SABR Model の Implied Volatility

kakune

February 14, 2024

Agenda

Introduction

本スライドの目的と注意

- 本スライドは、Volatility が変動するモデルにおける、Implied Volatility の概念・振る舞い・近似式の導出を理解することを目的とする。
- 特に近似式の導出は、よい計算練習になる。
- もともと手書きノートで行う予定だったが、やたら messy になってしまったので、補助としてこのスライドを作成した。
- すべての確率変数は T-Forward measure の下であるとする。
- このスライドは、主に N. Zhang "Properties of the SABR model" に基づく。

Introduction

Implied Volatility

- Black-Scholes モデルでは、asset の Forward 価格は、以下の SDE に従う。

$$\mathrm{d}F_t = \sigma^{\mathrm{BS}} \mathrm{d}W_t \tag{1}$$

- このモデルを仮定すれば、市場のオプション価格から、quote する vol を逆算できる。
- これを **Implied Volatility (IV)** と呼ぶ。

BS モデルの限界と改良

- しかし、実際に計算してみると、オプションのストライクに依存して IV が変化することがわかる。
  - Volatility Skew や Volatility Smile。
- すなわち、Black-Scholes モデルは市場を再現できていないことになる。
- そこで、よりよいモデルとして、Volatility が変動するモデルが考案された。
  - **Local Volatility (LV) Model**: Vol が現在価格の deteministic な関数とするモデル。
  - **Stochastic Volatility (SV) Model**: Vol が確率変動するモデル。

Black-Scholes Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{BS}}\mathrm{d}W_t \tag{2}$$

に従うとする Model[1]。これは解くことができて、$(s \le t \le T)$ として

$F_t(T) = F_s(T)\exp\left(\sigma^{\mathrm{BS}}(W_t - W_s) - \frac{\left(\sigma^{\mathrm{BS}}\right)^2}{2}(t-s)\right)$ となる。

European Call Option の価格

時刻 $T > 0$ に行使し、時刻 $\tau > T$ で受け取る strike K の european call option の時刻 t での価格は、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\mathbb{E}_t\left[(F_t(T) - K)^+\right] \tag{3}$$

ブラウン運動の確率分布を考えて解くと、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\big(F_t N(d_t^+) - K N(d_t^-)\big) \tag{4}$$

$$d_t^{\pm} = \frac{1}{\sigma^{\mathrm{BS}}\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{F_t}{K}\right) \pm \frac{\left(\sigma^{\mathrm{BS}}\right)^2}{2}(T-t)\right) \tag{5}$$

この価格は、σ^{BS} について単調増加である。

[1] 以降、(T) はしばしば省略する。

Local Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{loc}}(t, F_t(T))F_t\mathrm{d}W_t \tag{6}$$

に従うとする Model[2]。ここで、σ^{loc} は deterministic な関数。

European Call Option の価格

当然一般に解くことはできないので、$\sigma^{\mathrm{loc}} = \alpha(t)A(f)/f$、
$Q(t, f) = \mathbb{E}\left[(F_T - K)^+ | F_t = f\right]$ として、以下のような手順で解く。

1. Feynman-Kac により、Q の満たす偏微分方程式を求める。
2. 変数変換を行い、$\tilde{Q}(\tau, x)$ とする。
3. $\tilde{Q}, A$ に対して漸近展開を行う。
4. 漸近展開を行った各次数に対して偏微分方程式を導く。

[2] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

IV の求め方

さらに、BS モデルとの比較を行うことにより、implied volatility を求める。

5. 漸近形を整理して、（実質的に）一変数関数にする。
6. BS モデルにおける、その変数の値を計算する。
7. LV モデルでの変数を計算し、それを BS モデルのものと比較することで、IV を求める。

具体的に計算すると、

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)\left(1+\frac{\sigma^{\mathrm{loc}\,\prime\prime}\left(\frac{f+K}{2}\right)}{\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)}\right) \tag{7}$$

LV の限界

LV の限界

Market で観測される IV が $\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K)$ であるとする。現在の Market に合うように最低次を考えて σ^{loc} の calibration を行うと、

$$\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K) = \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{F_0 + K}{2}\right) \tag{8}$$

となる。ここで、calibration の直後に forward price が $F_0 \to f$ と変化したとしよう。すると、そのときの Vol は、

$$\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f + K}{2}\right) = \sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K + f - F_0) \tag{9}$$

