I. простейшие ур-ия 1-го порядка.

**13.** $x^2 = (C+y)e^y$.

$$C = \frac{x^2 - ye^y}{e^y}$$

$$\frac{(2x - y'e^y - yy'e^y)\,e^y - x^2 e^y \cdot y' + yy'e^{2y}}{e^{2y}} = 0$$

$$2x - y'e^y - yy'e^y - x^2 y' + yy'e^y = 0$$

$$\boxed{2x = y'(e^y + x^2)}$$

**7.** $yy'\cos x = (1-y)\sin x$.

$y = 1$ – решение

$y \neq 1$:

$$\frac{yy'}{1-y} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{yy'}{1-y}\,dx = \int \operatorname{tg} x\,dx + C$$

$$\int \frac{y}{1-y}\,dy = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C$$

$$\int \frac{dy}{y-1} + \int dy = \ln|\cos x| + C_0$$

$$\ln|y-1| + y = \ln|\cos x| + C_0$$

$$y + C = \ln\frac{|\cos x|}{|y-1|}$$

$$Ce^y = \frac{|\cos x|}{|y-1|} \Rightarrow \boxed{e^y(y-1) = C\cos x}$$

**10.** $x(y+1)dy = (1-y^2)dx.$

$x = 0$ – решение

$y = -1$ – решение

$y = 1$ – решение

$$\frac{y+1}{(1-y)(1+y)}dy = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$-\ln|y-1| = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{y-1} = Cx \Rightarrow \boxed{x(y-1) = C}$$

**44.** $y(1+Ce^x) = 1.$

$y = 0$ – не явл. решением

$$1 + Ce^x = \frac{1}{y}$$

$$C = \frac{1-y}{ye^x}$$

$$\frac{-y'ye^x + (y-1)(y'e^x + ye^x)}{y^2e^{2x}} = 0$$

$$y^2e^x - y'e^x - ye^x = 0$$

$$y^2 - y - y' = 0$$

Ортогональные $\Rightarrow y' \to -\frac{1}{y'}$

$y^2 - y + \frac{1}{y'} = 0$

$y^2 dy - y\,dy + dx = 0$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 + C}$$

**55.** $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ \ y(2) = 0.$

$y = 0$ – решение

$\frac{1}{3}\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + C$

$y = (x + C)^3$

$y(2) = 0 \Rightarrow C = -2$

$$\boxed{y = (x-2)^3}$$

**62.** $y' = \cos(y - x).$

$y - x = t \Rightarrow y'_x = t'_x + 1$, $t'_x \equiv t'$

$t' + 1 = \cos t$

$\frac{dt}{\cos t - 1} = dx$ , $\cos t - 1 = 0$ – решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y - x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} = dx$$

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = x + C$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C}$$

**59.** $x\,dy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx,\ x \geqslant 0.$

$x = 0$ — решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$\frac{y}{x} = a,\ x = b;\ dy = a\,db + b\,da$

$$a + \frac{b\,da}{db} = a + \sqrt{1+a^2}$$

$$\frac{da}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{db}{b}$$

$$\ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right) = \ln b + C$$

$$a + \sqrt{1+a^2} = bC$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = xC$$

$$\boxed{y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2 C}$$

**73.** $(2x - y - 2)dx + (x + y - 4)dy = 0.$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = u + 2 \\ y = v + 2 \end{matrix}$$

$$(2u - v)du + (u + v)dv = 0$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v-2u}{u+v} = \frac{\frac{v}{u}-2}{\frac{v}{u}+1}$$

$$\frac{v}{u} = t \Rightarrow dv = t\,du + u\,dt$$

$$t + \frac{u\,dt}{du} = \frac{t-2}{t+1}$$

$$u \cdot \frac{dt}{du} = \frac{t-2-t^2-t}{t+1}$$

$$u \cdot \frac{dt}{du} = -\frac{t^2+2}{t+1}$$

$$-\frac{du}{u} = \frac{t+1}{t^2+2}\,dt$$

$$\ln\left|\frac{1}{u}\right| + C = \frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+2} + \int\frac{dt}{t^2+2}$$

$$\ln\left|\frac{1}{u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{C}{u^2} = (t^2+2)\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u = x-2$$
$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x-2}$$

$$\frac{C}{(x-2)^2} = \left(\frac{(y-2)^2}{(x-2)^2}+2\right)\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y-2}{\sqrt{2}(x-2)}\right)$$

$$\boxed{C = (y^2-4y+2x^2-8x+12)\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y-2}{\sqrt{2}(x-2)}\right)}$$

**80.** $y' = \dfrac{y-2x}{x+2y}$, $y(1) = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}-2}{1+2\frac{y}{x}}, \quad \frac{y}{x} = t, \quad dy = t\,dx + x\,dt$$

$$t + x\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{t-2}{2t+1}$$

$$x\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{t-2-2t^2-t}{2t+1}$$

$$x\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{2(t^2+1)}{2t+1}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2t+1}{2(t^2+1)}dt$$

$$\ln x^2 + c = -\int\frac{2t+1}{t^2+1}dt$$

$$\ln x^2 + c = -\int\frac{dt^2}{t^2+1} - \int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$\ln x^2 + c = -\ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t$$

$$\frac{c}{x^2} = (t^2+1)\,e^{\operatorname{arctg} t}$$

$$\frac{C}{x^2} = \left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

$$y(1)=0 \Rightarrow C = e^{\operatorname{arctg} 0} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^2+y^2)\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = 1}$$

