SABR Model の Implied Volatility

kakune

February 24, 2024

Agenda

Introduction

本スライドの目的と注意

- 本スライドは、Volatility が変動する Model における、Implied Volatility の概念・振る舞い・近似式の導出を理解することを目的とする。
- 特に近似式の導出は、よい計算練習になる。そのために、天下り的な記述をなるべく避け、発見的に計算が行われる（ように見える）よう工夫した。
- もともと手書きノートで行う予定だったが、やたら messy になってしまったので、補助としてこのスライドを作成した。
- すべての確率変数は T-Forward measure の下であるとする。
- このスライドは、主に N. Zhang "Properties of the SABR model" に基づく。

Introduction

Implied Volatility

- Black Model では、asset の Forward 価格は、以下の SDE に従う。

$$dF_t = \sigma^{\mathrm{B}} F_t dW_t \tag{1}$$

- この Model を仮定すれば、市場のオプション価格から、quote する vol を逆算できる。
- これを **Implied Volatility (IV)** と呼ぶ。

Black Model の限界と改良

- しかし、実際に計算してみると、オプションのストライクに依存して IV が変化することがわかる。
  - Volatility Skew や Volatility Smile。
- すなわち、Black Model は市場を再現できていないことになる。
- そこで、よりよい Model として、Volatility が変動する Model が考案された。
  - **Local Volatility (LV) Model**: Vol が現在価格の deteministic な関数とする Model。
  - **Stochastic Volatility (SV) Model**: Vol が確率変動する Model。

Black Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{B}} F_t \mathrm{d}W_t \tag{2}$$

に従うとする Model[1]。これは解くことができて、$(s \le t \le T)$ として
$F_t(T) = F_s(T) \exp\left(\sigma^{\mathrm{B}}(W_t - W_s) - \frac{(\sigma^{\mathrm{B}})^2}{2}(t-s)\right)$ となる。

European Call Option の価格

時刻 $T > 0$ に行使し、時刻 $\tau > T$ で受け取る strike K の european call option の時刻 t での価格は、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\mathbb{E}_t\left[(F_T(T) - K)^+\right] \tag{3}$$

ブラウン運動の確率分布を考えて解くと、

$$C_t(T,\tau) = P_t(t,\tau)\big(F_t N(d_t^+) - K N(d_t^-)\big) \tag{4}$$

$$d_t^{\pm} = \frac{1}{\sigma^{\mathrm{B}}\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{F_t}{K}\right) \pm \frac{(\sigma^{\mathrm{B}})^2}{2}(T-t)\right) \tag{5}$$

この価格は、σ^{B} について単調増加である。

---

[1] 以降、(T) はしばしば省略する。

Model の概要

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma^{\mathrm{loc}}(t, F_t(T))F_t\mathrm{d}W_t \tag{6}$$

に従うとする Model[2]。ここで、σ^{loc} は deterministic な関数。

European Call Option の価格

当然一般に解くことはできないので、$\sigma^{\mathrm{loc}} = \alpha(t)A(f)/f$、
$Q(t,f) = \mathbb{E}\left[(F_T - K)^+ | F_t = f\right]$ として、以下のような手順で解く。

1. Feynman-Kac により、Q の満たす偏微分方程式を求める。
2. 変数変換を行い、$\tilde{Q}(\tau, x)$ とする。
3. $\tilde{Q}, A$ に対して漸近展開を行う。
4. 漸近展開を行った各次数に対して偏微分方程式を導く。

[2] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

IV の漸近形

さらに、Black Model との比較を行うことにより、implied volatility の漸近形を求める。

5. 漸近形を整理して、（実質的に）一変数関数にする。
6. Black Model における、その変数の値を計算する。
7. LV Model での変数を計算し、それを Black Model のものと比較することで、IV を求める。

具体的に計算すると、

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)\left(1+\frac{\sigma^{\mathrm{loc}\,\prime\prime}\left(\frac{f+K}{2}\right)}{\sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f+K}{2}\right)}\right) \tag{7}$$

