LV Model.

① Q のみたす PDE

$$Q(t,f) := \mathbb{E}\left[(F_T - K)^+ \mid F_t = f\right]$$

より、Feynman-Kac から、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha(t)^2 A(f)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial f^2} = 0. \qquad Q(T,f) = (f-K)^+$$

② 変数変換

$\alpha(t)^2$ が邪魔なので、$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}$ としてそれを消てみよう。

$\tau = \int_t^T \alpha(s)^2 ds$ とすると、

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{1}{2}A(f)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial f^2} = 0.$$

さらに、ATM からの展開をみたいので、

$A(K) =: \varepsilon$ が小さいとし、$x = \dfrac{f-K}{\varepsilon}$ とする。

$\tilde{Q}(\tau, x) = \dfrac{1}{\varepsilon}Q(t,f)$ とすれば、

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{A(K+\varepsilon x)^2}{A(K)^2}\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2} = 0. \qquad (\tau \in (0,\infty))$$

$$\tilde{Q}(0,x) = x^+$$

③ 漸近展開

εの次数ごとに展開する. (2次まで)

$$\tilde{Q} \simeq \tilde{Q}^{(0)} + \varepsilon \tilde{Q}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{Q}^{(2)}$$

$$A(k+\varepsilon x) \simeq A(k) + A'(k)\,\varepsilon x + \frac{1}{2} A''(k)\,\varepsilon^2 x^2.$$

0次 $\displaystyle \frac{\partial \tilde{Q}^{(0)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \qquad \tilde{Q}^{(0)}(0,x) = x^+$

1次 $\displaystyle \frac{\partial \tilde{Q}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\left\{ \frac{(A(k)+A'(k)\varepsilon x)^2}{A(k)^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(1)}}{\partial x^2} \right) \text{のεの1次} \right\} = 0$

より. $\displaystyle \frac{\partial \tilde{Q}^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(1)}}{\partial x^2} = \upsilon^{(1)} x \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2} \qquad \tilde{Q}^{(1)}(0,x) = 0.$

2次 同様にとり出して.

$$\frac{\partial \tilde{Q}^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(2)}}{\partial x^2}$$

$$= \upsilon^{(1)} x \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\upsilon^{(1)2} + \upsilon^{(2)}\right) x^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2}.$$

$$\tilde{Q}^{(2)}(0,x) = 0.$$

ただし. $\displaystyle \upsilon^{(1)} = \frac{A^{(1)}(k)}{A(k)}$

No.

Date

④ PDEを解く

一般論

微分などを含む演算子

$\tau>0$ でのPDE $\hat{L}f(\tau,x) = g(\tau,x)$ を解くことを考える.

Green関数 $G(\tau,x;\tau',x')$ を

$$\hat{L}G(\tau,x;\tau',x') = -\delta(\tau-\tau')\delta(x-x')$$

の解と定める. ただし, 因果律 $G(\tau,x;\tau',x')=0$ $(\tau<\tau')$ をみたす.

このとき, $$f(\tau,x) = -\iint G(\tau,x;\tau',x')g(\tau',x')dx'd\tau'$$

とすれば, $$\hat{L}f(\tau,x) = \iint \delta(\tau-\tau')\delta(x-x')g(\tau',x')dx'd\tau' = g(\tau,x)$$

より, 求めたい f であったことがわかる.

また, $\tau=t$ で初期条件 $f(t,x)=\rho(x)$ が与えられている場合, $g(t,x)=\rho(x)$ とすればよい.

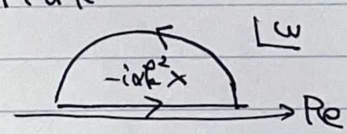
拡散方程式の場合

$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ とする.

$$\tilde{G}(\omega,k) = \iint e^{-ik(x-x')}e^{-i\omega(\tau-\tau')}G(\tau,x;\tau',x')dx\,d\tau$$

とすれば, $(i\omega-\alpha k^2)\tilde{G}(\omega,k) = -1$ がわかる.

$$G(\tau,x;\tau',x') = \iint \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi}\frac{e^{i\omega(\tau-\tau')}}{2\pi}\tilde{G}(\omega,k)\,dk\,d\omega$$
$$= \iint \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi i}\frac{e^{i\omega(\tau-\tau')}}{2\pi}\frac{-1}{\omega+i\alpha k^2}\,dk\,d\omega$$



$\tau>\tau'$, $\alpha<0$ とすれば,
ω 空間で右のように積分して,

$$G(\tau,x;\tau',x') = -\int \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi}e^{\alpha k^2(\tau-\tau')}\,dk$$
$$= \cancel{\frac{\ }{\sqrt{-4\pi\alpha}}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{4\pi|\alpha|(\tau-\tau')}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4|\alpha|(\tau-\tau')}}$$

No.

Date

0次を解く

$$\tilde{Q}^{(0)}(\tau,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\tau}} (x')^+ dx'$$

$$= x N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\, \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

1次を解く $\quad v^{(1)} x \dfrac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2} = v^{(1)} x.\ \phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{\tau}}\right) / \sqrt{\tau}.$

$$\tilde{Q}^{(1)}(\tau,x) = v^{(1)} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-x')^2/2(\tau-\tau')}}{\sqrt{2\pi(\tau-\tau')}}\, x' \frac{e^{-x'^2/2\tau'}}{\sqrt{2\pi\tau'}}\, dx' d\tau'$$

$$= \frac{v^{(1)}\sqrt{\tau}}{2}\, x\, \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