**25.** $xy' - 3y = 4x^2$. $x=0$ – решение, при $y=0$

$$y' - \frac{3}{x}y = 4x$$

$$y' - \frac{3}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{x^3}\right| = C \qquad y = Cx^3,\ C = C(x)$$

$$c' x^3 + 3x^2 c - 3cx^2 = 4x$$
$$c' = \frac{4}{x^2}$$
$$dc = \frac{4}{x^2}dx \Rightarrow c = -\frac{4}{x} + C_0$$
$$\boxed{y = -4x^2 + C_0 x^3}$$

**59.** $xy' - y + 4y^3 = 0.$

$y=0$ — решение

$$y' - \frac{y}{x} + \frac{4y^3}{x} = 0$$
$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}y^3$$
$$z = y^{-2} \Rightarrow y = z^{-\frac{1}{2}},\ y' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} \cdot z'$$
$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} \cdot z' - \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{x} = -\frac{4}{x}z^{-\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}z' - \frac{z}{x} = -\frac{4}{x}$$
$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{8}{x}$$
$$z' + \frac{2}{x}z = 0$$
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x} \cdot z$$
$$\int \frac{dz}{z} = -2\int \frac{dx}{x} + C$$
$$\ln|z| = -2\ln|x| + C \Rightarrow \underline{z = \frac{C}{x^2}}$$
$$\frac{c'x^2 - 2xc}{x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{c}{x^2} = \frac{8}{x}$$
$$c' = 8x \Rightarrow C = 4x^2 + C_0$$

$$\boxed{\frac{1}{y^2}=4+\frac{C_0}{x^2}}$$

**68.** $y\,dx+(2x^2y-3x)dy=0.$ $y=0$ – решение

$$dx+2x^2dy-\frac{3x}{y}dy=0$$

$$\frac{dx}{dy}+2x^2-\frac{3x}{y}=0$$

$$x'+2x^2-\frac{3}{y}x=0$$

$$x'-\frac{3}{y}x=-2x^2$$

$$z=x^{-1},\quad x=z^{-1},\quad x'=-\frac{1}{z^2}\cdot z'$$

$$-\frac{1}{z^2}\cdot z'-\frac{3}{y}\cdot\frac{1}{z}=-2\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$z'+\frac{3}{y}z=2$$

$$z'+\frac{3}{y}z=0$$

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{3z}{y}\Rightarrow\frac{dz}{z}=-\frac{3dy}{y}$$

$$\ln|z|=-3\ln|y|+C\Rightarrow z=\frac{C}{y^3}$$

$$\frac{C'y^3-3y^2C}{y^6}+\frac{3}{y}\cdot\frac{C}{y^3}=2$$

$$C'y^3-3y^2C+3Cy^2=2y^6\Rightarrow C'=2y^3\Rightarrow C=\frac{y^4}{2}+C_0$$

$$z = \frac{y}{2} + \frac{C_0}{y^3}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{2} + \frac{C_0}{y^3}$$

$$\boxed{2y^3 = (y^4 + C_0)x}$$

**94.** $x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0.$

$$y' - \frac{5y}{x} + y^2 + \frac{8}{x^2} = 0$$

$$y = \frac{A}{x} \qquad -\frac{A}{x^2} - \frac{5A}{x^2} + \frac{A^2}{x^2} + \frac{8}{x^2} = 0$$

$y = \frac{2}{x}$ – решение $\qquad A^2 - 6A + 8 = 0 \Rightarrow A = 2$

$$y = z + \frac{2}{x} \Rightarrow y' = z' - \frac{2}{x^2}$$

$$z' - \frac{2}{x^2} - \frac{5z + \frac{10}{x}}{x} + z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^2} = 0$$

$$z' - \cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{5z}{x} - \cancel{\frac{10}{x^2}} + z^2 + \frac{4z}{x} + \cancel{\frac{4}{x^2}} + \cancel{\frac{8}{x^2}} = 0$$

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = -z^2$$

$$t = z^{-1}; \quad z = t^{-1}; \quad z' = -\frac{1}{t^2} \cdot t'$$

$$-\frac{1}{t^2} \cdot t' - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t} = -t^{-2}$$

$$t' + \frac{t}{x} = 1$$

$$t' + \frac{t}{x} = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t}{x} \Rightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow t = \frac{C}{x}$$

$$\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = 1 \Rightarrow c' = x \Rightarrow c = \frac{x^2}{2} + C_0$$

$$t = \frac{x}{2} + \frac{C_0}{x}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{2} + \frac{C_0}{x}$$

$$\frac{1}{y - \frac{2}{x}} = \frac{x}{2} + \frac{C_0}{x}$$

$$y - \frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2 + 2C_0}$$

$$\boxed{y = \frac{2x}{x^2 + C_0} + \frac{2}{x}, \quad y = \frac{2}{x}}$$

**146.** $(2e^y - x)y' = 1.$

$y = \ln t$

$(2t - x) \cdot \frac{1}{t} \cdot t' = 1$

$(2t - x)\, t' = t$

$2t - x = a, \quad t = \frac{a + x}{2}; \quad t' = \frac{1}{2}(a' + 1)$

$\frac{1}{2} a (a' + 1) = \frac{a + x}{2}$

$a' + 1 = 1 + \frac{x}{a}$

$a\,da = x\,dx$

$a^2 = x^2 + C$

$(2e^y - x)^2 = x^2 + C$

$$4e^{2y}-4e^{y}x=C$$

$$\boxed{x=e^{y}+Ce^{-y}}$$

С.№4.4.

