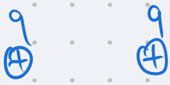
Неделя 1.

Нулёвки.

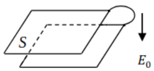
№1.1.



$$\left.\begin{array}{l} F_к = k\dfrac{q^2}{r^2} \\ F_г = G\dfrac{m^2}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F_к}{F_г} = \frac{kq^2}{Gm^2} \approx 1{,}2\cdot 10^{36}$$

№1.2.

⁰1.2. Оцените среднюю концентрацию электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряжённость электрического поля на поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте h = 1,5 км она падает до 25 В/м. Вектор E направлен к центру Земли. Ответ выразить в элементарных зарядах на см^3.



$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta x} \approx 4\pi\rho \Rightarrow \frac{E_h - E_0}{h} = 4\pi\rho \Rightarrow$$

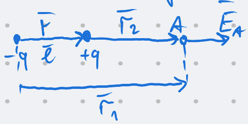
$$\Rightarrow \rho = \frac{E_h - E_0}{4\pi h} \approx 4\cdot 10^{-3}\,\frac{В}{м^2} \approx 10^{-9}\ СГС$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{e} = 2$$

№1.3

⁰1.3. Используя формулу для напряжённости поля точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p}$, найдите напряжённость поля на оси диполя ($\alpha = 0$) и в перпендикулярном направлении ($\alpha = \pi/2$).

а) поле на оси диполя

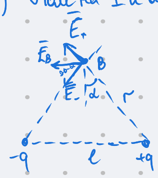


$$E_A = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = q\,\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2}$$

$r_1, r_2 \gg l$

$$\vec E_A = q\vec l\,\frac{2r}{r^4} = 2\frac{\vec p}{r^3}$$

б) Поле на ⊥ к оси диполя



$$\vec E_B = \vec E_- + \vec E_+$$

$$E_- = E_+ = \frac{q}{r^2}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow E_B = 2\,\frac{q}{r^2}\sin\alpha = 2q\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{l}{2r} = \frac{p}{r^3}$$

$$\vec E_B = -\frac{\vec p}{r^3}$$

Единички

№1.14.

1.14. Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+\varkappa$ и $-\varkappa$. Определить напряженность поля E на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии.

Указание. Пользуясь теоремой Гаусса, найти напряженность поля, создаваемого каждым из проводов, а затем геометрическую сумму этих полей.

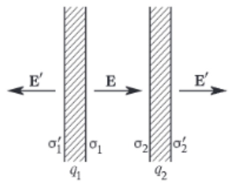
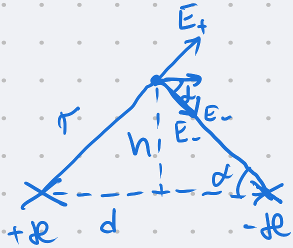


Рис. 3



$$\oint E\,d\bar S = 4\pi l \varkappa$$

$$E\cdot 2\pi r l = 4\pi l \varkappa$$

$$\Rightarrow E_+ = E_- = \frac{2\varkappa}{r} = E_0$$

$$\bar E = \bar E_+ + \bar E_-,$$

$$E^2 = 2E_0^2 + 2E_0^2\cos 2\alpha = 2E_0^2(1+\cos 2\alpha) = 4E_0^2\cos^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = E_0\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{2r} = \frac{d}{2\sqrt{\frac{d^2}{4}+h^2}} = \frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}} \Rightarrow E = \frac{2\varkappa}{r}\cdot\frac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}} = \frac{8\varkappa d}{4h^2+d^2}$$

Ответ: $E = \frac{8\varkappa d}{4h^2+d^2}$

№1.21.

1.21. С какой объемной плотностью $\rho(r)$ следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле E_0 внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину?

$$E(r+dr)4\pi(r+dr)^2 - E(r)4\pi r^2 = 4\pi\cdot 4\pi r^2 dr\cdot\rho(r)$$

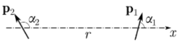
$$E(r) = E_0 = \mathrm{const}$$

$$E_0\cdot 4\pi(2r\,dr + \overset{\to 0}{dr^2}) = 4\pi\cdot 4\pi r^2\cdot dr\cdot\rho(r)$$

$$E_0\cdot 2r\,dr = 4\pi r^2\rho(r)$$

$$\Rightarrow \underline{\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}}$$

T1. Молекула воды обладает постоянным электрическим дипольным моментом $p = 1{,}84$ Д (1 Д $\equiv 10^{-18}$ ед. СГС — «дебай», внесистемная единица дипольного момента). Две молекулы воды находятся на расстоянии $r = 35$ Å друг от друга так, что векторы их дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ лежат в одной плоскости под углами α_1 и α_2 к линии, соединяющей их центры (ось x, см. рис.). Для случаев а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, б) $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ и в) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ рассчитайте величины и направления векторов сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, действующих на диполи. Оцените также максимальную величину ускорения этих молекул.



Ответ: $\vec F_2 = -\vec F_1$ а) $F_{1x} = -2F_0$, $F_{1y} = 0$; б) $F_{1x} = \pm F_0$, $F_{1y} = 0$; в) $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = \pm F_0$, где $F_0 \approx 6.8 \cdot 10^{-15}$ Н; $a_{max} \sim 2{,}3 \cdot 10^{10}$g.

№T1

$$\bar F = (\bar p_1;\nabla)\bar E_2 = p_{1x}\frac{\partial E_{2x}}{\partial x} + p_{1y}\frac{\partial E_{2y}}{\partial y}$$

$$\bar E_2 = \frac{3(\bar p_2;\bar r)}{r^5} - \frac{\bar p_2}{r^3} = \left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}x - \frac{p_{2x}}{r^3}\right)\bar i + \left(\frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)}{r^5}y - \frac{p_{2y}}{r^3}\right)\bar j$$

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial x} = -\frac{6p_{2x}}{r^4};\ \frac{\partial E_{2y}}{\partial y} = \frac{3p_{2y}}{r^4} \Rightarrow F_x = -6\frac{p_{1x}p_{2x}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}}{p_{2y}}r^4$$

аналогично: $F_y = 3\frac{p_{1x}p_{2x}}{r^4} + 3\frac{p_{1y}p_{2x}}{r^4}$

а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; $F_x = -6\frac{p^2}{r^4}$; $F_y = 0$

б) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$; $F_x = \pm\frac{3p^2}{r^4}$; $F_y = 0$

в) $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$; $F_x = 0$; $F_y = \pm\frac{3p^2}{4}$

№1.22/23

1.22. В шаре, равномерно заряженном электрическим зарядом с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние r. Определить электрическое поле внутри полости.

Указание. Заполнить мысленно полость электрическими зарядами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров.

