lambda^T}$$

Замеч. $\Lambda\in H: \|\Lambda\|=1$ не нах. в биекции с полож. тв. тела;

$\bar r'=\Lambda\circ\bar r\circ\tilde\Lambda$, кв-нем Λ и $(-\Lambda)$ соотв. одно и то же преобр.

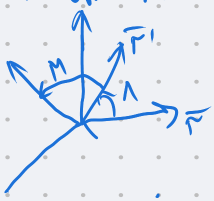
$$\Lambda\in H: \|\Lambda\|=1$$

$$\Lambda=\cos\frac{\varphi}{2}+\bar e\sin\frac{\varphi}{2};\ \bar e=\begin{bmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\\ \varkappa_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_0=\cos\frac{\varphi}{2};\\ \lambda_k=\varkappa_k\sin\frac{\varphi}{2} & \text{— параметры Родрига-Гамильтона}\\ k=\overline{1,3}\end{cases}$$

Сложение поворотов:

1. Акт. точка зр.



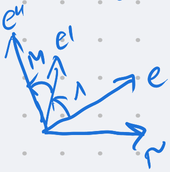
$$\bar r' = \Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda$$

$$\bar r'' = M \circ \bar r' \circ \tilde M = M \circ \Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda \circ \tilde M = M \circ \Lambda \circ \bar r \circ \widetilde{M \circ \Lambda}$$

$$\Rightarrow N = M \circ \Lambda$$

По индукции: $N = \Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \ldots \circ \Lambda_1$.

2. Пасс. т. зр.



$$\bar e_k' = \Lambda \circ \tilde e_k \circ \tilde\Lambda$$

Λ имеет те же коорд. в базисах $\bar e$ и $\bar e'$

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar\varepsilon \sin\frac{\varphi}{2}$$

$\bar\varepsilon$ – ед. вектор, φ – скаляр

$$\bar r' = \tilde\Lambda \circ \bar r \circ \Lambda$$

$$\bar r'' = \tilde M \circ \bar r' \circ M = \tilde M \circ \tilde\Lambda \circ \bar r \circ \Lambda \circ M = \widetilde{\Lambda \circ M} \circ \bar r \circ \Lambda \circ M$$

$\Rightarrow N = \Lambda \circ M$, в случае n поворотов

$$N = \Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n$$

Кинематич. ур-ия Пуассона в кватернионах

$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Delta\Lambda_x \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Delta\Lambda_\xi \end{cases}$$

$$\Delta\Lambda_* = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \bar e_* \sin\frac{\Delta\varphi}{2}\ ; \ * = \{x; \xi\}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}\bar{e}_* \Delta\varphi$$

$$\Lambda(t+\Delta t) \approx \begin{cases} \left(1+\frac{1}{2}\bar{e}_*\Delta\varphi\right)\circ\Lambda(t) \\ \Lambda(t)\left(1+\frac{1}{2}\bar{e}_\xi\Delta\varphi\right) \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\,\bar{e}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega_x\circ\Lambda \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\circ\bar{\omega}_\xi \end{cases}}$$ — Кинем. ур-ия Пуассона в кватернионах (2)

$\Rightarrow$ если задан $\Lambda(t) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_x = 2\dot{\Lambda}\circ\tilde{\Lambda} \\ \bar{\omega}_\xi = 2\tilde{\Lambda}\circ\dot{\Lambda} \end{cases}$

Конгруэнтность решений:

Пусть $\Lambda^*(t)$ — частн. реш. (2):

$$\dot{\Lambda}^* = \frac{1}{2}\bar{\omega}_x\circ\Lambda^*$$

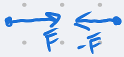
Замен. $\Lambda = \Lambda^*\circ\Lambda^0$, $\Lambda^0 = const$, Λ — удовл. ур-ию Пуассона

$\Lambda(0) = \Lambda^*\circ\Lambda^0 \Rightarrow$ Выбирая $\Lambda^0 = (\Lambda^*)^{-1}\circ\Lambda(0)$ можно удовл. любые нач. усл-ия

Основные з-ны динамики.

$m > 0$

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$$



$$I = \int f(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ldots, t)\,dm =$$

$$= \lim_{\Delta m_i\to 0}\sum f(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, \ldots, t)\,\Delta m_i$$

$\Delta m_i = const$