SABR Model の Implied Volatility

kakune

February 3, 2024

Agenda

Introduction

本スライドの目的と注意

- 本スライドは、Volatility が変動するモデルにおける、Implied Volatility の概念・振る舞い・近似式の導出を理解することを目的とする。
- 特に近似式の導出は、よい計算練習になる。
- もともと手書きノートで行う予定だったが、やたら messy になってしまったので、補助としてこのスライドを作成した。
- すべての確率変数は T-Forward measure の下であるとする。
- このスライドは、主に N. Zhang "Properties of the SABR model" に基づく。

Introduction

Implied Volatility

- Black-Scholes モデルでは、asset の Forward 価格は、以下の SDE に従う。

$$\mathrm{d}F_t = \sigma^{\mathrm{BS}} \mathrm{d}W_t \tag{1}$$

- このモデルを仮定すれば、市場のオプション価格から、quote する vol を逆算できる。
- これを **Implied Volatility (IV)** と呼ぶ。

BS モデルの限界と改良

- しかし、実際に計算してみると、オプションのストライクに依存して IV が変化することがわかる。
  - Volatility Skew や Volatility Smile。
- すなわち、Black-Scholes モデルは市場を再現できていないことになる。
- そこで、よりよいモデルとして、Volatility が変動するモデルが考案された。
  - **Local Volatility (LV) Model**: Vol が現在価格の deteministic な関数とするモデル。
  - **Stochastic Volatility (SV) Model**: Vol が確率変動するモデル。

Black-Scholes Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{BS}} \mathrm{d}W_t \tag{2}$$

に従うとする Model[1]。これは解くことができて、$(s \le t \le T)$ として

$F_t(T) = F_s(T) \exp\left(\sigma^{\mathrm{BS}}(W_t - W_s) - \frac{(\sigma^{\mathrm{BS}})^2}{2}(t-s)\right)$ となる。

European Call Option の価格

時刻 $T > 0$ に行使し、時刻 $\tau > T$ で受け取る strike K の european call option の時刻 t での価格は、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\mathbb{E}_t\left[(F_t(T) - K)^+\right] \tag{3}$$

ブラウン運動の確率分布を考えて解くと、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\big(F_t N(d_t^+) - K N(d_t^-)\big) \tag{4}$$

$$d_t^{\pm} = \frac{1}{\sigma^{\mathrm{BS}}\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{F_t}{K}\right) \pm \frac{(\sigma^{\mathrm{BS}})^2}{2}(T-t)\right) \tag{5}$$

この価格は、σ^{BS} について単調増加である。

[1] 以降、(T) はしばしば省略する。

Local Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{loc}(t, F_t(T))F_t\mathrm{d}W_t \tag{6}$$

に従うとする Model[2]。ここで、σ^{loc} は deterministic な関数。

European Call Option の価格

当然一般に解くことはできないので、$\sigma^{loc} = \alpha(t)A(f)/f$、
$Q(t, f) = \mathbb{E}\left[(F_T - K)^+ | F_t = f\right]$ として、以下のような手順で解く。

1. Feynman-Kac により、Q の満たす偏微分方程式を求める。
2. 変数変換を行い、$\tilde{Q}(\tau, x)$ とする。
3. $\tilde{Q}, A$ に対して漸近展開を行う。
4. 漸近展開を行った各次数に対して偏微分方程式を導く。

[2] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

IV の求め方

さらに、BS モデルとの比較を行うことにより、implied volatility を求める。

5. 漸近形を整理して、(実質的に) 一変数関数にする。
6. BS モデルにおける、その変数の値を計算する。
7. LV モデルでの変数を計算し、それを BS モデルのものと比較することで、IV を求める。

具体的に計算すると、

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)\left(1+\frac{\sigma^{\mathrm{loc}\,\prime\prime}\left(\frac{f+K}{2}\right)}{\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)}\right) \tag{7}$$

LV の限界

LV の限界

Market で観測される IV が $\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K)$ であるとする。現在の Market に合うように最低次を考えて σ^{loc} の calibration を行うと、

$$\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K) = \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{F_0 + K}{2}\right) \tag{8}$$

となる。ここで、calibration の直後に forward price が $F_0 \to f$ と変化したとしよう。すると、そのときの Vol は、

$$\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f + K}{2}\right) = \sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K + f - F_0) \tag{9}$$

となる。例えば $f > F_0$ とすれば、Volatility curve は左に動くことになる。これは、期待される動きと逆である（Forward price が右に動いたのだから、curve も右に動いてほしい)。以上が、LV が将来の Vol を再現できないと言われる所以である。