



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.  
Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

---

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## Отчет по лабораторной работе №2 по курсу "Анализ алгоритмов"

Тема Алгоритмы умножения матриц

---

Студент Калашкоов П. А.

---

Группа ИУ7-56Б

---

Оценка (баллы)

---

Преподаватель Волкова Л. Л.

---

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Аналитическая часть</b>	<b>4</b>
1.1 Матрица . . . . .	4
1.2 Стандартный алгоритм . . . . .	4
1.3 Алгоритм Винограда . . . . .	5
1.4 Оптимизация алгоритм Винограда . . . . .	6
1.5 Вывод . . . . .	6
<b>2 Конструкторская часть</b>	<b>7</b>
2.1 Описание используемых типов данных . . . . .	7
2.2 Сведения о модулях программы . . . . .	7
2.3 Схемы алгоритмов . . . . .	8
2.4 Модель вычислений . . . . .	14
2.5 Трудоемкость алгоритмов . . . . .	14
2.5.1 Стандартный алгоритм умножения матриц . . . . .	14
2.5.2 Алгоритм Винограда . . . . .	15
2.5.3 Оптимизированный алгоритм Винограда . . . . .	16
2.6 Классы эквивалентности при тестировании . . . . .	17
2.7 Вывод . . . . .	17
<b>3 Технологическая часть</b>	<b>19</b>
3.1 Средства реализации . . . . .	19
3.2 Листинги кода . . . . .	19
3.3 Функциональные тесты . . . . .	22
3.4 Вывод . . . . .	22
<b>4 Исследовательская часть</b>	<b>23</b>
4.1 Технические характеристики . . . . .	23
4.2 Демонстрация работы программы . . . . .	23
4.3 Время выполнения алгоритмов . . . . .	25
4.4 Вывод . . . . .	28

<b>Заключение</b>	<b>29</b>
<b>Список литературы</b>	<b>30</b>

# Введение

В программировании, как и в математике, часто приходится прибегать к использованию матриц. Существует огромное количество областей их применения в этих сферах. Матрицы активно используются при выводе различных формул в физике, таких, как:

- градиент;
- дивергенция;
- ротор.

Нельзя обойти стороной и различные операции над матрицами - сложение, возведение в степень, умножение. При различных задачах размеры матрицы могут достигать больших значений, поэтому оптимизация операций работы над матрицами является важной задачей в программировании. В данной лабораторной работе пойдёт речь об оптимизациях операции умножения матриц.

**Целью данной работы** является изучение, реализация и исследование алгоритмов умножения матриц - классический алгоритм, алгоритм Винограда и оптимизированный алгоритм Винограда. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- изучить и реализовать алгоритмы - классический, Винограда и его оптимизацию;
- провести тестирование по времени и по памяти для алгоритмов лабораторной работы;
- провести сравнительный анализ по времени классического алгоритма и алгоритма Винограда;
- провести сравнительный анализ по времени алгоритма Винограда и его оптимизации;
- описать и обосновать полученные результаты в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненного как расчётно-пояснительная записка к работе.

# 1 Аналитическая часть

В этом разделе будут представлены классический алгоритм умножения матриц и алгоритм Винограда, а также его оптимизированная версия

## 1.1 Матрица

**Матрицей** [1] называют математический объект, который представляет собой двумерный массив, в котором элементы располагаются по строкам и столбцам.

Пусть  $A$  - матрица, тогда  $A_{i,j}$  - элемент этой матрицы, который находится на  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце.

Можно выделить следующие операции над матрицами:

- матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать;
- если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы - их можно перемножить, причем в итоговой матрице количество строк будет, как у первой матрицы, а столбцов - как у второй.

*Замечание:* операция умножения матриц не коммутативна - если  $A$  и  $B$  - квадратные матрицы, а  $C$  - результат их перемножения, то произведение  $AB$  и  $BA$  дадут разный результат  $C$ .

## 1.2 Стандартный алгоритм

Пусть даны две матрицы

$$A_{lm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}, \quad B_{mn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

тогда матрица  $C$

$$C_{ln} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1, l}; j = \overline{1, n}) \quad (1.3)$$

будет называться произведением матриц  $A$  и  $B$ .

Стандартный алгоритм реализует данную формулу.

## 1.3 Алгоритм Винограда

**Алгоритм Винограда** [2] — алгоритм умножения квадратных матриц. Начальная версия имела асимптотическую сложность алгоритма примерно  $O(n^{2,3755})$ , где  $n$  - размер стороны матрицы, но после доработки он стал обладать лучшей асимптотикой среди всех алгоритмов умножения матриц.

Рассмотрим два вектора  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  и  $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ . Их скалярное произведение равно:  $U \cdot W = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4$ , что эквивалентно (1.4):

$$V \cdot W = (u_1 + w_2)(u_2 + w_1) + (u_3 + w_4)(u_4 + w_3) - u_1 u_2 - u_3 u_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4. \quad (1.4)$$

За счёт предварительной обработки данных можно получить прирост производительности: не смотря на то, что полученное выражение требует большего количества операций, чем стандартное умножение матриц, но выражение в правой части равенства можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и каждого столбца второй матрицы. Это позволит выполнить лишь два умножения и пять сложений, при учёте, что потом будет сложено только с двумя предварительно посчитанными суммами соседних элементов текущих строк и столбцов. Операция сложения выполняется быстрее, поэтому на практике алгоритм должен работать быстрее обычного алгоритма перемножения матриц.

Но стоит упомянуть, что при нечетном значении размера матрицы нужно

дополнительно добавить произведения крайних элементов соответствующих строк и столбцов.

## 1.4 Оптимизация алгоритм Винограда

При программной реализации рассмотренного выше алгоритма Винограда можно сделать следующие оптимизации:

- Значение  $\frac{N}{2}$ , используемое как ограничения цикла подсчёта предварительных данных, можно кэшировать;
- Операцию умножения на 2 программно эффективнее реализовывать как побитовый сдвиг влево на 1;
- Операции сложения и вычитания с присваиванием следует реализовывать при помощи соответственного оператора  $+=$  или  $-=$ ;

## 1.5 Вывод

В данном разделе были рассмотрены алгоритмы умножения матриц - стандартного и Винограда, который имеет большую эффективность за счет предварительных вычислений. Также были рассмотрены оптимизации, которые можно учесть при программной реализации алгоритма Винограда.