LV の限界

LV の限界

Market で観測される IV が $\sigma^{\mathrm{M}}(K)$ であるとする。現在の Market に合うように最低次を考えて σ^{loc} の calibration を行うと、

$$\sigma^{\mathrm{M}}(K) = \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{F_0 + K}{2}\right) \tag{8}$$

$$\sigma^{\mathrm{loc}}(f) = \sigma^{\mathrm{M}}(2f - F_0) \tag{9}$$

となる。ここで、calibration の直後に forward price が $F_0 \to f$ と変化したとしよう。すると、そのときの IV の curve は、

$$\sigma^{\mathrm{IV}}(K) = \sigma^{\mathrm{loc}}\left(\frac{f + K}{2}\right) = \sigma^{\mathrm{M}}(K + f - F_0) \tag{10}$$

となる。例えば $f > F_0$ とすれば、Volatility curve は左に動くことになる。これは、期待される動きと逆である（Forward price が右に動いたのだから、curve も右に動いてほしい)。以上が、LV が将来の Vol を再現できないと言われる所以である。

Stochastic Volatility Model

Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \sigma_t F_t \mathrm{d}W_t \tag{11}$$

に従うとする Model[3]。ここで、σ_t はある SDE に従う確率変数。

SABR Model

Forward price $F_t(T)$ が、

$$\mathrm{d}F_t(T) = \alpha_t F_t^{\beta} \mathrm{d}W_t^1 \tag{12}$$

$$\mathrm{d}\alpha_t = \nu \alpha_t \mathrm{d}W_t^2 \tag{13}$$

$$\mathrm{d}W_t^1 \mathrm{d}W_t^2 = \rho \mathrm{d}t \tag{14}$$

に従うとする Model。

[3] C++のコードでは、汎用性のため、係数の F_t を入れていない。

SABR の IV の漸近形

European Call Option 価格導出の概要

Vol が小さいとして、一般に、

$$\mathrm{d}F_t = \varepsilon\alpha_t C(F_t)\mathrm{d}W_t^1 \tag{15}$$

$$\mathrm{d}\alpha_t = \varepsilon\nu\alpha_t\mathrm{d}W_t^2 \tag{16}$$

に対して、Option 価格を以下のように導く。

1. F_t, α_t の同時確率分布 p について、Focker-Planck の議論で PDE を導く。
2. Option 価格を、p のあるの汎関数 P で表す。
3. この P を変数変換と漸近展開を繰り返して解く。
4. P を用いて Option 価格の一般式を出す。

SABR の IV の漸近形

IV の導出の概要

5. Normal Model $C(f) = 1, \varepsilon\alpha_t = \sigma^{\mathrm{N}}, \nu = 0$ に対して漸近展開形を求める。
6. Black Model $C(f) = f, \alpha_t = \sigma^{\mathrm{B}}, \nu = 0$ に対して漸近展開形を求め、前項の内容と比較して対応する $\sigma^{\mathrm{N,B}}$ を求める。
7. SABR Model に対しても同様にして、$\sigma^{\mathrm{N,SABR}}$ を求める。
8. $\sigma^{\mathrm{N,SABR}} = \sigma^{\mathrm{N,B}}$ を解いて、IV を求める。

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ

③ について、繰り返し変数変換が行われるので、まとめておく。

(1)

$$P(\tau; f, \alpha, K) := \int_{\infty}^{-\infty} A^2 p(t, f, \alpha; t+\tau, K, A)\mathrm{d}A \tag{17}$$

は次の PDE を満たす：

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon^2\alpha^2 C(f)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial f^2} + \varepsilon^2 \rho\nu\alpha^2 C(f)\frac{\partial^2 P}{\partial f \partial \alpha} + \frac{\varepsilon^2\nu^2\alpha^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \tag{18}$$

(2)

$$z = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\int_K^f \frac{\mathrm{d}g}{C(g)}, \quad \hat{P}(\tau, z, \alpha) := \frac{\varepsilon C(K)}{\alpha} P(\tau, f, \alpha, K) \tag{19}$$

(3)

$$H(\tau, z, \alpha) := \sqrt{\frac{C(K)}{C(f)}}\hat{P}(\tau, z, \alpha) \tag{20}$$

SABR の IV の漸近形

変数変換の流れ (続き)

(4)

$$\hat{H}(\tau, z, \alpha) := \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 \rho \nu \alpha b^{(1)} z^2}{4}\right) H(\tau, z, \alpha) \tag{21}$$

