**ЗАДАНИЕ**
**на лабораторную работу №5**

**Тема:** Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе многомерных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

**Цель работы**. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи для линейного многомерного уравнения эллиптического типа, и исследование соответствующей математической модели.

**Исходные данные.**

**1. Уравнение модели.**

Вариант 1. Математическая модель в самом общем квазилинейном виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)=0.$$

Более простые варианты модели.

Вариант 2. Линейная математическая модель с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)=0.$$

Вариант 3. Математическая модель с постоянными коэффициентами $\lambda(x,z)\equiv\lambda$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{f(x,z)}{\lambda}=0.$$

Результатом решения задачи является функция $u(x,z)$.

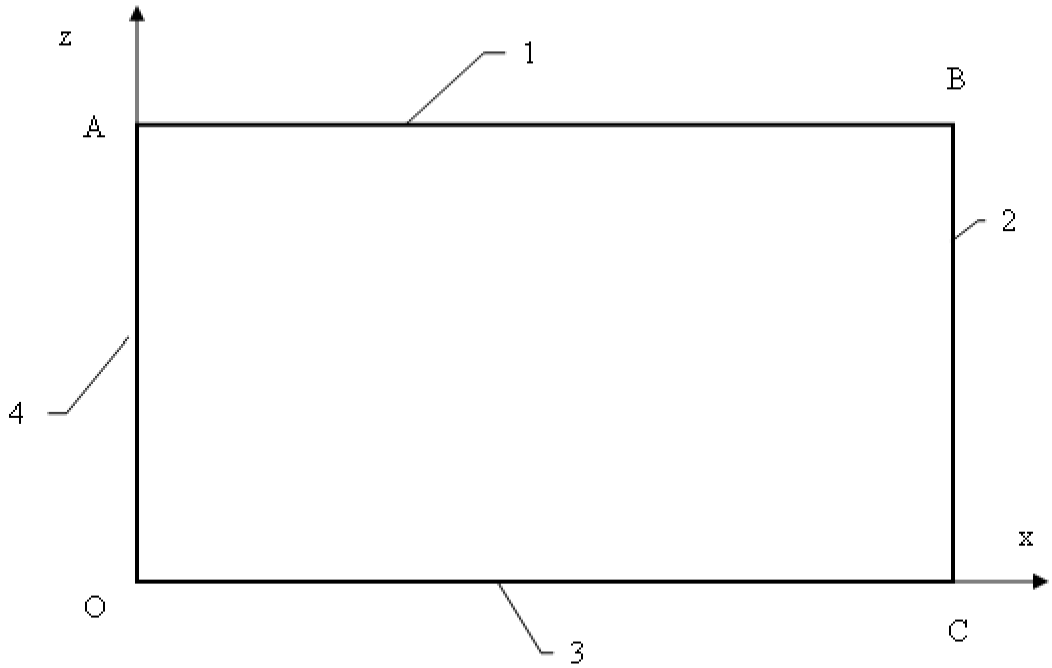
**2. Область решения и краевые условия (КУ)**

Область изображена на рисунке и представляет собой прямоугольник OABC .

На границах 1-4 области задаются три варианта **краевых условий КУ** – I, II и III родов. Все размеры области заданы, т.е. заданы координаты точек A,B,C (см. рисунок).

Указанные краевые условия на поверхностях 1-4 можно ставить в разных комбинациях. Для примера, рассмотрим 3 варианта постановки краевых условий на границах 1-

4. Пусть для этого прямоугольника размеры OC=a, OA=b. Тогда на границах 4, 2, 3 и 1




краевые условия могут быть поставлены следующим образом, соответственно.

*Вариант 1* (граница 4 – КУ II рода, остальные границы- КУ III рода):

$$
\begin{cases}
x = 0, \ \textit{граница}\, 4, \ -k(u(0,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = F_0, \\
x = a, \ \textit{граница}\, 2, \ -k(u(a,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2\,(u(a,z) - u_0), \\
z = 0, \ \textit{граница}\, 3, \quad k(u(x,0))\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \alpha_3\,(u(x,0) - u_0), \\
z = b, \ \textit{граница}\, 1, \ -k(u(x,b))\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \alpha_4\,(u(x,b) - u_0)
\end{cases}
$$

*Вариант 2* все КУ –III рода):.