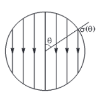


Рис. 4

1.23. С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R (рис. 4), чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

$$\bar E = \bar E_+ + \bar E_- = \frac{4\pi}{3}(\rho\bar r_a + (-\rho)\bar r_{a'}) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho(\bar r_a - \bar r_{a'}) = \frac{4\pi\rho}{3}\bar r \ - 1.22$$

1.23: Сдвинем сферу вдоль вертик. оси на $\bar l$, тогда толщина сдвинутого слоя: $l_0 = l\cos\theta \Rightarrow \sigma(\theta) = \rho l\cos\theta$

Из 1.22: $\bar E = \frac{4\pi\rho}{3}\bar r \Rightarrow \rho = \frac{3E_0}{4\pi l}$

$\Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$

$$\bar p = q\bar l = \rho\frac{4\pi}{3}R^3\bar l = \frac{3E_0}{4\pi}\cdot\frac{4\pi}{3}R^3 = R^3\bar E_0$$

$\Rightarrow$ поле вне сферы - поле диполя $\bar p = R^3\bar E_0$

Двойки:

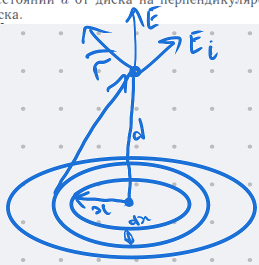
№1.7

1.7. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно d, а дипольный момент $\mathbf{p}$ направлен вдоль соединяющей их прямой.

$$F = qE = \left(\frac{3pd\overset{=1}{\cos\alpha}}{d^4} - \frac{p}{d^3}\right)q = \frac{2p}{d^3}q$$

№1.10.

1.10. Диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии d от диска на перпендикуляре, проходящем через центр диска.



$$d\bar{E} = \frac{dq}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$$

$$dq = \sigma dS \quad dS = 2\pi x\,dx$$

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}\bar{e}_z, \quad e_z = 1, \parallel Oz$$

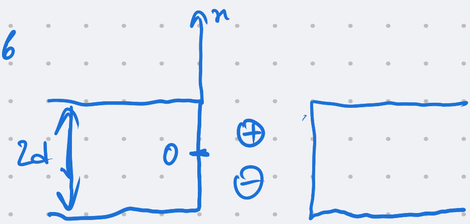
$$E \parallel Oz \Rightarrow dE = \frac{\sigma dS}{d^2+x^2}\cdot\frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}} = 2\pi\sigma d\frac{x\,dx}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 2\pi\sigma d\int_0^R \frac{x\,dx}{(d^2+x^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$$

Ответ: $E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$

№1.16

1.16. В безграничном плоском слое толщиной $2d$ объемная плотность заряда ρ изменяется по закону $\rho = \rho_0 x/d$ $(-d \leqslant x \leqslant d)$, где x — ось, перпендикулярная плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси x, в котором помещен точечный диполь с массой m и дипольным моментом $\mathbf{p}$. Вычислить период малых продольных колебаний диполя.



$$\frac{\partial E}{\partial x}$$
$$\parallel$$
$$\mathrm{div}\,E = 4\pi\rho = 4\pi\rho_0\cdot\frac{x}{d}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow E(x) = \frac{2\pi\rho_0}{d}x^2 + C \\ &E(0) = 0 \ (\text{т.к. } \rho(0) = 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(x) = 2\pi\rho_0\frac{x^2-d^2}{d}$$

При смещении диполя на x:

$$F = qE = q\frac{2\pi\rho_0}{d}\left[\left(\left(\frac{l}{2}-x\right)^2-d^2\right)-\left(\left(\frac{l}{2}+x\right)^2-d^2\right)\right]=$$

$$= -4\pi q\frac{\rho_0}{d}lx = -4\pi\frac{\rho_0}{d}px$$

$$m\ddot{x} = F = -4\pi\frac{\rho_0}{d}px \Rightarrow \ddot{x}+\frac{4\pi\rho_0 p}{md}x=0$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{md}{4\pi\rho_0 p}} = \sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}$$

Ответ: $T = \sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}$

№1.17

1.17. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиусом $R = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная частица с зарядом $-e$), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь. Найти частоту колебаний электрона.

$F = eE$

$F = kr$ (т.к. ищем зав-ть от радиуса) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{kr}{e}$$

$$\operatorname{div}\bar{E} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d(r^2E)}{dr} = \frac{2E}{r}+\frac{k}{e}$$

$$\Rightarrow 4\pi\rho = \frac{2E}{r}+\frac{k}{e} = \frac{3k}{e} \Rightarrow \rho = \frac{3k}{4\pi e} = const$$

$$e = \int_V \rho\, dV = \int_0^R 4\pi r^2\rho\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{3k}{4\pi e} = \frac{R^3 k}{e} \Rightarrow k = \frac{e^2}{R^3}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$$

Ответ: $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$; $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$.

Неделя 2.

Нулевки.

№2.1.

[0]2.1. Незаряженный проводящий шар вносится в электрическое поле с известным распределением потенциала $\varphi(\vec{r})$. Каким будет потенциал шара?

Шар изначально не заряжен $\Rightarrow$ по з-ну сохр-ия эл. заряда $\sum q_i = 0$

По принципу суперпозиции: $\varphi(\vec r) = \varphi(\vec r_0) + \sum \varphi_i = \varphi(r_0) + \sum \frac{q_i}{R} = 0$ (к пов-ти шара; R — рад. шара)

$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \varphi(\vec r_0)$, где $\vec r_0$ - рад. вектор к центру шара

Ответ: $\varphi(\vec r_0)$

№2.2

°2.2. В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардировалась α-частицами ${}^{2}_{4}He$ с кинетической энергией $W = 5$ МэВ. На какое минимальное расстояние может приблизиться α-частица к ядру золота ${}^{79}_{197}Au$? (заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС; 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг).

Ответ: $r_{min} = 2 \cdot 79 \cdot \frac{e^2}{W}\left(1 + \frac{4}{197}\right) = 4{,}6 \cdot 10^{-12}$ см.

З(Э): $0 + W = A + 0 \Rightarrow W = A = q_1\varphi = \frac{q_1 q_2}{r_{min}} = \frac{2e \cdot 79e}{r_{min}} \Rightarrow r_{min} = 2 \cdot 79 \cdot \frac{e^2}{W} =$

$= 4{,}6 \cdot 10^{-12}$ см

Ответ: $4{,}6 \cdot 10^{-12}$ см

№2.3

°2.3. Напряжённость электрического поля Земли $E_0 = 130$ В/м, причём вектор $\vec E_0 \uparrow\uparrow \vec g$. Какой заряд приобретёт горизонтально расположенный короткозамкнутый плоский конденсатор с площадью пластин $S = 1$ м²?

Ответ: $Q = 3{,}4$ ед. СГС.