**4.** $(y-\sin x)dx+(x+e^{y})dy=0.$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=y-\sin x\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+e^{y}\end{cases}\qquad \begin{cases}u(x;y)=xy+\cos x+\varphi(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+e^{y}\end{cases}$$

$$x+\varphi'(y)=x+e^{y}\Rightarrow\varphi(y)=e^{y}+C\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $xy+\cos x+e^{y}=C$

С№4.20

**20.** $2xy\,dx=(x^2-2y^3)dy.$

$y=0$ - решение

$y\neq0$:

$$\frac{2x}{y}dx=\left(\frac{x^2}{y^2}-2y\right)dy$$

$$\frac{x^2dy-2xydx}{y^2}=2ydy\Rightarrow d\left(\frac{-x^2}{y}\right)=d\left(y^2\right)\Rightarrow$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x^2=Cy-y^3\\ y=0\end{array}\right.$

№4.59

**59.** $x^2yy'+x^3=(x^2+y^2)^2.$

Пусть $z=x^2+y^2\Rightarrow z'=2x+2y\cdot y'\Rightarrow yy'=\dfrac{z'-2x}{2}$

$$x^2\cdot\frac{z'-2x}{2}+x^3=z^2\Rightarrow x^2z'-2x^3+2x^3=2z^2$$

$$x^2z'=2z^2\Rightarrow\frac{dz}{2z^2}=\frac{dx}{x^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)=\frac{x}{Cx+1} \Rightarrow \underline{(x^2+y^2)(Cx+2)=x}$$

№ Т1

$$y'=\frac{y^2}{x^4}-2\frac{y}{x}+4x^2$$

$$y'-\frac{y^2}{x^4}+2\frac{y}{x}-4x^2=0$$ — ур-ие Риккати

Пусть $y=Ax^3$ — решение

$$A3x^2-A^2x^2+2Ax^2-4x^2=0$$

$$\Rightarrow 3A-A^2+2A-4=0 \Rightarrow A^2-5A+4=0 \Rightarrow A=1;\ A=4$$

Замена: $y=z+x^3$

$$z'+\cancel{3x^2}-\frac{z^2}{x^4}-\frac{2\cancel{z}}{\cancel{x}}-\cancel{x^2}+2\frac{\cancel{z}}{\cancel{x}}+\cancel{2x^2}-\cancel{4x^2}=0$$

$$z'=\frac{z^2}{x^4} \Rightarrow \frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x^4} \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{3x^3}+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{x^3}{Cx^3+\frac{1}{3}} \Rightarrow y=\frac{x^3}{Cx^3+\frac{1}{3}}+x^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\underline{(y-x^3)(Cx^3+\frac{1}{3})=x^3}$

## II. Уравнения, допускающие понижение порядка.

С №7.1.

**1.** $xy'' + xy'^2 + y' = 0,\ x \neq 0$

$y = C$ – решение

$z = y' \Rightarrow xz' + xz^2 + z = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow z' + z \cdot \frac{1}{x} = -z^2$

$z = t^{-1} \Rightarrow -\frac{1}{t^2} \cdot t' + \frac{1}{tx} = -\frac{1}{t^2}$

$\frac{1}{t^2}(t' - 1) - \frac{1}{tx} = 0$

$t' - \frac{t}{x} = 1$

Решим $t' - \frac{t}{x} = 0$

$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t| = \ln|x| + C \Rightarrow t = xe^C = Cx = C(x)x$

$C'(x)x + C(x) - C(x) = 1 \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln|x| + A$

$\Rightarrow \frac{1}{y'} = x\ln x + Ax \Rightarrow dy = \frac{dx}{x(\ln x + A)} = \frac{d(\ln x + A)}{\ln x + A}$

$\Rightarrow y = \ln(|\ln x + A|) + B = \ln(e^B \ln x + e^B A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{e^y = C_1 \ln C_2 x}$ – ответ

С №7.5

**5.** $yy'' - y'^2 = y'y^2.$

$y = C$ – решение

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}=y' \Rightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)'=y' \Rightarrow \frac{y'}{y}=y+C$$

$C=0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow y(C-x)=1$ – решение

$$\frac{y'}{y^2+Cy}=1 \Rightarrow \frac{1}{C}\cdot\left(\ln\frac{y}{y+C}\right)'=1 \Rightarrow \frac{1}{C}\ln\frac{y}{y+C}=x+C_0$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{y+C_1}=C_1x+C_2$$

$$\frac{y}{y+C_1}=e^{C_1x+C_2}=C_2e^{C_1x}$$

$$1+\frac{C_1}{y}=\frac{1}{C_2}e^{-C_1x} \Rightarrow \frac{y}{C_1}=\frac{1}{\frac{1}{C_2}e^{-C_1x}-1} \Rightarrow y=\frac{C_1C_2}{e^{-C_1x}-C_2}$$

$\Rightarrow y(C_2e^{-C_1x}-1)=C_1 \Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} y=C \\ y(C_2e^{C_1x}+1)=C_1 \\ y(C-x)=1 \end{array}\right.$

С №7.28.

