ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №3

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе квазилинейного ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейных ОДУ второго порядка.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Квазилинейное уравнение для функции $T(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\lambda(T)\frac{dT}{dr}\right)-4\cdot k(T)\cdot n_p^2\cdot\sigma\cdot(T^4-T_0^4)=0 \qquad (1)$$

Квазилинейные краевые условия

$$\begin{cases} r=r_0, \; -\lambda(T(r_0))\,\dfrac{dT}{dr}=F_0, \\ r=R, \quad -\lambda(T(R))\,\dfrac{dT}{dr}=\alpha\,(T(R)-T_0) \end{cases}$$

2. Функции $\lambda(T)$, $k(T)$ заданы таблицей

T, K	λ, Вт/(см К)		T, K	k, см$^{-1}$
300	1.36 10^{-2}		293	2.0 10^{-2}
500	1.63 10^{-2}		1278	5.0 10^{-2}
800	1.81 10^{-2}		1528	7.8 10^{-2}
1100	1.98 10^{-2}		1677	1.0 10^{-1}
2000	2.50 10^{-2}		2000	1.3 10^{-1}
2400	2.74 10^{-2}		2400	2.0 10^{-1}

3. Разностная аппроксимация уравнения и левого краевого условия (при $r=r_0$) со 2-м порядком точности выполнена на лекции, и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо интегро -интерполяционным методом получить разностный аналог краевого условия при $r=R$, точно так же, как это было сделано применительно к

краевому условию при $r = r_0$, в указанной лекции. Для этого надо проинтегрировать на отрезке [r N-1/2, r N] записанное выше уравнение (1) и учесть, что поток $F_N = \alpha_N (y_N - T_0)$,

а $F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2} \dfrac{y_{N-1} - y_N}{Rh}$.

4. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$n_p = 1.4$ – коэффициент преломления,

$r_0 = 0.35$ см,

$R = 0.5$ см,

$T_0 = 300$К – температура окружающей среды,

σ=5.668 10^{-12} Вт/(см^{2}К^4)- постоянная Стефана- Больцмана,

F_0=100 Вт/см^2 - поток тепла,

$\alpha = 0.05$ Вт/(см^2 К) – коэффициент теплоотдачи.

5. Выход из итераций организовать по температуре и по балансу энергии, т.е.

$$\max \left| \frac{y_n^{(s)} - y_n^{(s-1)}}{y_n^s} \right| \le \varepsilon_1 \text{, для всех } n = 0,1,\dots N .$$

и

$$\max \left| \frac{f_1^{(s)} - f_2^{(s)}}{f_1^s} \right| \le \varepsilon_2 ,$$

где

$$f_1 = r_0 F_0 - R\alpha(T(R) - T_0) \text{ и } \quad f_2 = 4 n_p^2 \sigma \int_0^l k(T(r))(T^4(r) - T_0^4) r \, dr .$$

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы**).**

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(r)$ в цилиндрическом слое с внутренними стоками тепловой энергии. Можно представить, что это стенка из полупрозрачного материала, например, кварца или сапфира, нагружаемая тепловым потоком на одной из поверхностей (у нас - слева). Другая поверхность (справа) охлаждается потоком воздуха, температура которого равна T_0. Например, данной схеме удовлетворяет цилиндрическая оболочка, стабилизирующая разряд в газе. При высоких температурах нагретый слой начинает объемно излучать, что описывает второе слагаемое в (1) (закон Кирхгофа). Зависимость от температуры излучательной способности материала очень резкая. При низких температурах стенка излучает очень слабо, второе слагаемое в уравнении (1) практически отсутствует. Функции $\lambda(T), k(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности и оптического поглощения материала стенки.

Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при $r = r_0$ и его краткий вывод интегро -интерполяционным методом.

2. График зависимости температуры $T(z)$ от безразмерной координаты $z = r/R$ при заданных выше параметрах.

Выяснить, как сильно зависят результаты расчета $T(z)$ и необходимое для этого количество итераций от начального распределения температуры и шага сетки.

3. График зависимости $T(z)$ при $F_0 = $-10 Вт/см^2.

> *Справка*. При отрицательном тепловом потоке слева идет съем тепла, поэтому производная $T^{'}(z)$ должна быть положительной.

4. График зависимости $T(z)$ при увеличенных значениях α (например, в 3 раза). Сравнить с п.2.

> *Справка*. При увеличении теплосъема и неизменном потоке F_0 уровень температур $T(z)$ должен снижаться, а градиент увеличиваться.

5. График зависимости $T(z)$ при $F_0 = 0$.

> *Справка*. В данных условиях тепловое нагружение отсутствует, причин для нагрева нет, температура стержня должна быть равна температуре окружающей среды T_0 (разумеется с некоторой погрешностью, определяемой приближенным характером вычислений).

. 6. Для указанного в задании исходного набора параметров привести данные по балансу энергии, т.е. значения величин

$$f_1 = r_0 F_0 - R\alpha(T(R) - T_0) \quad \text{и} \quad f_2 = 4 n_p^2 \sigma \int_0^l k(T(r))(T^4(r) - T_0^4) r\, dr \,.$$

Каковы использованные в работе значения точности выхода из итераций ε_1 (по температуре) и ε_2 (по балансу энергии)?

Вопросы при защите лабораторной работы.

1. Какие способы тестирования программы вы можете предложить?

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $r = R$

$$r = R, \quad -\lambda(R)\frac{dT}{dr} = \alpha_N\,(T(R) - T_0) + \beta T^4(R),$$

где β - заданная константа.

Производную аппроксимируйте односторонней разностью.

Опишите алгоритм применения метода прогонки в данном случае, если при $r = r_0$ краевое условие по-прежнему квазилинейное (как в настоящей работе).

3. Опишите алгоритм определения **единственного** значения сеточной функции y_p в **одной** заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок. Для простоты принять, что оба краевых условия линейные.

Методика оценки работы.

Модуль 2, срок - 12-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 6 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 10 баллов (максимум).

.