т. Гаусса: $ES = 4\pi Q \Rightarrow Q = \frac{ES}{4\pi} = 3{,}4$ ед. СГС

Ответ: 3,4 ед. СГС

Единички.

№1.24.

1.24. Длинная медная проволока помещена в однородное электрическое поле E_0, перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностных зарядов на проволоке $\sigma(\theta)$.

Сдвинем немного проволоку:

Тогда $\vec E_c = 2\pi\rho\vec{O'C} + 2\pi(-\rho)\vec{OC} = 2\pi\rho\vec r$

$dq = \rho dV = \rho h(\theta) dS = \rho\cos\theta\, dS$

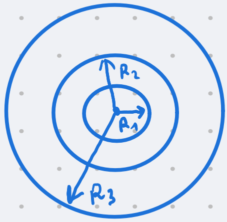
$E_c + E_0 = 0 \Rightarrow E_0 = 2\pi\rho r \Rightarrow \rho = \frac{E_0}{2\pi r}$

$\sigma = \frac{dq}{dS} = \rho r\cos\theta = r\cos\theta \cdot \frac{E_0}{2\pi r} = \frac{E_0\cos\theta}{2\pi}$

Ответ: $\sigma(\theta) = \frac{E_0\cos\theta}{2\pi}$

№2.3,

2.3. Металлический шар радиусом R_1, несущий заряд Q, окружен расположенным концентрически полым металлическим незаряженным шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3. Построить графики зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Изменятся ли потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

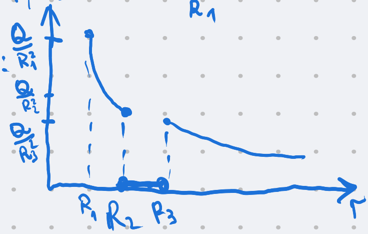


$r \in [R_3; +\infty)$: $E_3 = \frac{Q}{R_3^2}$

$r \in [R_2; R_3]$: $E_2 = 0$ (т.к. полый)

$r \in [R_1; R_2]$: $E_1 = \frac{Q}{R_1^2}$

График:



До заземления:

$\varphi_{внутр_1} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_\infty = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3}$

$\varphi_{внешн_1} = \frac{Q}{R}$, $R \in [R_3; +\infty)$

После заземления:

$\varphi_{внутр_1} = \varphi_1 - \varphi_2 = Q\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$

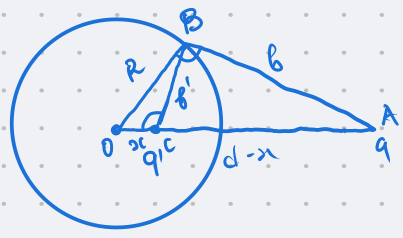
$\varphi_{внешн_1} = 0$

№2.20

2.20. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (рис. 9). Заряд находится на расстоянии d от центра шара. Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

Рис. 9

1) $\varphi = 0$



Поместим q' в т. C такую, что $\angle OCB = \angle OBA$

$\Rightarrow \Delta OCB \sim \Delta OBA$

$\varphi_B = \frac{q}{b} + \frac{q'}{b'} \Rightarrow q' = -\frac{R}{d}q$

Из подобия: $\frac{x}{R} = \frac{R}{d} \Rightarrow x = \frac{R^2}{d}$

$$F = \frac{qq'}{(d-x)^2} = \frac{q^2 R}{d\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} = \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}$$

2) $Q = 0$

Поместим в O $q_0 = R\varphi_0$, $F = \frac{qq'}{(d-x)^2} - \frac{qq_0}{d^2} = \frac{Rdq^2}{(d^2-R^2)} - \frac{qR\varphi_0}{d^2}\Big|_{\varphi_0 = \frac{q}{d}}$

$$F = q^2\left(\frac{Rd}{(d^2-R^2)^2} - \frac{R}{d^3}\right)$$

№2.22

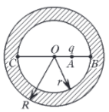


Рис. 10

2.22. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A на расстоянии $OA = d$ от ее центра помещен точечный заряд q (рис. 10). Радиус внутренней поверхности оболочки r, а внешней R. Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) потенциал оболочки, принимая за ноль потенциал бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

$\sigma_{\text{внеш}} = \frac{q}{4\pi R^2}$, $\varphi = \frac{q}{R}$

Поместим некий заряд Q так, чтобы $\varphi_{\text{внутр}} = 0$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{q}{r-d} + \frac{Q}{x} = 0 \\ \varphi_C = \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{x+2r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qx = -Q(r-d) \\ qx + 2qr = -Q(r+d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = -q\frac{r}{d} \\ x = r\frac{r-d}{d} \end{cases}$$

$$E_B = E_q + E_Q = \frac{q}{(r-d)^2} + \frac{qrd^2}{dr^2(r-d)^2} = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{(r-d)^2} \quad | \quad E_C = \frac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{(r+d)^2}$$

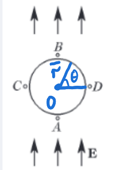
$$E_B S = 4\pi\sigma_B S \Rightarrow \sigma_B = \frac{E_B}{4\pi} \Rightarrow \sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2}$$

$$\sigma_C = \frac{1\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r+d)^2}$$

Двойки.

№1.26

1.26. Во внешнее однородное электрическое поле **E** (рис. 5) внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках A и B, C и D?



$r \approx R$

$$\vec E = \vec E_0 + 3R^3(\vec E_0, \vec r)\frac{\vec r}{r^5} - R^3 \cdot \frac{\vec E_0}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec E(R) = 3E_0\cos\theta \cdot \frac{\vec R}{R}$$

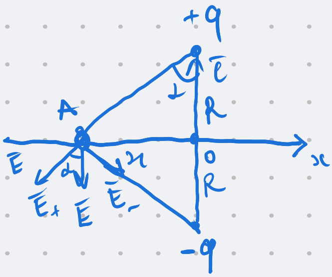
$A, B: \theta = \pi \Rightarrow E_A = -3E_0 \Rightarrow E_B = 3E_0$

$C, D: E_C = E_D = 0 \ (\cos\theta = 0)$

Ответ: в A и B ↗ в 3р., в C и D = 0.

