

I. Несколько функций.

$\sqrt{1}$.

$$x^2 = y^2$$

a) 4 функции: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \notin A \end{cases}$, где $A \subset \mathbb{R}$, таких множеств множество \Rightarrow и функций бесконечное

б) 2 функции: $x, |x|$

в) 1 функция: x

$\sqrt{3.61(2)}$

61. Найти в указанной точке частные производные функции $u(x; y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x \cos y + y \cos u + u \cos x = 1, (0; 1; 0);$

Дифф. по x :

$$\cos y - y \sin u \cdot u_x + u_x \cos x - u \sin x = 0 \Rightarrow u'_x = \frac{\cos y - u \sin x}{y \sin u - \cos x}$$

$$u'_x(0; 1; 0) = -\cos 1$$

$$\text{так: } -u \sin y + \cos u - y \sin u \cdot u'_y + u'_y \cos x = 0 \Rightarrow u'_y = \frac{\cos y - u \sin y}{y \sin u - \cos x}$$

$$u'_y(0; 1; 0) = -1$$

$\sqrt{3.64(2)}$

64. Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x; y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0$, а) $(1; 1; 1)$, б) $(1; 1; -2)$.

$$F(1; 1; 1) = -1 \neq 0, F(1; 1; -2) = 1+2-8+6+2-3=0$$

↑ не одн. оп-ней

в) $3x^2 dx + 6y^2 dy + 3u^2 du - 3(xydu + yu dx + xu dy) + 2dy = 0$

г) $(1; 1; -2)$: $3dx + 6dy + 12du - 3du + 6dx + 6dy + 2dy = 0$

$$\Rightarrow du(1; 1; -2) = -dx - \frac{14}{9}dy$$

√3.69

69. Пусть уравнением $f(x-y; y-z; z-x) = 0$, где $f(u; z; w)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x; y)$. Найти $dz(x, y)$.

$$x-y=u; y-z=v; z-x=w$$

$$f(u; v; w) = 0$$

$$df = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw \approx f'_u(dx - dy) + f'_v(dy - dz) + f'_w(dz - dx) = 0$$

$$dz = \frac{f'_u(dx - dy) + f'_v(dy - dz)}{f'_v - f'_w}$$

$$dz = \frac{(f'_u - f'_w)dx + (f'_v - f'_u)dy}{f'_v - f'_w}$$

√3.75

75. Найти в точке $(1; 2)$ частные производные дифференцируемых функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$, заданных неявно уравнениями

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad u(1; 2) = v(1; 2) = 0.$$

$$\text{no } x: e^{u+v} \cdot (U'_x + V'_x) + e^{u+v} 2U'_x V + 2U V'_x = 0$$

$$ye^{u-v} (U'_x - V'_x) - \frac{U'_x(1+v) - V'_x u}{(1+v)^2} = 2$$

$$6. (1; 2; 0; 0): \begin{cases} U'_x + V'_x = -1 \\ U'_x - 2V'_x = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{U'_x = 0; V'_x = -1}$$

$$\text{no } y: xe^{u+v} (U'_y + V'_y) + 2U'_y V + 2U V'_y = 0$$

$$e^{u-v} + ye^{u-v} (U'_y - V'_y) - \frac{U'_y(1+v) - V'_y u}{(1+v)^2} = 0$$

$$6. (1; 2; 0; 0): \begin{cases} U'_y + V'_y = 0 \\ U'_y - 2V'_y = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{U'_y = \frac{1}{3}; V'_y = -\frac{1}{3}}$$

$$\text{Ответ: } U'_x = 0; V'_x = -1; U'_y = \frac{1}{3}; V'_y = -\frac{1}{3}.$$

√4.43(5)

43. Найти второй дифференциал функции $u(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $u(x; y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением и такая, что $u(x_0; y_0) = A$, если:

5) $u^3 + 2yu + xy = 0, \quad u(1; -1) = -1;$

$$3u^2 du + 2ydu + 2Udy + 2udy + ydx = 0 \Rightarrow du = -\frac{3u^2 dy + ydu + 2Udy}{3u^2 + 2y}$$

$$dU(1; -1; -1) = -\frac{-dy - du}{1} = \underline{dx + dy}$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2 u + 2dy du + 2yd^2 u + 2du dy + 2dxdy = 0$$

$$f(1; -1; -1): -6du^2 + 3d^2 u + 2dy du - 2d^2 u + 2du dy + 2dxdy = 0$$

$$-6du^2 + d^2 u + 4dy du + 2dxdy = 0$$

$$-6du^2 - 12dxdy - 6dy^2 + d^2 u + 4dy^2 + 6dxdy = 0$$

$$\underline{d^2 u = 6dx^2 + 6dxdy + 2dy^2}$$

№4.46(1)

46. Пусть уравнением:

1) $f(x+u; y+u) = 0$;

где f — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x; y)$. Найти $d^2 u(x; y)$.

