Lista nr 10 z matematyki dyskretnej

1. Przypuśćmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo rozpinające.

2. Niech T będzie MST grafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu C grafu G drzewo T nie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi z C.

3. (-) Czy poniższy algorytm zawsze znajduje MST w grafie spójnym G?

   Załóżmy, że krawędzie grafu są posortowane wg wag: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$. Dla każdej krawędzi o indeksie i w kolejności od m do 1 wykonaj następujące: jeśli wyrzucenie e_i nie rozspaja G, wyrzuć e_i z G.

4. Udowodnij, że algorytm Prima znajdowania MST działa poprawnie.

5. Założmy, że wszystkie krawędzie w grafie mają różne wagi. Udowodnij, że algorytm Boruvki rzeczywiście znajduje drzewo rozpinające, tzn. pokaż, że w żadnej iteracji nie powstaje cykl.

6. Jak zmodyfikować algorytm Boruvki, by działał również w grafach, w których jakieś krawędzie mają takie same wagi?

7. Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek $a \in A$ skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek $b \in B$ skojarzony w N jest również skojarzony w M'.

8. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie T.

9. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

10. W pewnej grupie muzykujących osób Ania gra na skrzypcach, harfie, kontrabasie i wiolonczeli, Bartek gra na harfie i fortepianie, Cezary gra

na fortepianie, Dąbrówka gra na harfie i Elwira gra na kontrabasie, skrzypcach, wiolonczeli i harfie.

Chcieliby zagrać utwór na fortepian, skrzypce, wiolonczelę, kontrabas i harfę. Czy uda im się dobrać skład?

11. Opracuj algorytm znajdowania ścieżki powiększającej w grafie dwudzielnym.

Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

2. Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i<j$.

3. Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

4. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

5. Czy n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?

6. Niech $G=(V,E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym z wagami na krawędziach $c: E \to R \geq 0$. Św. Mikołaj chce rozwieźć prezenty do mieszkanców wszystkich ulic - każda ulica jest reprezentowana jako krawędź w G. Jak obliczyć trasę dla Św. Mikołaja, w której przejeżdza on każdą ulicą *przynajmniej* raz i która jest minimalna wagowo?

   Wskazówka: Zakładamy, że mamy do dyspozycji wielomianowy algorytm obliczający skojarzenie doskonałe o minimalnej wadze.

7. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne?

8. Krawędzie pewnego grafu spójnego G niezawierającego pętli ani krawędzi równoległych pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma

przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

9. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

10. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

3. *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.
   Uwaga: To zadanie nie jest tak proste, jak się wydaje.

4. (Problem haremu). Niech A i B będą dwoma rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (naraz) co najmniej $n_a \geq 1$ osób ze zbioru B. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby ten problem miał rozwiązanie? Wskazówka: Zastosuj klonowanie i tw. Halla.

5. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

6. Zmodyfikuj algorytm Dijkstry tak, by działał dla grafów skierowanych.

7. Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

8. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

9. nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na $n \geq 2$ kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. (Każdy student należy do jednego

towarzystwa i jednego koła.) Jeden student może reprezentować tylko jedną grupę (typu koło lub towarzystwo).

10. *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

    Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

    Wskazówka: przydatne mogą okazać się skojarzenia.

11. (0.5 punkta) Pokoloruj wierzchołkowo graf z wykładu - jest na końcu whiteboarda.

Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

2. (-) Znajdź pokolorowanie grafu Mycielskiego M_4 za pomocą algorytmu sekwencyjnego.

3. Niech M_k będzie k-tym grafem Mycielskiego. Wykaż, że M_k nie zawiera trojkątow i $\chi(M_k) = k$ dla każdego k.

4. Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.

5. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

6. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

7. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy" od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

8. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

9. Naszym zadaniem jest zorganizowanie turnieju szachowego między n zawodnikami. W ciągu ilu najmniej dni można zorganizować ten turniej, jeśli każda para zawodników musi rozegrać partię i żaden zawodnik nie może grać dwukrotnie w ciągu jednego dnia? Odpowiedź uzasadnij pokazując jak uzyskać optymalne rozłożenie.

10. Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

11. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

Lista nr 14 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.

2. Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.