**28.** $2yy''=y'^2(3-4yy'^2)$, $y(4)=1$, $y'(4)=-1$.

$y=C$ – решение – не подх. и зад. Коши

$z=y' \Rightarrow y''=z\cdot z'$

$$2yz\cdot z'=z^2(3-4y\cdot z^2)$$

$$z'-\frac{3z}{2y}+2z^3=0$$

$t = z^{-2}$, $t' = -\frac{2}{z^3} \cdot z' \Rightarrow z' = -\frac{z^3}{2} t' = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2} t'$

$-\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2} t' - \frac{3}{2y t^{\frac{1}{2}}} + 2t^{-\frac{3}{2}} = 0$

$-\frac{t'}{2} - \frac{3}{2} t + 2 = 0$

$t' + 3\frac{t}{y} = 4$

Решим $t' + 3\frac{t}{y} = 0$

$\frac{dt}{t} = -3\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln t = -3\ln y + C(y) \Rightarrow t = y^{-3} C(y)$

$-3y^{-4} C(y) + y^{-3} C'(y) + 3y^{-4} C(y) = 4$

$dC = 4y^3 dy \Rightarrow C(y) = y^4 + C_0$

$t = y + C_0 y^{-3}$

$t = \frac{1}{y'^2}$ $\Rightarrow C_0 = 0$

$y(4) = 1$; $y'(4) = -1$

$\frac{1}{y'^2} = y \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow -\sqrt{y}\, dy = dx \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = x + C$

$y(4) = 1$

$y'(4) = -1$

$\Rightarrow -\frac{1}{\frac{3}{2}} = 4 + C \Rightarrow C = -\frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{14}{3}$

$y^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3} = 7 - \frac{3}{2}x$

Ответ: $y = (7 - \frac{3}{2}x)^{\frac{2}{3}}$

С. №7.46

**46.** $yy'' + yy'\operatorname{tg} x + 2y'^2 = 0.$

$y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = y(z' + z^2)$

$y^2(z'+z^2) + y^2 z\operatorname{tg}x + 2y^2z^2 = 0$

$y = 0$ – корень

$\Rightarrow y \neq 0$: $z' + z^2 + z\operatorname{tg}x + 2z^2 = 0$

$z' + z\operatorname{tg}x = -3z^2$

$t = z^{-1}$; $t' = -\frac{1}{z^2}\cdot z' \Rightarrow z' = -t'z^2 = -\frac{t'}{t^2}$

$-\frac{t'}{t^2} + \frac{\operatorname{tg}x}{t} = -3\cdot\frac{1}{t^2}$

$t' - t\operatorname{tg}x = 3$

Решим $t' - t\operatorname{tg}x = 0$

$\frac{dt}{t} = \operatorname{tg}x\,dx \Rightarrow \ln t = \ln\cos^{-1}x + C_1 \Rightarrow t = \frac{C(x)}{\cos x}$

$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - C(x)\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x} = 3$

$\frac{C'(x)}{\cos x} = 3 \Rightarrow dC = 3\cos x\,dx \Rightarrow C(x) = 3\sin x + C_0$

$\Rightarrow t = 3\operatorname{tg}x + \frac{C_0}{\cos x} \Rightarrow \frac{y}{y'} = 3\operatorname{tg}x + \frac{C_0}{\cos x} = \frac{3\sin x + C_0}{\cos x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{C_0 + 3\sin x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{d\sin x}{C_0 + 3\sin x}$

$\ln y = \frac{1}{3}\ln(6+3\sin x)+C_1 = \ln((6+3\sin x)^{\frac{1}{3}}C_1)$

$\Rightarrow y = C_1(6+3\sin x)^{\frac{1}{3}}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=C_1(6+\sin x)^{\frac{1}{3}} \end{array}\right.$

С № Ф.65(а)

**65.** $x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0$,
a) $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$,

$x \to \lambda x$
$y \to \lambda^s y$
$y^{(k)} \to \lambda^{s-k} y^{(k)}$

$\Rightarrow \quad 2+s-2 = 2+s+s-1 = 1+2s = s$

$s = 2s+1 \Rightarrow s=-1$ — подходит

$\Rightarrow x = e^t;\ y = ze^{-t};\ y' = z'e^{-t}t' - ze^{-t}\cdot t' = (z'-z)e^{-2t}$, т.к. $t' = \frac{1}{e^t}$

$y'' = e^{-2t}(z''t' - z't') - 2(z'-z)e^{-2t}\cdot t' = e^{-2t}(z''t' - 3z't' + 2zt') =$
$= e^{-3t}(z''-3z'+2z)$

$e^{2t}e^{-3t}(z''-3z'+2z) + 2e^{2t}ze^{-t}(z'-z)e^{-2t} + 2e^{t}z^2e^{-2t} - 2ze^{-t} = 0$

$z''-3z'+\cancel{2}z+2zz'-\cancel{2z^2}+\cancel{2z^2}-\cancel{2}z=0$

$z''-3z'+2zz'=0$

Заметим, что $z=C$ - решение $\Rightarrow y=\frac{C}{x} \Rightarrow C=2$

$y' = -\frac{C}{x^2} \Rightarrow y'(1) = -2 \neq 0 \Rightarrow y=\frac{2}{x}$ не явл. решением задачи Коши

$z' = a \Rightarrow z'' = a\cdot a'$

$a\cdot a' - 3a + 2za = 0$

$a' + 2z = 3$

$da = (3-2z)dz$

$a = 3z - z^2 + C$

$z' - 3z + z^2 = C \qquad z' = y'e^{2t} + z = y'e^{2t} + xy = y'x^2 + xy$

$z = xy$

$z'(1)=2;\ z=2 \Rightarrow C=0$

$z'=3z-z^2$

$\frac{dz}{3z-z^2}=dt$ $\qquad \frac{1}{z(3-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{3-z}$