(5)

$$x := \frac{1}{\varepsilon\nu} \int_0^{\varepsilon\nu z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{I(\zeta)}, \quad I(\zeta) := \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}, \quad Q(\tau, x) := \frac{\hat{H}(\tau, z, \alpha)}{\sqrt{I(\varepsilon\nu z(x))}} \tag{22}$$

SABR の IV の漸近形

SABR の IV

最終的に、求めるべき Implied (Normal) Volatility は、

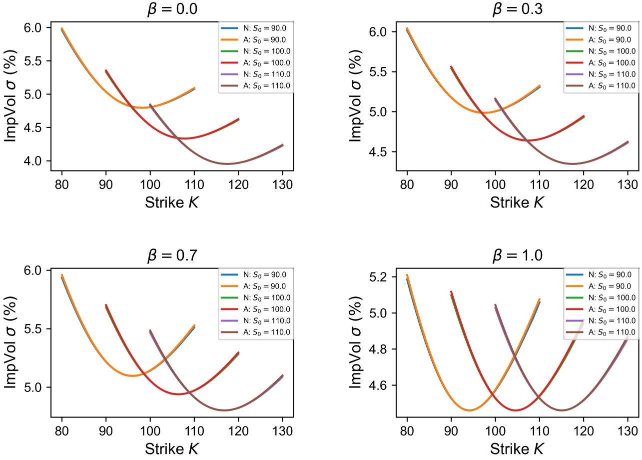
$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{1+\left(\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}}+\frac{\rho\beta\nu\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{(2-3\rho^2)\nu^2}{24}\right)\tau^{\mathrm{ex}}}{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\log\frac{f}{K}\right)^2+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^4} \frac{\zeta}{\chi(\zeta)} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathrm{INV}} &\simeq \alpha(fK)^{\beta/2} \frac{1+\frac{1}{24}\left(\log\frac{f}{K}\right)^2+\frac{1}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^4}{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\log\frac{f}{K}\right)^2+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\left(\log\frac{f}{K}\right)^4} \frac{\zeta}{\chi(\zeta)} \\ &\times\left(1+\left(\frac{-\beta(2-\beta)\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}}+\frac{\rho\beta\nu\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{(2-3\rho^2)\nu^2}{24}\right)\tau^{\mathrm{ex}}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{(1-\beta)/2}\log\frac{f}{K}, \qquad \chi(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}-\rho+\zeta}{1-\rho}\right) \tag{25}$$

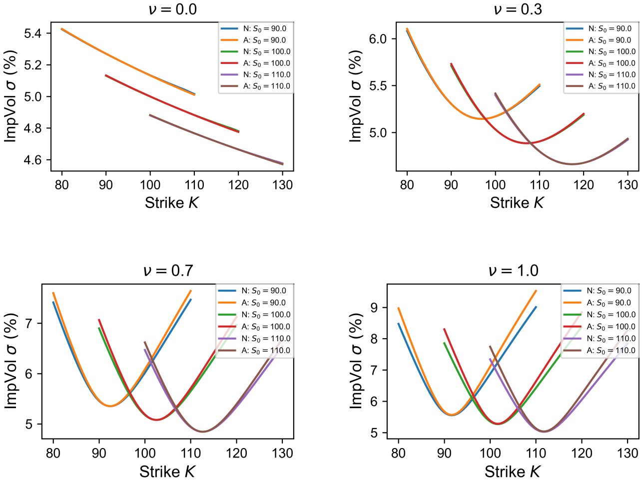
SABR IV のパラメータ依存性

めでたく漸近形が出たところで、パラメータ $\alpha(=\alpha_0), \beta, \rho, \nu$ がそれぞれどういう意味を持つか理解しておこう。
まず、α は Vol の初期値であり、IV の全体の水準を定める。
β はスマイルの (background の) 傾きに影響する。図の通り (ただし、水準感が合うように α を調整している)。