dx

$$d^2 u = d^2 f = d^2 u$$

$$dx + u = a; y + u = b; da = dx + du; db = dy + du$$

$$df = f'_a dx + f'_b dy = f'_a du + du(f'_a + f'_b) + f'_b dy = 0$$

$$\Rightarrow du = -\frac{f'_a du + f'_b dy}{f'_a + f'_b}$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= -\frac{(f''_{aa} dx^2 + f''_{ab} dx dy + f''_{ba} dy dx + f''_{bb} dy^2)(f'_a + f'_b)}{(f'_a + f'_b)^2} + \\ &+ \frac{(f''_{aa} dx^2 + f''_{ab} dx dy + f''_{ba} dy dx + f''_{bb} dy^2) \cdot (f'_a du + f'_b dy)}{(f'_a + f'_b)^2} = \\ &= -\frac{(f''_{aa} du(dx + du) + f''_{ab} du(dy + du) + f''_{ba} dy(dx + du) + f''_{bb} dy(dy + du))(f'_a + f'_b)}{(f'_a + f'_b)^2} + \\ &+ \frac{(f''_{aa}(dx + du) + f''_{ab}(dy + du) + f''_{ba}(dx + du) + f''_{bb}(dy + du))(f'_a du + f'_b dy)}{(f'_a + f'_b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f''_{ab}(du + du) f'_a du + f''_{bb}(dy + du) f'_a du - f''_{ab} dy(dx + du) f'_a - f''_{bb} dy(dy + du) f'_a}{(f'_a + f'_b)^2} \\ &\quad + \frac{f''_{ab}(dx + du) f'_b dy + f''_{bb}(dy + du) f'_b dy - f''_{ab} dx(dx + du) f'_b - f''_{bb} dx(dy + du) f'_b}{(f'_a + f'_b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{\underline{S_{ab} S_a^l (dx+dy)(dx-dy) + S_{bb} S_a^l (dy+du)(dx-dy) - S_{aa} S_b^l (dn+du)(dn-dy)}} - \\
 &\quad \underline{\underline{- S_{ab} S_b^l (dy+du)(dx-dy)}} = \frac{(S_a^l + S_b^l)^2}{(dn-dy)} \cdot \underline{\underline{S_{ab} S_a^l (dn+du) + S_{bb} S_a^l (dy+du)}} - \\
 &\quad \underline{\underline{- S_{aa} S_b^l (dn+du) - S_{ab} S_b^l (dy+du)}} = \frac{dn - S_a^l dn + S_b^l du}{S_a^l + S_b^l} \cdot (S_a^l + S_b^l)^3 \\
 &= (dn - dy) \cdot \underline{\underline{S_{ab} S_a^l (S_a^l dn + S_b^l dn - S_a^l dn - S_b^l dy) + S_{bb} S_a^l (S_b^l dy + S_a^l dy - S_b^l dn)}} - \\
 &\quad \underline{\underline{- S_a^l dn - S_b^l dy}} - \underline{\underline{S_{ab} S_b^l (S_a^l dn + S_b^l dn - S_a^l dn - S_b^l dy) - S_{bb} S_b^l (S_b^l dy + S_a^l dy - S_b^l dn)}} \\
 &= (dn - dy)^2 \cdot \underline{\underline{S_{ab} S_a^l S_b^l - S_{bb} (S_a^l)^2 - S_{aa} (S_b^l)^2 + S_{ab} S_b^l S_a^l}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \partial^2 u = - \frac{S_{aa} (S_b^l)^2 - 2 S_{ab} S_a^l S_b^l + S_{bb} (S_a^l)^2}{(S_a^l + S_b^l)^3} (dn - dy)^2
 \end{aligned}$$

II. Дифференцируемые отображения,

замена переменных.

№ 3.105

105. Найти якобиан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)}$ отображения

$x = r \cos^p \varphi \cos^q \psi, \quad y = r \sin^p \varphi \cos^q \psi, \quad z = r \sin^q \psi, \quad p, q \in N.$

$$\begin{aligned}
 J_2 & \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \cos^p \varphi \cos^q \psi & r p \cos^{p-1} \varphi \cos^q \psi (-\sin \psi) & r q \cos^p \varphi \cos^q \psi (-\sin \psi) \\ \sin^p \varphi \cos^q \psi & r p \sin^p \varphi \cos^q \psi \cos \psi & r q \sin^p \varphi \cos^{q-1} \psi (-\sin \psi) \\ \sin^q \psi & 0 & q r^2 \sin^{q-1} \psi \cos \psi \end{array} \right| \\
 & \left| \begin{array}{ccc} \cos^p \varphi & -ctg \varphi \operatorname{tg} \psi & \cos^p \varphi \\ \sin^p \varphi & 1 & \sin^p \varphi \\ \operatorname{tg}^q \psi & 0 & -\operatorname{tg}^{q-1} \psi \cdot ctg \psi \end{array} \right| \cdot r^p \sin^{p-1} \psi \cos^q \psi \cos \psi = \\
 & \cdot r^q \cos^q \psi (-\sin \psi)
 \end{aligned}$$

$$= r^2 pq \sin^p \psi \cos^q \psi \cos \psi \sin^{3q-1} \psi (-\sin \psi) \begin{vmatrix} 0 & -t g^{2-p} \psi & \cos^p \psi \\ 0 & 1 & \sin^p \psi \\ t g^q \psi + t g^q \psi & 0 & -t g^{q-1} \psi \cdot \sin \psi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= r^2 pq \sin^p \psi \cos^q \psi \cos \psi \sin^{3q-1} \psi (t g^q \psi + t g^q \psi)(t g^{2-p} \psi \cdot \sin^p \psi + \cos^p \psi) = \\ &= r^2 pq \sin^p \psi \cos^q \psi \cos \psi \sin^{3q-1} \psi t g^q \psi \cdot \frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \left(\frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} + \cos^p \psi \right) = \\ &= r^2 pq \sin^p \psi \cos^q \psi \cos \psi \sin^{3q-1} \psi t g^q \psi \cdot \frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{1}{\cos^{2-p} \psi} = \\ &= r^2 pq (\sin \psi \cos \psi)^{p-1} \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot \sin^{q-2} \psi = \\ &= \underline{pq r^2 (\sin \psi \cos \psi)^{p-1} \cdot (\cos \psi)^{2q-1} \cdot (\sin \psi)^{q-1}} \end{aligned}$$

WT3.

Т.3. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

показать, что якобиан отображения всюду в \mathbb{R}^2 отличен от нуля, но отображение не является взаимно однозначным. Найти множество значений отображения f .

$$U = e^x \cos y; V = e^x \sin y$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$U_1 = e^{x_1} \cos y_1$$

$$V_1 = e^{x_1} \sin y_1 \quad \text{также} \quad y_1 = y_2 + 2\pi j, j \in \mathbb{Z} \Rightarrow U_2 = e^{x_2} \cos y_2 \Rightarrow V_2 = e^{x_2} \sin y_2$$

\Rightarrow не лок. взаимно однозначн.

$$u = \operatorname{Re}(e^{x+yi}), \quad v = \operatorname{Im}(e^{x+yi})$$

$\Rightarrow U$ и V принципиально зависят друг от друга, кроме 0

$$\Rightarrow E(f) = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

WT4

Т.4. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, r > 0.$$

Выразить частные производные r и φ по переменным x и y как функции от r и φ .

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot u'_{x_0} \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot u'_{x_0} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -r \sin \varphi \\ 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos \varphi$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 1 \\ \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = -\sin \varphi$$

$$r'_x = \cos \varphi; u'_{x_0} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\begin{cases} 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot u'_{y_0} \\ 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot u'_{y_0} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -r \sin \varphi \\ 1 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \sin \varphi$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 1 \end{vmatrix} = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow r'_y = \sin \varphi; u'_{y_0} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

№3.86

86. Решить уравнение $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, преобразовав его к полярным координатам.