$3A-Az+Bz=1$

$\frac{dz}{3z}-\frac{dz}{3(z-3)}=dt$ $\qquad A=B;\ A=\frac{1}{3};B=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\ln z-\frac{1}{3}\ln(z-3)+C=t$

$t=\ln(z^{\frac{1}{3}}(z-3)^{-\frac{1}{3}}C)$ $\qquad y(1)=2$

$\ln x=\ln(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(xy-3)^{-\frac{1}{3}}C)$ $\qquad y'(1)=0$

$x^3=xy(xy-3)^{-1}C$

$1=2(2-3)C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

$2x^3=xy(3-xy)^{-1} \Rightarrow 6x^3-2x^4y=xy$

Ответ: $6x^2=y(1+2x^3)$

№505

**505.** $y''\cos y+y'^2\sin y=y';\ y(-1)=\frac{\pi}{6},\ y'(-1)=2.$

$y'=t;\ y''=t\cdot t'$

$t\cdot t'\cos y+t^2\sin y=t$

$t'\cos y+t\sin y=1$

Замен $t'\cos y+t\sin y=0$

$t'=-t\,tg\,y$

$\frac{dt}{t}=-tg\,y\,dy \Rightarrow \ln t=\ln\cos y+C=\ln(C(y)\cos y)$

$t=C(y)\cos y$

$t(-1)=y'(-1)=2$

$2=C\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$t = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos y$

$y' = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos y$

$\frac{dy}{\cos y} = \frac{4\sqrt{3}}{3}dx$

$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin y - 1}{\sin y + 1}\right) + C = \frac{4\sqrt{3}}{3}x$ $\quad y(-1) = \frac{\pi}{6}$

$y'(-1) = 2$

$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6} - 1}{\sin\frac{\pi}{6} + 1}\right) + C = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + C = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$C = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - \ln\sqrt{3}$

Ответ: $-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin y - 1}{\sin y + 1}\right) - \ln\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x+1)$

---

№2

**2.** Решить задачу Коши:

$$xy^2y'' + x^2y'^3 - xyy'^2 - 15y^2y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$$

$y^{(k)} \to \lambda y^{(k)}$ – не изм $\Rightarrow$ однородное

$y' = yz$ ; $y'' = y'z + z'y = y(z^2 + z')$ $\quad y = C$ – не решение

$y = 0$ – не решение

$xy^{\cancel{3}}\cdot(z^2 + z') + x^2\cdot y^{\cancel{3}}z^3 - xy\cdot \cancel{y^2}z^2 - 15y^{\cancel{3}}z = 0$

$\cancel{xz^2} + xz' + x^2z^3 - \cancel{xz^2} - 15z = 0$

$z' + z^3x - 15\frac{z}{x} = 0$

$z' - 15z\cdot x^{-1} = -z^3x$

$t = z^{-2}$ ; $t' = -\frac{2}{z^3}\cdot z' \Rightarrow z' = -\frac{t'}{2z^{-3}} = -\frac{t't^{-\frac{3}{2}}}{2}$ $\quad z^3 = t^{-\frac{3}{2}}$

$-\frac{t't^{-\frac{3}{2}}}{2} - 15t^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1} = -t^{-\frac{3}{2}}x$

$t' + 30tx^{-1} = 2x$

Зиши $t' + \frac{30t}{x} = 0$

$-\frac{dt}{30t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow t = x^{-30}C(x)$

$-30x^{-31}C(x) + x^{-30}C'(x) + 30x^{-31}C(x) = 2x$

$C'(x) = 2x^{31} \Rightarrow C(x) = \frac{x^{32}}{16} + C_0$

$t = \frac{x^2}{16} + C_0x^{-30}$

$y(1) = 1$
$y'(1) = 4$

$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{z^2} \\ z &= \frac{y'}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{y^2}{y'^2}$ $\qquad \frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2}{16} + C_0x^{-30}$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{16} + C_0 \Rightarrow C_0 = 0$

$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2}{16} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{4}{x}$ $\qquad \frac{dy}{y} = \frac{4}{x}dx \Rightarrow \ln y = \ln x^4 C(x)$

$y = x^4 C(x)$

$1 = 1\,C(x) \Rightarrow C(x) = 1$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = x^4$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф №225 (а; г)

**225.** Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделить области на плоскости $x$, $y$, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения

а) $y' = 2xy + y^2$,

г) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$,

а) $\left.\begin{aligned} &f(x;y) = 2xy + y^2 \text{ — непр. } \forall (x;y) \in R^2 \\ &f'_y = 2x + 2y \text{ — непр. } \forall (x;y) \in R^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists$ единственное решение на всей плоскости

Ответ: вся пл-ть

б) $f(x;y)=1+\operatorname{tg}y$ — непр. $\forall((x;y))\in R^2: y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$

$f'_y(x;y)=\frac{1}{\cos^2 y}$ — непр. $\forall((x;y))\in R^2: y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$

$\Rightarrow \exists$ единств. решения на всей пл-ти, когда $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ф №228 (в; г)

