I. Неявные функции.

№Т1.

$x^2 = y^2$

а) Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \notin A \end{cases}$, где $A \in \mathbb{R}$, таких множеств ∞ много $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ и функций беск. много

б) 4 функции: $x, -x, |x|, -|x|$

в) 2 функции: $x, |x|$

г) 1 функция: x

№3.61(2)

61. Найти в указанной точке частные производные функции $u(x;y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x\cos y + y\cos u + u\cos x = 1$, $(0;1;0)$;

Дифф. по x:

$\cos y - y\sin u \cdot u'_x + u'_x\cos x - u\sin x = 0 \Rightarrow u'_x = \dfrac{\cos y - u\sin x}{y\sin u - \cos x}$

$u'_x(0;1;0) = -\cos 1$

по y: $-x\sin y + \cos u - y\sin u \cdot u'_y + u'_y\cos x = 0 \Rightarrow u'_y = \dfrac{\cos u - x\sin y}{y\sin u - \cos x}$

$u'_y(0;1;0) = -1$

№3.64(2)

64. Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x;y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0$, а) $(1;1;1)$, б) $(1;1;-2)$.

$F(1;1;1) = -1 \neq 0$, $F(1;1;-2) = 1+2-8+6+2-3 = 0$

не явл. ф-ей

б) $3x^2dx + 6y^2dy + 3u^2du - 3(xydu + yudx + xudy) + 2dy = 0$

в $(1;1;-2)$: $3dx + 6dy + 12du - 3du + 6dx + 6dy + 2dy = 0$

$\Rightarrow du(1;1;-2) = -dx - \dfrac{14}{9}dy$

№3.69

69. Пусть уравнением $f(x-y;\ y-z;\ z-x)=0$, где $f(u;z;w)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x;y)$. Найти $dz(x,y)$.

$x-y=u;\ y-z=v;\ z-x=w$

$f(u;v;w)=0$

$$df=f'_u du+f'_v dv+f'_w dw=f'_u(dx-dy)+f'_v(dy-dz)+f'_w(dz-dx)=0$$

$$dz=\frac{f'_u(dx-dy)+f'_v dy-f'_w dx}{f'_v-f'_w}$$

$$dz=\frac{(f'_u-f'_w)dx+(f'_v-f'_u)dy}{f'_v-f'_w}$$

№3.75

75. Найти в точке $(1;2)$ частные производные дифференцируемых функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$, заданных неявно уравнениями

$$xe^{u+v}+2uv=1,\quad ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x,\quad u(1;2)=v(1;2)=0.$$

по x: $e^{u+v}\cdot(u'_x+v'_x)+e^{u+v}+2u'_x v+2uv'_x=0$

$$ye^{u-v}(u'_x-v'_x)-\frac{u'_x(1+v)-v'_x u}{(1+v)^2}=2$$

в $(1;2;0;0)$: $\begin{cases}u'_x+v'_x=-1\\ u'_x-2v'_x=2\end{cases}\Rightarrow u'_x=0;\ v'_x=-1$

по y: $xe^{u+v}(u'_y+v'_y)+2u'_y v+2uv'_y=0$

$$e^{u-v}+ye^{u-v}(u'_y-v'_y)-\frac{u'_y(1+v)-v'_y u}{(1+v)^2}=0$$

в $(1;2;0;0)$: $\begin{cases}u'_y+v'_y=0\\ u'_y-2v'_y=-1\end{cases}\Rightarrow u'_y=\frac{1}{3};\ v'_y=-\frac{1}{3}$

Ответ: $u'_x=0;\ v'_x=-1;\ u'_y=\frac{1}{3};\ v'_y=-\frac{1}{3}$.

№4.43(5)

43. Найти второй дифференциал функции $u(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $u(x;y)$ — дифференцируемая функция, заданная указанным ниже уравнением и такая, что $u(x_0;y_0)=A$, если:

5) $u^3+2yu+xy=0,\ u(1;-1)=-1;$

$$3u^2du+2ydu+2udy+xdy+ydx=0\Rightarrow du=-\frac{xdy+ydx+2udy}{3u^2+2y}$$

$$du(1;-1;-1) = -\frac{-dy-dx}{1} = \underline{dx+dy}$$

$$6u\,du^2 + 3u^2 d^2u + 2dy\,du + 2y\,d^2u + 2du\,dy + 2dx\,dy = 0$$

в $(1;-1;-1)$: $-6du^2 + 3d^2u + 2dy\,du - 2d^2u + 2du\,dy + 2dx\,dy = 0$

$$-6du^2 + d^2u + 4dy\,du + 2dx\,dy = 0$$

$$-6dx^2 - 12dx\,dy - 6dy^2 + d^2u + 4dy^2 + 6dx\,dy = 0$$

$$\underline{d^2u = 6dx^2 + 6dx\,dy + 2dy^2}$$

№4.46(1)

46. Пусть уравнением:
1) $f(x+u; y+u) = 0$; [redacted]
где f — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x;y)$. Найти $d^2u(x;y)$.