Алгоритмы на вход будут получать две матрицы, причём количество столбцов одной матрицы должно совпадать с количеством строк второй матрицы. При вводе пустой матрицы будет выведено сообщение об ошибке. Реализуемое ПО дает возможность выбрать один из алгоритмов или все сразу, ввести две матрицы и вывести результат перемножить, а также можно провести тестирование по времени для четных и нечетных размеров матриц и сравнить результаты, используя их графическое представление.

## 2 Конструкторская часть

В этом разделе будут представлено описание используемых типов данных, а также схемы алгоритмов перемножения матриц - стандартного, Винограда и оптимизации алгоритма Винограда.

### 2.1 Описание используемых типов данных

При реализации алгоритмов будут использованы следующие типы данных:

- количество строк - целое число типа *int*
- количество столбцов - целое число типа *int*
- матрица - двумерный список типа *int*

### 2.2 Сведения о модулях программы

Программа состоит из шести модулей:

- *main.py* - файл, содержащий точку входа;
- *menu.py* - файл, содержащий код меню программы;
- *test.py* - файл, содержащий код тестирования алгоритмов;
- *utils.py* - файл, содержащий служебные алгоритмы;
- *constants.py* - файл, содержащий константы программы;
- *algorithms.py* - файл, содержащий код всех алгоритмов.



## 2.3 Схемы алгоритмов

На рисунке 2.1 представлена схема алгоритма для стандартного умножения матриц. На рисунках 2.2-2.3 схема алгоритма Винограда умножения матриц, а на 2.4-2.5 - схема оптимизированного алгоритма Винограда.

