# SABR

## ① 確率分布 $p$

$$p(t,f,\alpha;T,F,A)\,dF\,dA$$

$$:= \mathbb{P}\left[F < F_T < F+dF,\ A < \alpha_T < A+dA \,\middle|\, F_t = f,\ \alpha_t = \alpha\right]$$

は、次をみたす：

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2 \frac{\partial^2 (C(F)^2 p)}{\partial F^2} + \varepsilon^2 \rho \nu \frac{\partial^2 (A^2 C(F) p)}{\partial F \partial A} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \nu^2 \frac{\partial^2 (A^2 p)}{\partial A^2} \quad (T > t)$$

$$p(t,f,\alpha;t,F,A) = \delta(F-f)\,\delta(A-\alpha)$$

∵) 任意関数 $h(f,\alpha)$ に対して、

$$dh(F_t,\alpha_t) = \frac{\partial h}{\partial f} dF_t + \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial f^2} dF_t dF_t + \frac{\partial^2 h}{\partial f \partial \alpha} dF_t d\alpha_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} d\alpha_t d\alpha_t$$

よって、（期待値をとるとBrown運動の項はきえることを考慮して）

$$\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{E}\left[h(F_T,\alpha_T)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\iint_{-\infty}^{\infty} h(F,A)\, p(t,f,\alpha;T,F,A)\, dF\, dA$$

$$= \iint p(t,f,\alpha;T,F,A) \times \left\{\frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2 C(F)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial f^2} + \varepsilon^2 \rho \nu A^2 C(F) \frac{\partial^2 h}{\partial f \partial \alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \nu^2 A^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}\right\} dF\, dA$$

これを部分積分すれば、所望のPDEを得る。

No.

Date

② Call Option 価格

$$p(t,f,\alpha;T^{ex},F,A) = \delta(F-f)\delta(A-\alpha) + \int_t^{T^{ex}} \frac{\partial p}{\partial T}\, dT.$$

であることを考えると、

$$V_t(f,\alpha) = \mathbb{E}\left[(F_{T^{ex}}-K)^+ \mid F_t=f,\ \alpha_t=\alpha\right].$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_K^{\infty} (F-K)\, p(t,f,\alpha;T,F,A)\, dF\, dA.$$

$$= (f-K)^+ + \int_t^{T^{ex}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_K^{\infty} (F-K)\frac{\partial p}{\partial T}\, dF\, dA\, dT.$$

これをA,F微分の式に直す → A微分を含む項は零.

$$=(f-K)^+ + \int_t^{T^{ex}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_K^{\infty} (F-K)\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2 \frac{\partial^2\left(C(F)^2 p\right)}{\partial F^2}\, dF\, dA\, dT.$$

$$=(f-K)^+ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 C(K)^2 \int_t^{T^{ex}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A^2 p(t,f,\alpha;T,K,A)\, dA}_{P(t,f,\alpha;T,K)\ \text{とおく.}}\, dT$$

→ T−tにのみ依存するので、$\tau=T-t$として、$P(\tau;f,\alpha,K)$ とおく.

$P(\tau,f,\alpha,K)$ は (pのPDEから簡単に) 次をみたすことがわかる.

$$\frac{\partial P}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^2 C(f)^2\frac{\partial^2 P}{\partial f^2} + \varepsilon^2\rho\nu\alpha^2 C(f)\frac{\partial^2 P}{\partial f\,\partial\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\nu^2\alpha^2\frac{\partial^2 P}{\partial\alpha^2} \qquad (\tau>0)$$

$$P(0,f,\alpha,K)=\alpha^2\delta(f-K)$$

以上より、あとは P を(漸近展開して)求められればよい.

③

(1) ② の通り.

(2). PDEの係数に $C(f)$ がそのまま出てきてほしくない.