**228.** При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений и систем?

в) $(x-y)y'y'''=\ln xy$,

г) $y''-yy'''=\sqrt[5]{y'-x}$,

в) $y'''=\frac{\ln xy}{(x-y)y'}$

$f'_y=\frac{\frac{x}{xy}(x-y)y'-y'\ln xy}{((x-y)y')^2}=\frac{x(x-y)-xy\ln xy}{xy(x-y)^2y'}$ — непр. при $xy>0;\ x\neq y;\ x\neq 0;\ y\neq 0;\ y\neq c$

$f'_{y'}=\frac{\ln xy}{x-y}\left(-\frac{1}{y'^2}\right)$ — непр. при $xy>0;\ x\neq y;\ y\neq c$

$f'_{y''}=0$ — непр. $\forall((x;y))\in R^2$

Ответ: $x_0\neq y_0;\ x_0y_0>0;\ y'_0\neq 0;\ y''_0$ — любое

г) $y'''=\frac{y''}{y}-\frac{\sqrt[5]{y'-x}}{y}$

$f'_y=-\frac{y''}{y^2}+\frac{\sqrt[5]{y'-x}}{y^2}$ — непр. при $y\neq 0$

$f'_{y'}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(y'-x)^{\frac{4}{5}}y}$ — непр. при $y'\neq x;\ y\neq 0$

$f'_{y''}=\frac{1}{y}$ — непр. при $y\neq 0$

Ответ: $y_0\neq 0;\ y'_0\neq x_0;\ y''_0$ — любое.

# Ф №229.

**229.** Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости $x$, $y$ пересекаться в некоторой точке $(x_0, y_0)$

а) для уравнения $y' = x + y^2$?

б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

а) $y' = x + y^2$

$f'_y = 2y$ – непр. $\forall((x;y)) \in R^2 \Rightarrow \exists$ ед. реш. на $R^2 \Rightarrow$ нет

Ответ: нет

б) $y'' = x + y^2$

$f'_y = 2y$ – непр. $\forall((x;y)) \in R^2 \Rightarrow$ через $\forall(x_0;y_0;y'_0)$ прох. ед. реш.

$f'_{y'} = 0$

Может пересеч. в нек. $(x_0;y_0)$, например $(x_0;y_0;y'_0)$: $(0;0;0)$ и $(0;0;1)$

Ответ: да

# Ф №230.

**230.** Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости $x$, $y$ касаться друг друга в некоторой точке $(x_0, y_0)$

а) для уравнения $y' = x + y^2$?

б) для уравнения $y'' = x + y^2$?

в) для уравнения $y''' = x + y^2$?

а) $y' = x + y^2$ – нет, т.к. из 229 через любую $(x_0;y_0)$ прох. ед. решение

Ответ: нет

б) $y'' = x + y^2$

Если касается $\Rightarrow$ через $(x_0;y_0;y'_0)$ прох. 2 реш, но из 229 через $\forall(x_0;y_0;y'_0)$ прох. ед. реш $\Rightarrow$ нет

Ответ: нет

в) $y''' = x + y^2$

Ясно, что $f$; $f'_y$; $f'_{y'}$; $f'_{y''}$ непр. на $R^2 \Rightarrow$ через любую $(x_0;y_0;y'_0;y''_0)$ проходит единств. решение, тогда при нач. усл-ях $(x_0;y_0;y'_0)$ $\exists$ беск. решений, касающихся в $(x_0;y_0)$ при одинаковых $y'_0 \Rightarrow$ да

Ответ: да

ФN231.

**231.** Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$? Рассмотреть отдельно случаи $n = 1,\ 2,\ 3$.

$\begin{cases} y' = x+y^2 \\ y(0)=1;\ y'(0)=2 \end{cases}$ => нет решений

$\begin{cases} y'' = x+y^2 \\ y(0)=1;\ y'(0)=2;\ y''(0)=y''_0 \end{cases}$ => $y''_0 = 1$ => 1 решение

$\begin{cases} y''' = x+y^2 \\ y(0)=1;\ y'(0)=2;\ y''(0)=y''_0;\ y'''(0)=y'''_0 \end{cases}$ => $(1;1;1;y'''_0)$ - беск. много решений

Аналогично при $n \in N: n \geq 4$ беск. много решений

ФN233.

**233.** При каких $n$ уравнение $y^{(n)} = f(x, y)$ ($f$ и $f'_y$ непрерывны) может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x$, $y_2 = x + x^4$?

Т.к. $f$ и $f'_y$ непр => через $\forall ((x_0;y_0)) \in R^2$, прох. ед. решение

Рассмотрим т. (0;0):

При $n=1$: прох 2 решения => $n \neq 1$

При $n=2$: прох. 2 решения => $n \neq 2$

Аналогично, $n \neq 3; n \neq 4$, а при $n \geq 5$ прох. уже одно решение

Ответ: при $n \geq 5$.

NТ3

**3.** Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:

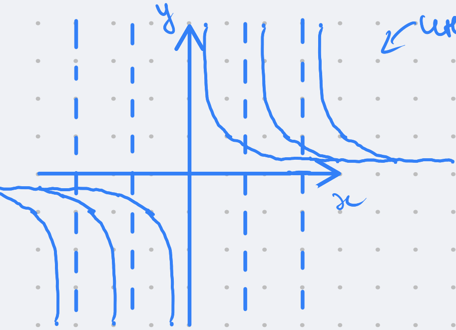
а) $y' = -y^2$, $y(1) = -1$;

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(-4) = -1$, $y(2) = 1$.

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) — нет.

а) $\frac{dy}{y^2} = -dx$, $y=0$ - реш. $D(x) = R \setminus \{-C\}$ - обл опред.