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi$$

$$U'_{x_0} = U'_r \cdot r'_x + U'_\varphi \cdot u'_{x_0} = U'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$$

$$U'_y = U'_r \cdot r'_y + U'_\varphi \cdot u'_{y_0} = U'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$r \cos \varphi \sin \varphi \cdot u'_r + \cos^2 \varphi \cdot u'_\varphi - r \sin \varphi \cos \varphi \cdot u'_r + u'_\varphi \sin^2 \varphi = 0$$

$$\Rightarrow u'_\varphi = 0 \Rightarrow U = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\text{Ответ: } U = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

№3.88(1)

88. Решить уравнение, преобразовав его к новым независимым переменным u и v :

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x + y, \quad v = x - y;$$

$$z'_x = z'_u \cdot u'_u + z'_v \cdot v'_u = z'_u + z'_v$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u - z'_v$$

$$z'_u - z'_v = 0 \Rightarrow z'_{uv} = 0 \Rightarrow \underline{z = f(u) = f(x+y)}$$

Однобран: $u = f(x+y)$

№ 91.

91. Преобразовать уравнение $(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв x за функцию, а $u = y-z$, $v = y+z$ за независимые переменные.

$$z = x(u, v)$$

$$\begin{aligned} dz &= x'_u du + x'_v dv = x'_u (u'_z dz + u'_y dy) + x'_v (v'_z dz + v'_y dy) = \\ &= x'_u (-dz + dy) + x'_v (dz + dy) \end{aligned}$$

$$dz = (x'_v - x'_u) + z + (u'_u + v'_v) dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x'_u + x'_v}{x'_u - x'_v}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x'_u - x'_v}$$

$$-U \cdot \frac{1}{x'_u - x'_v} + V \cdot \frac{x'_u + x'_v}{x'_u - x'_v} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x'_u + x'_v = \frac{u}{v}}$$

№ 51(2)

51. Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$2) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$r'_n = \cos \varphi; \quad r'_v = \frac{-\sin \varphi}{r}; \quad r'_y = \sin \varphi; \quad r'_x = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

$$u'_x = u'_r \cdot r'_n + u'_\varphi \cdot r'_n = u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot r'_y = u'_r \cdot \sin \varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$u''_{xx} = (u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r})'_r \cdot r'_n + (u'_r \cdot \cos \varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{r})'_\varphi \cdot r'_n$$

$$u''_{rrr} = (u'_r \cos\varphi + u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r^2}) \overset{-\cos\varphi}{r'_{rr}} + (u'_r (-\sin\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}) - u'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}) \overset{-\sin\varphi}{r'_{\varphi\varphi}} =$$

$$= u''_{rrr} \cos^2\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r} + u'_\varphi \frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u'_\varphi \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{r^2} =$$

$$u''_{rrr} = u''_{rrr} \cos^2\varphi + 2u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u'_\varphi \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2}$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot u'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$u''_{yy} = (u'_r \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}) \overset{-\sin\varphi}{r'_{rr}}_y + (u'_r \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}) \overset{-\cos\varphi}{r'_{\varphi\varphi}}_y =$$

$$= (u''_{rrr} \sin\varphi - u'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r^2}) \overset{-\sin\varphi}{r'_{rr}}_y + (u'_r (\cos^2\varphi + u'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r} - u'_r \sin\varphi) \overset{-\cos\varphi}{r'_{\varphi\varphi}}_y =$$

$$= u''_{rrr} \sin^2\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} =$$

$$u''_{yy} = u''_{rrr} \sin^2\varphi - 2u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2}$$

$$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$

$$u''_{xy} = (u'_r \cos\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}) \overset{-\sin\varphi}{r'_{rr}}_y + (u'_r \cos\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}) \overset{-\cos\varphi}{r'_{\varphi\varphi}}_y =$$

$$= (u''_{rrr} \cos\varphi + u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r^2}) \overset{-\sin\varphi}{r'_{rr}}_y + (u'_r (-\sin\varphi) - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r} - u'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}). \overset{-\cos\varphi}{r'_{\varphi\varphi}}_y =$$

$$= u''_{rrr} \cos^2\varphi + u'_\varphi \frac{\sin^2\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\cos^2\varphi}{r^2} =$$

$$r^2 \cos^2\varphi (u''_{rrr} \cos^2\varphi + 2u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u'_\varphi \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2}) +$$

$$+ 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi (u''_{rrr} \cos^2\varphi + u'_\varphi \frac{\sin^2\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r} - u'_\varphi \frac{\cos^2\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2}) =$$

$$+ r^2 \sin^2\varphi (u''_{rrr} \sin^2\varphi - 2u'_\varphi \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u'_\varphi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2}) = 0$$

$$r^2 u''_{rrr} + 2u'_\varphi \sin\varphi \cos\varphi + 2 \cos\varphi \sin\varphi u'_\varphi (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 u''_{rrr} = 0 \Rightarrow \underline{r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0}$$

№4.52(1)

52. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

$$1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad u = x - at, \quad v = x + at;$$

$$z'_t = z'_u \cdot u'_t + z'_{uv} \cdot v'_t = z'_u(-a) + z'_{uv}a$$

$$z'_{2x} = z'_u \cdot u'_x + z'_{uv} \cdot v'_x = z'_u + z'_{uv}$$

$$z''_{tt} = -a((z'_u - z'_{uv})u'_t + (z'_u + z'_{uv})v'_t) =$$

$$= -a((z''_{uu} - z''_{vv})(-a) + (z''_{uv} - z''_{vv})a) = a^2 z''_{uu} - a^2 z''_{vv} - a^2 z''_{uv} + a^2 z''_{vv} = \\ = a^2(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

$$z''_{xx} = (z'_u + z'_{uv})u'_x + (z'_u + z'_{uv})v'_x = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$$

$$z''_{tt} = a^2 z''_{uu} :$$

$$a^2(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}) = a^2(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}) \quad \text{при симметризации}$$

$$\Rightarrow z''_{uv} = 0 \Rightarrow z'_u = f(u) \Rightarrow Z = f(u) + g(v)$$

$$Z = f(x-a t) + g(x+a t)$$

III. Экстремумы функций
многих переменных.

№5.

Т.5. В стационарной точке квадратичная форма второго дифференциала положительно полуопределенна.

