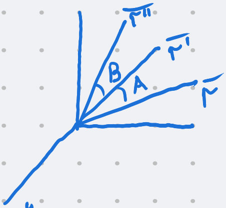
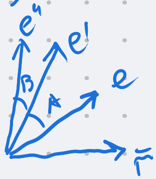


$C = BA$

$\bar r'' = C\bar r$

$C = A_n \cdot \ldots A_1$



e, e', e'' – базисы

$\bar r^{(1)} = \sum r_i^{(1)} \bar e_i'$; $\bar e_i' = A\bar e_i$

$\bar r = \sum r_i^{(1)} \bar e_i'\big|_e = \sum r_i^{(1)} A\bar e_i$

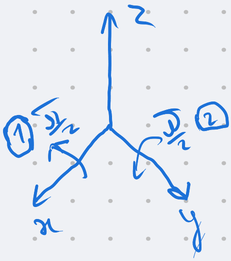
В базисе e: $\bar e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\bar e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\bar e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sum r_i^{(1)} \bar e_i = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar r = A\bar r^{(1)} \Rightarrow \boxed{\bar r^{(1)} = A^T \bar r}$ – как лев вектор при пер. от e к e', где $e' = Ae$

$\Rightarrow \bar r'' = B^T \bar r' = B^T A^T \bar r = (AB)^T \bar r \Rightarrow C = AB \Rightarrow \boxed{\bar r'' = C^T \bar r}$

В общем случае $\boxed{C = A_1 A_2 \ldots A_n}$

Пример 1.

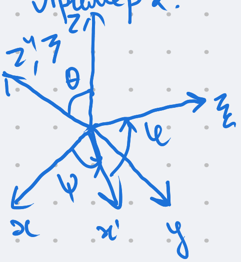


C – ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример 2.



$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

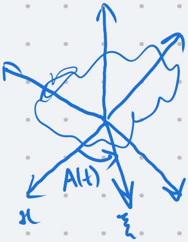
$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A_\psi A_\theta A_\varphi$$

Кинематические ур-ия Пуассона

для ортог. матриц.



$$A(t+\Delta t) = \begin{cases} (E + \Delta\hat{\varphi}_x) A(t) \\ A(t)(E + \Delta\hat{\varphi}_\xi) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta\bar{\varphi} & \longleftrightarrow & \Delta\hat{\varphi} \\ \Big\downarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} & & \Big\downarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \\ \bar{\omega} & \longleftrightarrow & \hat{\omega} \end{array}$$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\dot{A} = \begin{cases} \hat{\omega}_x A \\ A \hat{\omega}_\xi \end{cases}} \quad (1)$$

— кинематич. ур-ия Пуассона (9 ур-ий)

$A(t_0) \rightarrow$ интегр (1) $\Rightarrow A(t)$

$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_x(t) \\ \hat{\omega}_\xi(t) \end{bmatrix} \nearrow$

$$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3]$$

$$\dot{A} = \bar{\omega}_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{a}}_k = \bar{\omega}_x \times \bar{a}_k \\ k = 1,3 \end{cases}$$

Можно сокр. число ур-ий, подл. интегр-ию

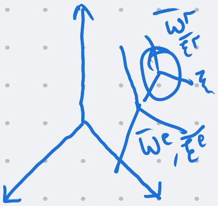
$$\dot{A} = \omega_x A \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{a}}_k = \bar{\omega}_x \times \bar{a} \\ k = 1,2 \\ \bar{a}_3 = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \end{cases} \text{ — 6 ур-ий}$$

Следствие из (1):

$$\boxed{\begin{cases}\hat{\omega}_x = \dot{A} A^T \\ \hat{\omega}_\xi = A^T \dot{A}\end{cases} \quad (2)}$$

, т.е. зная $A(t)$ можно выч-ть $\bar{\omega}(t)$ в баз. x или ξ

Сложное движение тв. тела.



$\bar{\omega}^e, \bar{\varepsilon}^e$ – угл. ск. и угл. подв. базиса

$\bar{\omega}^r, \bar{\varepsilon}^r$ – – и – тела отн. подв. базиса

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ – абс. угл. скор. и ускор. тела – ?

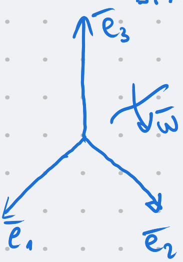
Свяжем с телом и подв. базисом промежут. базисы, совп. по ориентации с неподв. базисом

$t: \longrightarrow x, e, \xi$ $\quad t+\Delta t:$

Δt – мало $\Rightarrow$ $A \approx E + \Delta\hat{\varphi}^e$, $B \approx E + \Delta\hat{\varphi}^r$

$$C = AB \approx E + \underbrace{\Delta\hat{\varphi}^e + \Delta\hat{\varphi}^r}_{\Delta\hat{\varphi}}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\varphi}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\overset{\text{абс.}}{\bar{\omega}} = \overset{\text{пер.}}{\bar{\omega}^e} + \overset{\text{отн.}}{\bar{\omega}^r}}$$



$\dot{\bar{e}}_k = \bar{\omega} \times \bar{e}_k$

$\bar{a} = \sum a_k \bar{e}_k$

$$\dot{\bar{a}} = \underbrace{\sum \dot{a}_k \bar{e}_k}_{\frac{d'\bar{a}}{dt}} + \overbrace{a_k \dot{\bar{e}}_k}^{= a_k \bar{\omega} \times \bar{e}_k = \bar{\omega} \times \bar{a}}$$

$$\frac{d'\bar{a}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{a}} = \frac{d'\bar{a}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{a}$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega^e} + \overline{\omega^r} = \overline{\omega^e} + \sum \omega^r e_k$$

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \underbrace{\dot{\overline{\omega^e}}}_{\overline{\varepsilon^e}} + \underbrace{\dot{\overline{\omega^r}}}_{\underbrace{\frac{d'\overline{\omega^r}}{dt}}_{\overline{\varepsilon^r}} + \overline{\omega^e} \times \overline{\omega^r}}$$

$$\boxed{\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon^e} + \overline{\varepsilon^r} + \overline{\omega^e} \times \overline{\omega^r}}$$