$y \neq 0$: $\frac{1}{y} = x + C$, $C = \frac{1}{y(1)} - 1 = -2$ => $y = \frac{1}{x-2}$ - непродолж. решение $(\lim\limits_{x\to 2} y = \infty)$



интегр. кривые

$y_1(x) \neq y_2(x)\ \forall x \Rightarrow$ особых решений нет

$f = \begin{cases} 0, & x = 2 \\ \frac{1}{x-2}, & x \neq 2 \end{cases}$

$f, f'_y$ - непр. на $R^2 \Rightarrow \forall (x_0; y_0)\ \exists!$ реш. $\Rightarrow$

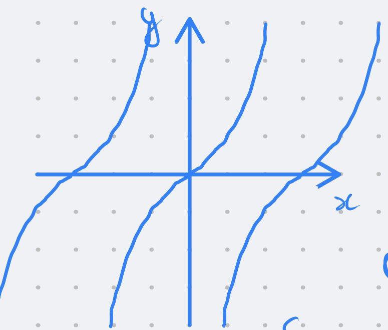
$\Rightarrow$ решение однозн. опр. нач. усл-ями

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(-4) = -1$, $y(2) = 1$, $y = 0$ - решение

$y \neq 0$:

$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3dx \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \Rightarrow y = (x+C)^3$

Интегр. кривые:



$y(-4) = (-4+C)^3 = -1 \Rightarrow C = 3$

$y(2) = (2+C)^3 = 1 \Rightarrow C = -1.$

$y = \begin{cases} (x-1)^3, & x > 1 \\ 0, & -3 \leq x \leq 1 \\ (x+3)^3, & x < -3 \end{cases}$ - все решения продолжаемые

Особое решение: $y = 0$

$f$ непр. на $R^2$, $f'_y$ не непр. при $y = 0 \Rightarrow$ через $(x_0; 0)$ может прох. не одно реш $\Rightarrow$ реш опр. неоднозначно.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешённые относительно производной.

Ф №278

**278.** $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y.$

$y' = p$, $dy = pdx$

$p^2 - 2xp = x^2 - 4y$

$2p\,dp - 2x\,dp - 2p\,dx = 2x\,dx - 4p\,dx$

$2(p-x)dp + (2p-2x)dx = 0$

$(p-x)(dp+dx)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=x \\ dp=-dx \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p=x \\ p=-x+C \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} y'=x \\ y'=-x+C \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2-2x^2=x^2-4y \\ (-x+C)^2+2x(x-C)=x^2-4y \end{array}\right.$

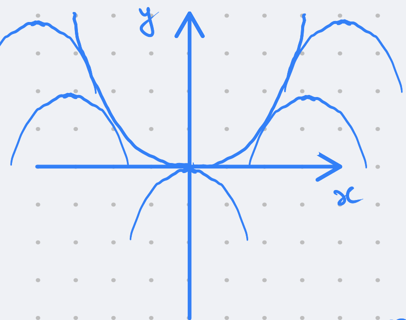
решения:

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2-2xC+C^2+2x^2-2Cx=x^2-4y \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 2y=x^2 \\ 2x^2+C^2-4Cx=-4y \end{array}\right. \boxed{\left[\begin{array}{l} 2y=x^2 \\ 4y=C^2-2(x-C)^2 \end{array}\right.}$

Дискр. кривая: $\begin{cases} 4y = x^2+2px-p^2 \\ 0=2x-2p \end{cases} \begin{cases} 4y=x^2+2x^2-x^2 \\ x=p \end{cases} \Rightarrow 2y=x^2$

Касание: $\begin{cases} 2x^2=C^2-2(x-C)^2 \\ 4x=-4(x-C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2=4x^2-2x^2 \\ C=2x \end{cases} \Rightarrow 2y=x^2$ - особое решение

Интегр. кривые




Ф №287

**287.** $y = xy' - y'^2.$

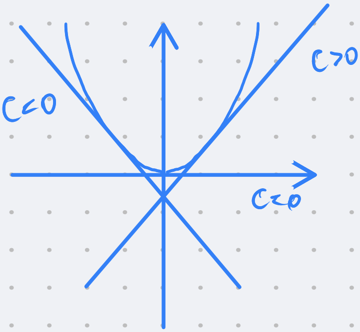
$y'=p \Rightarrow y=px-p^2 \Rightarrow p\,dx = p\,dx + x\,dp - 2p\,dp \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=\frac{x}{2} \\ p=C \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4} \\ y=Cx-C^2 \end{array}\right.$

Дискр. кривая: $\begin{cases} y = xp - p^2 \\ x - 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

Касание: $\begin{cases} \frac{x^2}{4} = Cx - C^2 \\ \frac{1}{2}x = C \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = y$ - особое решение

Интегр. кр.:




Ф №288.

$y + xy' = 4\sqrt{y'}$

$y = 0$ - решение

$y' = p,\ y' > 0 \Rightarrow p > 0 \Rightarrow y + xp = 4\sqrt{p} \Rightarrow p\,dx + x\,dp + p\,dx = 2\frac{dp}{\sqrt{p}}$

$2p\,dx = \left(\frac{2}{\sqrt{p}} - x\right)dp$

$2px' = \frac{2}{\sqrt{p}} - x \Leftrightarrow 2px' + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p} \Rightarrow x = \frac{C(x)}{\sqrt{p}}$

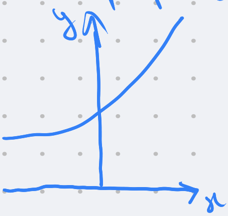
$2p\left(\frac{C'(x)}{\sqrt{p}} - \frac{C(x)}{2p\sqrt{p}}\right) = \frac{2}{\sqrt{p}} - \frac{C(x)}{\sqrt{p}}$

$\sqrt{p} \cdot C'(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \Rightarrow C(x) = \ln p + C_0 \Rightarrow x\sqrt{p} = \ln p + C_0$

$y = 4\sqrt{p} - xp = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$

$y \neq 0\ \forall p \Rightarrow$ нет особых решений

Интегр. кривые:



С №6.7.