- a) Может ли эта точка быть точкой строгого локального минимума?
- б) Может ли эта точка быть точкой строгого локального максимума?
- в) Может ли эта точка не быть точкой локального экстремума (даже нестрогого)?

a) может, $f(x) = x^4$

б) может, $f(x) = -x^4$

в) может, $f(x) = x^3$

№5.2(2)

Исследовать функцию $u(x; y)$ на экстремум (1-8).

2) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$

$$u'_x = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{y}$$

$$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow \frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ y = \pm 2, y = \pm 1$$

Четыре точки: $(1; 2); (-1; -2); (2; 1); (-2; -1)$

$$u''_{xx} = 6y$$

$$u''_{yy} = 6x \Rightarrow d^2u = 6(y(dx^2 + dy^2) + 2xdxdy)$$

$$u''_{xy} = 6y$$

$$(1; 2): \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow (1; 2) - \text{лок. мин}$$

$$(-1; -2): \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow (-1; -2) - \text{лок. макс}$$

$$(2; 1): \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow (2; 1) - \text{лок. макс. экстр.}$$

$$(-2; -1): \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow (-2; -1) - \text{лок. макс. экстр.}$$

Ответ: $u(1; 2) = -25 - \text{лок. макс.}$

$u(-1; -2) = 31 - \text{лок. макс.}$

№5.9

9. Найти все стационарные точки функции $u = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

$$u'_x = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm 1$$

$$u'_y = 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$$

3 симм. максимумы: $(0;0)$, $(1;0)$, $(-1;0)$

$$u_{xx} = 12x^2 - 4$$

$$u_{xy}'' = 0$$

$$\Rightarrow d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$$

$$u_{yy}'' = 12y^2$$

$$(0;0) : d^2u = -4dx^2 \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{синг. максимум}$$

$$\Delta u(0;0) = u(\Delta x; \Delta y) - u(0;0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 = \\ = (\Delta x)^2 ((\Delta x)^2 - 2) + (\Delta y)^4$$

при $|\Delta x| < \sqrt{2}$ — в зависимости от Δy либо > 0 , либо < 0

\Rightarrow крит. точка δ (0;0)

$$(\pm 1; 0) : d^2u = \pm 8dx^2 - \text{коренное максимум}$$

$$\Delta u(\pm 1; 0) = u(\Delta x; \Delta y) - u(\pm 1; 0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 + 1 = \\ = ((\Delta x)^2 - 1)^2 + (\Delta y)^4 > 0 \quad \forall \Delta x, \Delta y \Rightarrow (\pm 1, 0; \pm 1) - \text{лок. мин}$$

Нельзя крит. точк. — лин, м.н. формы максимума.

N5.13(1)

Исследовать функцию $u(x; y; z)$ на экстремум (13-15).

13. 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x;$

$$u_x' = 2x - y + 1 = 0$$

$$u_y' = 2y - x = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$u_z' = 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1$$

1 симм. максимум $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1)$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}; x = -\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

$$u_{xx}^u = 2; u_{yy}^u = 2; u_{zz}^u = 2$$

$$u_{xy}^u = -1; u_{xz}^u = 0; u_{yz}^u = 0$$

$$d^2u = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2dxdy$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) - \text{лок. минимум}$$

$$\text{Ответ: } u\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{1}{3}.$$

N5.18(1)

18. Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x; y)$, заданную неявно уравнением:

$$1) x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0;$$

Возьмем дифференциал:

$$2xdx + 2ydy + 2u \cdot du + 2dx - 2dy + 4du = 0$$

$$du = -\frac{(x+1)dx + (y-1)dy}{u+2}$$

$$\Rightarrow u_x' = -\frac{x+1}{u+2} = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 2 \text{ крит. точки} \\ (-1; -1; -5), (-1; 1; 1) \end{array} \right.$$

$$u_y' = -\frac{y-1}{u+2} = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$d^2u = -\frac{(u+2)(dx^2 + dy^2) - du((x+1)dx + (y-1)dy)}{(u+2)^2}$$

$$f(-1; 1; -5);$$

$$d^2u = \frac{3dx^2 + 3dy^2}{9} = \frac{1}{3}dx^2 + \frac{1}{3}dy^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \Rightarrow \underline{(-1; 1; -5) - \text{лок. мин.}}$$

$$f(-1; 1; 1); d^2u = -\frac{3dx^2 + 3dy^2}{9} = -\frac{1}{3}dx^2 - \frac{1}{3}dy^2$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}; \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow \text{(-1; 1; 1) - экст. макс.}$$

Ответ: (-1; 1; -5) - экст. мин.; (-1; 1; 1) - экст. макс.

№5.19(2)

19. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$1) u = xy, x + y - 1 = 0;$$

$$y = 1 - x \Rightarrow u = -x^2 + x \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}; y_0 = \frac{1}{2}; u_0 = \frac{1}{4} - \text{экст. макс}$$

Ответ: усл. макс. $u(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

№5.21(2)

21. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$2) u = 1 - 4x - 8y, x^2 - 8y^2 = 8;$$

$$\mathcal{L}(x) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} = 8 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}; x = 4; y = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{2}; x = -4; y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial xy} = 0 \Rightarrow d^2 \mathcal{L} = 2\lambda dx^2 - 16\lambda dy^2 - \text{находится}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = -16\lambda$$

$$2\lambda dx^2 - 16\lambda dy^2 \geq 0 \Rightarrow dy = \frac{dx}{8y}$$

$$d^2 \mathcal{L} = (2\lambda - \frac{dx^2}{4y^2}\lambda) dx^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2}; x = 4; y = -1 \Rightarrow d^2 \mathcal{L} = (1 - 4 \cdot \frac{1}{2}) dx^2 = -dx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(4; -1) = 7 - \text{усл. максимум}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}; x = -4; y = 1 \Rightarrow d^2 \mathcal{L} = (-1 + 4 \cdot \frac{1}{2}) dx^2 = dx^2$$

$$\Rightarrow u(-4; 1) = 9 - \text{усл. минимум}$$

Ошибки: $U(4; -1)^2 = 8$ - усл. максимум; $U(-4; 1) = 9$ - усл. минимум

№5.25(6)

25. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y; z)$ при заданном ограничении связан:

