Лекция 1.

Аксиомы классич. механики:

1687 г., Ньютон

1. R^3 + аксиомы R^3 (евклидово пр-во)
2. $\underset{t}{R} \to R^3$
3. $(m, \bar r)$ – мат. точка
4. $(m_1; \bar r_1)$, $(m_2; \bar r_2)$

III з-н Ньютона: $\bar F_1 = -\bar F_2 \parallel \bar r_1 - \bar r_2$

5. $m\ddot{\bar r} = \bar F$, $\dot{\bar r} = \dfrac{d^2 \bar r}{dt^2}$

Инвариантность и ковариантность ур-ий:

Инв-ть:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \bar F_i(t, q, \dot q, \ldots, q^{(n)}) = 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t &= t(t', q') \\ q &= q(t', q') \end{aligned} \quad (2)$$

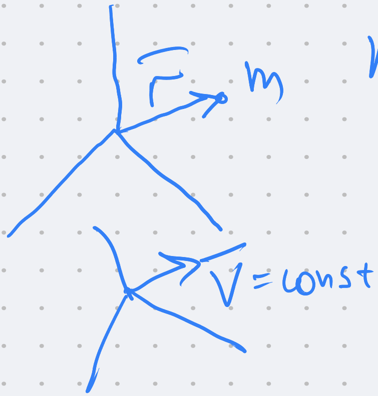
Система (1) инв. по отн. к замене (2), если $\begin{cases} \bar F_i(t', q', \ldots, q'^{(n)}) = 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$

(2) Наз. симметрией системы (1)

$$\frac{dq}{dt}=\frac{q}{t}, \quad q'=\lambda q, \; t'=\mu t$$

$$\frac{dq'}{dt'}=\frac{q'}{t'}$$

Ковариантность = инв-ть правила составления ур-ий



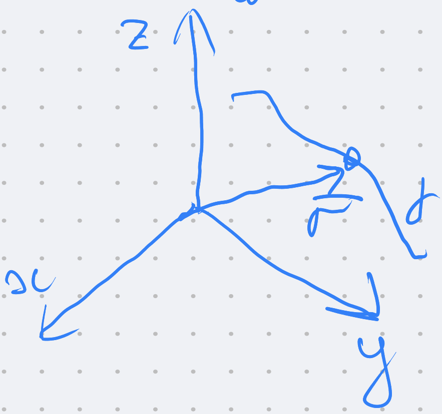
$$m\ddot{\bar{r}}=\bar{F}$$

$$\bar{r}'=\bar{r}_0+\bar{V}t+A\bar{r}$$

ортог. матр $A=\text{const}$

$$m\ddot{\bar{r}}'=\bar{F}'$$

Кинематика точки:



$$\bar{r}=\bar{r}(t)$$

$$\bar{V}=\dot{\bar{r}}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}$$

$$\bar{W}=\dot{\bar{V}}=\ddot{\bar{r}}=\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix}$$

Сопровождающий трёхгранник Френе

$$|\bar\tau| = \tau = 1$$

$$n = 1$$

$$\bar b = \bar\tau \times \bar n$$

s – длина дуги $\Rightarrow \bar r = \bar r(s(t))$

$$\bar V = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar r}{ds}\cdot\dot s$$

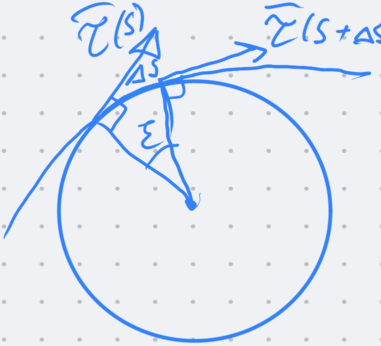
$$\frac{d\bar r}{ds} = \bar\tau \Rightarrow \dot s = V$$

$$\boxed{\bar V = \overset{\dot s}{V}\,\bar\tau}$$

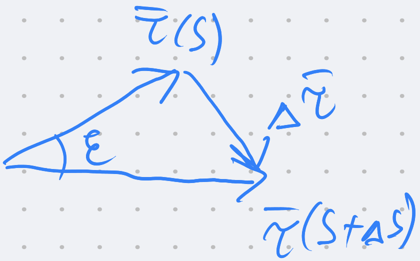
$$\bar W = \dot{\bar V} = \dot V\bar\tau + V\cdot\underbrace{\frac{d\bar\tau}{ds}}_{\frac{\bar n}{\rho}}\cdot\dot s$$

$$\bar W = \underbrace{\dot V\bar\tau}_{\bar W_\tau} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}\bar n}_{\bar W_n}$$

тангенциальное нормальное ускорение



$$\varepsilon \approx \frac{\Delta s}{\rho}$$

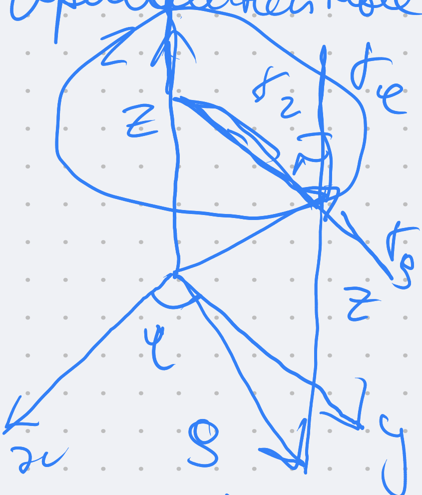


$$|\Delta\bar\tau| \approx \varepsilon \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\tau}} \quad (\text{т.к. } |\bar\tau|=1)$$

$$\Delta\bar\tau \parallel \bar n$$

$$\Delta\bar\tau \approx \varepsilon\bar n = \frac{\Delta s}{\rho}\bar n \Rightarrow \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\bar\tau}{\Delta s} = \frac{d\bar\tau}{ds} = \frac{\bar n}{\rho}$$

Цилиндрические координаты



$$\bar r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \bar r(q) \longrightarrow q = \begin{bmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Общий случай

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right] \neq 0$$

Коорд. линии:

$$\begin{cases} q_i - var \ (1 \text{ перем}) \\ q_{j \neq i} - fix \ (2 \text{ перем}) \end{cases}$$

$\{\bar{e}\}$ – лок. базис

$|\bar{e}_i| = 1$

$$\bar{e}_i = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|}$$

$$\bar{V} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right| \dot{q}_i \bar{e}_i$$

$$H_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial r_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial q_i}\right)^2}$$

коэфф. Ламе

$$|\Delta \bar{r}_{q_i}| \approx H_i |\Delta q_i|$$

$$\boxed{\bar{V} = \sum H_i \dot{q}_i \bar{e}_i}$$

$$V^i = H_i \dot{q}_i$$

$$V^2 = \sum H_i H_j \dot{q}_i \dot{q}_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

Если $\{e_i\}$ — ОНБ $\Rightarrow (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$

$$V^2 = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$ — для ортонорм. базисов

В цилиндрической: $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$, т.к. $\{\bar{e}_\rho; \bar{e}_\varphi; \bar{e}_z\}$ — ОНБ

$$W_i = \bar{W} \cdot \bar{e}_i = \frac{1}{H_i} \cdot \underbrace{\bar{W}}_{\ddot{\bar{r}}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}}_{}\right) - \dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial q_i}$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{\bar{r}}; \dot{\bar{r}}) \quad \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \frac{V^2}{2}}{\partial q_i}$$

$$\dot{\bar{r}} = \sum \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$$

$$W_i = \frac{1}{H_i} \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V^2/2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V^2/2}{\partial q_i}\right]$$