

## Introdução aos Processos Estocásticos - 2023.2

### Trabalho 1 - Modelo de Ising

Considere a grade de pontos de coordenadas inteiras  $L = \mathbb{Z}^2$ . Em cada vértice  $x$  há um spin magnético  $\sigma_x$  que pode ter duas possíveis orientações. As orientações são denotadas por  $\sigma_x = +1$  e  $\sigma_x = -1$ , respectivamente. Uma configuração  $\sigma = \{\sigma_x\}_{x \in L}$  da grade  $L$  é uma atribuição de valores aos seus vértices. A cada configuração é atribuída uma quantidade denominada energia do sistema. No caso mais simples, essa energia pode ser calculada como

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle i, j \rangle \in L} \sigma_i \sigma_j,$$

em que  $\langle i, j \rangle$  denota vértices vizinhos. Observe que  $H$  é bastante negativo quando os spins vizinhos tendem a estar alinhados, e menos negativo quando os spins vizinhos apresentam orientações diferentes.

Esse modelo costuma ser utilizado para estudar o ferromagnetismo de determinados materiais e é um dos modelos mais simples utilizados para ilustrar um fenômeno conhecido como transição de fase. De modo informal, dizemos que há transição de fase quando a configuração final do sistema é muito diferente a partir de um determinado valor dos parâmetros envolvidos. Nesse modelo, grupos com spins alinhados resultam em valores de menor energia para o sistema. Sistemas como esse tendem ao seu menor estado de energia. Cada spin pode interagir com os demais nesse processo, alterando a sua orientação ou a de um spin vizinho. A cada configuração é atribuída uma probabilidade na seguinte forma:

$$P_\beta(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z}$$

, em que  $\beta$  é uma constante inversamente proporcional à temperatura do sistema e  $Z$  é uma constante normalizadora. Na prática, essa constante normalizadora não é calculada e a evolução do sistema pode ser simulada usando, por exemplo, o algoritmo de Metropolis-Hastings.

Nesse trabalho, o objetivo é simular o estado final do sistema, partindo de uma configuração inicial aleatória para uma temperatura constante e uma porção  $100 \times 100$  da grade. Favor entregar código e duas figuras, uma representando o estado inicial e a outra o estado final do sistema. Utilizem a linguagem de sua preferência. O processo a ser simulado consiste em um passeio aleatório entre as diferentes configurações possíveis. Iniciando em uma configuração aleatorizada, escolha um vértice e decida através do algoritmo de Metropolis-Hastings se esse vértice terá seu spin alterado ou não. Simule o processo um grande número de vezes e observe o estado final. Utilizando a probabilidade  $P_\beta(\sigma)$ , garantimos que estamos amostrando o processo de tal forma a obter as configurações de menor energia. Observe o comportamento do sistema para diversos valores de  $\beta$ . É possível perceber alguma diferença nas configurações finais para diferentes valores de  $\beta$ ?

Prazo de entrega: final da disciplina. Entrega pelo Sigaa (abrirei a chamada).