6) $u = x - y + 2z$, $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$

$$\mathcal{L}(x) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u = 1 + 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} u = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} u = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y > 0 \\ z \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{2\lambda} \end{array} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2} = 16 \\ 4 = 64\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}; x = -2; y = 2; z = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{4}; x = 2; y = -2; z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{xx}'' = 2\lambda; \mathcal{L}_{xy}'' = 2\lambda; \mathcal{L}_{yy}'' = 2\lambda; \mathcal{L}_{xz}'' = 0; \mathcal{L}_{yz}'' = 0; \mathcal{L}_{zz}'' = 4\lambda$$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda d\mathbf{x}^2 + 2\lambda dxdy + 2\lambda dy^2 + 4\lambda dz^2$$

$$\lambda = \frac{1}{4}; \quad d^2\mathcal{L} = \frac{1}{2}d\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{2}dy^2 + dz^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array} \Rightarrow U(-2; 2; -2) = -8 - \text{усл. максимум.}$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}; \quad d^2\mathcal{L} = -\frac{1}{2}d\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{2}dy^2 - dz^2$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{array} \Rightarrow U(2; -2; 2) = 8 - \text{усл. максимум}$$

Ошибки: $U(-2; 2; -2) = -8$ - усл. минимум; $U(2; -2; 2) = 8$ - усл. максимум

№5.31(3)

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции u на заданном множестве (28-33).

3) $u = x + y + z$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

$$\mathcal{L}(x) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 - z), \quad z \leq 1$$

$$\mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x; \quad \mathcal{L}'_y = 1 - 2\lambda y; \quad \mathcal{L}'_z = 1 + \lambda$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$$

$$L_{xx}'' = -2\lambda; L_{yy}'' = -2\lambda; L_{zz}'' = 0; L_{xy}'' = L_{yz}'' = L_{zx}'' = 0$$

$d^2L = -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 = 2(dx^2 + dy^2)$ — положит. Огранич.

$$\Rightarrow \text{найд } x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2} \quad x+y+z \rightarrow \min \Rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow \min \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$U(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) = m_2 = -\frac{1}{2}$$

Посколько наименьшее значение $x+y+z$, когда x, y, z — максимумы,

$$\text{т.е. } z=1; \quad x^2+y^2=1$$

$$L(x) = x+y - \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} L_x' = 1 - 2\lambda x; \quad L_y' = 1 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}; \quad y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{отр. реш} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\Rightarrow

$$\text{Отвтв: } M = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}; \quad m = U\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}$$

IV. Кратные интегралы.

§§: 23; 34.

Т.6. Пусть функция f двух переменных определена на прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$.

- Верно ли, что если функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$, а функция $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ интегрируема на $[a, b]$, то функция f интегрируема на P ?
- Верно ли, если функция f интегрируема на P , то функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$?

§8: 79(1); 83(15); 85(3); 90(1, 8); 133(2); 139(2); 175(2); 176(2).

§8: 106(3); 107(2); 110(3); 124(1, 5); 144(6); 145(1); 146(3); 147; 148(2).

§9: 6(2); 8(6); 10; 13(5); 16(3); 21; 63(4).

№8.23

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad G = [0;1] \times [0;1]$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f dx = \int_0^1 dy \left[\int_0^1 f dx + \int_1^y f dx \right] =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \int_0^1 dy \left(\frac{x}{y^2} \Big|_0^y + \frac{1}{x} \Big|_y^1 \right) = \int_0^1 dy = 1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x f dy + \int_x^1 f dy \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\int_0^n -\frac{dy}{x^2} + \int_n^1 \frac{dy}{y^2} \right) = \int_0^1 \left(-\frac{y}{x^2} \Big|_0^n - \frac{1}{y} \Big|_n^1 \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n} \right) dx =$$

$$\overbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 f dy}^{=-1} \neq \int_0^1 dy \int_0^1 f dx \Rightarrow \text{не интегрируема на } [0;1] \times [0;1]$$

№76.

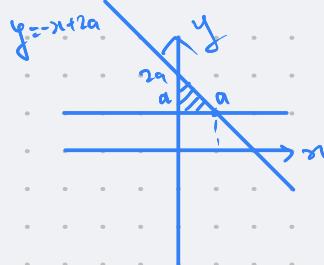
a) нет (предыдущий пример)

б) нет : $f(0; y) = \begin{cases} 1, & y \in Q \\ 0, & y \notin Q \end{cases}$ — не нет. при $x=0$

№8.79(1)

В задачах 78–81 для заданного множества G записать интеграл $\iint f(x; y) dx dy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

79. G — четырехугольник, ограниченный прямыми ($a > 0$):
 1) $x = 0, y = 0, y = a, x + y = 2a$;

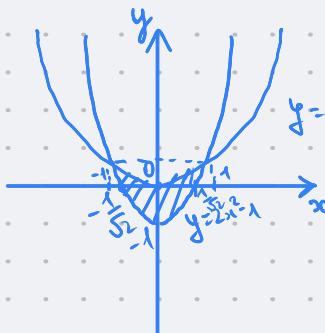


$$\int_0^a dx \int_{-x+2a}^{2a} f(x; y) dy; \quad \int_a^{\infty} dy \int_0^{-y+2a} f(y; x) dx$$

№8.83(15)

83. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$15) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x; y) dy; \quad 2x^2-1 = y$$



$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x; y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^0 f(y; x) dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y+1}} f(y; x) dx$$

№8.85(3)

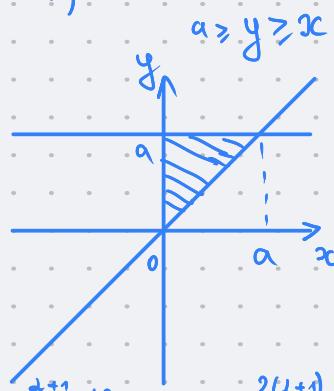
85. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

$$3) \int_0^a dx \int_x^a (a^2 - y^2)^\alpha dy, \quad a > 0, \alpha > 0;$$

$$= \int_0^a dy \int_0^y (a^2 - y^2)^\alpha dx =$$

$$= \int_0^a y (a^2 - y^2)^\alpha dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - y^2)^\alpha d(a^2 - y^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - y^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{2(\alpha+1)}}{\alpha+1}$$



№8.90(1;8)

Вычислите двойные интегралы (по x, по y).

$$90. 1) \iint (x \sin y + y \cos x) dx dy, \quad G = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} (x \sin y + y \cos x) dy = \int_0^{\pi/2} \left[x(-\cos y) + \frac{y^2}{2} \cos y \right]_0^{\pi/2} dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos x \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