となる。例えば $f > F_0$ とすれば、Volatility curve は左に動くことになる。これは、期待される動きと逆である（Forward price が右に動いたのだから、curve も右に動いてほしい)。以上が、LV が将来の Vol を再現できないと言われる所以である。

Stochastic Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma_t F_t \mathrm{d}W_t \tag{10}$$

に従うとする Model[3]。ここで、σ_t はある SDE に従う確率変数。

SABR Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \alpha_t F_t^{\beta} \mathrm{d}W_t^1 \tag{11}$$

$$\mathrm{d}\alpha_t = \nu \alpha_t \mathrm{d}W_t^2 \tag{12}$$

$$\mathrm{d}W_t^1 \mathrm{d}W_t^2 = \rho \mathrm{d}t \tag{13}$$

に従うとする Model。

[3] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

SABR の IV の漸近形

European Call Option 価格導出の概要

Vol が小さいとして、一般に、

$$dF_t = \varepsilon\alpha_t C(F_t)dW_t^1 \tag{14}$$

$$d\alpha_t = \varepsilon\nu\alpha_t dW_t^2 \tag{15}$$

に対して、Option 価格を以下のように導く。

1. F_t, α_t の同時確率分布 p について、Focker-Planck の議論で PDE を導く。
2. Option 価格を、p のあるの汎関数 P で表す。
3. この P を変数変換と漸近展開を繰り返して解く。
4. P を用いて Option 価格の一般式を出す。

SABR の IV の漸近形

IV の導出の概要

5. Normal Model $C(f)=1, \varepsilon\alpha_t=\sigma^{\mathrm{N}}, \nu=0$ に対して漸近展開形を求める。
6. Black-Scholes Model $C(f)=f, \alpha_t=\sigma^{\mathrm{BS}}, \nu=0$ に対して漸近展開形を求め、前項の内容と比較して対応する $\sigma^{\mathrm{N,BS}}$ を求める。
7. SABR Model に対しても同様にして、$\sigma^{\mathrm{N,SABR}}$ を求める。
8. $\sigma^{\mathrm{N,SABR}}=\sigma^{\mathrm{N,BS}}$ を解いて、IV を求める。

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ

③ について、繰り返し変数変換が行われるので、まとめておく。

(1)

$$P(\tau; f, \alpha, K) := \int_{\infty}^{\infty} A^2 p(t, f, \alpha; t+\tau, K, A)\mathrm{d}A \tag{16}$$

は次の PDE を満たす：

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 C(f)^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial f^2} + \varepsilon^2 \rho \nu \alpha^2 C(f) \frac{\partial^2 P}{\partial f \partial \alpha} + \frac{\varepsilon^2 \nu^2 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \tag{17}$$

(2)

$$z = \frac{1}{\varepsilon \alpha} \int_K^f \frac{\mathrm{d}g}{C(g)}, \quad \hat{P}(\tau, z, \alpha) := \frac{\varepsilon C(K)}{\alpha} P(\tau, f, \alpha, K) \tag{18}$$

(3)

$$H(\tau, z, \alpha) := \sqrt{\frac{C(K)}{C(f)}} \hat{P}(\tau, z, \alpha) \tag{19}$$

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ (続き)

(4)

$$\hat{H}(\tau, z, \alpha) := \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}\right) H(\tau, z, \alpha) \tag{20}$$

(5)

$$x := \frac{1}{\varepsilon\nu}\int_0^{\varepsilon\nu z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{I(\zeta)}, \quad I(\zeta) := \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad Q(\tau, x) := \frac{\hat{H}(\tau, z, \alpha)}{\sqrt{I(\varepsilon\nu z(x))}} \tag{21}$$

SABR の IV の漸近形

SABR の IV

最終的に、求めるべき Implied (Normal) Volatility は、

$$\sigma_t^{\mathrm{IV}} \simeq \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1+\left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}}+\frac{\rho\beta\nu\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{(2-3\rho^2)\nu^2}{24}\right)\tau^{\mathrm{ex}}}{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\log\frac{f}{K}\right)^2+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^4} \frac{\zeta}{\chi(\zeta)} \tag{22}$$