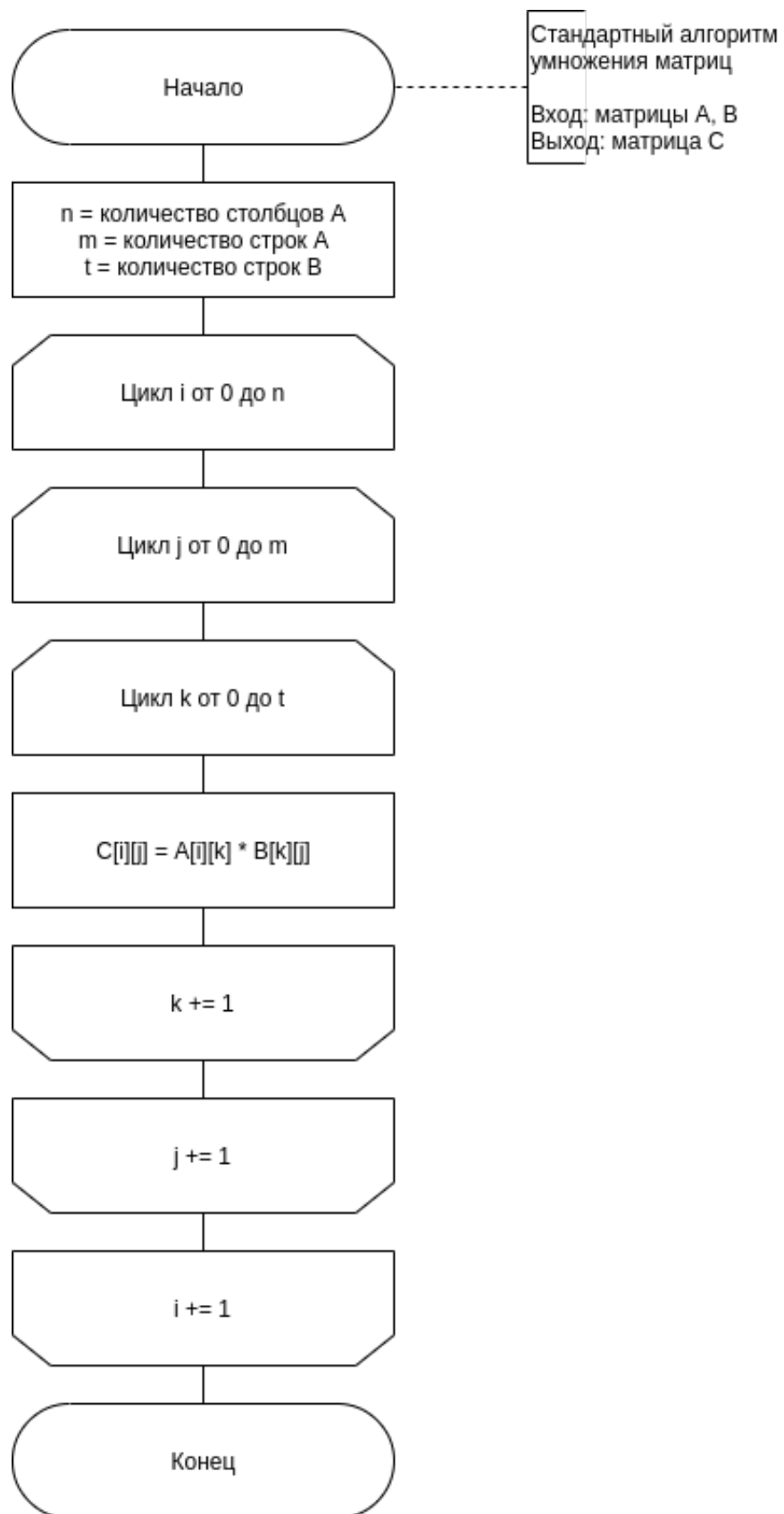


Рисунок 2.1 – Схема стандартного алгоритма умножения матриц

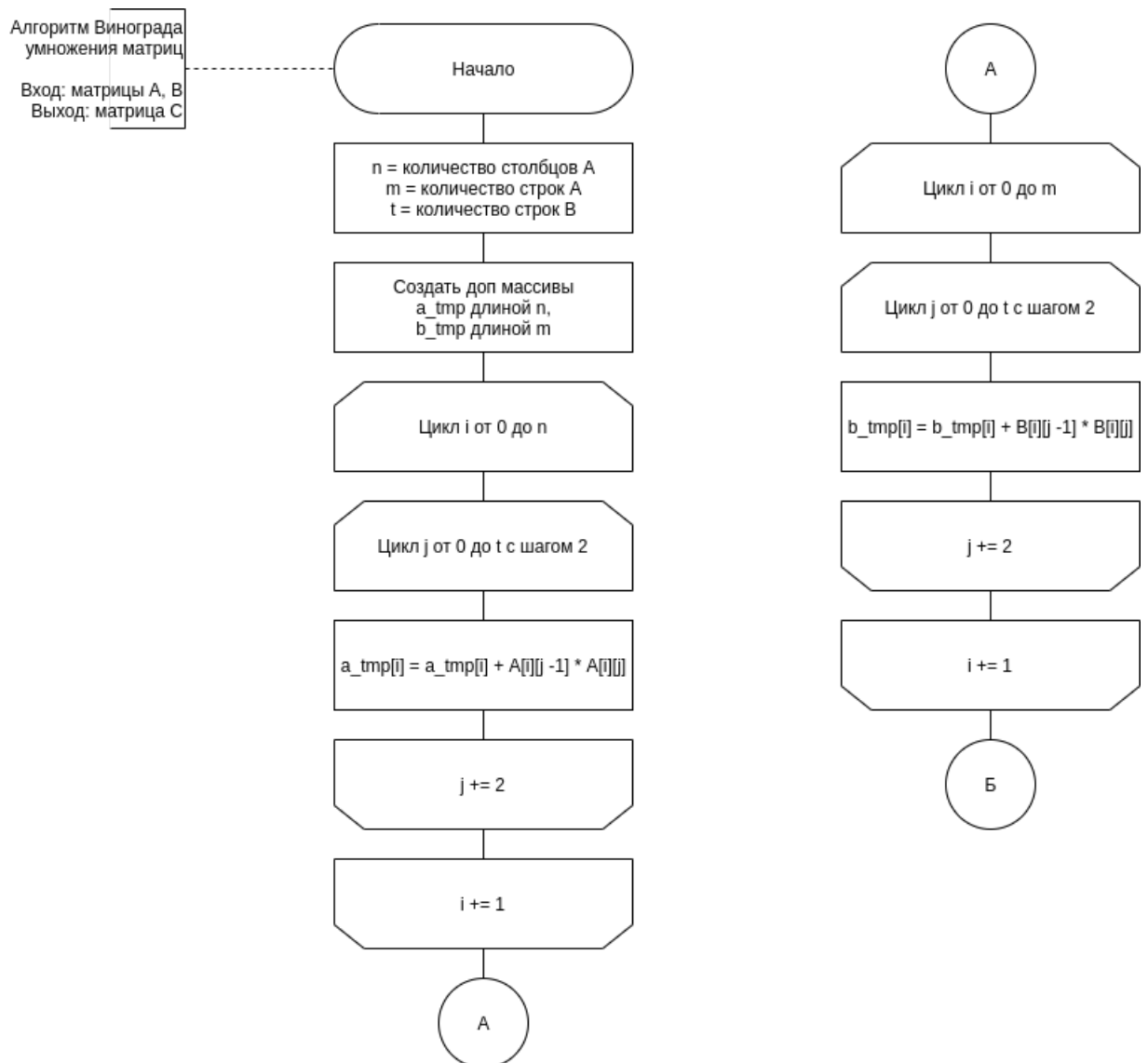


Рисунок 2.2 – Схема умножения матриц по алгоритму Винограда (часть 1)

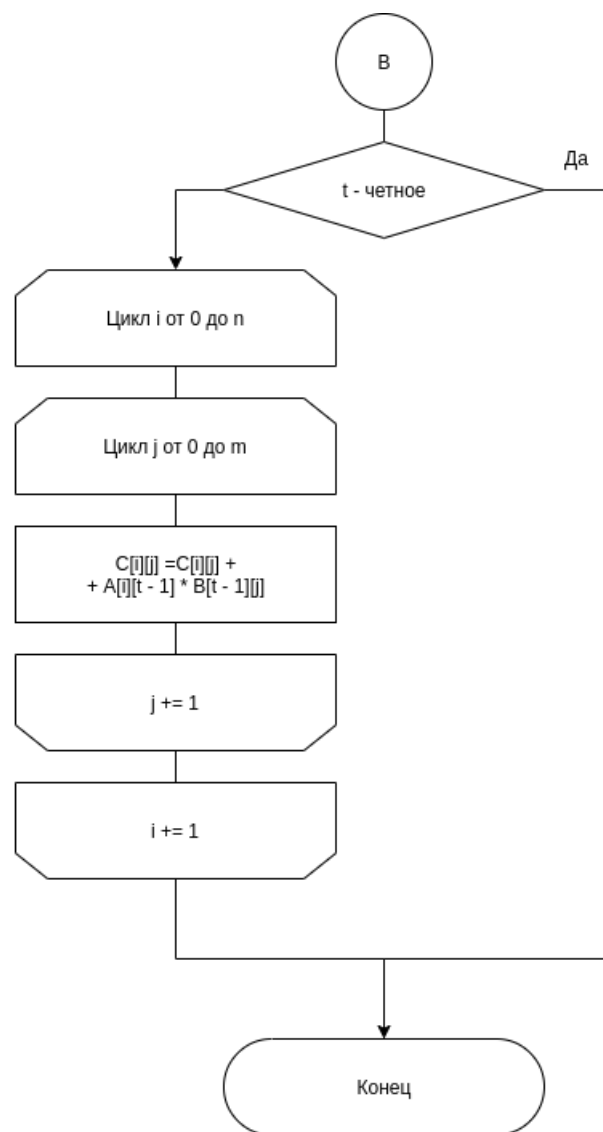
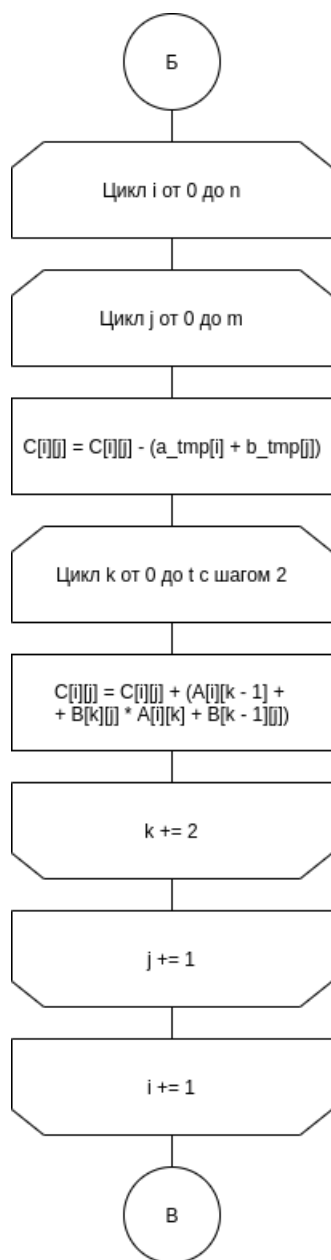