$$d^2a = d^2b = d^2u$$

$x+u=a$; $y+u=b$; $da = dx+du$; $db = dy+du$

$$df = f'_a da + f'_b db = f'_a dx + du(f'_a + f'_b) + f'_b dy = 0$$

$$\Rightarrow du = -\frac{f'_a dx + f'_b dy}{f'_a + f'_b}$$

$$d^2u = -\frac{(f''_{aa}dx\,da + f''_{ab}dx\,db + f''_{ab}dy\,da + f''_{bb}dy\,db)(f'_a+f'_b)}{(f'_a+f'_b)^2} +$$

$$+\frac{(f''_{aa}da + f''_{ab}db + f''_{ab}da + f''_{bb}db)\cdot(f'_a dx + f'_b dy)}{(f'_a+f'_b)^2} =$$

$$= -\frac{(f''_{aa}dx(dx+du) + f''_{ab}dx(dy+du) + f''_{ab}dy(dx+du) + f''_{bb}dy(dy+du))(f'_a+f'_b)}{(f'_a+f'_b)^2} +$$

$$+\frac{(f''_{aa}(dx+du) + f''_{ab}(dy+du) + f''_{ab}(dx+du) + f''_{bb}(dy+du))(f'_a dx + f'_b dy)}{(f'_a+f'_b)^2}$$

$$= \frac{f''_{ab}(dx+du)f'_a dx + f''_{bb}(dy+du)f'_a dx - f''_{ab}dy(dx+du)f'_a - f''_{bb}dy(dy+du)f'_a}{(f'_a+f'_b)^2}$$

$$\underline{f''_{aa}(dx+du)f'_b dy + f''_{ab}(dy+du)f'_b dy - f''_{aa}dx(dx+du)f'_b - f''_{ab}dx(dy+du)f'_b} =$$

$$= \frac{f''_{ab} f'_a (dx+du)(dx-dy) + f''_{bb} f'_a (dy+du)(dx-dy) - f''_{aa} f'_b (dx+du)(dx-dy) - f''_{ab} f'_b (dy+du)(dx-dy)}{(f'_a+f'_b)^2} =$$

$$= (dx-dy) \cdot \frac{f''_{ab} f'_a (dx+du) + f''_{bb} f'_a (dy+du) - f''_{aa} f'_b (dx+du) - f''_{ab} f'_b (dy+du)}{(f'_a+f'_b)^3} =$$

$$du = -\frac{f'_a dx + f'_b dy}{f'_a + f'_b}$$

$$= (dx-dy) \cdot \frac{f''_{ab} f'_a (\cancel{f'_a dx} + f'_b dx - \cancel{f'_a dx} - f'_b dy) + f''_{bb} f'_a (f'_a dy + \cancel{f'_b dy} - f'_a dx - \cancel{f'_b dy}) - f''_{aa} f'_b (\cancel{f'_a dx} + f'_b dx - \cancel{f'_a dx} - f'_b dy) - f''_{ab} f'_b (f'_a dy + \cancel{f'_b dy} - f'_a dx - \cancel{f'_b dy})}{(f'_a+f'_b)^3} =$$

$$= (dx-dy)^2 \cdot \frac{f''_{ab} f'_a f'_b - f''_{bb} (f'_a)^2 - f''_{aa} (f'_b)^2 + f''_{ab} f'_b f'_a}{(f'_a+f'_b)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 u = -\frac{f''_{aa}(f'_b)^2 - 2 f''_{ab} f'_a f'_b + f''_{bb} (f'_a)^2}{(f'_a+f'_b)^3} (dx-dy)^2$$

II. Дифференцируемые отображения, замена переменных.

№3.105

105. Найти якобиан $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\mathbf{r},\psi)}$ отображения
$x = r\cos^p\varphi\cos^q\psi$, $\quad y = r\sin^p\varphi\cos^q\psi$, $\quad z = r\sin^q\psi$, $\quad p,q \in N$.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^p\varphi\cos^q\psi & rp\cos^{p-1}\varphi\cos^q\psi(-\sin\varphi) & rq\cos^p\varphi\cos^{q-1}\psi(-\sin\psi) \\ \sin^p\varphi\cos^q\psi & rp\sin^{p-1}\varphi\cos^q\psi\cos\varphi & qr\sin^p\varphi\cos^{q-1}\psi(-\sin\psi) \\ \sin^q\psi & 0 & qr\sin^{q-1}\psi\cos\psi \end{vmatrix}$$

$$\cos^q\psi \begin{vmatrix} \cos^p\varphi & -\mathrm{ctg}\varphi\,\mathrm{tg}^{p-1}\varphi & \cos^p\varphi \\ \sin^p\varphi & 1 & \sin^p\varphi \\ \mathrm{tg}^q\psi & 0 & -\mathrm{tg}^{q-1}\psi\cdot\mathrm{ctg}\psi \end{vmatrix} \cdot rp\sin^{p-1}\varphi\cos^q\psi\cos\varphi \cdot rq\cos^{q-1}\psi(-\sin\psi) =$$

$$= r^2 pq \sin^{p-1}\varphi \cos\varphi \cos^{3q-1}\psi\,(-\sin\psi) \begin{vmatrix} 0 & -\operatorname{tg}^{2-p}\varphi & \cos^p\varphi \\ 0 & 1 & \sin^p\varphi \\ \operatorname{tg}^q\psi + \operatorname{tg}^{q-2}\psi & 0 & -\operatorname{tg}^{q-1}\psi\cdot\operatorname{ctg}\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 pq \sin^{p-1}\varphi \cos\varphi \cos^{3q-1}\psi \cdot \sin\psi\,(\operatorname{tg}^q\psi + \operatorname{tg}^{q-2}\psi)(\operatorname{tg}^{2-p}\varphi\cdot\sin^p\varphi + \cos^p\varphi) =$$