№2.11

2.11. Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности бесконечной металлической плоскости. Заряд находится на расстоянии R от плоскости.



$$E_- = E_+ = \frac{q}{R^2+x^2} = E_0$$

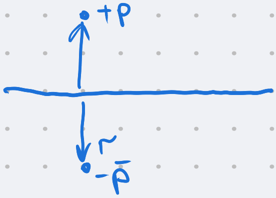
$$\Rightarrow E = 2E_0\cos\alpha = 2E_0 \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{2qR}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E\,dS = 4\pi\sigma\,dS$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{qR}{2\pi(R^2+r^2)^{3/2}}$$

№2.15

2.15. Найти силу притяжения точечного электрического диполя с дипольным моментом $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл · см к бесконечной металлической пластине, ближайшая точка которой находится от диполя на расстоянии $L_0 = 1$ см. Ось диполя перпендикулярна к пластине. Определить также работу, которую надо затратить, чтобы отодвинуть диполь от поверхности пластины с расстояния $L_0 = 1$ см до расстояния $L = 2$ см.



$$E = 2\frac{p}{r^3}$$

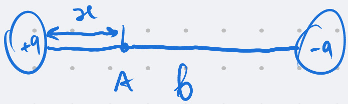
$$F = p\frac{\partial E}{\partial r} \Rightarrow F = 2p\frac{(-3)p}{r^4} = -6\frac{p^2}{r^4} \approx -0{,}54 \text{ дин}$$

$$\delta A = F\,dx = -6p^2\int_{L_0}^{L}\frac{dx}{x^4} = \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L^3} - \frac{1}{L_0^3}\right) = -0{,}16 \text{ эрг}$$

№2.48

2.48. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 5$ м.

Рис. 19



$E = \frac{2\varkappa}{r}$ – поле цилиндра

$E = \frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{b-x}$

$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 = -\frac{2\varkappa}{x^2} + \frac{2\varkappa}{(b-x)^2} \Rightarrow x = \frac{b}{2}$ – минимум

$\Rightarrow$ макс. знач. при $x = \frac{d}{2}$

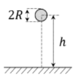
$E_{max} = \frac{4\varkappa b}{d(b-\frac{d}{2})} \Rightarrow \varkappa = \frac{E_{max} d (b-\frac{d}{2})}{4b}$

$$\Delta\varphi = 2\varkappa \int_{\frac{d}{2}}^{b-\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x}\right) dx = 4\varkappa d \ln\left(\frac{2b}{d} - 1\right) = \frac{E_{max} d (b-\frac{d}{2})}{b} \ln\left(\frac{2b}{d}-1\right) \approx$$

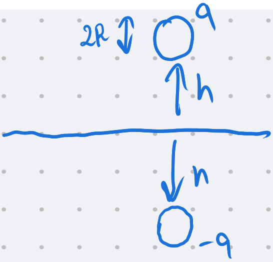
≈ 207 кВ

№T2.

T2. (2019-1Б) Напряжённость поля на поверхности земли под одиночным заряженным бесконечным проводом радиуса $R = 1$ см, расположенным параллельно поверхности, равна $E_0 = 750$ В/м. Расстояние от поверхности до оси провода $h = 4$ м. Определите потенциал провода, считая потенциал поверхности земли равным нулю.



Ответ: $\varphi = \frac{hE_0}{2}\ln\frac{2h}{R} \approx 10$ кВ.



$E = \frac{2\varkappa}{x}$ – цилиндр

$\Rightarrow E_0 = 2 \cdot \frac{2\varkappa}{h} \Rightarrow \varkappa = E_0 \frac{h}{4}$

$E = \frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{h-x}$

$$\Delta\varphi = \int_R^h \left(\frac{2\varkappa}{x} + \frac{2\varkappa}{h-x}\right) dx = 2\varkappa\left(\ln\frac{h}{R} - \ln\frac{h}{2h-R}\right) = 2\varkappa \ln\frac{2h-R}{R} \approx 2\varkappa \ln\frac{2h}{R} =$$

$= \frac{E_0 h}{2} \ln\frac{2h}{R} \approx 10$ кВ

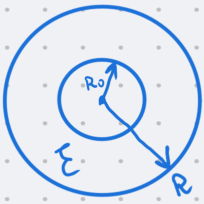
Неделя 3.

Нулёвки

№3.1.

$$\bar{P} = \frac{\bar{p}}{V} = \frac{\sigma_{пол}}{V} SL = \frac{\sigma_{пол}}{SL\cos\alpha} \cdot SL \Rightarrow \underline{\sigma_{пол} = P\cos\alpha}$$

№3.2.



$$\oint_S \bar{D}\, d\bar{S} = 4\pi q$$

$$D\, 4\pi R^2 = 4\pi q$$

$$\left.\begin{array}{l} D = \frac{q}{r^2} \\ D = E\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

$$R = R_0 \Rightarrow E = \frac{q}{r^2}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R_0 \\ \frac{q}{r^2}, & r = R_0 \\ \frac{q}{\varepsilon R^2}, & R_0 < r \leq R \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{q}{R} + \int_{R_0}^{R} \frac{q}{\varepsilon R^2} dr = \frac{q}{R} + \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) = \underline{\frac{q}{R}\left(1 + \frac{R - R_0}{\varepsilon R_0}\right)}$$

№3.1.

3.1. На сколько отличается от единицы диэлектрическая постоянная ε «идеального газа», состоящего из большого количества проводящих шариков радиусом r? Плотность (концентрация) шариков n мала, так что $r^3 n \ll 1$.

Пусть $\bar{P} = \alpha \bar{E}$, $\bar{P} = 3q\bar{e}$

$$q = V\rho n = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho n \Rightarrow \bar{p} = 4\pi r^3 n \bar{e}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho \Rightarrow \bar{E} = 4\pi\rho\bar{e}$$

$$\begin{cases} \bar{P} = \alpha \bar{E} \\ \bar{P} = 4\pi r^3 q n \bar{e} \\ \bar{E} = 4\pi q \bar{e} \end{cases} \Rightarrow \alpha 4\pi q \bar{e} = 4\pi r^3 q n \bar{e} \Rightarrow \alpha = n r^3$$

$$\begin{cases} \bar{D} = E + 4\pi \bar{P} \\ \bar{D} = \varepsilon \bar{E} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon \bar{E} = \bar{E} + 4\pi \alpha \bar{E} \Rightarrow \varepsilon - 1 = 4\pi n r^3$$

единицы

№3.8.

3.8. Длинный цилиндр изготовлен из диэлектрика с «замороженной» поляризацией, направленной по его оси. Поле в точке A (рис. 21*а*) оказалось равным $E_A = 300$ В/см. Найти (приближенно) поле E_C вблизи торца короткого цилиндра (в точке C), сделанного из того же материала, если $h = 2 \cdot 10^{-2} D$, где D — диаметр цилиндра (рис. 21*б*).

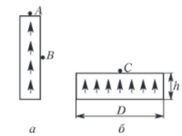


Рис. 21

$E = 2\pi\sigma$ – на торце цилиндра

$$\begin{cases} E_A = 2\pi\sigma_A \\ \sigma_A = P_A = npD \end{cases} \Rightarrow E_A = 2\pi npD$$

$$\begin{cases} E_C = 4\pi\sigma_C \\ \sigma_C = P_C = nph \end{cases} \Rightarrow E_C = 4\pi nph$$

$$\Rightarrow \frac{E_C}{E_A} = \frac{2h}{D} \Rightarrow E_C = E_A \frac{2h}{D} = 12 \frac{\text{В}}{\text{см}}$$

№3.26.