そのためには $C(f)\frac{\partial}{\partial f} \propto \frac{\partial}{\partial z}$ となる変換を考えればよい.

$$z = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\int_K^f \frac{dg}{C(g)}$$ とすると.

$$\frac{\partial}{\partial f} = \frac{1}{\varepsilon\alpha C(f)}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_f = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_z - \frac{z}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial f^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\alpha^2 C(f)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon\alpha\frac{C'(f)}{C(f)}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ただし.(記号の濫用だが) $C'(f) := \frac{\partial C(f(z))}{\partial z}\cdot\frac{1}{\varepsilon\alpha} = \frac{\partial C(f(z))}{\partial\alpha}\frac{1}{\varepsilon z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial f\partial\alpha} = \frac{1}{\varepsilon\alpha C(f)}\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{z}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big|_f = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big|_z - \frac{2z}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial z} + \frac{z^2}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2z}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

また, $P(0,f(z),\alpha) = \frac{\alpha}{\varepsilon C(K)}\delta(z)$ となるので, 規格化のために,

$\hat{P}(\tau,z,\alpha) := \frac{\varepsilon}{\alpha}C(K)\,P(\tau,f,\alpha,K)$ と考えることにすると.

$$\frac{\partial\hat P}{\partial\tau} = \frac12\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2} + \left(\rho\nu\alpha\frac{\partial^2\hat P}{\partial z\partial\alpha} - \rho\nu z\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2} - \frac12\alpha\frac{C'(f)}{C(f)}\frac{\partial\hat P}{\partial z}\right)\varepsilon + \left(\frac12\nu^2 z^2\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2} - \nu^2 z\alpha\frac{\partial^2\hat P}{\partial z\partial\alpha} + \frac12\nu^2\alpha^2\frac{\partial^2\hat P}{\partial\alpha^2} + \nu^2\alpha\frac{\partial\hat P}{\partial\alpha}\right)\varepsilon^2 \quad (\tau>0)$$

$$\hat P(0,z,\alpha) = \delta(z).$$

ここで, $O(\varepsilon^0)$ では, $\hat P$ は $z$ のみの式になっている.

ということは, $\partial\hat P/\partial\alpha$ は $O(\varepsilon)$ であるから, $O(\varepsilon^2)$ まででは,

$$\frac{\partial\hat P}{\partial\tau} = \frac12\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2} + \left(\rho\nu\alpha\frac{\partial^2\hat P}{\partial z\partial\alpha} - \rho\nu z\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2} - \frac12\alpha\frac{C'(f)}{C(f)}\frac{\partial\hat P}{\partial z}\right)\varepsilon + \left(\frac12\nu^2 z^2\frac{\partial^2\hat P}{\partial z^2}\right)\varepsilon^2 \quad (\tau>0)$$

としてよい.

(3) 明らかに $c'/c$ という項が邪魔なので、$O(\varepsilon^2)$ に追いやりたい。

そのためには、
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{P} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + O(\varepsilon^2)\right)H$$
となる $H$ を定義できればよく、
$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\varepsilon\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}\right)\hat{P} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + O(\varepsilon^2)\right)H$$
となればよい。

以上より、
$$H(\tau, z, \alpha) := \left(\sqrt{\frac{c(t)}{c(k)}}\right)^{-1}\hat{P}(\tau, z, \alpha)$$

すると、
$$\frac{\partial\hat{P}}{\partial z} = \sqrt{\frac{c(t)}{c(k)}}\left(\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}H\right)$$
$$\frac{\partial^2\hat{P}}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{c(t)}{c(k)}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \varepsilon\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}\frac{\partial H}{\partial z} + \varepsilon^2\alpha^2\left(\frac{c''(t)}{2c(t)} - \frac{c'(t)^2}{4c(t)^2}\right)H\right)$$
$$\frac{\partial^2\hat{P}}{\partial z\partial\alpha} = \sqrt{\frac{c(t)}{c(k)}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon z\frac{c'(t)}{c(t)}\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}\frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{c'(t)}{c(t)}H + O(\varepsilon^2)\right)$$

これを用いて(同様に $\partial H/\partial\alpha$ が $O(\varepsilon)$ であることを用いて)
$$\frac{\partial H}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \varepsilon\rho\nu z\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \varepsilon\rho\nu\alpha\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial\alpha}$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\nu^2 z^2\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\rho\nu\alpha z\frac{c'(t)}{c(t)}\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{2}\rho\nu\alpha\frac{c'(t)}{c(t)}H + \frac{c''(t)}{4c(t)}\alpha^2 H - \frac{3c'(t)^2}{8c(t)^2}H\alpha^2\right)$$