$$= r^2 pq \sin^{p-1}\varphi \cos\varphi \cos^{3q-1}\psi \sin\psi \operatorname{tg}^{q-2}\psi \cdot \frac{1}{\cos^2\psi}\cdot\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos^{2-p}\varphi} + \cos^p\varphi\right) =$$

$$= r^2 pq \sin^{p-1}\varphi \cos\varphi \cos^{3q-1}\psi \sin\psi \cdot \operatorname{tg}^{q-2}\psi \cdot \frac{1}{\cos^2\psi}\cdot\frac{1}{\cos^{2-p}\varphi} =$$

$$= r^2 pq (\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}\cdot\cos^{2q-1}\psi\cdot\sin\psi\cdot\sin^{q-2}\psi =$$

$$= \underline{pqr^2(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}\cdot(\cos\psi)^{2q-1}\cdot(\sin\psi)^{q-1}}$$

№T3.

T.3. Для отображения $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x\cos y,\quad v = e^x\sin y,$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

$u = e^x\cos y;\ v = e^x\sin y$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix} = e^x \neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$u_1 = e^{x_1}\cos y_1$

$v_1 = e^{x_1}\sin y_1$, пусть $y_1 = y_2 + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, $x_1 = x_2$ $\Rightarrow$ $u_2 = e^{x_1}\cos y_1$, $v_2 = e^{x_1}\sin y_1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не явл. взаимно однозначным

$u = \operatorname{Re}(e^{x+yi})$; $v = \operatorname{Im}(e^{x+yi})$

$\Rightarrow$ u и v принимают любые значения, кроме 0

$\Rightarrow E(f) = \mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}$

№T4

T.4. Отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, r>0.$$

Выразить частные производные r и φ по переменным x и y как функции от r и φ.

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \varphi'_x \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\sin\varphi$$

$$\underline{r'_x = \cos\varphi;\ \varphi'_x = -\frac{\sin\varphi}{r}}$$

$$\begin{cases} 0 = r'_y \cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \varphi'_y \\ 1 = r'_y \sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \varphi'_y \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 1 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{r'_y = \sin\varphi;\ \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{r}}$$

№3.86

86. Решить уравнение $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, преобразовав его к полярным координатам.

$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi$

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi \cdot \varphi'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$r\cos\varphi\sin\varphi \cdot u'_r + \cos^2\varphi \cdot u'_\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\, u'_r + u'_\varphi \sin^2\varphi = 0$$

$$\Rightarrow u'_\varphi = 0 \Rightarrow u = \underset{r = \sqrt{x^2+y^2}}{f(r)} = f(x^2+y^2)$$

Ответ: $\underline{u = f(x^2+y^2)}$

№3.88(1)

88. Решить уравнение, преобразовав его к новым независимым переменным u и v:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ u = x + y,\ v = x - y;$

$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u + z'_v$

$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u - z'_v$

$z'_x - z'_y = 0 \Rightarrow z'_v = 0 \Rightarrow \underline{z = f(u) = f(x+y)}$

Ответ: $u = f(x+y)$

№2.91.

91. Преобразовать уравнение $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ за независимые переменные.

$x = x(u, v)$

$dx = x'_u du + x'_v dv = x'_u(u'_z dz + u'_y dy) + x'_v(v'_z dz + v'_y dy) =$

$= x'_u(-dz + dy) + x'_v(dz + dy)$

$dx = (x'_v - x'_u)dz + (x'_u + x'_v)dy$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x'_u + x'_v}{x'_u - x'_v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{x'_u - x'_v}$

$-u \cdot \dfrac{1}{x'_u - x'_v} + v \cdot \dfrac{x'_u + x'_v}{x'_u - x'_v} = 0$

$\Rightarrow \underline{x'_u + x'_v = \dfrac{u}{v}}$

№4.51(2)

51. Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$r'_x = \cos\varphi$; $\varphi'_x = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$; $r'_y = \sin\varphi$; $\varphi'_y = \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$

$u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\varphi \cdot \varphi'_x = u'_r\cos\varphi - u'_\varphi \cdot \dfrac{\sin\varphi}{r}$

$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \dfrac{\cos\varphi}{r}$

$u''_{xx} = \left(u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)'_r \cdot r'_x + \left(u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)'_\varphi \cdot \varphi'_x$

$$u''_{xx} = \left(u''_{rr}\cos\varphi + u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r^2}\right) \underbrace{r'_x}_{=\cos\varphi} + \left(u'_r(-\sin\varphi) - u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} - u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}\right)\underbrace{\varphi'_x}_{=-\frac{\sin\varphi}{r}} =$$

$$= u''_{rr}\cos^2\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u'_\varphi \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} =$$

$$u''_{xx} = u''_{rr}\cos^2\varphi + 2u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2}$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\varphi \cdot \varphi'_y = u'_r \cdot \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$u''_{yy} = \left(u'_r \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}\right)'_r r'_y + \left(u'_r \sin\varphi + u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}\right)'_\varphi \varphi'_y =$$

$$= \left(u''_{rr}\sin\varphi - u'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r^2}\right) \underbrace{r'_y}_{=\sin\varphi} + \left(u'_r\cos\varphi + u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}\right)\underbrace{\varphi'_y}_{=\frac{\cos\varphi}{r}} =$$

$$= u''_{rr}\sin^2\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2} - u'_\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} =$$

$$u''_{yy} = u''_{rr}\sin^2\varphi - 2u'_\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2}$$

$$u'_x = u'_r \cdot \cos\varphi - u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi}{r}$$

$$u''_{xy} = \left(u'_r\cos\varphi - u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}\right)'_r \cdot r'_y + \left(u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)'_\varphi \cdot \varphi'_y =$$

$$= \left(u''_{rr}\cos\varphi + u'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r^2}\right) \underbrace{r'_y}_{=\sin\varphi} + \left(u'_r(-\sin\varphi) - u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} - u'_\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{r}\right) \cdot \underbrace{\varphi'_y}_{=\frac{\cos\varphi}{r}} =$$

$$= u''_{rr}\cos\varphi \underbrace{\,}_{\sin\varphi} + u'_\varphi \frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{u'_r \sin\varphi\cos\varphi}{r} - u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - u'_\varphi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2} =$$

$$r^2\cos^2\varphi\left(u''_{rr}\cos^2\varphi + 2u'_\varphi \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\right) +$$

$$+ 2r^2\cos\varphi\sin\varphi\left(u''_{rr}\cos\varphi \underbrace{\,}_{\sin\varphi} + u'_\varphi \frac{\sin^2\varphi}{r^2} - u'_r \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - u'_\varphi \frac{\cos^2\varphi}{r^2} - u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right) +$$

$$+ r^2\sin^2\varphi\left(u''_{rr}\sin^2\varphi - 2u'_\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u'_r \frac{\cos^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right) = 0$$

$$r^2 u''_{rr} + 2u'_\varphi \sin\varphi \underbrace{\cos\varphi}_{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} + 2\cos\varphi\sin\varphi\, u'_\varphi (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 u''_{rr} = 0 \Rightarrow \underline{r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0}$$

№4.52(1)

52. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $u = x - at$, $v = x + at$;

$$z'_t = z'_u \cdot u'_t + z'_v \cdot v'_t = z'_u(-a) + z'_v a$$

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u + z'_v$$

$$z''_{tt} = -a\left((z'_u - z'_v)'_u \cdot u'_t + (z'_u - z'_v)'_v \cdot v'_t\right) =$$

$$= -a\left((z''_{uu} - z''_{uv})(-a) + (z''_{uv} - z''_{vv})a\right) = a^2 z''_{uu} - a^2 z''_{uv} - a^2 z''_{uv} + a^2 z''_{vv} =$$

$$= a^2(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

$$z''_{xx} = (z'_u + z'_v)'_u \cdot u'_x + (z'_u + z'_v)'_v \cdot v'_x = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$$

$z''_{tt} = a^2 z''_{xx}$:

$$a^2(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}) = a^2(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

при интегрировании

$$\Rightarrow z''_{uv} = 0 \Rightarrow z'_u = f(u) \Rightarrow z = f(u) + g(v)$$

$$z = f(x - at) + g(x + at)$$

III. Экстремумы функций многих переменных.

№T5.

T.5. В стационарной точке квадратичная форма второго дифференциала положительно полуопределена.

а) Может ли эта точка быть точкой строгого локального минимума?

б) Может ли эта точка быть точкой строгого локального максимума?

в) Может ли эта точка не быть точкой локального экстремума (даже нестрогого)?

а) может, $f(x) = x^4$

б) может, $f(x) = -x^4$

в) может, $f(x) = x^3$

№5.2(2)

Исследовать функцию $u(x;y)$ на экстремум (1–8).

2) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$

$u'_x = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{y}$

$u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$ $\quad \frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow y^4 - 5y^2 + 4 = 0$

$y = \pm 2;\ y = \pm 1$

4 стац. точки: $(1;2);\ (-1;-2);\ (2;1);\ (-2;-1)$

$u''_{xx} = 6y$

$u''_{xy} = 6x \quad \Rightarrow d^2u = 6(y(dx^2 + dy^2) + 2x\,dx\,dy)$

$u''_{yy} = 6y$

$(1;2)$: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow (1;2)$ – лок. мин

$(-1;-2)$: $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow (-1;-2)$ – лок. макс

$(2;1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow (2;1)$ – нет лок. экстр

$(-2;-1)$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow (-2;-1)$ – нет лок экстр

Ответ: $u(1;2) = -25$ – лок. мин

$u(-1;-2) = 31$ – лок. макс.

№5.9.

9. Найти все стационарные точки функции $u = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

$u'_x = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \pm 1$

$u'_y = 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

3 стац. точки: $(0;0)$; $(1;0)$; $(-1;0)$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4$

$u''_{xy} = 0$ $\Rightarrow d^2u = (12x^2-4)dx^2 + 12y^2dy^2$

$u''_{yy} = 12y^2$

$(0;0)$: $d^2u = -4dx^2$ $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – отр. полуопред.

$\Delta u(0;0) = u(\Delta x;\Delta y) - u(0;0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 =$

$= (\Delta x)^2((\Delta x)^2 - 2) + (\Delta y)^4$

при $|\Delta x| < \sqrt{2}$ – в зависимости от Δy либо >0, либо <0

$\Rightarrow$ нет лок. экстр в $(0;0)$

$(\pm1;0)$: $d^2u = \pm 8dx^2$ – положит. полуопред.

$\Delta u(\pm1;0) = u(\Delta x;\Delta y) - u(\pm1;0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 + 1 =$

$= ((\Delta x)^2 - 1)^2 + (\Delta y)^4 > 0 \ \forall \Delta x, \Delta y$ $\Rightarrow (\pm1;0;-1)$ – лок. мин

Нельзя исп. дост. усл-ия, т.к. формы полуопределены.

№ 5.13(1)

Исследовать функцию $u(x;y;z)$ на экстремум (13–15).

13. 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$;

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= 2x - y + 1 = 0 \\ u'_y &= 2y - x = 0 \Rightarrow x = 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -\frac{1}{3};\ x = -\frac{2}{3}$$

$u'_z = 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1$

1 стац. точка $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

$u''_{xx} = 2$; $u''_{yy} = 2$; $u''_{zz} = 2$

$u''_{xy} = -1$; $u''_{xz} = 0$; $u''_{yz} = 0$

$$d^2u = 2(dx^2+dy^2+dz^2) - 2\,dx\,dy$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix}\Delta_1>0\\ \Delta_2>0 \\ \Delta_3>0\end{matrix} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right) \text{ — лок. минимум}$$

Ответ: $u\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right) = -\frac{1}{3}$.

№5.18(1)

18. Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x;y)$, заданную неявно уравнением:
1) $x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0$;

Возьмем дифференциал:

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2u\cdot du + 2dx - 2dy + 4du = 0$$

$$du = -\frac{(x+1)dx + (y-1)dy}{u+2}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} u'_x = -\frac{x+1}{u+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ u'_y = -\frac{y-1}{u+2} = 0 \Rightarrow y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{2 стац. точки } (-1; 1; -5); (-1; 1; 1)$$

$$d^2u = -\frac{(u+2)(dx^2+dy^2) - du((x+1)dx + (y-1)dy)}{(u+2)^2}$$

в $(-1; 1; -5)$:

$$d^2u = \frac{3dx^2 + 3dy^2}{9} = \frac{1}{3}dx^2 + \frac{1}{3}dy^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};\quad \begin{matrix}\Delta_1>0\\ \Delta_2>0\end{matrix} \Rightarrow (-1; 1; -5) \text{ — лок. мин.}$$

в $(-1; 1; 1)$: $d^2u = -\frac{3dx^2+3dy^2}{9} = -\frac{1}{3}dx^2 - \frac{1}{3}dy^2$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow (-1; 1; 1) - \text{лок. макс.}$$

Ответ: $(-1; 1; -5)$ – лок. мин; $(-1; 1; 1)$ – лок. макс.

№5.19(1)

19. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

1) $u = xy,\ x + y - 1 = 0;$

$y = 1 - x \Rightarrow u = -x^2 + x \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2};\ y_0 = \frac{1}{2};\ u = \frac{1}{4}$ – усл. max

Ответ: усл. макс. $u(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

№5.21(2)

21. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

2) $u = 1 - 4x - 8y,\ x^2 - 8y^2 = 8;$

$$\mathcal{L}(x) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \end{matrix} \quad \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} = 8 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2};\ x = 4;\ y = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{2};\ x = -4;\ y = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix} \mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \\ \mathcal{L}''_{xy} = 0 \\ \mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda \end{matrix} \Rightarrow d^2\mathcal{L} = 2\lambda\, dx^2 - 16\lambda\, dy^2 \text{ – полуопределена}$$

$$2x\,dx - 16y\,dy = 0 \Rightarrow dy = \frac{x}{8y}dx$$

$$d^2\mathcal{L} = \left(2\lambda - \frac{x^2}{4y^2}\lambda\right)dx^2$$

$\lambda = \frac{1}{2};\ x = 4;\ y = -1 \Rightarrow d^2\mathcal{L} = (1 - 4\cdot\frac{1}{2})dx^2 = -dx^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(4; -1) = -7$ – усл. максимум

$\lambda = -\frac{1}{2};\ x = -4;\ y = 1 \Rightarrow d^2\mathcal{L} = (-1 + 4\cdot\frac{1}{2})dx^2 = dx^2$

$\Rightarrow u(-4; 1) = 9$ – усл. минимум

Ответ: $u(4;-1) = -7$ - усл. максимум; $u(-4;1) = 9$ - усл минимум

№5.25(б)

25. Найти условные экстремумы функции $u = f(x;y;z)$ при заданном уравнении связи:
6) $u = x - y + 2z,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16;$

$\mathcal{L}(x) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, $z = -\frac{1}{2\lambda}$ $\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2} = 16$

$4 = 64\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{4};\ x = -2;\ y = 2;\ z = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{4};\ x = 2;\ y = -2;\ z = 2 \end{array}\right.$$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda;\ \mathcal{L}''_{xy} = 2\lambda;\ \mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda;\ \mathcal{L}''_{xz} = 0;\ \mathcal{L}''_{yz} = 0;\ \mathcal{L}''_{zz} = 4\lambda$

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dx dy + 2\lambda dy^2 + 4\lambda dz^2$

$\lambda = \frac{1}{4}$; $d^2\mathcal{L} = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dx dy + \frac{1}{2}dy^2 + dz^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow u(-2;2;-2) = -8$ - усл. минимум.

$\lambda = -\frac{1}{4}$; $d^2\mathcal{L} = -\frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}dx dy - \frac{1}{2}dy^2 - dz^2$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ $\Rightarrow u(2;-2;2) = 8$ - усл максимум

Ответ: $u(-2;2;-2) = -8$ - усл. минимум.; $u(2;-2;2) = 8$ - усл максимум

№5.31(3)

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции u на заданном множестве (28–33).

3) $u = x + y + z,\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1;$

$\mathcal{L}(x) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 - z)$, $\underline{z \leq 1}$

$\mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x;\ \mathcal{L}'_y = 1 - 2\lambda y;\ \mathcal{L}'_z = 1 + \lambda$

$\lambda = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$

$\mathcal{L}''_{xx} = -2\lambda; \; \mathcal{L}''_{yy} = -2\lambda; \; \mathcal{L}''_{zz} = 0; \; \mathcal{L}''_{xy} = \mathcal{L}''_{yz} = \mathcal{L}''_{zx} = 0$

$d^2\mathcal{L} = -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 = 2(dx^2 + dy^2)$ – положит. опред

$\Rightarrow$ при $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$ $x+y+z \to \min$ $\Rightarrow$ $z - \frac{1}{2} \to \min$, $\frac{1}{2} \le z \le 1$ $\Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$u(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0) = m = -\frac{1}{2}$.

Ясно, что наибольшее значение $x+y+z$, когда x, y, z – максимальны,

т.е. $z = 1$; $x^2 + y^2 = 1$

$u = x + y$, $x^2 + y^2 = 1$

$\mathcal{L}(x) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x; \; \mathcal{L}'_y = 1 - 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}; y = \frac{1}{2\lambda}$$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}; x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}; x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ очев. что $x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$

Ответ: $M = u(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1) = 1 + \sqrt{2}$; $m = u(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0) = -\frac{1}{2}$

IV. Кратные интегралы.

§8: 23; 34.

Т.6. Пусть функция f двух переменных определена на прямоугольнике $P = [a,b] \times [c,d]$.

а) Верно ли, что если функция $f(x,\cdot)$ интегрируема на $[c,d]$ при всех $x \in [a,b]$, а функция $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ интегрируема на $[a,b]$, то функция f интегрируема на P?

б) Верно ли, если функция f интегрируема на P, то функция $f(x,\cdot)$ интегрируема на $[c,d]$ при всех $x \in [a,b]$?

!

§8: 79(1); 83(15); 85(3); 90(1, 8); 133(2); 139(2); 175(2); 176(2).
§8: 106(3); 107(2); 110(3); 124(1, 5); 144(6); 145(1); 146(3); 147; 148(2).
§9: 6(2); 8(6); 10; 13(5); 16(3); 21; 63(4).

№ 8.23

$$f(x;y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, 0<x<y<1\\ -\frac{1}{x^2}, 0<y<x<1\\ 0, \text{иначе}\end{cases} \qquad G=[0;1]\times[0;1]$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f\,dx=\int_0^1 dy\left[\int_0^y f\,dx+\int_y^1 f\,dx\right]=$$

$$=\int_0^1 dy\left(\int_0^y \frac{dx}{y^2}-\int_y^1\frac{dx}{x^2}\right)=\int_0^1 dy\left(\frac{x}{y^2}\Big|_0^y+\frac{1}{x}\Big|_y^1\right)=\int_0^1 dy=\underline{1}$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f\,dy=\int_0^1 dx\left(\int_0^x f\,dy+\int_x^1 f\,dy\right)=$$

$$=\int_0^1 dx\left(\int_0^x -\frac{dy}{x^2}+\int_x^1\frac{dy}{y^2}\right)=\int_0^1\left(-\frac{y}{x^2}\Big|_0^x-\frac{1}{y}\Big|_x^1\right)dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$\underline{=-1}$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f\,dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1 f\,dx\Rightarrow \text{не интегрируема на } [0;1]\times[0;1]$$

№ Т6.

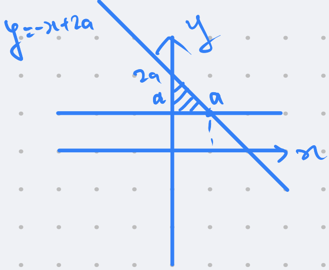
а) нет (предыдущий пример)

б) нет: $f(0;y)=\begin{cases}1, y\in\mathbb{Q}\\ 0, y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ — не инт. при $x=0$

№ 8.79(1)

В задачах 78–81 для заданного множества G записать интеграл $\iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

79. G — четырехугольник, ограниченный прямыми ($a>0$):
1) $x=0,\ y=0,\ y=a,\ x+y=2a;$



$\int_0^a dx \int_a^{-x+2a} f\,dy$; $\int_a^{2a} dy \int_0^{-y+2a} f\,dx$

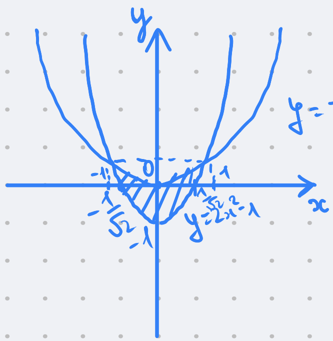
№8.83(15)

83. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

15) $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x;y)\,dy$;

$2x^2-1=y$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x;y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{0} f(x;y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$$



$y=\pm\sqrt{\frac{y+1}{2}}$

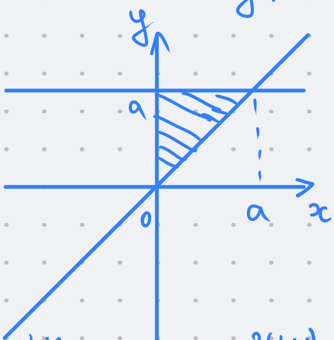
№8.85(3)

85. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

3) $\int_0^a dx\int_x^a (a^2-y^2)^\alpha\, dy$, $a>0$, $\alpha>0$;

=

$a \ge y \ge x$



$$=\int_0^a dy \int_0^y (a^2-y^2)^\alpha dx =$$

$$=\int_0^a y(a^2-y^2)^\alpha dy =$$

$$=-\frac12\int_0^a (a^2-y^2)^\alpha d(a^2-y^2) = -\frac12\cdot\frac{(a^2-y^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^a = \frac12\cdot\frac{a^{2(\alpha+1)}}{\alpha+1}$$

№8.90(1;8)

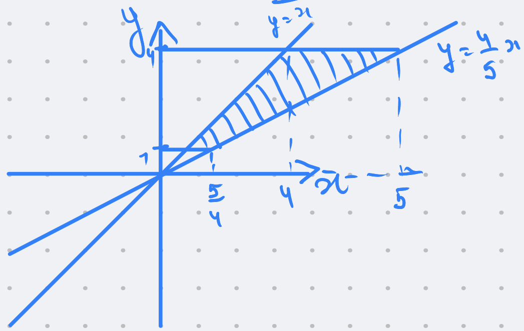
Вычислить двойные интегралы (90–94).

90. 1) $\iint_G (x\sin y + y\cos x)\,dx\,dy$, $G=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

$$=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}(x\sin y+y\cos x)dy = \int_0^{\pi/2}\left(\left[x(-\cos y)+\frac{y^2}{2}\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(x + \frac{\pi^2}{8}\cos x\right) dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8}\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

8) $\iint\limits_G \sqrt{x-y}\,dx\,dy,\ G = \left\{\frac{4}{5}\,x \leqslant y \leqslant x,\ 1 \leqslant y \leqslant 4\right\};$



$$\int_1^4 dy \int_y^{\frac{5}{4}y} \sqrt{x-y}\,dx =$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{2(x-y)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_y^{\frac{5}{4}y}\right] dy =$$

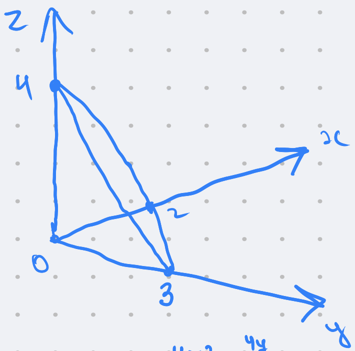
$$= \int_1^4 \left[\frac{2\cdot\left(\frac{1}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] dy = \frac{1}{12}\cdot\int_1^4 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{12}\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{12}\cdot\frac{2^5}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{31}{\frac{5}{2}} = \frac{31}{30}$$

№8.133(2)

133. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

2) $\int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{3-3z/4} dy \int\limits_0^{2-2y/3-z/2} f(x;y;z)\,dx,\ (x;y;z);$



$6x + 4y + 3z - 12 = 0$

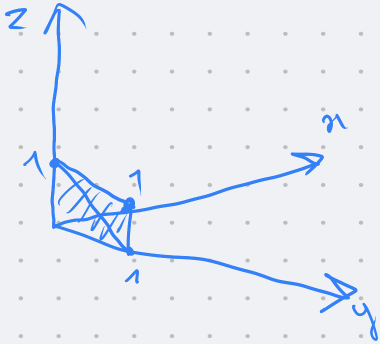
$z = 0;\ y = 0 \Rightarrow x = 2$

$$= \iint\limits_S dx\,dy \int_0^{4-2x-\frac{4y}{3}} f(x;y;z)\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{4-2x-\frac{4y}{3}} f(x;y;z)\,dz$$

№139(2)

139. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, если:

2) $f(x;y;z) = (1+x+y+z)^{-3}$; область G ограничена плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$



$$\iiint_G f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iint_S dx\,dy \int_0^{1-x-y} f\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{8} + \frac{(1+x+y)^{-2}}{2}\right)dy = \int_0^1 dx\cdot\left(-\frac{1}{8} y\Big|_0^{1-x} - \frac{(1+x+y)^{-1}}{2}\Big|_0^{1-x}\right) =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{(1+x)^{-1}}{2}\right)dx = \frac{(x-1)^2}{16}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} x\Big|_0^1 + \frac{\ln(1+x)}{2}\Big|_0^1 =$$

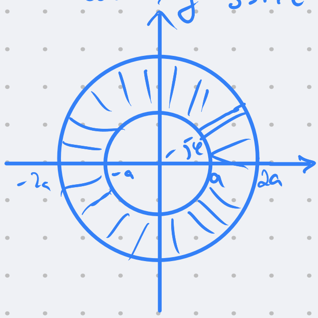
$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{8\ln 2 - 5}{16}$$

№8.106(3)

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам (106–109).

3) $\iint_G |xy|\,dx\,dy,\ G = \{a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4a^2\};$

$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi$



$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^{2a} \rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho =$$

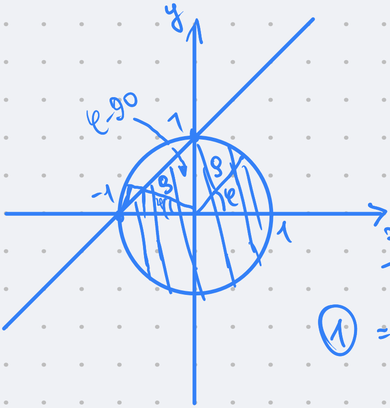
$$= 4\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_a^{2a} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\sin\varphi\cdot 15a^4 = \frac{\sin^2\varphi}{2}\cdot 15a^4\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{15a^4}{2}$$

2) $\iint\limits_G y\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant 2x,\ x>y\};$

№8.107(2)



$x = 1+\rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$y = x+1$

$\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi + 1$

$\rho = \frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{1}^{\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \rho\sin\varphi\,d\rho$$

$= (1)$, $= (2)$

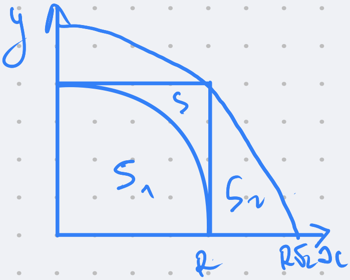
$$(1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^{\cos\varphi} = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi - \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi}^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi/2} - \frac{1}{3}\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi/2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$$

$$(2) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}} \rho^2\sin\varphi\,dr = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}} =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\sin\varphi-\cos\varphi)^3} - \frac{1}{3}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}$$

3) вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.



№8.110(3)

S – площадь квадрата

S_1 – площадь малого сектора

S_2 – площадь большого

$e^{-x^2}>0\ \forall x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_{кр}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint\limits_{S_{кв}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le$$

$$\le \iint\limits_{S'_{кр}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$\iint\limits_{S_{кв}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^R e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_0^R e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2,$$

$$\iint\limits_{S_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2}r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\cdot\frac{1}{2}(-e^{-r^2})\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\cdot(1-e^{-R^2})$$

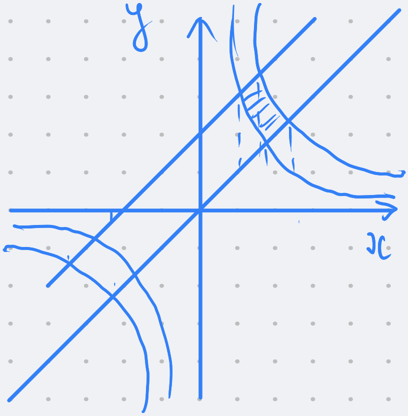
$$\iint\limits_{S_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2}r\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(-e^{-r^2})\Big|_0^{R\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}),\ R\to\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

№124(1;5)

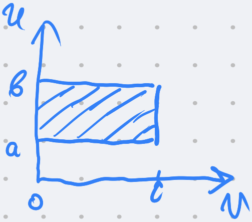
124. 1) $f(x;y) = x+y$, G ограничено линиями $xy=a$, $xy=b$, $y=x$, $y=x-c$, где $0<a<b$, $0<c$;



$u = xy;\ v = x - y$

$\Rightarrow u = a;\ u = b$

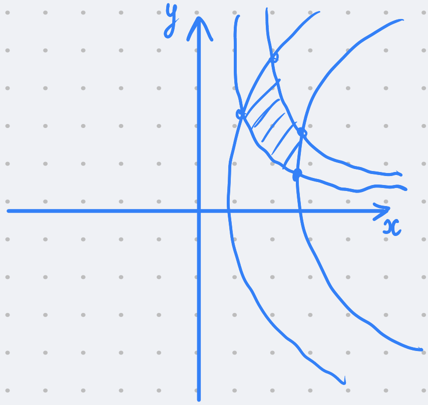
$v = 0;\ v = c$



$$\frac{D(x;y)}{D(u;v)} = \frac{1}{\frac{D(u;v)}{D(x;y)}} = \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_G du\,dv = \int_0^c dv \int_a^b du = \underline{c(b-a)}$$

5) $f(x;y) = x^4 - y^4$, $G = \{x > 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 2\}$.



$u = xy \Rightarrow 1 \le u \le 2$

$v = x^2 - y^2 \Rightarrow 1 \le v \le 2$

$$\frac{D(x;y)}{D(u;v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\iint\limits_G (x^4-y^4)\,dx\,dy = \iint\limits_G \frac{v}{2}\cdot dv\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 v\,dv = \underline{\frac{3}{4}}$$

N144(6)

6) $f(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $G = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant z\}$.

$x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$\underline{\rho \le \cos\theta}$

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$

$z = \rho \cos\theta$

$$\frac{D(x;y;z)}{D(\rho;\theta;\varphi)} = \rho^2 \sin\theta$$

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_G \rho^3 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^3 \sin\theta\, d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos^4\theta\, d\cos\theta = \frac{\pi}{10}$$

№145(1)

1) $\iiint_G f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz,$

$G = \{\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\};$

конус, эллипсоид

$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$
$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$
$z = \rho \cos\theta$