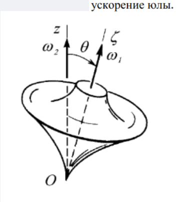
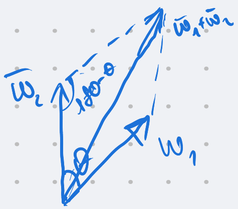
№4.4.

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.



$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$



$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta}$$

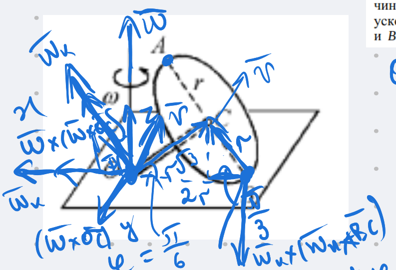
$$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}^e + \overline{\varepsilon}^r + \overline{\omega}^e\times\overline{\omega}^r$$

$$\overline{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\overline{\omega}}_1}_{=0} + \underbrace{\dot{\overline{\omega}}_2}_{=0} + \overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2 \Rightarrow \overline{\varepsilon} = \overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2$$

$$\varepsilon = \omega_1\omega_2\sin\theta$$

№4.10

4.10. Тонкое колесо радиуса r, жестко насаженное под прямым углом на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по плоскости без скольжения. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение стержня OC, описывающего коническую поверхность с неподвижной вершиной O, равны по величине ω и ε. Определить величины угловой скорости, углового ускорения колеса, а также величины ускорений его точек A и B.



$$\overline{\omega}\times\overline{OC} = \omega l\sin\varphi$$

$$\overline{V} = [\overline{\omega}\times\overline{r}]$$

$$OC = l = r\sqrt{3} \qquad V_0 = \omega$$

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}\times\overline{OC} = \overset{=0}{\overline{V}_B} + \overline{\omega}_k\times\overline{BC}$$

$$V_C = \omega r\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\omega r\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\omega r\sqrt{3}}{2} = r\omega_k\frac{1}{2} \Rightarrow \omega_k = \omega\sqrt{3}$$

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + \overline{\varepsilon}\times\overline{g} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{g})$$

$$\overline{W}_B = \overset{=0}{\overline{W}_0} + \overline{\varepsilon}_k\times\overline{OB} + \overset{=0}{\overline{\omega}_k\times(\overline{\omega}_k\times\overline{g})}$$

$$\overline{V} = [\overline{\omega};\overline{r}]$$

$$\dot{\overline{r}} = [\overline{\omega};\overline{r}]$$

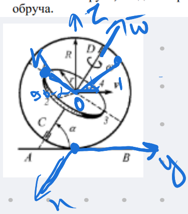
$$\overline{e}_{\omega_k} = \frac{\overline{\omega}_k}{\omega_k} \qquad \omega_k\overline{e}_{\omega_k} = \omega_k\cdot \qquad \dot{\overline{e}}_{\omega_k} = \overline{\omega}\times\overline{e}_{\omega_k}$$

$$\overline{\varepsilon}_k = \dot{\overline{\omega}}_k = \dot{\omega}_k\overline{e}_{\omega_k} + \omega_k\dot{\overline{e}}_{\omega_k} = \varepsilon\sqrt{3}\,\overline{e}_{\omega_k} + \overline{\omega}\times\overline{\omega}_k \qquad \dot{\overline{e}}_{\omega_k} = [\overline{\omega};\overline{e}_{\omega_k}]$$

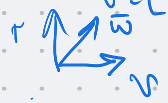
$$\Rightarrow \varepsilon_u = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}$$

$$\overline{\varepsilon_u} \times \overline{OB} = \qquad \times \begin{bmatrix} -2r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек $1, 3$ и $2, 4$ диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



$$\bar V = [\bar\omega; \bar r]$$



$$OU = \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha}$$

$$\overline{V_1} = \overline{\omega_0} \times \bar g + \bar V$$

$$\overline{\omega_0} = \bar\omega + \overline{\omega_{об}}$$

$$\omega_{об} = \frac{v}{R} \quad ; \quad \omega_{об} = \begin{bmatrix} \frac{v}{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix}$$

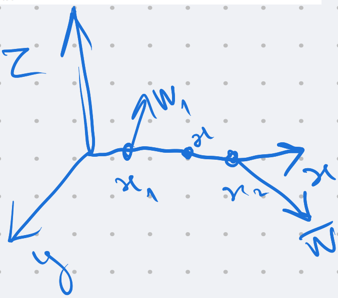
$$\overline{\omega_0} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{R} \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \bar V = \omega_{A} x$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -\frac{v}{R} & \omega\cos\alpha & \omega\sin\alpha \\ 0 & -r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix}$$

дальше очев.

