ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа, и исследование соответствующей компьютерной математической модели.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Квазилинейное уравнение для функции $T(r,t)$

$$c\,(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\lambda(T)\frac{dT}{dr}\right)-4\cdot k(T)\cdot n_p^2\cdot\sigma\cdot(T^4-T_0^4). \qquad (1)$$

Начальное условие и квазилинейные краевые условия

$$\begin{cases} t=0, \quad T(r,\,0)=T_0, \\ r=r_0, \; -\lambda(T(r_0))\,\dfrac{dT}{dr}=F\,(t), \\ r=R, \quad -\lambda(T(R))\dfrac{dT}{dr}=\alpha\,(T(R)-T_0) \end{cases}$$

2. Функции $\lambda(T)$, $k(T)$ заданы таблицей, как в лаб. работе №3.

T, K	λ, Вт/(см К)		T, K	k, см$^{-1}$
300	1.36 10^{-2}		293	2.0 10^{-2}
500	1.63 10^{-2}		1278	5.0 10^{-2}
800	1.81 10^{-2}		1528	7.8 10^{-2}
1100	1.98 10^{-2}		1677	1.0 10^{-1}
2000	2.50 10^{-2}		2000	1.3 10^{-1}
2400	2.74 10^{-2}		2400	2.0 10^{-1}

Функция $c(T) = a_2 + b_2\, T^{m_2} - \dfrac{c_2}{T^2}$,   Дж/см^{3}К,

где a_2 =2.049, b_2 =0.563 10^{-3}, c_2 =0.528 10^5, m_2 =1,

3. Зависимость потока $F(t)$ от времени импульса задается формулой

$F(t) = \dfrac{F_{\max}}{t_{\max}} t \exp(-(t/t_{\max} - 1))$, где $F_{\max}, t_{\max}$ - амплитуда импульса потока и время её достижения (Вт/см^2 и с).

4. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$n_p = 1.4$ – коэффициент преломления,

$r_0 = 0.35$ см,

$R = 0.5$ см,

$T_0 = 300$К – температура окружающей среды,

σ =5.668 10^{-12} Вт/(см^{2}К^4)- постоянная Стефана- Больцмана,

$F_{\max} = 5000$ Вт/см^2 - поток тепла в максимуме,

$t_{\max}$ =150 мкс,

$\alpha = 0.05$ Вт/(см^2 К) – коэффициент теплоотдачи.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы)**.**

Сформулированная математическая модель описывает нестационарное температурное поле $T(r,t)$ в цилиндрическом слое с внутренними стоками тепловой энергии. Можно представить, что это стенка из полупрозрачного материала, например, кварца или сапфира, нагружаемая тепловым потоком, зависящим от времени, на одной из поверхностей (у нас - слева). Другая поверхность (справа) охлаждается потоком воздуха, температура которого равна T_0. Данной схеме, в частности, удовлетворяет цилиндрическая оболочка, стабилизирующая разряд в газе в импульсном режиме.

Если задать поток постоянным, т.е. $F(t)$=const, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(r,t)$. Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет, т.к. в уравнении и краевых условий зависимостей от времени нет. Оно должно совпадать с решением из лаб. работы №3. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стенки до некоторой температуры (любой) положить поток $F(t)$=0, то будет происходить *остывание*, пока температура не выровняется по всей толщине и не станет равной T_0.

При произвольной зависимости потока $F(t)$ от времени температурное поле будет некоторым сложным образом отслеживать поток.

Функции $\lambda(T), k(T), c(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности, оптического поглощения и теплоемкости материала стенки.

Результаты работы.

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.

2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Рассмотреть влияние на получаемые результаты амплитуды импульса F_{max} и времени t_{max} (определяют крутизну фронтов и длительность импульса).

Точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке и в фиксированный момент времени.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах h, τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), реализующееся при $F(t)$=const, т.е. в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой.

3. График зависимости температуры $T(z,t)$ от безразмерной координаты $z = r/R$ в различные моменты времени в течение импульса при заданных выше параметрах.

4. График зависимости температуры $T(0,t)$ от времени (т.е. температуры при $r = 0$).

5. График зависимости температуры $T(0,t)$ (т.е. при $r = 0$). в частотном режиме теплового нагружения. Импульсы следуют один за другим с заданной частотой ν (частота определяется количеством импульсов в 1 секунду). Принять ν =1-3 Гц.

Показать, что при большом количестве импульсов температурное поле начинает в точности воспроизводиться от импульса к импульсу.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).
2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 15 баллов (максимум).