3.26. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от значения ε_1 у одной пластины до значения $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d, площадь каждой из них S. Найти емкость C конденсатора.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kx$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + kd \Rightarrow k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} \Rightarrow \varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$

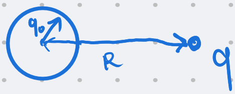
$$D = 4\pi\sigma, \; E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \int_0^d \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x} dx = 4\pi\sigma d \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) x} =$$

$$= \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \int_0^d \frac{dx}{\frac{\varepsilon_1 d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + x} = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{4\pi q d}{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{4\pi d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

№3.39

3.39. Оценить силу взаимодействия между нейтральным диэлектрическим шариком радиусом r_0 и точечным зарядом q, считая расстояние R между ними большим, а диэлектрическую проницаемость шара ε такой, что $\varepsilon - 1 \ll 1$.



$$p = r_0^3 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0$$

Шар мал и удален $\Rightarrow E_0 = \frac{q}{R^2}$

$\varepsilon - 1 \ll 1 \Rightarrow \varepsilon + 2 \approx 3$

$$\bar F = \bar p \frac{\partial E}{\partial r} = r_0^3 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \left(-\frac{2q}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow \bar F \approx -\frac{2}{3}\cdot\frac{q^2 r_0^3}{R^5}(\varepsilon-1)$$

№3.77

3.77. В заряженный плоский конденсатор вставлен диэлектрический стержень длиной l_0 из электрета с замороженной однородной поляризацией **P** (рис. 43). К конденсатору приложена некоторая разность потенциалов. Найти циркуляцию вектора **D** по контуру L, показанному на рисунке.

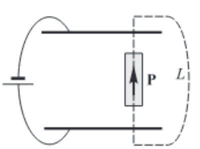


Рис. 43

$\oint_L \bar D d\bar l$ — ?

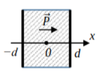
$\bar D = \bar E + 4\pi \bar P$ по т. о циркуляции

$$\oint_L \bar D d\bar l = \overset{=0}{\oint_L \bar E d\bar l} + 4\pi \oint_L \bar P d\bar l = 4\pi P l_0$$

Ответ: $\oint_L \bar D d\bar l = 4\pi P l_0$

№T3.

T3. (2015-1A) Плоскопараллельная пластина изготовлена из диэлектрика с «замороженной» поляризацией, направленной вдоль оси x, перпендикулярной поверхностям пластины. Пластина поляризована неоднородно: $\vec P(x) = \vec P_0 \cdot (1 + x^2/d^2)$, где $2d$ — толщина пластины (начало отсчёта – в центре пластины). Определите разность потенциалов U между поверхностями пластины. Краевыми эффектами пренебречь.



Ответ: $U = \frac{32}{3}\pi P_0 d$.

$$\bar D = \bar E + 4\pi \bar P = \bar E + \bar P_0 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)\cdot 4\pi$$

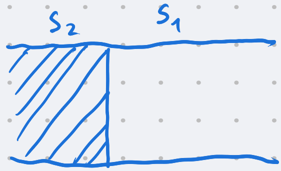
$$\bar E = \bar D - \bar P_0 \cdot 4\pi\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)$$

$$\Delta\varphi = \overset{=0}{\int_{-d}^{d} D\,dl} - \int_{-d}^{d} P_0 4\pi\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right) = -8\pi P_0 d - \frac{4\pi P_0}{d^2}\int_{-d}^{d} x^2 dx = -8\pi P_0 d - \frac{8\pi P_0}{d^2}\cdot\frac{d^3}{3} =$$

$$= -\frac{32}{3}\pi P_0 d \Rightarrow U = \frac{32}{3}\pi P_0 d$$

3.30. Прокладка из диэлектрика с большой проницаемостью $\varepsilon = 200$ имеет толщину, равную зазору между пластинками плоского конденсатора (рис. 33). Площадь пластин плоского конденсатора $S_1 = 1$ м^2. Какова должна быть площадь S_2 основания прокладки для того, чтобы в объеме, занимаемом прокладкой, электрическая индукция сделалась в 40 раз больше, чем до ее введения? Конденсатор изолирован.

№3.30.



$$D = \varepsilon E \Rightarrow \frac{D_2}{D_1} = 40 \Rightarrow \frac{\varepsilon E_2}{E_1} = n$$

$$q = \text{const (изолирован)} \Rightarrow C\Delta\varphi = CEd \Rightarrow E = \frac{q}{Cd} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{C_1}{C_2}$$

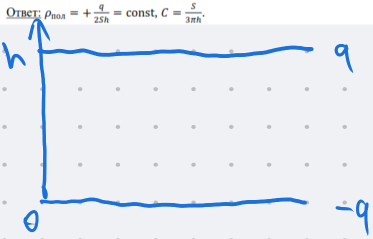
$$C_1 = \frac{S_1}{4\pi d} \quad ; C_2 = \frac{S_1 - S_2}{4\pi d} + \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d}$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} \Rightarrow \frac{\varepsilon S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} = n \Rightarrow S_2 = \frac{S_1(\varepsilon - n)}{(\varepsilon - 1)n} \approx 0{,}02 \text{ м}^2$$

Т4. На обкладках плоского конденсатора размещены заряды q и $-q$. Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая проницаемость которого меняется по закону $\varepsilon = \frac{2}{1+x/h}$, где x – расстояние до положительной пластины, h – расстояние между пластинами. Найдите распределение объёмной плотности поляризационного заряда $\rho_{\text{пол}}$ в конденсаторе, а также его ёмкость C. Площадь каждой пластины S.

Ответ: $\rho_{\text{пол}} = +\frac{q}{2Sh} = \text{const}$, $C = \frac{S}{3\pi h}$.

№Т4.



$$D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{S}$$

$$D = 4\pi P + E \Rightarrow P = \frac{D - E}{4\pi} = \frac{4\pi c}{4\pi} \cdot \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{h}\right)\right) =$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi P}{\varepsilon} + \frac{E}{\varepsilon} \Rightarrow E(\varepsilon - 1) = 4\pi P$$

$$= \frac{q}{2S}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\overline{P} = -\frac{dP}{dx} = \frac{q}{2Sh}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^h E(x)\,dx = \frac{D}{2}\int_0^h \left(1 + \frac{x}{h}\right)dx = \frac{3}{4}Dh = \frac{3}{4}\cdot\frac{4\pi q}{S}h = \frac{3\pi qh}{S}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{u} = \frac{S}{3\pi h}$$

3.79. Широкая тонкая пластина из диэлектрика вносится в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость пластины $\varepsilon > 1$. Вектор $\mathbf{E}_0$ составляет с нормалью к поверхности пластины угол θ (рис. 45).