Рисунок 2.3 – Схема умножения матриц по алгоритму Винограда (часть 2)

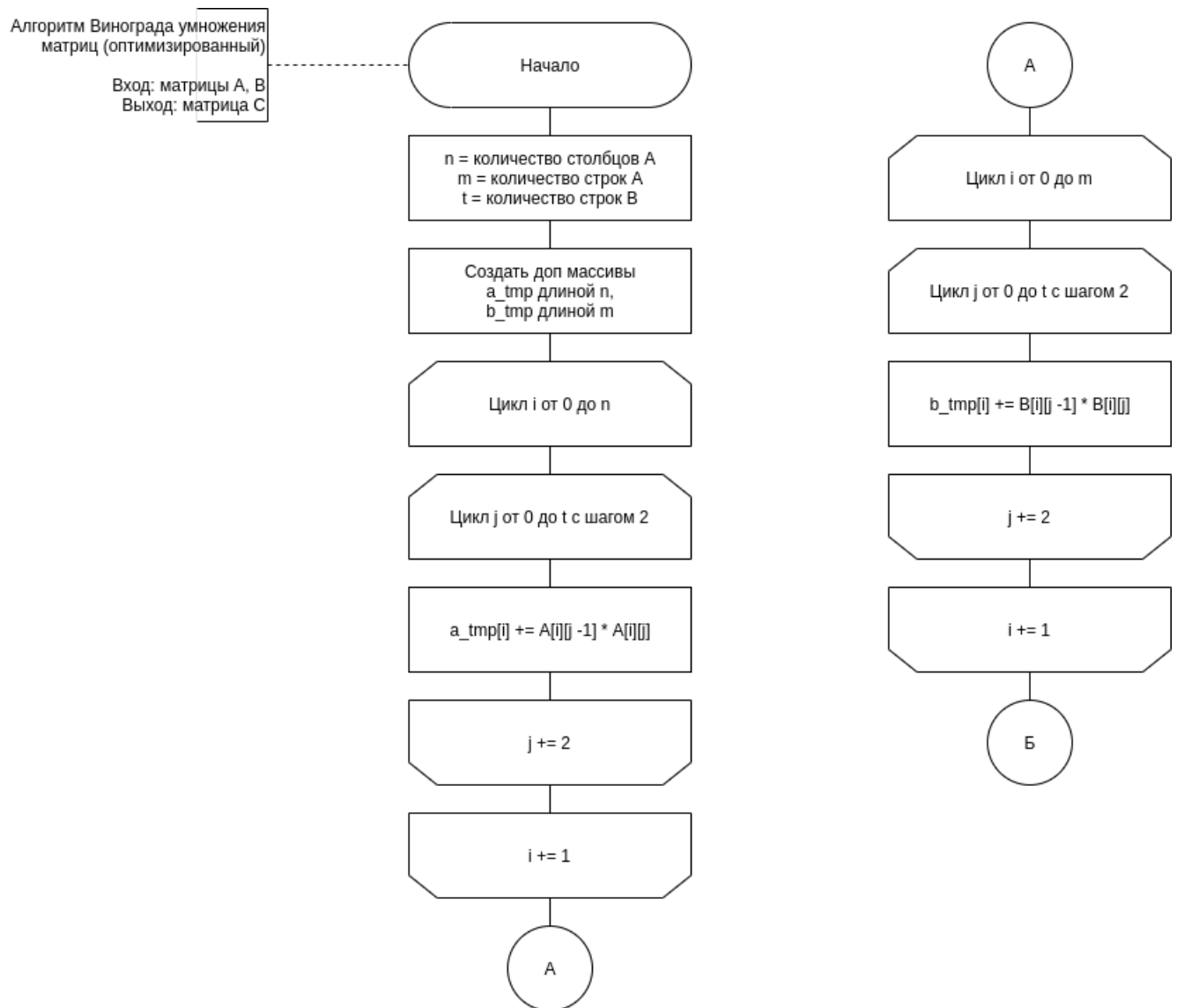


Рисунок 2.4 – Схема умножения матриц по оптимизированному алгоритму Винограда (часть 1)