これはO(ε3)になることがわかる → ム$^2$

$$H(0, z, \alpha) = \delta(z)$$

(4). $c'/c$, $c''/c$ は $O(\varepsilon^2)$ の中にあるので、
定数と思ってよい。 $b^{(i)} = \dfrac{c^{(i)}(f(\varepsilon\alpha z_0))}{c(f(\varepsilon\alpha z_0))}$
とおく。（$z_0$ は後できめる）

まず、$\partial^2 H/\partial z^2$ 以外の項から $z$ 依存性を消すことを考える。

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^2\rho\nu\alpha z\, b^{(1)}\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$ ~~が $z$ に依存~~

が $z$ の一階微分を含まないようにすればよいので、

$$\hat{H}(\tau, z) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}\right) H(\tau, z, \alpha)$$

とすればよく、

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(1 - 2\varepsilon\rho\nu z + \varepsilon^2\nu^2 z^2)\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z^2} + \varepsilon^2\alpha^2\left(\frac{1}{4}b^{(2)} - \frac{3}{8}b^{(1)2}\right)\hat{H} + \frac{3}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)}\hat{H} \quad (\tau > 0)$$

$$\hat{H}(0, z) = \delta(z)$$

これはもはや $\tau$, $z$ のみの関数といえる。

(5) さて、$\partial^2\hat{H}/\partial z^2$ の係数が煩いので、
これを消す変数変換を考える。
これは単純で、

$$x := \frac{1}{\varepsilon\nu}\int_0^{\varepsilon\nu z}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}} =: \frac{1}{\varepsilon\nu}\int_0^{\varepsilon\nu z}\frac{d\zeta}{I(\zeta)}$$

とすればよい。

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{I(\varepsilon\nu z)}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{I(\varepsilon\nu z)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon\nu\frac{I'(\varepsilon\nu z)}{I(\varepsilon\nu z)^2}\frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\varepsilon\nu I'(\varepsilon\nu z)\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} + \varepsilon^2\alpha^2\left(\frac{1}{4}b^{(2)} - \frac{3}{8}b^{(1)2}\right)\hat{H} + \frac{3}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)}\hat{H} \quad (\tau > 0)$$

No.

Date . .

最後に、$x$の一階微分消したいので、

$$Q(\tau, x) := \frac{1}{\sqrt{I(\varepsilon\nu z(x))}} \hat{H}(\tau, z(x))$$

とする。すると、

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \varepsilon^2\nu^2\left(\frac{1}{4}I''(\varepsilon\nu z) I(\varepsilon\nu z) - \frac{1}{8}I'(\varepsilon\nu z)^2\right)Q$$
$$+\varepsilon^2\alpha^2\left(\frac{1}{4}b^{(2)} - \frac{3}{8}b^{(1)2}\right)Q + \frac{3}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)}Q.$$

$I, I', I''$は定数 $I^{(i)}(\varepsilon\nu z_0)$とみなしてよい。

そこで、 $k := \nu^2\left(\frac{1}{4}I''I - \frac{1}{8}I'^2\right) + \alpha^2\left(\frac{1}{4}b^{(2)} - \frac{3}{8}b^{(1)2}\right) + \frac{3}{4}\rho\nu\alpha b^{(1)}$

と定数をおけて、

$$Q(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} e^{\varepsilon^2 k\tau}.$$

とできる。

$$P(\tau, f, \alpha, K) = \frac{\alpha}{\varepsilon C(K)} \cdot \sqrt{\frac{C(f)}{C(K)}} \cdot e^{\frac{\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}} \sqrt{I(\varepsilon\alpha z)}\, Q(\tau, x)$$

より、$P$の漸近形を導くことができた。

No.

Date

## ④ Option価格

$$V_t(f,\alpha) = (f-K)^+ + \frac{1}{2}\varepsilon\alpha\sqrt{C(K)C(f)}\, e^{\frac{\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}} \sqrt{I(\varepsilon\alpha z)}$$

$$\times \int_0^{z_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{z^2}{2\tau}} e^{\varepsilon^2\kappa\tau} d\tau$$

さて、積分の前の係数を $O(\varepsilon^2)$ までとって、あとは積分内にいれたい。

$$\varepsilon\alpha\sqrt{C(K)C(f)}\sqrt{I(\varepsilon\alpha z)} \simeq \varepsilon\alpha C(K)\left(1 + \frac{C'(K)}{2C(K)}(f-K) - \frac{1}{2}\rho\varepsilon\nu z\right)$$