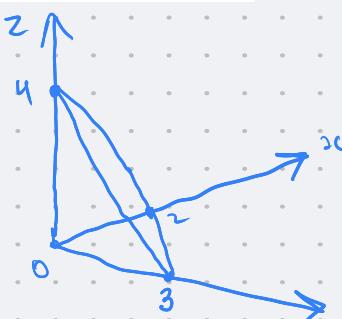
8) $\iint_G \sqrt{x-y} dx dy, G = \left\{ \frac{4}{5}x \leq y \leq x, 1 \leq y \leq 4 \right\};$

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \int_{\frac{4}{5}x}^x \sqrt{x-y} dy dx = \\ & = \int_1^4 \left[\frac{2(x-y)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{\frac{4}{5}x}^x \right] dy = \\ & = \int_1^4 \left[\frac{2 \cdot (\frac{1}{5}y)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] dy = \frac{1}{12} \cdot \int_1^4 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^5}{5} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1^5}{5} = \\ & = \frac{1}{12} \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{30} \end{aligned}$$

18.133(2)

133. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

2) $\int_0^4 \int_0^{3-3z/1} \int_0^{2-2y/3-z/2} f(x; y; z) dx dy dz, (x; y; z);$



$$6x + 4y + 3z = 12$$

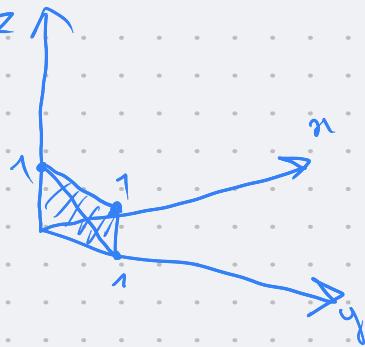
$$z=0; y=0 \Rightarrow x=2$$

$$\begin{aligned} & \text{=} \iint_S f(x; y; z) dxdydz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{4-2x-\frac{4y}{3}} f(x; y; z) dz dy dx \end{aligned}$$

18.139(2)

139. Вычислить интеграл $\iiint_G f(x; y; z) dx dy dz$, если:

2) $f(x; y; z) = (1 + x + y + z)^{-3}$; область G ограничена плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

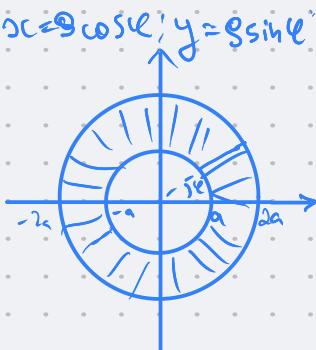


$$\begin{aligned}
 & \iiint f(x, y, z) dx dy dz \\
 G &= \iiint_S x dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{1+x+y+z}^{1-x-y} dz = \\
 S &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{(1+x+y+z)^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} dy = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{(1+x+y)^2}{2} \right) dy dz \Big|_0^{1-x-y} = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{(1+x)^2}{2} \right) dz = \frac{(x-1)^2}{16} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \Big|_0^1 + \frac{\ln(1+x)}{2} \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{8 \ln 2 - 5}{16}
 \end{aligned}$$

N8.106(3)

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам (106-109).

3) $\iint_G |xy| dx dy, G = \{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\};$



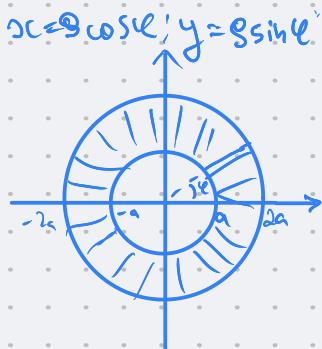
$$\begin{aligned}
 & \Theta 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_a^{2a} r^3 \cos \phi \sin \phi dr = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi \cdot \left(\frac{8^4}{4} \right) \Big|_a^{2a} = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\phi \cdot dsin \phi \cdot 15a^4 = \frac{\sin^2 4\phi}{2} \cdot 15a^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{15a^4}{2}
 \end{aligned}$$

8.105(2) и 8.106(2) носят следующего номера

N8.106(3)

Вычислить интегралы, переходя к полярным координатам (106-109).

3) $\iint_G |xy| dx dy, G = \{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\};$



$$\Theta 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_a^{2a} r^3 \cos \phi \sin \phi dr = \\ = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi d\phi \cdot \left(\frac{8a^4}{4}\right) \Big|_a^{2a}$$

N8.175(2)

175. Вычислить интегралы по кубу $Q_n = [0; a]^n \in R^n, n \geq 2$:

2) $\int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k dx; = \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \dots \int_0^a dx_{n-1} \int_0^a \sum_{k=1}^n x_k dx_n =$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \dots \int_0^a dx_{n-1} \int_0^a x_k dx_n = n \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \dots \int_0^a dx_{n-2} \\ = n \cdot a^{n-1} \int_0^a x_n dx_n = \frac{n a^{n+1}}{2}$$

N176(2)

176. Вычислить интегралы по пирамиде $\Pi_n = \{0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq a\}$:

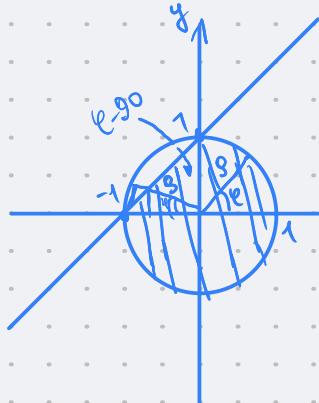
2) $\int_{\Pi_n} x_1 x_2 \dots x_n dx; = \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n =$

$$= \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_{n-1} dx_{n-1} = \dots = \int_0^a x_1 dx_1 \cdot \frac{x_1^{2(n-1)}}{(2(n-1))!!}$$

$$= \int_0^a \frac{x_1^{2n-1}}{(2(n-1))!!} dx_1 = \frac{a^{2n}}{(2n)!!}$$

N8.107(2)

$$2) \iint_G y \, dx \, dy, \quad G = \{x^2 + y^2 \leq 2x, \quad x > y\};$$



$$y = x^1 + 1$$

$$\Delta C = 1 + \cos \varphi$$

$$y = 8 \sin \varphi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\cos \varphi$$

$$\sin \varphi$$

$$-1$$

$$1$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\pi$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$2$$