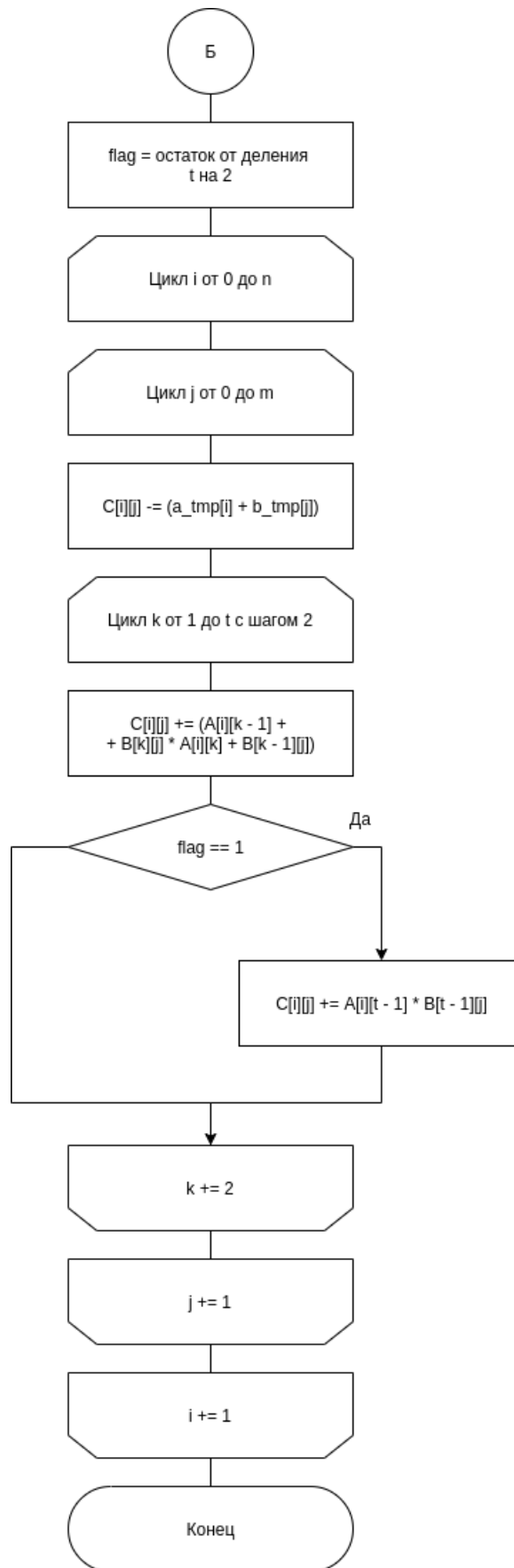


Рисунок 2.5 – Схема умножения матриц по оптимизированному алгоритму Винограда (часть 2)

## 2.4 Модель вычислений

Чтобы провести вычисление трудоемкости алгоритмов умножения матриц, введем модель вычислений [3]:

1. Операции из списка (2.1) имеют трудоемкость 1;

$$+, -, *, /, \%, ==, !=, <, >, <=, >=, [], ++, -- \quad (2.1)$$

2. Трудоемкость оператора выбора `if условие then A else B` рассчитывается, как (2.2);

$$f_{if} = f_{условия} + \begin{cases} f_A, & \text{если условие выполняется,} \\ f_B, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.2)$$

3. Трудоемкость цикла рассчитывается, как (2.3);

$$f_{for} = f_{инициализации} + f_{сравнения} + N(f_{тела} + f_{инкремента} + f_{сравнения}) \quad (2.3)$$

4. трудоемкость вызова функции равна 0.

## 2.5 Трудоемкость алгоритмов

Рассчитаем трудоемкость алгоритмов умножения матриц.

### 2.5.1 Стандартный алгоритм умножения матриц

Для стандартного алгоритма умножения матриц трудоемкость будет складываться из:

- внешнего цикла по  $i \in [1..M]$ , трудоёмкость которого:  $f = 2 + M \cdot (2 + f_{body})$ ;
- цикла по  $j \in [1..N]$ , трудоёмкость которого:  $f = 2 + 2 + N \cdot (2 + f_{body})$ ;

- цикла по  $k \in [1..K]$ , трудоёмкость которого:  $f = 2 + 2 + 14K$ .

Поскольку трудоёмкость стандартного алгоритма равна трудоёмкости внешнего цикла, то:

$$f_{standard} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (4 + 14K)) = 2 + 4M + 4MN + 14MNK \quad (2.4)$$

$$\approx 14MNK \quad (2.5)$$

## 2.5.2 Алгоритм Винограда

Чтобы вычислить трудоёмкость алгоритма Винограда, нужно учесть следующее:

- создания и инициализации массивов  $a_{tmp}$  и  $b_{tmp}$ , трудоёмкость которых (2.6):

$$f_{init} = M + N; \quad (2.6)$$

- заполнения массива  $a_{tmp}$ , трудоёмкость которого (2.7):

$$f_{a_{tmp}} = 2 + K(2 + \frac{M}{2} \cdot 11); \quad (2.7)$$

- заполнения массива  $b_{tmp}$ , трудоёмкость которого (2.8):

$$f_{b_{tmp}} = 2 + K(2 + \frac{N}{2} \cdot 11); \quad (2.8)$$

- цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого (2.9):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (11 + \frac{K}{2} \cdot 23)); \quad (2.9)$$

- цикла, который дополнительно нужен для подсчета значений при нечет-



ном размере матрицы, трудоемкость которого (2.10):

$$f_{last} = \begin{cases} 2, & \text{чѐтная,} \\ 4 + M \cdot (4 + 14N), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда для худшего случая (нечѐтный общий размер матриц) имеем (2.11):

$$f_{worst} = f_{a_{tmp}} + f_{b_{tmp}} + f_{cycle} + f_{last} \approx 11.5 \cdot MNK \quad (2.11)$$

Для лучшего случая (чѐтный общий размер матриц) имеем (2.12):

$$f_{best} = f_{a_{tmp}} + f_{a_{tmp}} + f_{cycle} + f_{last} \approx 11.5 \cdot MNK \quad (2.12)$$

### 2.5.3 Оптимизированный алгоритм Винограда

Оптимизация заключается в:

- кѐшировании значения  $\frac{N}{2}$  в циклах;
- использовании побитового сдвига вместо умножения на 2;
- операции сложения и вычитания заменены на операции  $+=$  и  $-=$  соответственно.