ここで、

$$f-K \simeq \varepsilon\alpha C(K) z + \frac{C'(K)}{2C(K)}(\varepsilon\alpha C(K) z)^2$$

$$\varepsilon\alpha C(K) z \simeq (f-K) - \frac{C'(K)}{2C(K)}(f-K)^2 + \frac{(2C'(K)^2 - C(K)C''(K))}{6C(K)^2}(f-K)^3$$

$$x \simeq z + \frac{1}{2}\rho\varepsilon\nu z^2.$$

より、$\varepsilon\alpha\sqrt{C(K)C(f)}\sqrt{I(\varepsilon\alpha z)} \simeq \frac{\cancel{\varepsilon}\, f-K}{\cancel{\varepsilon\alpha C(K)}\, z}\,\frac{z}{x} + O(\varepsilon^3)$

となる。

よって、$\frac{1}{2}\varepsilon\alpha\sqrt{C(K)C(f)}\, e^{\frac{\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}}\sqrt{I(\varepsilon\alpha z)}$

$\simeq \frac{f-K}{x} e^{\varepsilon^2\theta}$ とできて、

$$\varepsilon^2\theta = \log\left(\frac{\varepsilon\alpha z}{f-K}\sqrt{C(K)C(f)}\right) + \log\left(\frac{x\sqrt{I(\varepsilon\nu z)}}{z}\right) + \frac{1}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2.$$

$$\simeq \frac{-C'^2 + 2CC''}{24C^2}(f-K)^2 + \frac{2-3\rho^2}{24}(\varepsilon\nu z)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\rho\nu\alpha b^{(1)} z^2.$$

$z_0$ はあとでうまくえらぶことにしておくと、$\kappa = 3\theta/x^2$ とできて、

$$e^{\varepsilon^2\kappa\tau} \simeq \frac{1}{(1-\frac{2}{3}\kappa\varepsilon^2\tau)^{3/2}} \simeq \frac{1}{(1 - 2\varepsilon^2\tau\frac{\theta}{x^2})^{3/2}}$$

No.

Date

すると、$\frac{1}{2}\frac{f-k}{x}\int_0^{\tau e^{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau} e^{\varepsilon^2\theta} \frac{d\tau}{\left(1-\frac{2\tau}{x^2}\varepsilon^2\theta\right)^{3/2}}$.

で、$q = \frac{x^2}{2\tau}$ とすれば、(さらに平行移動も)

$$\frac{|f-k|}{4\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{2\tau e^{x}}-\varepsilon^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}}\,dq$$ となるので、

$V_\tau(f,\alpha)$

$$= (f-k)^+ + \frac{|f-k|}{4\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{2\tau e^{x}}-\varepsilon^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}}\,dq.$$

## ⑤ Normal Model.

$C(f) = 1$, $\varepsilon\alpha = \sigma^N$, $\nu = 0$ とする.

$\theta = 0$ となり. $V_t(f,\alpha) = (f-k)\,N\left(\dfrac{f-k}{\sigma^N\sqrt{\tau_{ex}}}\right) + \sigma^N\sqrt{\tau_{ex}}\,\phi\left(\dfrac{f-k}{\sigma^N\sqrt{\tau_{ex}}}\right)$

このとき. $x = \dfrac{f-k}{\sigma^N}$ となっていることが分る.

他の Model での Implied Normal Vol. は,

$\sigma^{INV} \simeq \dfrac{f-k}{x}\left(1 + \varepsilon^2 \cdot \dfrac{\theta}{x^2}\tau_{ex}\right)$ と出てることがわかっている.

では, $x$, $\theta$ の具体形を入れよう.

ある $f^{av} \in [f, k]$ or $[k, f]$ を用いて,

$$\frac{\theta}{x^2} \simeq \frac{2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)2}}{24}\alpha^2 C(f^{av})^2 + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2 + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma^{(1)}C(f^{av})$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{C'(f^{av})}{C(f^{av})}, \quad \gamma^{(2)} = \frac{C''(f^{av})}{C(f^{av})}$$

とできる. よって. $\dfrac{f-k}{x}$ で $\varepsilon$ の1次が出ないように $f^{av}$ を決めてよい.