Exercise

SABR モデルの IV の導出方法を学んだ kakune くんは、他のモデルでも同様のことができるか試したくなった。また同時に、SABR モデルでは forward price が大きくなったときに price の振動が大きくなりすぎる点を改善したくなった（本当にこれが問題たり得るのかは知らない）。そこで、次のような SV モデルを考えた。

$$\mathrm{d}F_t = S\frac{F_t^\beta}{F_t^\beta + \theta^\beta}\alpha_t \mathrm{d}W_t^1 \tag{23}$$

$$\mathrm{d}\alpha_t = \nu\alpha_t \mathrm{d}W_t^2 \tag{24}$$

$$\mathrm{d}W_t^1 \mathrm{d}W_t^2 = \rho \mathrm{d}t \tag{25}$$

ただし、S, θ, β は定数である（S は不要だが、SABR の漸近展開との対応のためにつけた）。このモデルに対して、IV を求めてみよう。

1. 対応する $C(f)$ を書け。
2. z を f, K を用いて書け。また、z を、SABR と同様に $f^{av}, \log(f/K)$ を用いて展開せよ。
3. $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ を求めよ。
4. IV を求めよ。

さらに、ここで求めた漸近形が正しいかどうか、数値的に確かめよう。

5. $\log F_t, \log \alpha_t$ についての SDE を求めよ。
6. 上で求めた SDE を用いて、IV を数値的に求めるプログラムを書け。
7. 上で数値的に求めた IV と漸近形を比較し、グラフに示せ。

Exercise:Answer

以下では、$\varepsilon = 1$ として解答を示す。

1.

$$C(f) = S\frac{f}{f^\beta + \theta^\beta} \tag{26}$$

2.

$$z = \frac{1}{\alpha}\int_K^f \left(1 + \left(\frac{f'}{\theta}\right)^{-\beta}\right)\mathrm{d}f' = \frac{1}{\alpha}\left((f-K) + \frac{\theta^\beta}{1-\beta}\left(f^{1-\beta} - K^{1-\beta}\right)\right) \tag{27}$$

$$\frac{z}{L} \simeq f^{av}\left(1 + \frac{L^2}{24} + \frac{L^4}{1920}\right) + \theta^\beta (f^{av})^{1-\beta}\left(1 + \frac{(1-\beta)^2 L^2}{24} + \frac{(1-\beta)^4 L^4}{1920}\right) \tag{28}$$

ただし、$L = \log(f/K)$。

3.

$$\gamma^{(1)} = \frac{\beta\theta^\beta}{f^{av}((f^{av})^\beta + \theta^\beta)}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{\beta\theta^\beta\left((1+\beta)(f^{av})^\beta + (1-\beta)\theta^\beta\right)}{(f^{av})^2((f^{av})^\beta + \theta^\beta)^2} \tag{29}$$

Exercise:Answer

4.

$$\phi := \left(2\gamma^{(2)} - (\gamma^{(1)})^2\right)(C(f^{av}))^2 = -S^2\beta\theta^\beta \frac{2(1+\beta)(f^{av})^\beta + (2-\beta)\theta^\beta}{(f^{av})^{2-2\beta}((f^{av})^\beta + \theta^\beta)^4} \tag{30}$$

および $\zeta = \nu(f-K)/\alpha C(f^{av})$ を使えば、解くべき方程式は、

$$\frac{\sigma^{\mathrm{IV}}(f-K)}{L}\left(1 - \frac{(\sigma^{\mathrm{IV}})^2\tau^{\mathrm{ex}}}{24}\right) = \frac{S\alpha(f-K)}{z}\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\alpha^2\phi}{24} + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\rho\nu\alpha\gamma^{(1)}C(f^{av})}{4} + \frac{(2-3\rho^2)\tau^{\mathrm{ex}}\nu^2}{24}\right) \tag{31}$$

まず、最低次を求めると、$\sigma^{(0)} = S\alpha/(f^{av} + \theta^\beta(f^{av})^{1-\beta})$ となる。これを左辺括弧内に代入して展開し、次を得る。

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \frac{S\alpha}{z/L}\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\left(\alpha^2\phi + (\sigma^{(0)})^2\right)}{24} + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\rho\nu\alpha\gamma^{(1)}C(f^{av})}{4} + \frac{(2-3\rho^2)\tau^{\mathrm{ex}}\nu^2}{24}\right) \tag{32}$$

数値計算パートのコードは、リポジトリ内にある。