$$\frac{5\pi}{2}$$

$$3$$

$$\frac{7\pi}{2}$$

$$4$$

$$8 \sin \varphi = 8 \cos \varphi + 1$$

$$8 = \frac{8 \cos \varphi + 1}{\sin \varphi - \cos \varphi}$$

$$\frac{8}{\sin \varphi - \cos \varphi}$$

$$2$$

$$\frac{8}{\sin \varphi - \cos \varphi}$$

$$1$$

$$\frac{8}{\sin \varphi - \cos \varphi}$$

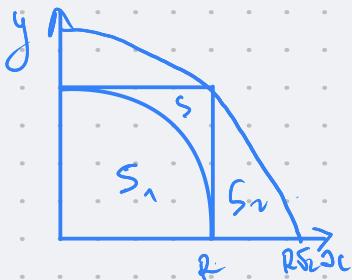
$$\textcircled{1} = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \cdot \frac{8}{3} \Big|_1^{\cos \varphi} = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi - \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{80544}{4} \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \cdot (-\cos \varphi) \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_1^{8^2 \sin \varphi} dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \frac{8}{3} \Big|_1^{\frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi}} =$$

$$-\frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(\sin \varphi - \cos \varphi)^3} - \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi} d\varphi$$

3) вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.



N8.110(3)

S — площадь квадрата.

S_1 — площадь малого сектора.

S_2 — площадь большого.

$$e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_{\text{up}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{S_{\text{up}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq$$

$$\leq \iint_{S_{\text{up}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

S_{up}

$$\iint_{S_{\text{up}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\iint_{S_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/4} du \int_0^r e^{-r^2} r dr = \int_0^{\pi/2} du \cdot \frac{1}{2} (-e^{-r^2}) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} \cdot (1 - e^{-R^2})$$

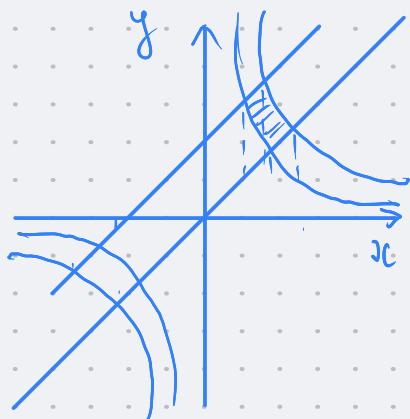
$$\iint_{S_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} du \int_0^{R^2} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (-e^{-r^2}) \Big|_0^{R^2} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}), \quad R \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

N124(1; 5)

124. 1) $f(x; y) = x + y$, G ограничено линиями $xy = a$, $xy = b$, $y = x$, $y = x - c$, где $0 < a < b$, $0 < c$;

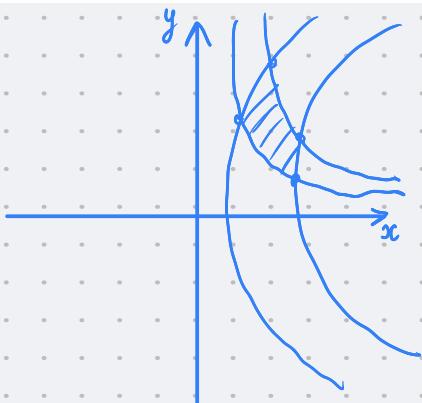


$$u = xy, v = x - y \\ \Rightarrow u(a), u(b) \\ v = 0, v = c$$

$$\frac{D(x; y)}{D(u; v)} = \frac{1}{\frac{D(u; v)}{D(x; y)}} = \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \iint_G (x+y) \, dx \, dy = \iint_G du \, dv = \int_0^c \int_a^b \, du \, dv = c(b-a)$$

5) $f(x; y) = x^4 - y^4, G = \{x > 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2\}.$



$$u = xy \Rightarrow 1 \leq u \leq 2 \\ v = x^2 - y^2 \Rightarrow 1 \leq v \leq 2$$

$$\frac{D(x; y)}{D(u; v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

$$\iint_G (x^4 - y^4) \, dx \, dy = \iint_G \frac{v}{2} \cdot du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 u \, du \, dv = \frac{3}{4}$$

N144(6)

6) $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}.$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta$$

$$\frac{D(x; y; z)}{D(r; \theta; \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$r \leq \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz &= \iiint_G g^3 \sin\theta d\phi d\theta dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos\theta \int_0^g g^3 \sin\theta dg = 2\int_0^{\pi} \int_0^g \sin\theta d\theta \cdot \frac{g^4}{4} \Big|_0^{\cos\theta} = \\
 &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{10}
 \end{aligned}$$

N145(1)

1) $\iiint_G f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz,$
 $G = \{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}\};$

$$\begin{aligned}
 x &= g \sin\theta \cos\phi \\
 y &= g \sin\theta \sin\phi \\
 z &= g \cos\theta \\
 J &= g^2 \sin\theta
 \end{aligned}$$

Конус, лежащий

$$G^* = \left\{ g \sin\theta \leq g \cos\theta \leq \sqrt{2-g^2 \sin^2 \theta} \right\} \Rightarrow
 \begin{cases} 0 \leq g \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_G f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz &= \iiint_{G^*} g^2 \sin\theta f(g) dg d\theta dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} g^2 f(g) dg = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} g^2 f(g) dg
 \end{aligned}$$

N146(3)

146. Вычислить интеграл $\iiint_G f(x; y; z) dx dy dz$, переходя к цилиндрическим координатам, если:

3) $f(x; y; z) = x^2 + y^2, G = \{(x^2 + y^2)/2 \leq z \leq 2\};$

$$\begin{aligned}
 x &= g \cos\phi \\
 y &= g \sin\phi \\
 z &= z
 \end{aligned}$$

$$G^* = \left\{ \frac{g^2}{2} \leq z \leq 2 \right\}$$

$J = g$

$$\iiint_G f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{G^*} g^3 dg d\phi dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{4-z}} g^3 dg \int_{\frac{z^2}{2}}^2 dz$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^2 s^3 ds \cdot \left(2 - \frac{s^2}{2}\right) = 2\pi \left(2 \int_0^2 s^3 ds - \frac{1}{2} \int_0^2 s^5 ds\right) = 2\pi \cdot \left(8 - \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{6}\right) =$$

$$= 2\pi \left(8 - \frac{16}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{16\pi}{3}}}$$

№147.

