Маятник Фуко. Измерение угловой скорости вращения Земли.

Дудаков Семён, группа Б01-303

1 Введение

Опыты по отклонению к востоку свободно падающих тел в принципе могли бы служить экспериментальным доказательство неинерциальности земной системы отсчета. Однако постановка таких опытов затруднительна, а их точность невелика. Для этой цели более подходящим является маятник Фуко. Он представляет собой массивный шар, подвешенный на очень длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия. Отклоним маятник из положения равновесия, а затем представим его самому себе. Если бы Земля была инерциальной системой отсчёта, то на маятник действовали бы только "настоящие силы": сила тяжести и сила натяжение нити(силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем). Обе эти силы лежат в вертикальной плоскости. Поэтому если маятнику не сообщён толчок в боковом направлении, то он всё время будет колебаться в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижной относительно Земли. Опыты показали, что это не так: плоскость качаний маятника в земной системе отсчёта медленно поворачивается вокруг вертикали рассматриваемого места и притом в том же направлении, в каком совершают суточное вращение Солнце и звезды на небесной сфере. Это доказывает, что земная система не является инерциальной

2 Теория

Уравнение относительного движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{0} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{0}\mathbf{r}] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + m\omega^2\mathbf{r}_\perp$$

Уравнение относительного движения материальной точки в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения:

$$m\mathbf{a} = (\mathbf{F_3} + m\omega^2\mathbf{r}_\perp) + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}$$

Пропали компоненты $m[\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{0}\mathbf{r}]$ и $m\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{0}$, так как Земля вращается практически равномерно. Векторная сумма $(\mathbf{F_3} + m\omega^2\mathbf{r}_\perp)$ пропорциональна массе точки m. Обозначим её $m\mathbf{g}$.
Итого получим:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}$$

3 Исследование движения

Рассмотрим малые колебания математического маятника с учётом силы Кориолиса.
Пусть маятник находится в точке земли с широтой α. Разложим вектор угловой скорости на две составляющие: вертикальную $\boldsymbol{\omega}_\text{в}$ и горизонтальную $\boldsymbol{\omega}_\text{г}$. Горизонтальную в свою очередь разложим на две составляющие: $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ и $\boldsymbol{\omega}_\perp$, из которых $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ лежит в плоскости качаний маятника, а $\boldsymbol{\omega}_\perp$ к ней перпендикулярна.

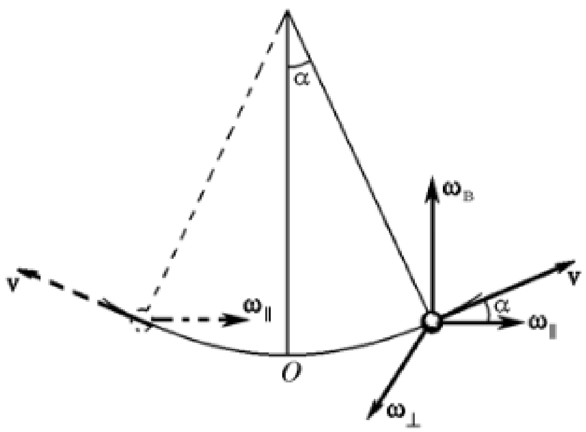


Рис. 1:

Таким образом получим следующее уравнение движения:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\text{в}}] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\perp}] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\|}] + \mathbf{F}$$

Составлющая силы Кориолиса $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\perp}]$ направлена вдоль нити маятника. Она меняет натяжение нити, но на положение плоскости качаний влияния не оказывает, поэтому ей можно пренебречь.
Вторая составляющая силы Кориолиса $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\text{в}}]$ в нашей задаче наиболее важна. Она перпендикулярна к плоскости качаний маятника и вызывает вращение этой плоскости.
Третья составляющая $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\|}]$ тоже перпендикулярна к плоскости качания маятник, а потому она также оказывает влияние на вращение этой плоскости. Однако при рассматриваемых нами малых колебаниях её величина пренебрежимо мала.
В итоге уравнение движения маятника Фуко имеет вид:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_{\text{в}}] + \mathbf{F}$$

При $\omega_{\text{в}} = 0$ получаются обычные гармонические колебания маятника. Мы видим, что влияние силы Кориолиса приводит к вращению всей картины с угловой скоростью Ω_z, где $\omega_{\text{в}}$=$\omega sin\alpha$.