1) Определить поверхностную плотность поляризационного заряда на верхней поверхности пластины.

2) Найти модуль и направление вектора поляризации $\mathbf{P}$ пластины.

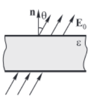


Рис. 45

№3.79

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma_{\text{своб}} = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

$$E_0\cos\theta = \frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon} + 4\pi P_n \Rightarrow P_n = \sigma_{\text{пол}} = \frac{E_0\cos\theta(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}$$

$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$; $E_{n_1} = \varepsilon E_{n_2}$

α – угол между $\vec{n}$ и $\vec{P}$, тогда: $\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{E_{\tau_1}}{E_{n_1}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{E_{\tau_1}}{E_{n}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{E_{n_1}}{E_{n}} = \varepsilon$

$$P = \frac{P_n}{\cos\alpha} = \ldots = \frac{E_0(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha + \varepsilon\sin^2\alpha}$$

Неделя 4

Нулевки.

№4.1.

⁰4.1. Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, заполненного твёрдым диэлектриком с проницаемостью ε, равна $\pm\sigma$. Определите объёмную плотность электрической энергии w в конденсаторе, а также силу f, действующую на единицу площади обкладок.

Ответ: $w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$, $f = 2\pi\sigma^2$.

$$\left.\begin{aligned} D &= E\varepsilon \\ D &= 4\pi\sigma \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \omega_{эл} = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$$

$$f = \frac{E^2_{возд}}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2$$

№4.2.

⁰4.2. Конденсатор ёмкостью $C = 20$ см заполнен однородной слабопроводящей средой, имеющей малую проводимость $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 2$. Определить электрическое сопротивление между обкладками.

Ответ: 8 кОм.

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C} = 8 \text{ кОм}$$

№3.50

3.50. По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхности сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

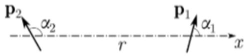
$$F = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{16\pi^2\sigma^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow F = \frac{Q^2}{8\pi R^4}$$

Единичники.

№T1′.

T1. Молекула воды обладает постоянным электрическим дипольным моментом $p = 1{,}84$ Д (1 Д $\equiv 10^{-18}$ ед. СГС — «дебай», внесистемная единица дипольного момента). Две молекулы воды находятся на расстоянии $r = 35$ Å друг от друга так, что векторы их дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ лежат в одной плоскости под углами α_1 и α_2 к линии, соединяющей их центры (ось x, см. рис.). Для случаев а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, б) $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ и в) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm\pi/2$ рассчитайте величины и направления векторов сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, действующих на диполи. Оцените также максимальную величину ускорения этих молекул.



Ответ: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ а) $F_{1x} = -2F_0$, $F_{1y} = 0$; б) $F_{1x} = \pm F_0$, $F_{1y} = 0$; в) $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = \pm F_0$, где $F_0 \approx 6.8 \cdot 10^{-15}$ Н; $a_{max} \sim 2{,}3 \cdot 10^{10}$g.

T1′. Для задачи T1 определите энергию взаимодействия диполей и проекции силы взаимодействия для произвольных углов α_1 и α_2.

$$W = -(\bar{p}_1; \bar{E}_{21}) \Rightarrow$$

$$\bar{E}_{21} = \frac{3(\bar{p}_2; \bar{r}_{21})}{R^5}\bar{r}_{21} - \frac{\bar{p}_2}{R^3}$$

$$\Rightarrow W = -\frac{3(\bar{p}_2; \bar{r})(\bar{r}; \bar{p}_1)}{r^5} + \frac{(\bar{p}_1; \bar{p}_2)}{r^3} =$$

$$= -\frac{3}{r^5} p_1 p_2 r^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \frac{p_1 p_2}{r^3}\cos(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -\frac{p_1 p_2}{r^3}\left[3\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

№1.5

1) жесткий диполь:

$$dW = -dA_{эл.сил} = -(q\bar{E}d\bar{r}_+ - q\bar{E}d\bar{r}_-) = -q\bar{E}d(\bar{r}_+ - \bar{r}_-) = -\bar{E}d\bar{p} \Rightarrow W = -(\bar{p}; \bar{E})$$

2) упругий: $\bar{p} = \beta\bar{E}$

$$dW = -\bar{E}d\bar{p} = -E\,dp = -\beta E\,dE \Rightarrow W = -\alpha\int_0^E E\,dE = -\frac{\alpha E^2}{2} = -\frac{1}{2}(\bar{p}; \bar{E})$$

№3.44

3.44. Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W — электростатическая энергия заряда электрона, найти значение радиуса электрона при следующих предположениях: 1) заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью; 2) весь заряд электрона распределен по его поверхности.

1) $$W = \int_0^R \frac{E^2}{\cancel{8\pi}\,2}\cancel{4\pi} r^2 dr + \int_R^{+\infty}\frac{E^2}{\cancel{8\pi}\,2}\cancel{4\pi} r^2 dr = \frac{e^2}{2R^6}\int_0^R r^4 dr + \frac{q^2}{2}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} = \frac{3}{5}\cdot\frac{q^2}{R} = mc^2 \Rightarrow R = \frac{3q^2}{5mc^2} \approx 1{,}7\cdot 10^{-13}\text{ см}$$

2) $$W = \int_R^{+\infty}\frac{E^2}{8\pi}4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R} \Rightarrow \frac{q^2}{2R} = mc^2 \Rightarrow R = \frac{q^2}{2mc^2} = 1{,}4\cdot 10^{-13}\text{ см}$$

№3.67/68

3.67. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 38). Все пластины имеют форму полукруга радиусом R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент M сил, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

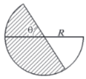


Рис. 38

3.68. В предыдущей задаче величина момента сил M не зависит от угла поворота θ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\theta = 0$, момент сил должен обращаться в ноль. Объяснить это расхождение.

