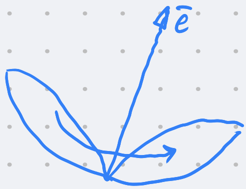
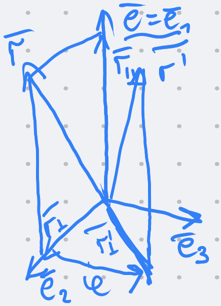
Теорема Эйлера о конечном повороте:

$\forall$ 2х положений тв. тела с неподв. точкой $\exists$ такой поворот, совмещающий эти 2 положения.



Обратно:



$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{r}-(\bar{r};\bar{e})\,\bar{e}}{r_{\perp}}$$

$$\bar{r}_{\parallel} = (\bar{r};\bar{e})\,\bar{e}$$

$$\bar{r}_{\perp} = \bar{r}-(\bar{r};\bar{e})\,\bar{e}$$

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}\times\bar{r}}{r_{\perp}}$$

$$\bar{r}'_{\parallel} = \bar{r}_{\parallel}$$

$$\bar{r}'_{\perp} = r_{\perp}\cos\varphi\, e_2 + r_{\perp}\sin\varphi\,\bar{e}_3 = (\bar{r}-(\bar{r};\bar{e})\,\bar{e})\cos\varphi + \bar{e}\times\bar{r}\sin\varphi$$

$$\bar{r}' = \bar{r}'_{\parallel} + \bar{r}'_{\perp} = \bar{r}\cos\varphi + \bar{e}\times\bar{r}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)(\bar{r};\bar{e})\,\bar{e}$$

$$\bar{e}\times \to \hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}\times\bar{r} = \hat{e}\,\bar{r}$$

$$(\bar{r};\bar{e})\,\bar{e} = \bar{e}\cdot\bar{e}^T\bar{r}$$

$$[\bar{e}\,\bar{e}^T]_{ij} = e_i e_j$$

$$\bar{r}' = (E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\,\bar{e}\,\bar{e}^T)\,\bar{r}$$

$$\boxed{A = E\cos\varphi + \hat{e}\sin\varphi + (1-\cos\varphi)\,\bar{e}\,\bar{e}^T}$$ – ортогон. матр. поворота (c)

$$\operatorname{tr} A = 3\cos\varphi + 1 - \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\operatorname{tr}A - 1}{2}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \Rightarrow a_{32}-a_{23}=2e_1\sin\varphi$$

$$a_{13}-a_{31}=2e_2\sin\varphi$$

$$a_{21}-a_{12}=2e_3\sin\varphi$$

$$\bar e=\frac{1}{2\sin\varphi}\begin{bmatrix} a_{32}-a_{23}\\ a_{13}-a_{31}\\ a_{21}-a_{12}\end{bmatrix};\ \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

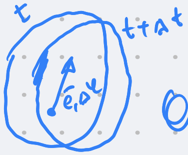
(1) по Тейлору (φ-мал)

$A\approx E+\hat e\varphi$

$\bar\varphi=\bar e\varphi$ — вектор Эйлера

$A\approx E+\hat\varphi$ — оператор малого поворота

Угловая скорость твердого тела

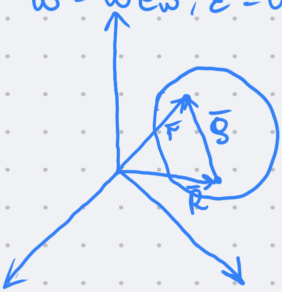


$\Delta\varphi$ - вект. Эйлера для поворота за Δt

Опр $\bar\omega=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\bar\varphi}{\Delta t}$ — угловая скорость

$\bar\varepsilon=\dot{\bar\omega}$ — угловое ускорение

$\bar\omega=\omega\bar e_\omega;\ \bar\varepsilon=\dot\omega\bar e_\omega+\omega\dot{\bar e}_\omega$



$\bar r=\bar R+\bar\rho$; $\dot{\bar R}=\bar V_0$ — ск. полюса

$\bar V=\dot{\bar R}+\dot{\bar\rho}$

$\bar\rho(t+\Delta t)\approx(E+\Delta\hat\varphi)\bar\rho(t)$

$$\Rightarrow \dot{\bar\rho}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\bar\rho(t+\Delta t)-\bar\rho(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\hat\varphi}{\Delta t}\bar\rho(t)$$

$\bar\omega=\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\bar\varphi}{t}$; $\widehat{\Delta\varphi}\Leftrightarrow\Delta\bar\varphi$

$\Rightarrow\dot{\bar\rho}=\bar\omega\bar\rho(t)\Rightarrow\boxed{\bar V=\bar V_0+\bar\omega\times\bar\rho}$ — ф-ла Эйлера

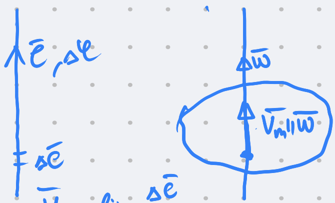
$$\Rightarrow \bar W = \underbrace{\dot{\bar V}_0}_{\bar W_0} + \underbrace{\dot{\bar\omega}}_{\bar\varepsilon}\times\bar\rho + \bar\omega\times\underbrace{\dot{\bar\rho}}_{\bar\omega\times\bar\rho}$$

$$\boxed{\bar W = \bar W_0 + \bar\varepsilon\times\bar\rho + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar\rho)}$$ — ф-ла Ривальса

Кинематич. винт тв. тела

Теорема Шаля: любое перем. тв. тела экв. винтовому перемещению

Рассмотрим движение тела за время Δt:



$$\bar V_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar e}{\Delta t}$$

$$\bar\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Ось кинемат. винта:

ГМТ : $\bar V = \bar V_0 + \bar\omega\times\bar\rho = \lambda\bar\omega$

$\bar\omega\cdot\bar V = \bar\omega\cdot\bar V_0 = \lambda\omega^2 \Rightarrow$ не зависит от полюса

$$\lambda = \frac{\bar V_0\bar\omega}{\omega^2} = inv$$

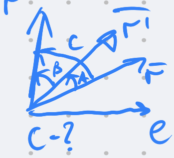
$$\begin{cases} V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y = \lambda\omega_x \\ V_{0y} + \dots = \lambda\omega_y \\ V_{0z} + \dots = \lambda\omega_z \end{cases} \Rightarrow \frac{V_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{V_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{V_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

ось кинематич. винта (2)

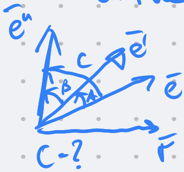
Найти кинематич. велич: $\overline{\omega}$, ур-ие (2) и $V_n = \overline{V}\cdot\frac{\overline{\omega}}{\omega}$

Сложение поворотов.

активные



пассивные



1. Активный поворот: $\overline{r}' = A\overline{r}$; $\overline{r}'' = B\overline{r}'$

$\overline{r}'' = BA\overline{r} \Rightarrow C = BA$

n поворотов $\Rightarrow$ $C = A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots \cdot A_1$