Тогда трудоемкость оптимизированного алгоритма Винограда состоит из:

- создания и инициализации массивов  $a_{tmp}$  и  $b_{tmp}$  (2.6);
- заполнения массива  $a_{tmp}$ , трудоемкость которого (2.7);
- заполнения массива  $b_{tmp}$ , трудоемкость которого (2.8);
- цикла заполнения для чѐтных размеров, трудоемкость которого (2.13):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (4 + N \cdot (11 + \frac{K}{2} \cdot 18)); \quad (2.13)$$

- условие, которое нужно для дополнительных вычислений при нечетном размере матрицы, трудоемкость которого (2.14):

$$f_{last} = \begin{cases} 1, & \text{чётная,} \\ 4 + M \cdot (4 + 10N), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Тогда для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем (2.15):

$$f_{worst} = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 9MNK \quad (2.15)$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем (2.16):

$$f_{best} = f_{MH} + f_{MV} + f_{cycle} + f_{last} \approx 9MNK \quad (2.16)$$

## 2.6 Классы эквивалентности при тестировании

Для тестирования выделены классы эквивалентности, представленные ниже.

1. Одна из матриц - пустая.
2. Количество столбцов одной матрицы не равно количеству строк второй матрицы.
3. Перемножение квадратных матриц.
4. Перемножение матриц разных размеров (при этом количество столбцов одной матрицы не равно количеству строк второй матрицы).

## 2.7 Вывод

В данном разделе были построены схемы алгоритмов умножения матриц, рассматриваемых в лабораторной работе, были описаны классы эквивалент-

ности для тестирования, модули программы, а также проведена теоретическая оценка трудоемкости алгоритмов.

## 3 Технологическая часть

В данном разделе будут рассмотрены средства реализации, а также представлены листинги алгоритмов умножения матриц - стандартный, Винограда и оптимизированный алгоритм Винограда.

### 3.1 Средства реализации

В данной работе для реализации был выбран язык программирования *Python*[4]. В текущей лабораторной работе требуется замерить процессорное время для выполняемой программы, а также построить графики. Все эти инструменты присутствуют в выбранном языке программирования.

Время работы было замерено с помощью функции *process\_time(...)* из библиотеки *time*[5].

### 3.2 Листинги кода

В листингах 3.1-3.3 представлены реализации алгоритмов умножения матриц - стандартного, Винограда и оптимизированного алгоритма Винограда.

Листинг 3.1 – Стандартный алгоритм умножения матриц

```
1 def standart_alg(mat_a, mat_b):
2     n = len(mat_a)
3     m = len(mat_a[0])
4     t = len(mat_b[0])
5     res_matrix = [[0] * t for _ in range(n)]
6
7     for i in range(n):
8         for j in range(m):
9             for k in range(t):
10                 res_matrix[i][j] += mat_a[i][k] * mat_b[k][j]
11
12     return res_matrix
```

Листинг 3.2 – Алгоритм Винограда умножения матриц

```

1 def vinograd_alg(mat_a, mat_b):
2
3     n = len(mat_a)
4     m = len(mat_a[0])
5     t = len(mat_b[0])
6
7     res_matrix = [[0] * t for _ in range(n)]
8
9     tmp_row = [0] * n
10    tmp_col = [0] * t
11
12    for i in range(n):
13        for j in range(0, m // 2):
14            tmp_row[i] = tmp_row[i] + mat_a[i][2 * j] * mat_a[i][2
15                * j + 1]
16
17    for i in range(t):
18        for j in range(0, m // 2):
19            tmp_col[i] = tmp_col[i] + mat_b[2 * j][i] * mat_b[2 * j
20                + 1][i]
21
22    for i in range(n):
23        for j in range(t):
24
25            res_matrix[i][j] = -tmp_row[i] - tmp_col[i]
26
27            for k in range(0, m // 2):
28
29                res_matrix[i][j] = res_matrix[i][j] + (mat_a[i][2 *
30                    k + 1] + mat_b[2 * k][j]) * (mat_a[i][2 * k] +
31                    mat_b[2 * k + 1][j])
32
33    if (m % 2 == 1):
34        for i in range(n):
35            for j in range(t):
36                res_matrix[i][j] = res_matrix[i][j] + mat_a[i][m -
37                    1] * mat_b[m - 1][j]
38
39    return res_matrix

```

Листинг 3.3 – Оптимизированный алгоритм Винограда умножения матриц

```

1 def optimized_vinograd_alg(mat_a, mat_b):
2
3     n = len(mat_a)
4     m = len(mat_a[0])
5     t = len(mat_b[0])
6
7     res_matrix = [[0] * t for _ in range(n)]
8
9     tmp_row = [0] * n
10    tmp_col = [0] * t
11
12    for i in range(n):
13        for j in range(0, m // 2):
14            tmp_row[i] = tmp_row[i] + mat_a[i][2 * j] * mat_a[i][2
15                * j + 1]
16
17    for i in range(t):
18        for j in range(0, m // 2):
19            tmp_col[i] = tmp_col[i] + mat_b[2 * j][i] * mat_b[2 * j
20                + 1][i]
21
22    flag = m % 2
23
24    for i in range(n):
25        for j in range(t):
26
27            res_matrix[i][j] -= (tmp_row[i] + tmp_col[i])
28
29            for k in range(1, m, 2):
30
31                res_matrix[i][j] += (mat_a[i][k - 1] + mat_b[k][j])
32                    * (mat_a[i][k] + mat_b[k - 1][j])
33
34            if (flag):
35                res_matrix[i][j] += mat_a[i][m - 1] * mat_b[m -
36                    1][j]
37
38    return res_matrix

```

### 3.3 Функциональные тесты

В таблице 3.1 приведены тесты для функций, реализующих алгоритмы умножения матриц, рассматриваемых в данной лабораторной работе. Тесты *для всех алгоритмов* пройдены успешно.

Таблица 3.1 – Функциональные тесты

Матрица 1	Матрица 2	Ожидаемый результат
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
(2)	(2)	(4)

### 3.4 Вывод

Были представлены листинги всех алгоритмов умножения матриц - стандартного, Винограда и оптимизированного алгоритма Винограда. Также в данном разделе была приведена информации о выбранных средствах для разработки алгоритмов.

## 4 Исследовательская часть

В данном разделе будут приведены примеры работы программа, а также проведен сравнительный анализ алгоритмов при различных ситуациях на основе полученных данных.