147. Показать, что при переходе к обобщенным сферическим координатам

$$x = ar \cos \varphi \cos \psi, \quad y = br \sin \varphi \cos \psi, \quad z = cr \sin \psi$$

якобиан отображения равен $J = abc r^2 \cos \psi$.

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \varphi \cos \psi & -a r \sin \varphi \cos \psi & -a r \cos \varphi \sin \psi \\ b \sin \varphi \cos \psi & b r \cos \varphi \cos \psi & -b r \sin \varphi \sin \psi \\ c \sin \psi & 0 & c r \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a \cos \varphi \cos \psi \cdot b c r^2 \cos \varphi \cos^2 \psi + a r \sin \varphi \cos \psi (b c r \sin \varphi \cos^2 \psi + b r \sin \varphi \sin^2 \psi) \\ &\quad + a r \cos \varphi \sin \psi b c r \cos \varphi \sin \psi = a b c r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + a b c r^2 \sin^2 \varphi \cos \psi + \\ &\quad + a b c r \cos^2 \varphi \sin^2 \psi = a b c r^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + \cos^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^2 \psi) = \\ &= a b c r^2 \cos \psi (\cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \psi) = \\ &= \underline{\underline{a b c r^2 \cos \psi}} \end{aligned}$$

№148 (2)

148. Пусть $G = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$. Вычислить интегралы:

$$2) \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz;$$

$$dx = a r \cos \varphi \cos \psi$$

$$dy = b r \sin \varphi \cos \psi$$

$$dz = c r \sin \psi$$

$$J = abc r^2 \cos \psi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (a^2 + b^2) \cos^2 \psi$$

$$G^* = \{r^2 \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{G^*} abc r^4 (a^2 + b^2) \cos^3 \psi dr d\varphi d\psi = \\
 &= abc(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} r^4 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2abc(a^2 + b^2)\sqrt{5}}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \psi) d\sin \psi \\
 &= \frac{2abc(a^2 + b^2)\sqrt{5}}{5} \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8abc(a^2 + b^2)\sqrt{5}}{15}
 \end{aligned}$$

N9.6(2)

6. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно использовать полярные координаты):

$$2) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \geq a > 0);$$

$$x = a \cos \varphi$$

$$y = a \sin \varphi$$

$$J = 8$$

$$\begin{cases} \rho^4 = 2a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \\ \rho \geq a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \\ \rho^2 \geq a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\varphi \geq 0 \\ \cos 2\varphi \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a \cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \cdot a^2 (2 \cos 2\varphi - 1) = a^2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2\varphi d\varphi - \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

N9.8(6)

8. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно воспользоваться обобщенными полярными координатами; см. задачу 119, §8):

$$6) \sqrt[4]{x/a} + \sqrt[4]{y/b} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos^4 \varphi \\
 y &= b \sin^4 \varphi \quad \Rightarrow \sqrt[4]{ab} = 1 \Rightarrow ab = 1
 \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} a \cos^8 \varphi & -8a \cos^7 \varphi \sin \varphi \\ b \sin^8 \varphi & 8b \sin^7 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 64a^8 \cos^7 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{a^8 b^8 \sin^2 \varphi}{16}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{G^*} dxdy = \iint_{G^*} \frac{a^8 b^8 \sin^2 \varphi}{16} d\varphi dr = \frac{ab}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{ab}{64} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\cos^2 \varphi = -\frac{ab}{64} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi)^3 d\cos^2 \varphi = -\frac{ab}{64} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos^2 \varphi - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\cos^2 \varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\cos^2 \varphi \right) = -\frac{ab}{64} \left(\cos^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \cdot \frac{\cos^5 \varphi}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos^7 \varphi}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{ab}{64} \left(-2 + 2 - \frac{6}{5} + \frac{2}{7} \right) = -\frac{ab}{64} \cdot \left(-\frac{32}{35} \right) = \frac{ab}{70} \end{aligned}$$

№9.10.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

если $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} U &= a_1x + b_1y + c_1 \\ V &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \Rightarrow U^2 + V^2 = 1$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|}$$

$$\begin{aligned} U &= g \cos \varphi \\ V &= g \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow g^2 = 1$$

$$\iint_G dxdy = \iint_{G^*} \frac{g}{\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix}} d\varphi dr = J \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{|a_1b_2 - a_2b_1|}$$

№9.13(5).

5) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$:

$$x = 8 \cos \varphi$$

$$y = 8 \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$G^* = \{ 8 \leq z \leq 8(\cos \varphi + \sin \varphi) \}$$

$$J = 8$$

$$0 < \varphi \leq \cos \varphi + \sin \varphi \Rightarrow \tan \varphi \geq -1 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{8(\cos \varphi + \sin \varphi)} dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \varphi d(\sin \varphi) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

№9.16(3)

3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$, $a > 0$:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$$r^4 = a^3 r \sin \theta \cos \varphi$$

$$r^3 = a^3 \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow 0 < r < a \sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} \iint_{G^*} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt[3]{\sin \theta \cos \varphi}} r^2 \sin \theta dr = \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$-\frac{2a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{3}$$

№9.21.

21. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями
 $a_1x + b_1y + c_1z = \pm d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm d_3$,
 считая, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$U = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$V = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$W = a_3x + b_3y + c_3z$$

$$G^* = \{ |U| \leq d_1, |V| \leq d_2, |W| \leq d_3 \}$$

$$J = \frac{1}{|G|}$$

$$V = \frac{1}{|G|} \int_{-d_1}^{d_1} \int_{-d_2}^{d_2} \int_{-d_3}^{d_3} dU dV dW = 8 \cdot \frac{d_1 d_2 d_3}{|G|}$$

$$\sqrt{9.63(4)}$$

$$4) \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, \rho = \rho_0 z^2;$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$M_{xz} = M_y = 0 \quad (\text{м.н. мало вращения (нуль)})$$

$$M_{zz} = g_0 \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r r dr \int_r^h z^3 dz = \frac{\pi}{2} g_0 \int_0^h (h^3 - r^3) r dr = \frac{1}{6} \pi g_0 h^6$$

$$M = g_0 \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r r dr \int_r^h z^2 dz = \frac{2}{3} \pi g_0 \int_0^h (h^3 - r^3) r dr = \frac{1}{5} \pi g_0 h^5$$

$$Z_c = \frac{M_z}{M} = \frac{\pi}{6} h \quad x_c = y_c = 0$$