3. Dla jakich wartości k, kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.

4. Narysuj graf K_6 (pełny na 6-ciu wierzchołkach) na płaszczyźnie z możliwie najmniejszą liczbą przecięć. Niech H oznacza graf powstały z grafu K_6 przez usunięcie z niego trzech krawędzi, z których żadne dwie nie mają wspólnych wierzchołków. Czy graf H jest planarny? Uzasadnij swoją odpowiedź odpowiednim rysunkiem.

5. Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.

   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N} (6-i) t_i \geq 12$.

   (b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

6. Pokaż, że graf G^* dualny do grafu planarnego jest planarny.

7. Niech G będzie grafem spójnym planarnym. Pokaż, że $(G^*)^* = G$ ($(G^*)^*$ to graf dualny do grafu dualnego).

8. Niech $G = (V, E)$ będzie pewnym grafem dwudzielnym a $d : V \to N$ funkcją na zbiorze wierzchołków. Skonstruuj algorytm, który znajduje podgraf $G' = (V, E' \subseteq E)$ grafu G taki, że dla każdego wiezchołka $v \in V$ stopień v w G' wynosi zadane $d(v)$ lub stwierdza, że takowy nie istnieje.

   Wskazówka: można użyć przepływów.

9. Pokaż, że algorytm Forda-Fulkersona zawsze się zatrzymuje, jeśli przepustowości są liczbami wymiernymi.

10. Udowodnij, że przepływ f, dla którego nie istnieje ścieżka powiększająca, jest maksymalny poprzez wskazanie przekroju, którego przepustowość jest równa $|f|$.

11. Niech $G = (V, E)$ oznacza graf, w którym $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ i $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_1, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_1), (v_3, v_8), (v_4, v_7)\}$. Czy G jest dwudzielny? Jeśli nie jest, to znajdź jego podgraf dwudzielny o największej liczbie krawędzi. Udowodnij, że podany graf jest podgrafem dwudzielnym o maksymalnej liczbie krawędzi. Czy G zawiera cykl Hamiltona i Eulera? Jeśli nie zawiera któregoś z tych cykli, to ile minimalnie krawędzi trzeba dodać, aby powstały graf był hamiltonowski/eulerowski?

12. Niech H oznacza graf o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, 15\}$, w którym wierzchołki i i j są połączone krawędzią, jeśli $NWD(i, j) > 1$. Znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe H. Potrzebne jest uzasadnienie.

13. Niech $G_n = (V, E)$ oznacza n-wierzchołkowy graf, w którym $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $E = \{(v_i, v_j) : i - j \text{ nie jest podzielne przez } 3\}$. Dla każdego naturalnego $n > 2$ znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe G_n. Potrzebne jest uzasadnienie. Dla jakich n graf G_n posiada cykl Eulera? A dla jakich n jest on dwudzielny?

Trzy ostatnie zadania są opcjonalne - jest to rodzaj powtórki z wcześniejszego materiału.

Lista nr 15 z matematyki dyskretnej

1. Pokaż, że dla każdego nieparzystego naturalnego n istnieje turniej n-wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek jest *królem.* Wierzchołek jest królem, jeśli można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w grafie po ścieżce skierowanej o długości co najwyżej 2.

2. Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G. Pokaż, że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu G.

   Pokaż, jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.

3. Niech $T = (V, E)$ będzie drzewem o parzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden rozpinający podgraf T, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty.

4. Niech Z będzie n-elementowym zbiorem. Pokaż, że jeśli wybierzemy więcej niż połowę jego wszystkich podzbiorów, to wśród nich jakieś dwa będą takie, że jeden jest podzbiorem drugiego.

5. Dany jest graf prosty skierowany G. *Pokrycie cyklowe* grafu G to zbiór Z skierowanych cykli G taki, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego z cykli z Z (cykle o długości 2 są dozwolone). Pokaż jak, mając do dyspozycji algorytm obliczania największego skojarzenia w grafie dwudzielnym nieskierowanym, skonstruować algorytm znajdujący pokrycie cyklowe G, o ile takowe istnieje.

   Wskazówka: Można rozszczepić każdy wierzchołek na dwie kopie.

6. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy *króle. Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze o dł. co najwyżej 2.