SABR Model の Implied Volatility

kakune

February 7, 2024

Agenda

1. Introduction
2. Black-Scholes Model
3. Local Volatility Model
4. SABR Model
   - Model の概要
   - SABR の IV の漸近形

Introduction

本スライドの目的と注意

- 本スライドは、Volatility が変動するモデルにおける、Implied Volatility の概念・振る舞い・近似式の導出を理解することを目的とする。
- 特に近似式の導出は、よい計算練習になる。
- もともと手書きノートで行う予定だったが、やたら messy になってしまったので、補助としてこのスライドを作成した。
- すべての確率変数は T-Forward measure の下であるとする。
- このスライドは、主に N. Zhang "Properties of the SABR model" に基づく。

Introduction

Implied Volatility

- Black-Scholes モデルでは、asset の Forward 価格は、以下の SDE に従う。

$$\mathrm{d}F_t = \sigma^{\mathrm{BS}}\mathrm{d}W_t \tag{1}$$

- このモデルを仮定すれば、市場のオプション価格から、quote する vol を逆算できる。
- これを **Implied Volatility (IV)** と呼ぶ。

BS モデルの限界と改良

- しかし、実際に計算してみると、オプションのストライクに依存して IV が変化することがわかる。
  - Volatility Skew や Volatility Smile。
- すなわち、Black-Scholes モデルは市場を再現できていないことになる。
- そこで、よりよいモデルとして、Volatility が変動するモデルが考案された。
  - **Local Volatility (LV) Model**: Vol が現在価格の deteministic な関数とするモデル。
  - **Stochastic Volatility (SV) Model**: Vol が確率変動するモデル。

Black-Scholes Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{BS}}\mathrm{d}W_t \tag{2}$$

に従うとする Model[1]。これは解くことができて、$(s \leq t \leq T)$ として

$F_t(T) = F_s(T)\exp\left(\sigma^{\mathrm{BS}}(W_t - W_s) - \frac{(\sigma^{\mathrm{BS}})^2}{2}(t-s)\right)$ となる。

European Call Option の価格

時刻 $T > 0$ に行使し、時刻 $\tau > T$ で受け取る strike K の european call option の時刻 t での価格は、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\mathbb{E}_t\left[(F_t(T) - K)^+\right] \tag{3}$$

ブラウン運動の確率分布を考えて解くと、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\big(F_t N(d_t^+) - KN(d_t^-)\big) \tag{4}$$

$$d_t^{\pm} = \frac{1}{\sigma^{\mathrm{BS}}\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{F_t}{K}\right) \pm \frac{(\sigma^{\mathrm{BS}})^2}{2}(T-t)\right) \tag{5}$$

この価格は、σ^{BS} について単調増加である。

[1] 以降、(T) はしばしば省略する。

Local Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{loc}}(t, F_t(T))F_t\mathrm{d}W_t \tag{6}$$

に従うとする Model[2]。ここで、σ^{loc} は deterministic な関数。

European Call Option の価格

当然一般に解くことはできないので、$\sigma^{\mathrm{loc}} = \alpha(t)A(f)/f$、
$Q(t, f) = \mathbb{E}\left[(F_T - K)^+ | F_t = f\right]$ として、以下のような手順で解く。

1. Feynman-Kac により、Q の満たす偏微分方程式を求める。
2. 変数変換を行い、$\tilde{Q}(\tau, x)$ とする。
3. $\tilde{Q}, A$ に対して漸近展開を行う。
4. 漸近展開を行った各次数に対して偏微分方程式を導く。

[2] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

IV の求め方

さらに、BS モデルとの比較を行うことにより、implied volatility を求める。

5. 漸近形を整理して、(実質的に) 一変数関数にする。
6. BS モデルにおける、その変数の値を計算する。
7. LV モデルでの変数を計算し、それを BS モデルのものと比較することで、IV を求める。

具体的に計算すると、

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)\left(1+\frac{\sigma^{\mathrm{loc}\ \prime\prime}\left(\frac{f+K}{2}\right)}{\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)}\right) \tag{7}$$