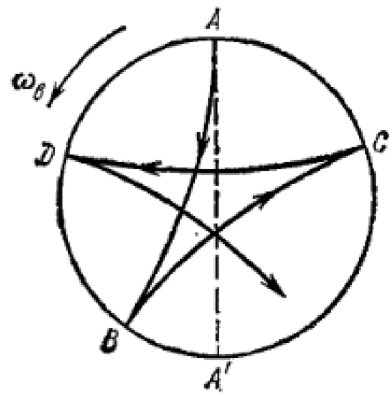
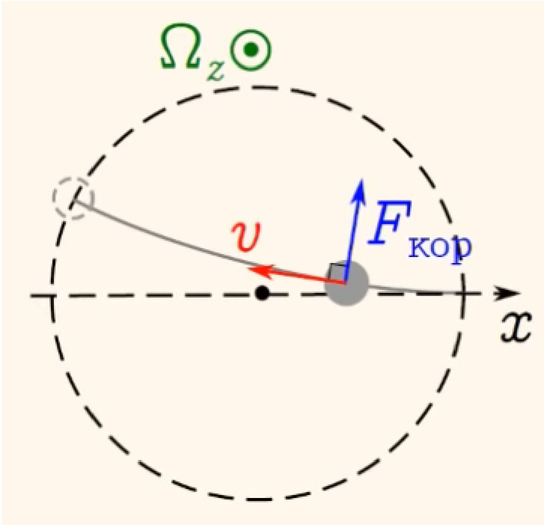
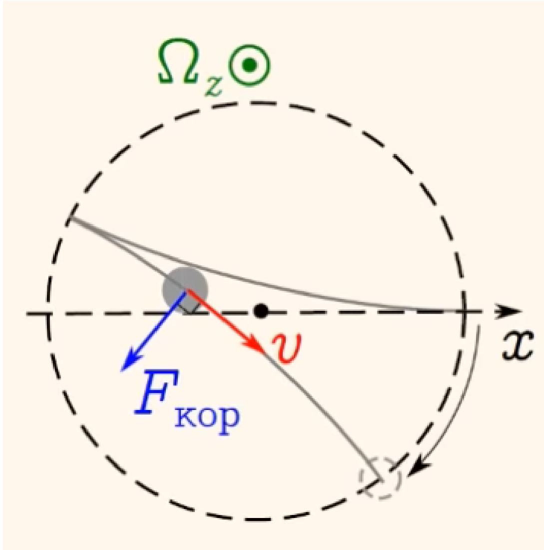


Рис. 2:





4 Вычисление угловой скорости вращения Земли

Выше была приведена формула:

$$\Omega_z = \Omega sin\lambda_0, \text{где } \lambda_0 - \text{широта}$$

Откуда используя формулу для вычисления угловой скорости через период ($\omega = \frac{2\pi}{T}$), получим:

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{T} sin\lambda_0$$

$$T = \tau sin\lambda_0$$

где T-период обращения Земли вокруг собственной оси, τ-период обращения плоскости маятника Фуко
Таким образом, приняв широту Москвы $\lambda_0 = 55.733°$, период обращения плоскости маятника Фуко на широте Москвы $\tau = 28\text{ч } 57\text{мин } 41\text{с}$, вычислим период обращения Земли вокруг собственной оси, получим:

$$T = 23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 3 \text{ секунды}$$

Теперь по формуле вычисления угловой скорости окончательно получаем:

$$\omega = 0.2624 \text{ радиан/час } = 15.04 \text{ градусов/час}$$

5 Заключение

В ходе проделанной работы было подробно изучено движение маятника Фуко, рассмотрена его траектория, доказана неинерциальность системы отсчета, связанной с Землёй, а именно доказано её вращение, а также была вычислена угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси.

6 Список использованной литературы

1. Д.В. Сивухин, Общий курс физики, Том1 - Механика
2. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика, Том1 - Механика
3. В.И. Арнольд, Математические методы классической механики