### 4.1 Технические характеристики

Технические характеристики устройства, на котором выполнялось тестирование представлены далее:

- операционная система: Ubuntu 20.04.3 [6] Linux [7] x86\_64;
- память: 8 GiB;
- процессор: Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz [8].

При тестировании ноутбук был включен в сеть электропитания. Во время тестирования ноутбук был нагружен только встроенными приложениями окружения, а также системой тестирования.

### 4.2 Демонстрация работы программы

На рисунке 4.1 представлен результат работы программы.



```
amunra23@amunra23:~/studying/sem5/aa/aa_github/lab_02/docs$ make prog
python3 ../src/main.py

    Меню

    1. Станадартное умножение матриц
    2. Алгоритм Винограда
    3. Опитимизированный алгоритм Винограда
    4. Все алгоритмы вместе
    5. Замерить время
    0. Выход

        Выбор:      2

Введите количество строк:      3
Введите количество столбцов:   3

Введите матрицу по строчно (в одной строке - все числа для данной строки)
1 2 3
4 5 6
7 8 9

Введите количество строк:      3
Введите количество столбцов:   3

Введите матрицу по строчно (в одной строке - все числа для данной строки)
1 0 0
0 1 0
0 0 1

Результат:

1  2  3
4  5  6
7  8  9
```

Рисунок 4.1 – Пример работы программы

## 4.3 Время выполнения алгоритмов

Как было сказано выше, используется функция замера процессорного времени `process_time(...)` из библиотеки `time` на Python. Функция возвращает пользовательское процессорное время типа `float`.

Использовать функцию приходится дважды, затем из конечного времени нужно вычесть начальное, чтобы получить результат.

Замеры проводились для четных размеров матриц от 10 до 100 по 100 раз на различных входных матрицах. А также - для нечетных размеров матриц от 11 до 101 по 100 раз на различных данных.

Результаты замеров приведены в таблицах 4.1-4.2 (время в мс).

Таблица 4.1 – Результаты замеров времени (четные размеры матриц)

Размер	Виноград	Стандартный	Виноград (опт)
10	0.4499	0.4704	0.4752
20	2.8840	3.3016	3.2651
30	9.5720	11.1623	10.9442
40	23.4701	26.0454	26.1070
50	46.4841	50.3048	50.9318
60	79.8626	85.9440	88.0997
70	131.1175	138.5897	137.0778
80	180.8709	192.5866	201.5224
90	265.7854	281.7807	285.6622
100	365.7012	389.0166	396.0769

Таблица 4.2 – Результаты замеров времени  
(нечетные размеры матриц)

Размер	Виноград	Стандартный	Виноград (опт)
11	0.5347	0.5957	0.5903
21	3.2574	3.8564	3.9321
31	10.3225	11.6939	11.6987
41	24.6681	29.2176	27.4809
51	46.9840	52.1843	52.2853
61	83.9109	91.0531	91.2205
71	132.7335	143.1516	144.1633
81	197.3846	213.8967	217.7382
91	283.1631	299.3335	300.8532
101	371.8323	408.7874	416.1802

Также на рисунках 4.2–4.3 приведены графические результаты замеров.

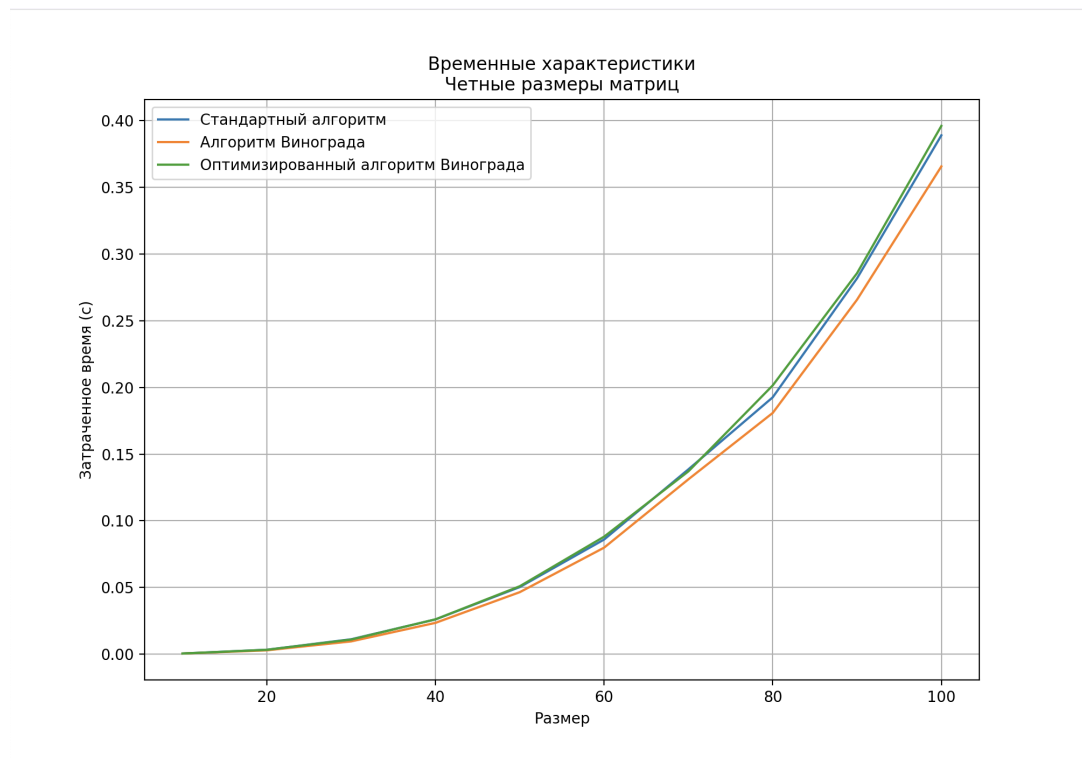


Рисунок 4.2 – Сравнение по времени алгоритмов умножения матриц на четных размерах матриц