2次を解く $\quad \dfrac{1}{2}\left(v^{(1)^2} + v^{(2)}\right) x^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2}\left(v^{(1)^2} + v^{(2)}\right) \dfrac{x^2}{\sqrt{\tau}}\, \phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$

$$v^{(1)} x \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{v^{(1)^2}}{2} \sqrt{\tau}\, x \cdot \left(-\frac{3x}{\tau}\, \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \frac{x^3}{\tau^2}\, \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \right)$$

$$\tilde{Q}^{(2)}(\tau,x) = \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-x')^2/2(\tau-\tau')}}{\sqrt{2\pi(\tau-\tau')}} \left\{ \left(\frac{v^{(2)}}{2} - v^{(1)^2}\right) x'^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau'}} e^{-\frac{x'^2}{2\tau'}} + \frac{v^{(2)}}{2} x'^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau'^3}} e^{-\frac{x'^2}{2\tau'}} \right\} dx' d\tau'$$

$$= v^{(1)^2} \frac{1}{24} \left(\frac{3x^4}{\sqrt{\tau}} - 2\sqrt{\tau}\, x^2 - \tau^{3/2} \right) \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

$$+ v^{(2)} \frac{1}{12} \left(2\sqrt{\tau}\, x^2 + \tau^{3/2} \right) \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

No.

Date

⑤ 整理

$$\tilde{Q}^{(1)} = v^{(1)} \tau x \frac{\partial \tilde{Q}^{(0)}}{\partial \tau}$$

$$\tilde{Q}^{(2)} = \frac{1}{2} v^{(1)^2} \tau^2 x^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{(0)}}{\partial \tau^2}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{12} v^{(1)^2} (x^2 - \tau) \tau + \frac{v^{(2)}}{6} (2x^2 + \tau) \tau \right\} \frac{\partial \tilde{Q}^{(0)}}{\partial \tau}$$

となることから、$\varepsilon \tilde{Q}^{(1)}$, $\varepsilon^2 \tilde{Q}^{(2)}$ の影響を変数 τ に追いやることができて、

$$\tilde{Q}(\tau, x) \simeq \tilde{Q}^{(0)}\left(\tilde{\tau}(\tau, x), x \right)$$

$$\tilde{\tau}(\tau, x) = \tau \left(1 + v^{(1)} \varepsilon x + \left(\frac{4v^{(2)} + v^{(1)^2}}{12} x^2 + \frac{2v^{(2)} - v^{(1)^2}}{12} \tau \right) \varepsilon^2 \right)$$

また、$\varepsilon \tilde{Q}^{(0)}(\tau', x') = \tilde{Q}^{(0)}(\varepsilon^2 \tau', \varepsilon x')$ であるから、

$$Q(t, f) \simeq \tilde{Q}^{(0)}\left(\varepsilon^2 \tilde{\tau}(\tau, x), \varepsilon x \right)$$

と結論できる。

ここで、$\varepsilon^2 \tilde{\tau}$ を f を用いて表記し直すと、

$$\varepsilon^2 \tilde{\tau}\left(\tau, \frac{f-k}{\varepsilon} \right) = A(k)^2 \tau \left(1 + \frac{A'(k)}{A(k)} (f-k) + \left(\frac{4v^{(2)} + v^{(1)^2}}{12} (f-k)^2 + \frac{2v^{(2)} - v^{(1)^2}}{12} \tau A(k)^2 \right) \right)$$

2乗が多くて嫌なので、平方根をとって低次までのみを考えると、

$$\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}} \simeq A(k) \sqrt{\tau} \left(1 + \frac{A'(k)}{2A(k)} (f-k) + \frac{2v^{(2)} - v^{(1)^2}}{12} (f-k)^2 + \frac{2v^{(2)} - v^{(1)^2}}{24} \tau A(k)^2 \right)$$

さらに、A の引数をうまく変えて、1次の項を消したい。

$$A(k) + \frac{1}{2} A'(k)(f-k) \simeq A(f^{av}) \qquad f^{av} = (k+f)/2$$

より、f^{av} を使えばよいことがわかる。

$\gamma^{(i)} = \dfrac{A^{(i)}(f^{av})}{A(f^{av})}$ を用いて、$A(k) = A\left(f^{av} - \dfrac{f-k}{2} \right)$ に注意して

展開すれば、

$$\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}} \simeq A(f^{av}) \sqrt{\tau} \left(1 + \frac{\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(1)^2}}{24} (f-k)^2 + \frac{2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)^2}}{24} A(f^{av})^2 \tau \right)$$

がわかる。

No.
Date

⑥ BS での $\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}^{BS}}$

BS Model では、$\alpha(t) = \sigma^{BS}$, $A(f) = f$ ととればよく、

$$\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}^{BS}} \simeq \sigma^{BS} f^{av} \sqrt{T-t} \left(1 - \frac{(f-k)^2}{12 f^{av^2}} - \frac{\sigma^{BS^2}}{24}(T-t)\right)$$

よって、特定の Model について $\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}}$ がわかれば、

$\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}} = \sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}^{BS}}$ を解くことで、Imp. Vol. がわかる。

⑦ 時間に依存しない LV の Imp. vol.

$\alpha(t) = 1$, $A(f) = \sigma^{loc}(f) f$ となるような LV を考える

$$\sqrt{\varepsilon^2 \tilde{\tau}^{loc}} \simeq \sigma^{loc}(f^{av}) f^{av} \sqrt{T-t} \left(1 + \frac{\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(1)^2}}{24}(f-k)^2 + \cdots\right)$$

となることから、

$$\sigma^{IV} \simeq \sigma^{loc}(f^{av}) \left(1 + \frac{\sigma^{loc''}(f^{av})}{24 \sigma^{loc}(f^{av})} + \cdots\right)$$

がわかる。

面倒なので最低次まで。