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x.



$$\overline{W_2} = \overline{W_1} + \overline{\varepsilon_1} \times \overline{X_1X_2} + \overline{\omega_1} \times (\overline{\omega_1} \times \overline{X_1X_2})$$

$$\overline{W_2} - \overline{W_1} = \overline{\varepsilon_1} \times \overline{X_1X_2} + \overline{\omega_1} \times (\overline{\omega_1} \times \overline{X_1X_2})$$

$$\overline{W} = \overline{W_1} + \overline{\varepsilon_1} \times \overline{X_1X} + \overline{\omega_1} \times (\overline{\omega_1} \times \overline{X_1X})$$

$$\overline{X_1X_2} = k\overline{X_1X} \Rightarrow k = \frac{x_2-x_1}{x-x_1}$$

$$k(\overline{W}-\overline{W}_1) = \overline{\varepsilon}_1\times\overline{X_1X_2} + \overline{\omega}_1\times(\overline{\omega}_1\times\overline{X_1X_2}) = \overline{W}_2-\overline{W}_1$$

$$W = \frac{\overline{W}_2-\overline{W}_1}{k} + W_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot(\overline{W}_2-\overline{W}_1)+\overline{W}_1 =$$

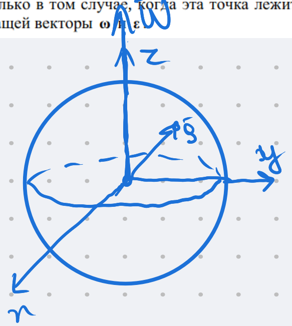
$$= \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\overline{W}_2 + \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\overline{W}_1$$

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$\overline{\varepsilon};\overline{W}$

$\overline{\omega} = \omega\overline{e}_\omega$

$\dot{\overline{e}}_\omega = [\omega; e_\omega]$

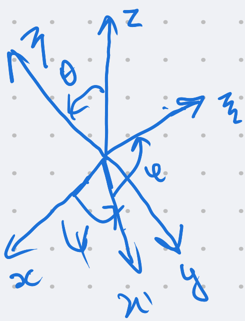


$$\overline{W} = \overline{\varepsilon}\times\overline{\rho} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{\rho}) + 2\overline{\omega}\times\overline{v}^r + \overline{W}^r$$

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

$A\overline{u} = \overline{u}$



Т2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x, а затем – на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ, связанного с телом, относительно x, если в начальный момент базисы x и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечно поворота и углы Эйлера.

Для случая:

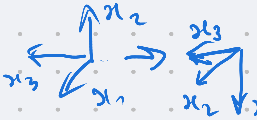
$e = [x_1\ x_2\ x_3]$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ, θ и φ. С помощью кватернионов найти угол и направляющие косинусы оси конечного поворота тела.

$$\boxed{\lambda \circ M = \lambda_0 m_0 - \bar{\lambda} \cdot \bar{m} + \lambda_0 \bar{m} + m_0 \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times \bar{m}} \; \begin{matrix} (1) \\ -1 \end{matrix}$$

$$\Lambda_1 = 1$$

$$\Lambda_3 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_3 \circ (\bar{\lambda})$$

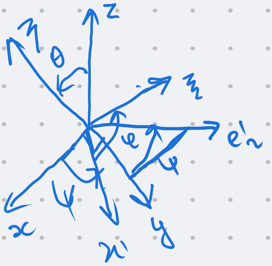
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\bar{\lambda} \cdot \bar{m} + \bar{\lambda} \times \bar{m} = \bar{e} \sin \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin$$

$$\Lambda_2 = \cos\frac{\theta}{2} + \bar{e}'_2 \sin\frac{\theta}{2} \quad \Lambda_1 = \cos\frac{\psi}{2} + \bar{e}_1 \sin\frac{\psi}{2} \quad \bar{e} = 0; \quad \varphi = 180^\circ$$

$$\Lambda_3 = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar{e}''_3 \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Big(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \bar{e}_1 \cdot \bar{e}'_2 \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \bar{e}_1 \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \bar{e}'_2 \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \bar{e}'_2 \times \bar{e}_1 \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\Big)$$

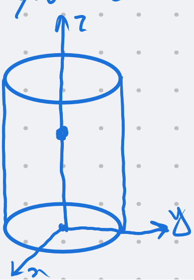


$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -e_2 \cos\psi \\ e_2 \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e''_3 = \begin{pmatrix} e_3 \cos\theta \\ 0 \\ e_3 \sin\theta \end{pmatrix}$$

2.9. В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{e}_z \omega_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e}_z \varepsilon_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Or цилиндрической системы координат $Or\varphi z$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?

$$\overline{W} = \cancel{\overline{W}_0}^{\,90} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega} \times \overline{V}^r + \overline{W}^r = \bar{0}$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -rw_e \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -w_e V_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -rw_e^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -w_e V_r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$W_r = -rw_e^2$$

$$-2w_e V_r = -r\varepsilon_e$$

$$V_r = \frac{r\varepsilon_e}{2w_e}$$