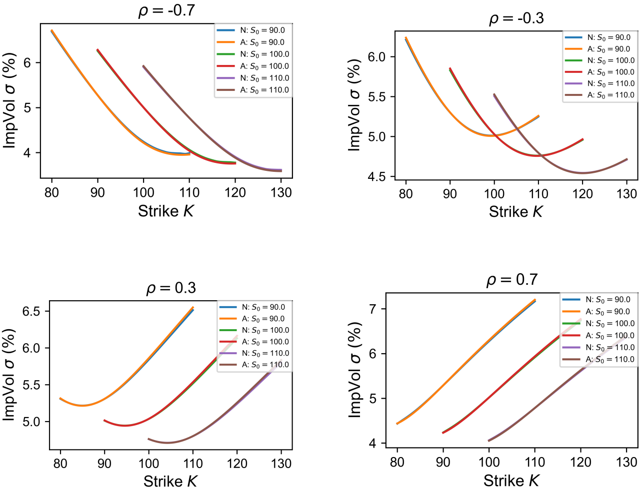
SABR IV のパラメータ依存性

ν は Vol の変動幅を表し、スマイルの曲率に影響する。



SABR IV のパラメータ依存性

ρ はフォワード価格と Vol の相関を表し、スキューに影響する。



SV Model の robustness

SV Model を導入したのは、将来の Forward 価格の変動に対応するためであった。SABR Model が確かに期待される振る舞いを持つことを見よう。$\alpha, \nu \ll 1$ とすると、

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} \frac{\zeta}{x(\zeta)} \tag{26}$$

これに対して、極小条件 $\frac{\partial \sigma^{\mathrm{IV}}}{\partial K} = 0$ を求めると、$\log f/K$ の 1 次まで考えれば、

$$\zeta - \log \frac{\zeta - \rho}{1 - \rho} = 0 \tag{27}$$

これは ζ だけの関数であるので、f の変動に伴って、ζ の値を保つように極小の K は変わる。ここで、

$$\mathrm{d}\zeta \simeq \frac{\zeta}{f}\mathrm{d}f - \frac{\zeta}{K}\mathrm{d}K \tag{28}$$

であるので、フォワード価格の変動に追随して極小のストライク価格も変わることがわかる。

そもそも直感的には……

この Model は常識的な範囲のパラメータなら、いつも ATM 付近で smile の極小が見える。だから、f が変わったときに追従するのは当然といえば当然である。

SV における Greeks

IV が出たので、Black Model の解析式を用いればリスク量を算出することができる。ここでは細かい Greeks の導出は行わないが、その概略と注意点をデルタを例に見ていこう。直感的には、SV Model のコールオプションの価格 C^{SV} としたとき、そのデルタは

$$\Delta = \frac{\partial C^{\mathrm{SV}}}{\partial f} \stackrel{?}{=} \frac{\partial C^{\mathrm{B}}}{\partial f} + \frac{\partial C^{\mathrm{B}}}{\partial \sigma^{\mathrm{B}}} \frac{\partial \sigma^{\mathrm{IV}}}{\partial f} \tag{29}$$

とすれば良いように思われる。しかし、これは $(f, \sigma^{\mathrm{B}}$ 以外のパラメータを定数と見ている限りにおいて) 正しくない。というのも、f が変化すると、相関 ρ を通じて α_t(の平均) も変化するためである。この問題を解消するため、vol の SDE を次のように変形する。

$$\mathrm{d}\alpha_t = \nu\alpha_t \mathrm{d}W_t^2 = \nu\alpha_t\left(\rho \mathrm{d}W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}Y_t\right) = g\ \mathrm{d}F_t + \nu\alpha_t\sqrt{1-\rho^2}\ \mathrm{d}Y_t \tag{30}$$

ここで、Y_t は W_t^1 に独立なブラウン運動であり、g は F_t の SDE から定まる、一般には F_t, α_t の関数となる係数である。これにより、f の変動による α の変動がわかったので、正しいデルタは、

$$\Delta = \frac{\partial C^{\mathrm{B}}}{\partial f} + \frac{\partial C^{\mathrm{B}}}{\partial \sigma^{\mathrm{B}}}\left(\frac{\partial \sigma^{\mathrm{IV}}}{\partial f} + g\frac{\partial \sigma^{\mathrm{IV}}}{\partial \alpha}\right) \tag{31}$$