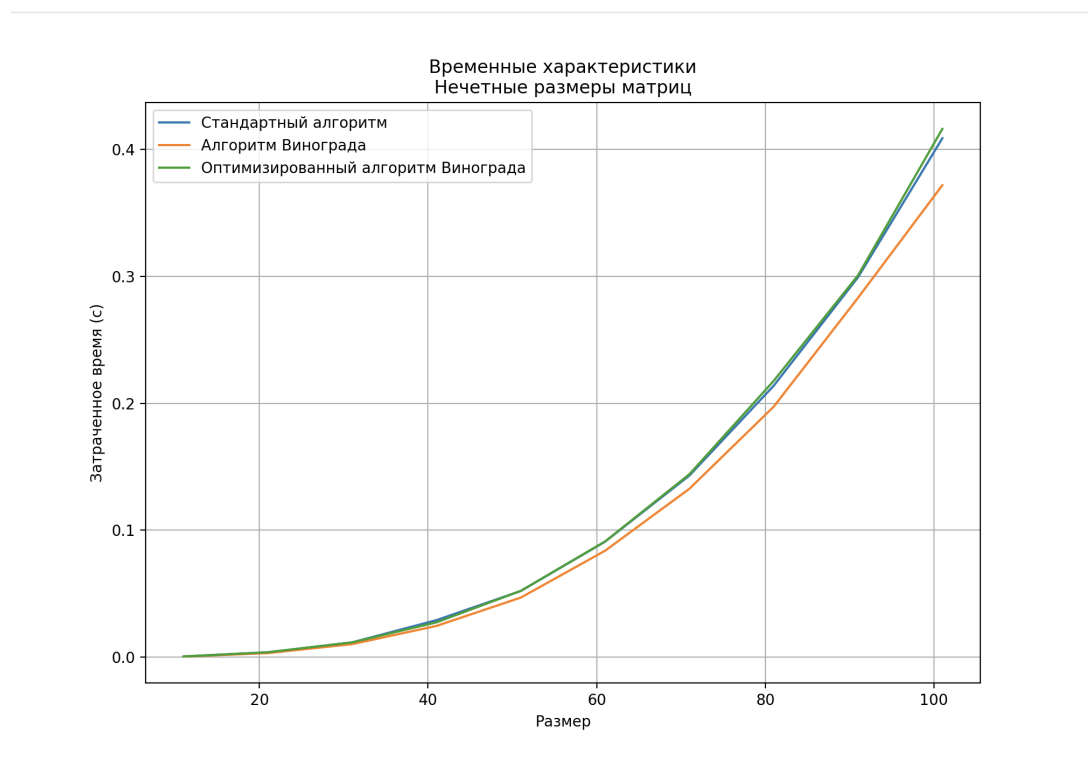


Рисунок 4.3 – Сравнение по времени алгоритмов умножения матриц на нечетных размерах матриц

## 4.4 Вывод

В результате эксперимента было получено, что при больших размерах матриц (свыше 10), алгоритм Винограда быстрее стандартного алгоритма более, чем 1.2 раза, а оптимизированный алгоритм Винограда быстрее стандартного алгоритма в 1.3 раза. В итоге, можно сказать, что при таких данных следует использовать оптимизированный алгоритм Винограда.

Также при проведении эксперимента было выявлено, что на четных размерах реализация алгоритма Винограда в 1.2 раза быстрее, чем на нечетных размерах матриц, что обусловлено необходимостью проводить дополнительные вычисления для крайних строк и столбцов. Следовательно, стоит использовать алгоритм Винограда для матриц, которые имеют четные размеры.

# Заключение

В результате исследования было определено, что стандартный алгоритм умножения матриц проигрывает по времени алгоритму Винограда примерно в 1.2 раза из-за того, что в алгоритме Винограда часть вычислений происходит заранее, а также сокращается часть сложных операций - операций умножения, поэтому предпочтение следует отдавать алгоритму Винограда. Но лучшие показатели по времени выдает оптимизированный алгоритм Винограда – он примерно в 1.2 раза быстрее алгоритма Винограда на размерах матриц свыше 10 из-за замены операций равно и плюс на операцию плюс-равно, а также за счет замены операции умножения операцией сдвига, что дает проводить часть вычислений быстрее. Поэтому при выборе самого быстрого алгоритма предпочтение стоит отдавать оптимизированному алгоритму Винограда. Также стоит упомянуть, что алгоритм Винограда работает на четных размерах матриц примерно в 1.3 раза быстрее, чем на нечетных, что связано с тем, что нужно произвести часть дополнительных вычислений для крайних строк и столбцов матриц, поэтому алгоритм Винограда лучше работает четных размерах матриц.

Цель, которая была поставлена в начале лабораторной работы была достигнута, а также в ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи:

- были изучены и реализованы алгоритмы умножения матриц - стандартный, Винограда и оптимизированный алгоритм Винограда;
- проведен сравнительный анализ по времени алгоритмов умножения матриц на четных размерах матриц
- проведен сравнительный анализ по времени алгоритмов умножения матриц на нечетных размерах матриц
- проведен сравнительный анализ по времени алгоритмов алгоритмов между собой
- подготовлен отчет о лабораторной работе.

# Список литературы

- [1] Матрица [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://terme.ru/termin/matrica.html> (дата обращения: 23.10.2021).
- [2] Умножение матриц [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://algotlib.narod.ru/Math/Matrix.html> (дата обращения: 23.10.2021).
- [3] М. В. Ульянов Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. 2007.
- [4] Welcome to Python [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.python.org> (дата обращения: 04.10.2021).
- [5] time — Time access and conversions [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.python.org/3/library/time.html#functions> (дата обращения: 04.10.2021).
- [6] Ubuntu 20.04.3 LTS (Focal Fossa) [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://releases.ubuntu.com/20.04/> (дата обращения: 04.10.2021).
- [7] Linux [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.linux.org/forums/#linux-tutorials.122> (дата обращения: 04.10.2021).
- [8] Процессор Intel® Core™ i5-7300HQ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ark.intel.com/content/www/ru/ru/ark/products/97456/intel-core-i5-7300hq-processor-6m-cache-up-to-3-50-ghz.html> (дата обращения: 04.10.2021).