1\) $U = const$

$$\begin{cases} M\,d\theta = \delta A_{ист} = dW \\ \delta A_{ист} = U\,dq = U^2 dC \Rightarrow M = -\dfrac{U^2 dC}{2d\theta} \\ W = \dfrac{CU^2}{2} \Rightarrow dW = \dfrac{U^2}{2} dC \end{cases}$$

$$C_1(\theta) = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{\varepsilon(\pi-\theta)R^2}{2}$$

$$C_2(\theta) = \frac{S}{4\pi d} = \frac{\theta R^2}{24\pi d}$$

Параллельно соед $\Rightarrow C = C_1 + C_2 = \frac{R^2}{8\pi d}\left(\theta(1-\varepsilon) + \pi\varepsilon\right) \Rightarrow \frac{dC}{d\theta} = \frac{R^2}{8\pi d}(1-\varepsilon)$

Подставляем в изнач. выр-ие для M:

$$M = \frac{U^2 R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)$$

2\) $q = const$

$$M\,d\theta = d\frac{q^2}{2C} = -\frac{q^2}{2C^2}dC \Rightarrow M\,d\theta = -\frac{U^2}{2}dC = -\frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\theta}$$

$$M = \frac{U^2}{2}\frac{R^2}{8\pi d}(\varepsilon-1) = \frac{U^2R^2}{16\pi d}(\varepsilon - 1)$$

№4.36

4.36. Цепь постоянного тока состоит из длинной однопроводной линии, в которую включен источник с ЭДС $\mathcal{E}$. Линия замыкается через землю, в которую зарыты два металлических шара на большом расстоянии друг от друга (рис. 67). Известны радиусы шаров r_1 и r_2, а также проводимость грунта λ_1 и λ_2 в местах, где они закопаны. Пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления заземления, определить заряд каждого шара.

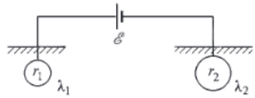


Рис. 67

$$I = jS = 4\pi r^2 j$$

$$j = \lambda E \quad \Rightarrow E = \frac{I}{4\pi r^2\lambda}$$

$$E = \frac{q}{r^2}$$

$$E = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda} \Rightarrow q = \frac{I}{4\pi\lambda}$$

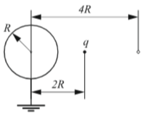
$$U = \int_{r_1}^{\infty} \frac{I\,dr}{4\pi r^2 \lambda_1} + \int_{r_2}^{\infty} \frac{I\,dr}{4\pi r^2 \lambda_2} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right)$$

$$U = IR \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\underline{q_1 = \frac{4\pi \mathcal{E} \lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2}{(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) 4\pi \lambda_1} = \frac{\mathcal{E} \lambda_2 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}} \; ; \; \underline{q_2 = \frac{\mathcal{E} \lambda_1 r_1 r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}}$$

Т5. (2018-1Б) На расстоянии $2R$ от центра заземленного проводящего шара радиуса R находится точечный заряд q. Заряд перемещают на расстояние $4R$ от центра шара. Чему равна работа по перемещению точечного заряда q? Чему равно изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой?



Ответ: $A = \frac{2q^2}{15R}$, $\Delta W_{инд} = -\frac{2q^2}{15R}$.

№Т5.

из задачи 2.20

$$q' = -q\frac{R}{x}, \quad l = \frac{R^2}{x}$$

$$F = \frac{qq'}{(x-l)^2} = -\frac{q^2 R}{x\left(x - \frac{R^2}{x}\right)^2} = -\frac{q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2}$$

$$A = -q^2 R \int_{2R}^{4R} \frac{x\,dx}{(x^2 - r^2)^2} = \frac{q^2 r}{2}\left(\frac{1}{15r^2} - \frac{1}{3r^2}\right) = \underline{-\frac{2}{15}\cdot\frac{q^2}{r}}$$

$$A_{вн} = -A = \Delta W + \Delta W_{инд}$$

$$W_1 = \frac{qq'}{x-l} = -\frac{q^2}{3R}$$

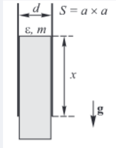
$$W_2 = -\frac{q^2}{15R}$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{4q^2}{15R}$$

$$\Delta W_{инд} = A_{вн} - \Delta W = \frac{2q^2}{15R} - \frac{4q^2}{15R} = \underline{-\frac{2q^2}{15R}}$$

3.73. Плоский конденсатор с квадратными пластинами со стороной a и расстоянием между ними d расположен вертикально, заряжен до заряда q и отсоединен от источника питания. В конденсатор вводится пластина с диэлектрической проницаемостью ε и массой m. Толщина пластины равна зазору конденсатора d, а длина и ширина больше a. Найти положение равновесия пластины x (рис. 40). Силу трения не учитывать.

№3.73



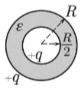
$$C(x) = \frac{\varepsilon a x}{4\pi d} + \frac{a(a-x)}{4\pi d} = \frac{xa(\varepsilon-1)}{4\pi d} + \frac{a^2}{4\pi d}$$

$$W(x) = \frac{q^2}{2C} + mgx = \frac{2\pi d q^2}{xa(\varepsilon-1)+a^2} + mgx$$

В положении равновесия $W \to \min \Rightarrow \frac{dW}{dx} = 0$

$$-\frac{2\pi d q^2 a(\varepsilon-1)}{(x_0 a(\varepsilon-1)+a^2)^2} + mg = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\varepsilon-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi d q^2(\varepsilon-1)}{mga}} - a\right)$$

Т6. (2023-2Б) Внутренняя и внешняя металлические обкладки уединённого сферического конденсатора заряжены одинаковыми положительными зарядами $q_1 = q_2 = q$. Радиус внешней обкладки R, внутренней $R/2$. Конденсатор заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2$, вне конденсатора — вакуум. Найдите запасённую в системе энергию.



Ответ: $W = \frac{9}{4}\frac{q^2}{R}$.

№Т6

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\cdot 2q\cdot\varphi = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}\cdot 2q\cdot\frac{2q}{R} = \frac{q^2}{2C} + \frac{2q^2}{R}$$

$$C = \frac{R_1R_2}{R_1-R_2}\varepsilon = \varepsilon R \Rightarrow W = \frac{q^2}{2\varepsilon R} + \frac{2q^2}{R} = \frac{9q^2}{4R}$$

4.23. Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной ЭДС. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $\mathcal{J} = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик от стороны *1* к стороне *2*.

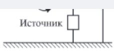


Рис. 66

№4.23.

$$j = \frac{I}{S} = \lambda E$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{\partial D}{\partial x}\cdot\frac{1}{4\pi} = \frac{\partial\left(\varepsilon\cdot\frac{I}{S\lambda}\right)}{\partial x}\cdot\frac{1}{4\pi}$$

$$q = \int_0^d \rho S\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_1^2 d\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 79\text{СГС}$$

Неделя 5.

Нулевик

№5.1.

Семинар 5

⁰5.1. Определите индукцию магнитного поля в центре крайнего витка длинного соленоида с плотностью намотки n витков/см. По виткам соленоида протекает постоянный ток I.

Ответ: $B = \frac{2\pi n I}{c}$.

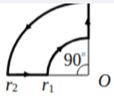
$$\oint(\bar{B};d\bar{l}) = \frac{4\pi}{c} n I = Bl$$

$$\Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} n I$$

№5.2.

⁰5.2. Проводящий контур, по которому течёт постоянный ток I, состоит из отрезков дуг и радиусов (см. рис.). Определите индукцию магнитного поля в точке O.

