Aalto-yliopisto

MS-A0002 Matriisilaskenta

Laskuharjoitus 5 / 2024

Tehtäviä 1-4 lasketaan alkuviikon harjoituksissa. Näistä tehtävät 1 ja 2 ratkaistaan harjoituksessa (merkitty kirjaimella L = Lasketaan), tehtävien 3 ja 4 ratkaisut palautetaan sähköisesti kuvana omin käsin kirjoitetusta ratkaisusta torstaina 8.2.2024 klo 23.59 mennessä (merkitty kirjaimella P = Palautetaan). Tehtäviä 5-8 lasketaan loppuviikon harjoituksissa, 5 ja 6 paikanpäällä, 7 ja 8 ratkaisut palautetaan lauantaina 10.2.2024 klo 23.59 mennessä.

Tehtävä 1 (L)**:** Mitkä ovat matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut?

Tehtävä 2 (L)**:** Erään kaupungin säätilaa voidaan kuvata yksinkertaistetusti siten, että sadepäivän jälkeen seuraavanakin päivänä sataa todennäköisyydellä 0.2 ja aurinkoisen päivän jälkeen on seuraavanakin päivänä on aurinkoista todennäköisyydellä 0.7. Olkoon vektori

$$x_k = \begin{bmatrix} \text{aurinkoisen sään todennäköisyys päivänä } k \\ \text{sateisen sään todennäköisyys päivänä } k \end{bmatrix}.$$

Sateen ja aurinkoisen sään todennäköisyys päivänä $k+1$ saadaan siis päivän k todennäköisyyksistä seuraavasti:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} x_k$$

Miten suurella todennäköisyydellä satunnaisena päivänä sataa?
(Vihje: Oleta esimerkiksi, että $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Laske $\lim_{k \to \infty} x_k$.)

Tehtävä 3 (P)**:** Oletetaan, että $Au = 7u$ ja $Av = 8v$, missä $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\|u\|\|v\| > 0$. Osoita, että $u + v$ ei voi olla matriisin A ominaisvektori.

Tehtävä 4 (P)**:** Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

a) Etsi matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

b) Olkoon $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ kääntyvä. Selitä, miksi tässä $P^{-1}AP \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ei voi olla diagonaalinen. (Vihje: jos tämä olisi diagonaalinen, niin matriisilla A olisi ominaisvektoreina...)

c) Näytä, että $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ovat matriisin $C = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 20 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisvektoreita. Diagonalisoi matriisi C.

Tehtävä 5 (L)**:** Matriisien luokkien määritelmistä (luentomonisteen kappale 9) käsin todista seuraavat väitteet:

(a) $Positiivinen \Rightarrow Symmetrinen.$

(b) $Symmetrinen \Rightarrow Normaali.$

(c) $Unitaarinen \Rightarrow Normaali.$

Anna lisäksi esimerkit matriiseista, jotka osoittavat, että

(a') $Normaali \not\Rightarrow Symmetrinen,$

(b') $Symmetrinen \not\Rightarrow Positiivinen,$

(c') $Normaali \not\Rightarrow Unitaarinen.$

Tehtävä 6 (L)**:** Olkoon $S = [S_1\ S_2\ S_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$

Laske Gram–Schmidt -algoritmilla unitaarinen $U = [U_1\ U_2\ U_3]$, jolle

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{S_1\} &= \operatorname{span}\{U_1\}, \\ \operatorname{span}\{S_1, S_2\} &= \operatorname{span}\{U_1, U_2\}, \\ \operatorname{span}\{S_1, S_2, S_3\} &= \operatorname{span}\{U_1, U_2, U_3\}. \end{aligned}$$

Tehtävä 7 (P)**:** Etsi unitaarinen diagonalisointi matriisille

$$A = SDS^{-1}, \quad \text{kun} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad S = \begin{bmatrix} -5 & 24 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}.$$

(Huomaa, että matriisin S sarakkeet ovat ortogonaaliset.)

Tehtävä 8 (P)**:** Muistetaan, että $\langle u, A^*v\rangle = \langle Au, v\rangle$ ja $(A^*)_{jk} = (A_{kj})^*$.
(a) Olkoot $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Näytä, että $(AB)^* = B^*A^*$.
(b) Olkoon kääntyvä matriisi $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ symmetrinen (eli $S^* = S$). Näytä, että silloin myös S^{-1} on symmetrinen.
(c) Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaarinen. Näytä, että U^{-1} on unitaarinen.
(d) Olkoot $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaarisia. Näytä, että UV on unitaarinen.

Tällä viikolla on lisäksi verkkotehtäviä osoitteissa
https://mycourses.aalto.fi/course/view.php?id=40693&section=4
Verkkotehtävien tekemiseen on aikaa su 11.2.2024 klo 23:59 asti.