$$
\begin{cases}
x = 0, \quad k(u(0,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1\,(u(0,z) - u_0), \\
x = a, \ -k(u(a,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2\,(u(a,z) - u_0), \\
z = 0, \quad k(u(x,0))\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \alpha_3\,(u(x,0) - u_0), \\
z = b, \ -k(u(x,b))\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \alpha_4\,(u(x,b) - u_0)
\end{cases}
$$

*Вариант 3* (все КУ –I рода):

$$\begin{cases} x=0, \;\; u(0,z)=u_0, \\ x=a, \;\;\; u(a,z)=u_0, \\ z=0, \;\;\; u(x,0)=u_0, \\ z=b, \;\;\; u(x,b)=u_0. \end{cases}$$

Еще раз отметим, что можно написать и многие другие комбинации краевых условий на поверхностях 1-4, ориентируясь на написанные выше условия.

**Значения коэффициентов задачи** (все размерности согласованы).

В квазилинейном уравнении

$\lambda(u)=a_1(b_1+c_1\,u^{m_1})$, Вт/см К. (1)

$a_1$=0.0134, $b_1$=1, $c_1$=4.35 $10^{-4}$, $m_1$=1,

В линейном варианте $\lambda(x,z)$ задается пользователем аналитически или в виде двумерной таблицы. Можно ориентироваться на значения, даваемые формулой (1).

Параметры $\alpha_i$ варьируются в диапазоне 0.05-1.0 Вт/см$^2$ К, (i=1,2,3,4).

Для отладки программы геометрические размеры прямоугольника можно принять $a=b=$ 10 см.

Можно взять значение $u_0=300$К, значение потока при $x=0$ $F_0$=30 Вт/см$^2$ .

В качестве примера функции источников можно взять распределение вида $f(x,z)=f_0\,e^{-\beta(x-x_0)^2(z-z_0)^2}$, параметры $f_0$, $\beta$ варьируются исходя из условия, чтобы максимум решения уравнения - функции $u(x,z)$ не превышал 3000К. Коэффициент $\beta$ - положительный, координаты $x_0, z_0$ центра распределения функции $f(x,z)$ задаются пользователем.

**Физическое содержание задачи** (для понимания получаемых результатов при отладке программы**).**

Сформулированная математическая модель описывает двумерное температурное поле $u(x,z)$ в тонкой прямоугольной пластине с размерами a x b. Температура по толщине пластины (третьей координате) принимается постоянной. Функция $f(x,z)$ представляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Излучение может представлять собой, например, узконаправленный луч лазера. Краевые условия в варианте 1 соответствуют нагружению объекта тепловым потоком $F_0$ с одной стороны $x = 0$, постоянным вдоль координаты $z$, и отводу тепла с трех других сторон при заданной температуре окружающей среды $u_0$. Можно считать, что пластина по этим границам охлаждается воздухом или водой, температура которых равна $u_0$, с коэффициентами теплоотдачи $\alpha_i$, в общем случае отличающимися для каждой из сторон.

Функция $\lambda(x,z)$ является коэффициентом теплопроводности материала стержня.

**3. Условия выполнения работы**

Модель для последующей программно-алгоритмической реализации строится студентом самостоятельно. Можно выбрать:

1) любой вариант уравнения из представленных выше трех,

2) любой тип краевых условий, описанных выше. Хотя варианты краевых условий могут быть любыми, однако они не должны противоречить физическому смыслу задачи, иначе получение решения невозможно. Например, нельзя ставить на всех 4 границах КУ II рода, соответствующее при определенных знаках у потока подводу тепла к пластине. Учитывая наличие объемных источников тепла, хотя бы на одной границе надо принять, что тепло отводится от объекта.

Для справки укажем, что в варианте 1 краевых условий на границе 4 тепло подводится, а на остальных 1-3 границах - отводится от пластины. В варианте 2 КУ на всех границах тепло отводится.

**Результаты работы.**

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.

2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени $\tau$ и пространству $h_x$, $h_z$. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах $h, \tau$ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой.

3. Трехмерный график температуры $u(x, z)$.

4. Одномерные графики зависимости температуры $u(x, z)$ от одной координаты при фиксированной другой.

**Методика оценки работы.**

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 15 баллов (максимум).