$\boxed{7.}$ $y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0.$

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых уравнений (1-66):

$y=0$ — реш.

$y'=p \Rightarrow p^3 - 3x^2p + 4xy = 0 \Rightarrow 4y = 3px - \frac{p^3}{x}$

$4p\,dx = 3x\,dp + 3p\,dx - \frac{3p^2x\,dp - p^3dx}{x^2}$

$p\,dx = 3x\,dp - 3\frac{p^2}{x}dp + \frac{p^3}{x^2}dx \Rightarrow p\,dx\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right) = 3x\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)$

$(p\,dx - 3x\,dp)\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)=0$

1) $1-\frac{p^2}{x^2}=0 \Rightarrow p=\pm x$

$4y = \pm 3x^2 \mp x^2 = \pm 2x^2$

2) $p\,dx = 3x\,dp$

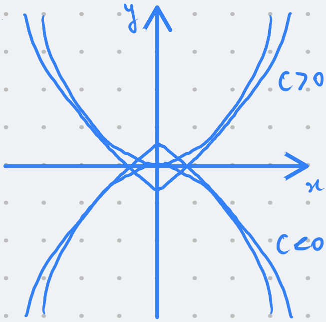
$\frac{dp}{p} = \frac{1}{3}\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow p = Cx^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 4y = 3Cx^{\frac{4}{3}} - C^3$

дискр. кр. $\begin{cases} 4y = 3px - \frac{p^3}{x} \\ 3x - 3\frac{p^2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y = \pm 2x^2 \\ p = \pm x \end{cases}$

Касание: $\begin{cases} \pm 2x^2 = 3Cx^{\frac{4}{3}} - C^3 \\ \pm 4x = 4Cx^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm 2x^2 = \pm 3x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}} \mp x^2 = \pm x^2 \\ C = \pm x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

$\Rightarrow y = \pm \frac{x^2}{2}$ — особое решение

Интегр. кривые:




№5.

**5.** В задаче **Ф.** 287 найти решения, удовлетворяющие условиям:
а) $y(0)=-1, y(5)=6$;
б) $y(0)=-1, y(4)=4$.

а) $(0;-1)$ и $(5;6)$ не лежат на $\frac{x^2}{4}$ $\Rightarrow$ для $y=Cx-C^2$

т. пересеч. с особ. реш:

$$\left[\begin{array}{l} -C^2=-1\\ 5C-C^2=6\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}C=\pm1\\ C=2\\ C=3\end{array}\right.$$

$C=1: y=x-1=\frac{x^2}{4} \Rightarrow (2;1)$

$C=2: y=2x-4=\frac{x^2}{4} \Rightarrow (4;4)$

$\Rightarrow y=\begin{cases} x-1, & x<2\\ \frac{x^2}{4}, & 2\le x\le 4\\ 2x-4, & x>4\end{cases}$

$C=-1: y=-x-1=\frac{x^2}{4} \Rightarrow (-2;1)$

$C=3: y=3x-9=\frac{x^2}{4} \Rightarrow (6;9)$

} не подх., т.к. т. пер. после заданной точки

б) $(0;-1)$ — не лежит на $\frac{x^2}{4}$

$(4;4)$ — лежит на $\frac{x^2}{4}$ $\Rightarrow$ беск. много реш.

касание в т. $(A;\frac{A^2}{4})$: $CA-C^2=\frac{A^2}{4} \Rightarrow (C-\frac{A}{2})^2=0 \Rightarrow A=2C$

аналог. п. а): $y=\begin{cases} x-1, & x<2\\ \frac{x^2}{4}, & 2\le x\le A\\ \frac{A}{2}x-\frac{A^2}{4}, & x>A\end{cases}$

№6

**6.** Решить уравнение $(y')^2=4y^3(1-y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

$y=0$, $y=1$ — реш.

$y\in(0,1)$: $y'=\pm\sqrt{4y^3(1-y)}$ ; $dx=\pm\frac{dy}{2\sqrt{y^3(1-y)}}$

$y=\sin^2 t$; $dy = 2\sin t\cos t\,dt$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y^3(1-y)}} = \int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{2\sqrt{\sin^6 t\cos^2 t}} = \int \frac{dt}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t + C = -\operatorname{ctg}(\arcsin\sqrt{y}) + C = -\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} + C$$

$$(x+C)^2 = \frac{1}{y} - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1+(x+C)^2} = y_1$$

Дискр. кр.: $\begin{cases} p^2 = 4y^3(1-y) \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$

Особые реш.: 1) $y_1 \neq 0 \Rightarrow$ нет особ. реш.

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x+C)^2} = 1 \\ -\dfrac{2(x+C)}{(1+(x+C)^2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-x)^2} = 1 \\ C = -x \end{cases} \Rightarrow y = 1$ — особ. реш.

Инт. кривые: