Будем искать решение в виде $y(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})e^{\lambda x}=(a_n\mathcal{D}^n+\ldots+a_1\mathcal{D}+a_0)e^{\lambda x}=\underbrace{(a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0)}_{=\mathcal{L}(\lambda)}\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}=0$$

$\mathcal{L}(\lambda)=\boxed{a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0}$ – характеристическое ур-е

Рассмотрим несколько случаев:

1) $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ – корни хар-го ур-я кратности 1. Тогда $e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x}$ – базис и общее решение $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+\ldots+C_ne^{\lambda_n x}$

2) Среди корней есть комплексно-сопряжённая пара, т.е. $\lambda_{1,2}=a\pm ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ (все комплексные корни парные). Им соответствуют базисные решения $e^{ax}\sin bx$ и $e^{ax}\cos bx$

3) Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}$ – корень кратности $s$. Тогда ему соответствуют базисные решения $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x},\ldots,x^{s-1}e^{\lambda x}$

4) $\lambda_{1,2}=a\pm ib$ – корни кратности $S$ каждый. Им соответствуют базисные решения $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx,\ldots,e^{ax}x^{s-1}\cos bx, e^{ax}x^{s-1}\sin bx$

## II. Неоднородные уравнения.

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{D})\cdot y=f(x)}\qquad(3)$$

Пусть $y_r(x)$ – решение ур-я (3), т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{D})\cdot y_r=f(x)$

Сделаем замену $y(x)=y_0(x)+y_r(x)\Rightarrow\mathcal{L}(\mathcal{D})y_0+\cancel{\mathcal{L}(\mathcal{D})y_r}=\cancel{f(x)}$

т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{D})\cdot y_0=0$ $\quad\boxed{y(x)=y_0(x)+y_r}$

общее реш неоднор; общее реш однородного; частное реш неоднородн

**Важное свойство:** если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, общее реш имеет вид $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_0(x)$, где $\mathcal{L}(\mathcal{D})y_1=f_1$, $\mathcal{L}(\mathcal{D})y_2=f_2$, $\mathcal{L}(\mathcal{D})y_0=0$

**Th1.** Пусть правая часть $f(x)=\underbrace{P_m(x)e^{ax}\cos bx}_{\text{квазимногочлен}}$, или $\sin bx$

где $P_m(x)$ – многочлен степени $m\in\mathbb{N}$; $a,b\in\mathbb{R}$. Тогда $\exists!$ реш вида

$\boxed{y_r(x)=x^sQ_m(x)e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)}$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени $m$

1) $\lambda=a+ib$ не является корнем хар-го ур-я. Тогда $s=0$

2) $\lambda=a+ib$ – корень хар-го ур-я. Тогда $s$ – его кратность

Этот случай наз-ся резонансным (отсылка к $\ddot{x}+\omega^2x=F\cos\nu t$

**Метод вариации постоянной для ур-я $\mathcal{L}(\mathcal{D})\cdot y(x)=f(x)$**

**Th2.** Пусть общее решение однородного ур-я имеет вид $y_0(x)=C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$. Тогда общее решение неоднородного имеет вид $y(x)=C_1(x)\varphi_1(x)+\ldots+C_n(x)\varphi_n(x)$, где $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases}C_1'(x)\varphi_1(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n(x)=0\\ C_1'(x)\varphi_1'(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n'(x)=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x)=0\\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)=\frac{f(x)}{a_n}\end{cases}$$

всегда совместна, т.к. $W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1&\ldots&\varphi_n\\ \varphi_1'&\ldots&\varphi_n'\\ \varphi_1^{(n-1)}&\ldots&\varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\neq 0\ \forall x\in I$ (док-во см в лекциях)

Вронскиан

**Опр.** Уравнение Эйлера: $a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=f(x)$, $x>0$, $a_i\in\mathbb{R}$

Заменой $x=e^t$ сводится к линейному с постоянными коэфф

---

# СЛУ

1) Все собств. значения $\lambda_i\in\mathbb{R}$ кратности 1. Тогда $\exists$ базис $\vec{U}_1,\ldots,\vec{U}_n$ из собственных векторов $\Rightarrow\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^n\vec{U}_ie^{\lambda_it}$

2) Есть кратные $\lambda$, но $\exists$ базис из собственных векторов

2) Пара комплексно-сопряжённых $\lambda_1=a+ib$ и $\lambda_2=a-ib$. Тогда им соответствуют собственные вектора $\vec{U}_{(1)}$ и $\vec{U}_{(2)}$ ($U_i\in\mathbb{C}$)

Причём $\lambda_2=\bar{\lambda}_1$ и $\vec{U}_{(2)}=\bar{\vec{U}}_{(1)}$, т.е. $Re\,\lambda_1=Re\,\lambda_2$ $\quad Re\,\vec{U}_1=Re\,\vec{U}_2$

комплексное сопряжение $\quad Im\,\lambda_1=-Im\,\lambda_2\quad Im\,\vec{U}_1=-Im\,\vec{U}_2$

Базисные решения: $\vec{U}_1e^{\lambda_1t}$ и $\vec{U}_2e^{\lambda_2t}$, причём $\vec{U}_2e^{\lambda_2t}=\overline{(\vec{U}_1e^{\lambda_1t})}$

Рассмотрим их комбинации

Новое ФСР, т.е. новый базис $\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_1&=\tfrac{1}{2}(\vec{U}_1e^{\lambda_1t}+\vec{U}_2e^{\lambda_2t})=Re[\vec{U}_1e^{\lambda_1t}]\\ \vec{v}_2&=\tfrac{1}{2i}(\vec{U}_1e^{\lambda_1t}-\vec{U}_2e^{\lambda_2t})=Im[\vec{U}_1e^{\lambda_1t}]\end{aligned}}$

$\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – действительные ЛНЗ решения

**№3.** Решите систему $\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x\end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

**Реш.** 1) Хар-е ур-е $\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0\Rightarrow\underbrace{\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i}_{\text{пара компл сопряж корней}}$

Найдём собственный вектор для $\lambda_1=i$: $(A-i\cdot E)\vec{U}=\vec{0}$

$\left(\begin{array}{cc|c}-i&-1&0\\1&-i&0\end{array}\right)\overset{i\cdot(1)}{\sim}(1\ \ -i\,|\,0)\Rightarrow\vec{U}_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $(1)=-i\cdot(2)$; $U_x$, $U_y$

Тогда для $\lambda_2=-i$ $\quad\vec{U}_2=\bar{\vec{U}}_1=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$

2) $\vec{U}_1e^{\lambda_1t}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}e^{it}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}(\cos t+i\sin t)=\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}}_{Re[\vec{U}_1e^{\lambda_1t}]}+i\underbrace{\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{Im[\vec{U}_1e^{\lambda_1t}]}$

Общее решение: $\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}$

4) Есть кратные $\lambda$, но не существует базиса из собственных векторов. В этом случае придётся всё делать хитро.

**Опр.** Пусть $\lambda$ – собственное значение преобразования $A$ и пусть векторы $\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_k$:

$$\boxed{\begin{aligned}A\vec{h}_1&=\lambda\vec{h}_1,\quad\vec{h}_1\neq\vec{0}\\ A\vec{h}_2&=\lambda\vec{h}_2+\vec{h}_1\\ &\ldots\\ A\vec{h}_k&=\lambda\vec{h}_k+\vec{h}_{k-1}\end{aligned}}$$

$$\begin{array}{c|c} & A\vec{h}_1\quad A\vec{h}_2\quad A\vec{h}_3\quad\ldots\quad A\vec{h}_{k-1}\quad A\vec{h}_k\\ \begin{matrix}\vec{h}_1\\\vec{h}_2\\\vec{h}_3\\ \\ \vec{h}_{k-1}\\\vec{h}_k\end{matrix} & \begin{pmatrix}\lambda&1&0&\ldots&0&0\\0&\lambda&1&\ldots&0&0\\0&0&\lambda&\ldots&0&0\\ \ldots&&&&&\\0&0&0&\ldots&\lambda&1\\0&0&0&\ldots&0&\lambda\end{pmatrix}\end{array}=J_k(\lambda)$$

жорданова клетка порядка $k$

Тогда $\vec{h}_1$ – собственный вектор, а векторы $\vec{h}_2,\ldots,\vec{h}_k$ наз-ся присоединёнными к вектору $\vec{h}_1$. $\{\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_k\}$ – жорданова цепочка.

Можно показать, что $\{\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_k\}$ – ЛНЗ.

**Th1.** Для любого преобразования $A$ $\exists$ базис, состоящий из жордановых цепочек. (Жорданов базис). В этом базисе $A=(J_1\ldots)$

Теперь научимся решать неоднородные уравнения.

$\boxed{\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+\vec{f}(t)}$, где $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}\in C(I)$

В силу линейности работает формула $\boxed{\vec{X}(t)=\vec{X}_0(t)+\vec{X}_r(t)}$

общее реш неоднородн; общее реш однородн; частное реш неодн

1) $\vec{f}(t)=\underbrace{\vec{P}_m(t)e^{\mu t}\sin\beta t}_{\text{вектор-квазимногочлен}}$ (или $\cos\beta t$), например $\underbrace{\begin{pmatrix}t-2\\t^2+1\end{pmatrix}}_{\vec{P}_2(t)}e^t\cos t$

**Th1.** Пусть $\vec{f}(t)=\vec{P}_m(t)e^{at}\sin bt$ (либо $\vec{P}_m(t)e^{at}\cos bt$)

Тогда $\exists$ решение вида $\vec{X}_r=\vec{Q}^{(1)}_{m+k}(t)e^{at}\sin bt+\vec{Q}^{(2)}_{m+k}(t)e^{at}\cos bt$

[$k=0$, если $\lambda=a+ib$ не собств значение (не резонанс)

[$k\leq$ длины наибольшей жордановой цепочки, если $\lambda=a+ib$ – собств значение (резонанс)

**Опр.** $e^{At}=E+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$ – матричная экспонента

$A$ – матрица $n\times n$, $E$ – единичная матр $n\times n$, $e^{At}$ – тоже матр $n\times n$.

**№р:** 1) $e^{0\cdot t}=E$

2) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$, $A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&0\\0&\lambda_2^k&0\\0&0&\lambda_3^k\end{pmatrix}$

т.о. $e^{At}=E+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1t)^k}{k!}&0&0\\0&\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2t)^k}{k!}}}_{e^{\lambda_2t}}&0\\0&0&\sum\frac{(\lambda_3t)^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0&0\\0&e^{\lambda_2t}&0\\0&0&e^{\lambda_3t}\end{pmatrix}$

**Важные св-ва:**

1) $\forall$ матрицы $A$ и $\forall t\in\mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$ абсолютно сходится !

2) $e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}=e^{(A+B)t}$, если $AB=BA$

Из 2-го св-ва при $B=-A$ получаем $\boxed{e^{At}e^{-At}=E}$ (обратная к $e^{At}$)

$\exists$ обратная матрица $\Rightarrow\boxed{\det e^{At}\neq 0}$ !

3) $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$

□ $\frac{d}{dt}\left(E+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\ldots+\frac{t^k}{k!}A^k+\ldots\right)=A+tA^2+\ldots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\ldots=Ae^{At}$ ■

Из св-в 2-3 получаем, что столбцы матрицы $e^{At}=(\vec{\varphi}_1(t)\ldots\vec{\varphi}_n(t))$ образуют ФСР ур-я $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ !

Общее решение $\boxed{\vec{x}(t)=e^{At}\cdot\vec{C}}$ – столбец констант $\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}$

Снова повспоминаем минал...

При замене базиса (матр перехода $S$)

$\boxed{A = SA'S^{-1}}$, $A^2 = SA'\underbrace{S^{-1}S}_{E}A'S = SA'^2S^{-1}, \ldots, A^k = SA'^kS^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{e^{At} = Se^{A't}S^{-1}}$ преобразуется так же, как и $A$

## Алгоритм решения.

1) Находим базис из собств векторов $A$ (или из Жорд цепочек)
2) В этом базисе считаем $e^{A't}$
3) $e^{At} = Se^{A't}S^{-1} \Rightarrow \vec{x} = e^{At}\vec{c}$