となることがわかる。

Exercise

SABR Model の IV の導出方法を学んだ kakune くんは、他の Model でも同様のことができるか試したくなった。また同時に、SABR Model では forward price が大きくなったときに price の振動が大きくなりすぎる点を改善したくなった（本当にこれが問題たり得るのかは知らない）。そこで、次のような SV Model を考えた。

$$\mathrm{d}F_t = S\frac{F_t^\beta}{F_t^\beta + \theta^\beta}\alpha_t \mathrm{d}W_t^1 \tag{32}$$

$$\mathrm{d}\alpha_t = \nu\alpha_t \mathrm{d}W_t^2 \tag{33}$$

$$\mathrm{d}W_t^1 \mathrm{d}W_t^2 = \rho \mathrm{d}t \tag{34}$$

ただし、S, θ, β は定数である（S は不要だが、SABR の漸近展開との対応のためにつけた）。この Model に対して、IV を求めてみよう。

1. 対応する $C(f)$ を書け。
2. z を f, K を用いて書け。また、z を、SABR と同様に $f^{av}, \log(f/K)$ を用いて展開せよ。
3. $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ を求めよ。
4. IV を求めよ。

さらに、ここで求めた漸近形が正しいかどうか、数値的に確かめよう。

5. $\log F_t, \log \alpha_t$ についての SDE を求めよ。
6. 上で求めた SDE を用いて、IV を数値的に求めるプログラムを書け。
7. 上で数値的に求めた IV と漸近形を比較し、グラフに示せ。

Exercise:Answer

以下では、$\varepsilon = 1$ として解答を示す。

1.

$$C(f) = S\frac{f}{f^{\beta} + \theta^{\beta}} \tag{35}$$

2.

$$z = \frac{1}{\alpha}\int_K^f \left(1 + \left(\frac{f'}{\theta}\right)^{-\beta}\right) \mathrm{d}f' = \frac{1}{\alpha}\left((f - K) + \frac{\theta^{\beta}}{1-\beta}\left(f^{1-\beta} - K^{1-\beta}\right)\right) \tag{36}$$

$$\frac{z}{L} \simeq f^{av}\left(1 + \frac{L^2}{24} + \frac{L^4}{1920}\right) + \theta^{\beta}(f^{av})^{1-\beta}\left(1 + \frac{(1-\beta)^2L^2}{24} + \frac{(1-\beta)^4L^4}{1920}\right) \tag{37}$$

ただし、$L = \log(f/K)$。

3.

$$\gamma^{(1)} = \frac{\beta\theta^{\beta}}{f^{av}((f^{av})^{\beta} + \theta^{\beta})}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{\beta\theta^{\beta}\left((1+\beta)(f^{av})^{\beta} + (1-\beta)\theta^{\beta}\right)}{(f^{av})^2((f^{av})^{\beta} + \theta^{\beta})^2} \tag{38}$$

Exercise:Answer

4.

$$\phi := \left(2\gamma^{(2)} - (\gamma^{(1)})^2\right)(C(f^{av}))^2 = -S^2\beta\theta^\beta \frac{2(1+\beta)(f^{av})^\beta + (2-\beta)\theta^\beta}{(f^{av})^{2-2\beta}((f^{av})^\beta + \theta^\beta)^4} \tag{39}$$

および $\zeta = \nu(f-K)/\alpha C(f^{av})$ を使えば、解くべき方程式は、

$$\frac{\sigma^{\mathrm{IV}}(f-K)}{L}\left(1 - \frac{(\sigma^{\mathrm{IV}})^2\tau^{\mathrm{ex}}}{24}\right) = \frac{S\alpha(f-K)}{z}\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\alpha^2\phi}{24} + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\rho\nu\alpha\gamma^{(1)}C(f^{av})}{4} + \frac{(2-3\rho^2)\tau^{\mathrm{ex}}\nu^2}{24}\right) \tag{40}$$

まず、最低次を求めると、$\sigma^{(0)} = S\alpha/(f^{av} + \theta^\beta (f^{av})^{1-\beta})$ となる。これを左辺括弧内に代入して展開し、次を得る。

$$\sigma^{\mathrm{IV}} \simeq \frac{S\alpha}{z/L}\frac{\zeta}{x(\zeta)}\left(1 + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\left(\alpha^2\phi + (\sigma^{(0)})^2\right)}{24} + \frac{\tau^{\mathrm{ex}}\rho\nu\alpha\gamma^{(1)}C(f^{av})}{4} + \frac{(2-3\rho^2)\tau^{\mathrm{ex}}\nu^2}{24}\right) \tag{41}$$

数値計算パートのコードは、リポジトリ内にある。