それには. $\varepsilon\alpha z = \displaystyle\int_k^f \frac{df'}{C(f')} = \frac{f-k}{C(f^{av})}\left(1 + O(\varepsilon^2)\right)$

となるような $f^{av}$ をとればよい. 今は, $f^{av} = \sqrt{fk}$ とする.
($f^{av} = (f+k)/2$ でもよい).

$\zeta = \varepsilon\nu z \simeq \dfrac{\nu}{\alpha}\dfrac{f-k}{C(f^{av})}$ として.

$$\frac{f-k}{x} = \frac{f-k}{z}\,\frac{z}{x(z)}$$

$$\simeq \frac{f-k}{\displaystyle\int_k^f \frac{df'}{\varepsilon\alpha C(f')}}\;\frac{\zeta}{\log\left(\dfrac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2} - \rho + \zeta}{1-\rho}\right)}$$

No.

Date

## ⑥ Black vol.

~~C~~ $C(f) = f,\ \nu = 0,\ \alpha = \sigma^{B}$ とする.

$$\sigma^{INV,B} \simeq \frac{\varepsilon\sigma^{B}(f-K)}{\log(f/K)}\left(1 - \frac{1}{24}\varepsilon^{2}\sigma^{B^{2}}\tau^{ex}\right)$$

これが一般の $\sigma^{INV}$ と一致することを解けば, $\sigma^{IV}$ が出せる.

## ⑦ SABR の INV

$$\sigma^{N,SABR} = \frac{\varepsilon\alpha(1-\beta)(f-K)}{f^{1-\beta} - K^{1-\beta}}\left(\frac{\zeta}{x(\zeta)}\right)\cdot\left(1 + \left(\frac{-\beta(2-\beta)\alpha^{2}}{24 f_{av}^{2-2\beta}} + \frac{\rho\alpha\nu\beta}{4 f_{av}^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^{2}}{24}\nu^{2}\right)\varepsilon^{2}\tau^{ex}\right)$$

$$f - K = f_{av}\log\frac{f}{K}\left(1 + \frac{1}{24}\left(\log\left(\frac{f}{K}\right)\right)^{2} + \frac{1}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^{4} + \cdots\right)$$

$$f^{1-\beta} - K^{1-\beta} = (1-\beta) f_{av}^{\frac{1-\beta}{2}}\log\frac{f}{K}\left(1 + \frac{(1-\beta)^{2}\left(\log\left(\frac{f}{K}\right)\right)^{2}}{24} + \frac{(1-\beta)^{4}\left(\log\frac{f}{K}\right)^{4}}{1920} + \cdots\right)$$

を使えば, $\log\frac{f}{K} =: L$ として,

$$\sigma^{N,SABR} = \varepsilon\alpha f_{av}^{\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{1 + \frac{L^{2}}{24} + \frac{L^{4}}{1920}}{1 + \frac{(1-\beta)^{2}}{24}L^{2} + \frac{(1-\beta)^{4}}{1920}L^{4}}\,\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \cdots\right)$$

## ⑧ IV

⑥と⑦より,

$$\varepsilon\sigma^{B,SABR}\left(1 - \frac{\varepsilon^{2}}{24}\sigma^{B,SABR^{2}}\tau^{ex}\right) = \frac{\varepsilon\alpha f_{av}^{\frac{\beta}{2}-1}}{1 + \frac{(1-\beta)^{2}}{24}L^{2} + \cdots}\,\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \cdots\right)$$

となる. 最低次では. $\sigma^{B,SABR(0)} = \alpha f_{av}^{\frac{\beta}{2}-1}$ となるので,

これを左辺の ( ) 内の $\sigma^{B}$ に代入して. $\sigma^{B}$ について解けば,

$$\sigma^{B,SABR} \simeq \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}\left(1 + \frac{(1-\beta)^{2}}{24}\left(\log\frac{f}{K}\right)^{2} + \frac{(1-\beta)^{4}}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^{4}\right)^{-1}$$

$$\cdot\left(\frac{\zeta}{x(\zeta)}\right)\cdot\left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^{2}\alpha^{2}}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{(2-3\rho^{2})\nu^{2}}{24}\right)\varepsilon^{2}\tau^{ex}\right)$$

を得る.