Ответ: $B = \frac{\pi I}{2c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.



$$dB_1 = \frac{I}{c} \cdot \frac{dl}{r^2}$$

$$B_1 = \frac{I}{cr^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi r_1 = \frac{\pi I}{2cr_1}$$

$$B_2 = -\frac{\pi I}{2cr_2}$$

$$\Rightarrow B = B_1 - B_2 = \frac{\pi I}{2c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

№5.3.

⁰5.3. Плоский конденсатор с обкладками в виде круглых дисков радиуса R заполнен немагнитной слабо проводящей средой. Через конденсатор протекает постоянный ток I. Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \le R$ от оси конденсатора.

Ответ: $B = \frac{2I}{c} \cdot \frac{r}{R^2}$.

$$\oint(\bar{B};d\bar{l}) = \sum_i \oint(\bar{B};d\bar{l}_i) =$$

$$= \frac{4\pi}{c} I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = B \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{2I}{c} \cdot \frac{r}{R^2}$$

единицы

№ 5.5.

5.5. Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A, из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β (рис. 72). Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l, и по нему течет ток $\mathcal{J}$.

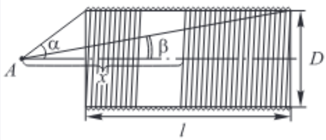


Рис. 72

$$\begin{cases} dB = \frac{i}{c}\,d\Omega \\ i = \frac{IN}{l} \\ \Omega = 2\pi(1-\cos\varphi) \end{cases} \Rightarrow dB = \frac{2\pi IN}{lc}\,d(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi In}{lc}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$\Rightarrow B = \frac{2\pi In}{lc}\int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi In}{lc}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

№ 5.10.

5.10. Внутри однородной проводящей сферы от точки A к точке B (рис. 75) по диаметру большого круга проходит проводник. Ток $\mathcal{J}$ течет по проводнику от B к A, а затем по сфере к точке B. Определить внутри и вне сферы индукцию магнитного поля, создаваемого токами, текущими по проводнику и по сфере.

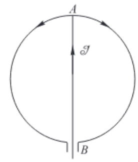


Рис. 75

Внутри: $\oint_L \bar{B}\,d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} I$

$$2\pi R B = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_{внутр} = \frac{2I}{cR}$$

$B_{внеш} = 0$, т.к. сост. из полей проводника и сферы, они одинаковы и противоположны по напр-ию.

№ 5.26

5.26. В плоскости xy расположен круглый виток радиусом R_0, по которому течет ток $\mathcal{J}$. Найти поток магнитной индукции через заштрихованную часть плоскости xy, если $R = 10R_0$ (рис. 79).

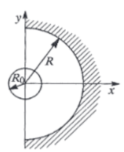


Рис. 79

$$m = \frac{I}{c}S = \frac{I}{c}\pi R_0^2$$

$$B = -\frac{m}{r^3} = -\frac{I\pi R_0^3}{cr^3}$$

$$\Phi = \int_R^{+\infty} B\,dS = \frac{I\pi R_0^2}{c}\int_R^{\infty}\frac{d(\pi r^2)}{r^3} = \frac{I\pi^2 R_0^2}{cR} = \frac{I\pi^2 R_0}{10c}$$

Двотт.

№5.12.

5.12. Длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнут так, что его ось образует половину окружности радиусом R. Найти величину магнитного поля B в центре этой окружности.

$$\begin{cases} dm = \frac{dI}{c} S \\ dI = i\,dl = iR\,d\varphi \\ d\bar{B} = -\frac{d\bar{m}}{r^3} \end{cases} \Rightarrow d\bar{B} = -\frac{iS}{cR^2}\,d\varphi$$

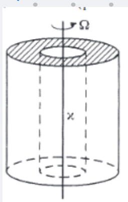
$$dB_y = dB \sin\varphi$$

$$\Rightarrow B = -\frac{iS}{cR^2}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2i\pi}{c}\cdot\frac{r^2}{R^2}$$

№5.14

5.14. По оси полого цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa = 1$ ед. СГСЭ. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega = 1000$ рад/с (рис. 77). Определить магнитное поле B в материале цилиндра вдали от его торцов, пренебрегая пьезоэффектом и всеми эффектами, вызываемыми центробежной силой. Определить также магнитное поле в полости цилиндра и во внешнем пространстве в случаях, если цилиндр: 1) металлический немагнитный; 2) диэлектрический ($\varepsilon = 3$).

5.15* Длинный сплошной цилиндр из диэлектрика статически по-



$$E = \frac{2\varkappa}{R}$$

1) $\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\varkappa}{2\pi R} \Rightarrow B = \frac{2\varkappa\Omega}{c} \approx 0{,}67\cdot 10^{-7}$ Гс

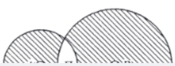
2) $E = D = \varepsilon E_{диэл} + 4\pi P \Rightarrow \sigma_{диэл} = \frac{(\varepsilon-1)E_{диэл}}{4\pi} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{E}{4\pi} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\varkappa}{2\pi R}$

$$I = \sigma\Omega R$$

$$B = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi\varkappa}{2\pi R c}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\Omega R = \frac{2\varkappa\Omega}{c}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \approx 0{,}44\cdot 10^{-7}\text{ Гс}$$

№5.23

5.23. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j = 1000$ А/см^2. Проводники ограничены цилиндрическими поверхностями. (На рис. 78 поперечные сечения проводников заштрихованы.) Найти величину и направление магнитного поля в полости $П$. Ток в левом проводнике направлен к читателю, а в правом — от читателя. Расстояние между осями цилиндров $AB = d = 5$ см.



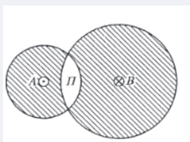


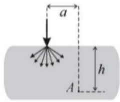
Рис. 78

$$\bar{B} = \frac{2\pi}{c}[\bar{j}, \bar{r}]$$

$$\bar{B} = \bar{B}_A + \bar{B}_B = \frac{2\pi}{c}[\bar{j}, \bar{r}_A - \bar{r}_B] = \frac{2\pi}{c}[\bar{j}, \bar{d}] = \frac{2\pi}{c} j d = 3{,}14\text{ кГс}$$

№Т7.

Т7. (2019-3Б) Постоянный ток силы I подводится по вертикальному кабелю к полусферическому небольшому заземлителю и равномерно растекается в однородном грунте. Пренебрегая проводимостью окружающего воздуха, определить напряженность магнитного поля в грунте в точке А, расположенной на расстоянии a от оси провода на глубине $h = a/\sqrt{3}$.



<u>Ответ:</u> $H = \frac{I}{ca}$.

$$I_k = I \frac{\Omega}{2\pi}$$

$$B 2\pi a = \frac{4\pi}{c} I \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{c} I (1-\cos\alpha) \Rightarrow B = \frac{2I}{ca}\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right) = \frac{I}{ca}$$