LV の限界

LV の限界

Market で観測される IV が $\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K)$ であるとする。現在の Market に合うように最低次を考えて σ^{loc} の calibration を行うと、

$$\sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K) = \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{F_0 + K}{2}\right) \tag{8}$$

となる。ここで、calibration の直後に forward price が $F_0 \to f$ と変化したとしよう。すると、そのときの Vol は、

$$\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f + K}{2}\right) = \sigma^{\mathrm{M}}(F_0, K + f - F_0) \tag{9}$$

となる。例えば $f > F_0$ とすれば、Volatility curve は左に動くことになる。これは、期待される動きと逆である（Forward price が右に動いたのだから、curve も右に動いてほしい)。以上が、LV が将来の Vol を再現できないと言われる所以である。

Stochastic Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$dF_t(T) = \sigma_t F_t dW_t \tag{10}$$

に従うとする Model[3]。ここで、σ_t はある SDE に従う確率変数。

SABR Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$dF_t(T) = \alpha_t F_t^{\beta} dW_t^1 \tag{11}$$

$$d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_t^2 \tag{12}$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \tag{13}$$

に従うとする Model。

[3] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

SABR の IV の漸近形

European Call Option 価格導出の概要

Vol が小さいとして、一般に、

$$
\mathrm{d}F_t = \varepsilon \alpha_t C(F_t) \mathrm{d}W_t^1 \tag{14}
$$

$$
\mathrm{d}\alpha_t = \varepsilon \nu \alpha_t \mathrm{d}W_t^2 \tag{15}
$$

に対して、Option 価格を以下のように導く。

1. F_t, α_t の同時確率分布 p について、Focker-Planck の議論で PDE を導く。
2. Option 価格を、p のあるの汎関数 P で表す。
3. この P を変数変換と漸近展開を繰り返して解く。

IV の導出の概要

4. Normal Model $C(f) = 1, \varepsilon \alpha_t = \sigma^{\mathrm{N}}, \nu = 0$ に対して漸近展開形を求める。
5. Black-Scholes Model $C(f) = f, \alpha_t = \sigma^{\mathrm{BS}}, \nu = 0$ に対して漸近展開形を求め、前項の内容と比較して対応する $\sigma^{\mathrm{N,BS}}$ を求める。
6. SABR Model に対しても同様にして、$\sigma^{\mathrm{N,SABR}}$ を求める。
7. $\sigma^{\mathrm{N,SABR}} = \sigma^{\mathrm{N,BS}}$ を解いて、IV を求める。

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ

③ について、繰り返し変数変換が行われるので、まとめておく。

(1)

$$P(\tau; f, \alpha, K) := \int_{\infty}^{\infty} A^2 p(t, f, \alpha; t+\tau, K, A) \mathrm{d}A \tag{16}$$

は次の PDE を満たす：

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 C(f)^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial f^2} + \varepsilon^2 \rho \nu \alpha^2 C(f) \frac{\partial^2 P}{\partial f \partial \alpha} + \frac{\varepsilon^2 \nu^2 \alpha^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \tag{17}$$

(2)

$$z = \frac{1}{\varepsilon \alpha} \int_K^f \frac{\mathrm{d}g}{C(g)}, \quad \hat{P}(\tau, z, \alpha) := P(\tau, f, \alpha, K) \tag{18}$$

(3)

$$H(\tau, z, \alpha) := \sqrt{\frac{C(K)}{C(f)}} \hat{P}(\tau, z, \alpha) \tag{19}$$

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ (続き)

(4)

$$\hat{H}(\tau, z, \alpha) := \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \rho\nu\alpha b^{(1)} z^2}{4}\right) H(\tau, z, \alpha) \tag{20}$$

(5)

$$x := \frac{1}{\varepsilon\nu}\int_0^{\varepsilon\nu z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{I(\zeta)}, \quad I(\zeta) := \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad Q(\tau, x) := \frac{\hat{H}(\tau, z, \alpha)}{\sqrt{I(\varepsilon\nu z(x))}} \tag{21}$$