České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební

155ADKG: Konvexní obálky

Michael Kala
Anna Zemánková

1 Zadání

Navrhněte aplikaci s grafickým rozhraním, která určí a vizualizuje konvexní obálku množiny bodů. Pro výpočet konvexní obálky použijte algoritmy Jarvis Scan, Quick Hull a Sweep Line.

Pro testování algoritmů užijte rozložení bodů:
1) náhodné
2) mřížka
3) kružnice

2 Údaje o bonusových úlohách

V rámci této úlohy byly zpracovány všechny bonusy kromě generování star-shaped množiny bodů.

3 Popis a rozbor problému

Mějme množinu S bodů $P_i[x_i, y_i]$, naším úkolem je nalézt konvexní obálku κ této množiny.

Konvexní obálka κ je hranice nejmenší kovexní množiny obsahující všechny body. Může být použita pro generalizaci v digitální kartografii (např. budov) nebo pro nalezení vhodného tvaru pro balení předmětů tak, aby se minimalizovaly náklady a podobně.

4 Popis algoritmů

Pro tuto úlohu byly pro výpočet konvexní obálky vybrány algortimy Jarvis Scan, Graham Scan, Quick Hull a Sweep Line

4.1 Jarvis Scan

Tento algoritmus nejprve vybere pivota $q : y_min$ a následně jej přidá do konvexní obálky, poté je vybrán bod $p_j - 1$ tak, aby spojnice pivota a $p_j - 1$ byla rovnoběžná s osou X $p_j - 1 : x_min, y_min$ Kvůli numerické stabilitě je vybrána minimální souřadnce X z celé množiny bodů.
Poté je v cyklu vybírán a následně přidáván do konvexní obálky bod $p_j + 1$ tak, aby byl $spherical angle(pj - 1, p_j, p_j + 1)$ největší (v prvním kroku $p_j = q$). Cyklus skončí,jakmile dojde opět k pivotovi.

4.1.1 Implementace metody

1. Nalezení pivota q: $q = y_min$
2. Přidej $q \longrightarrow \kappa$
3. Inicializuj: $p_j - 1 \in X, p_j = q, p_j + 1 = p_j - 1$
4. Opakuj, dokud $p_j + 1! = q$:
5. Nalezni $p_j + 1 = argmax_p i \in P \measuredangle(pj - 1, p_j, p_i)$
6. Přidej $p_j + 1 \longrightarrow \kappa$
7. $p_j - 1 = p_j; p_j = p_j + 1$

4.2 Graham Scan

Nejprve je vybrán pivot q tak, aby z něj bylo vidět na všechny zbylé body. Bodem q je vedena rovnoběžka s osou X a jsou určeny úhly ω od osy X po všechny ostatní body množiny. Následně jsou setříděny podle velikosti ω a pospojovány v tomto pořadí, Vznikne tak star-shaped polygon.
Do zásobníku je přidán bod q a první následující bod, tedy druhý. Poté je testován třetí bod - pokud je splněna podmínka levotočivosti, je přidán do zásbníku. Následně je testován čtvrtý bod. Je-li splněna podmínka levotočiosti, je přidán do zásobníku. Není-li podmínka splněna, je poslední bod v zásobníku smazán a je testován čtvrtý bod z druhého bodu atd. Po skončení cyklu je v zásobníku konvexní obálka množiy bodů.

4.2.1 Implementace metody

1. Nalezení pivota q: $q = y_min$
2. Setřídění $p_i \in S$ dle $\omega_i = \measuredangle(pi, q, x)$, index j odpovídá jejich setříděnému pořadí
3. Pokud $\omega_k = \omega_l$, vymaž bod p_k, p_l bližší ke q
4. Inicialiuj $j = 2, S = \emptyset$
5. $S \longleftarrow q, S \longleftarrow p_1$ (indexy posledních dvou prvků $p_t, p_t - 1$)
6. Opakuj pro $j < n$:
7. if p_j vlevo od $p_t - 1, p_t$:
8. $S \longleftarrow p_j$
9. $j = j + 1$
10. else pop S

4.3 Quick Hull

Algoritmus Quick Hull je rekurzivní a skládá se tedy s lokální a globální procedury.
V lokální proceduře je hledán nejvzdálenější bod od dělicí přímky, který zároveň leží v její pravé polorovině. Spojnici tohoto bodu a koncového bodu dělicí přímky nazývejme první segment a spojnici vyhledaného body a počátečního bodu dělicí přímky druhý segment. Aby byly body do konvexní obálky přidány ve správném pořadí, je nejprve provedena rekurze pro první segment, následně přidán vyhledaný bod a poté provedena rekurze pro druhý segment.

V globální proceduře je z množiny S nalezen počáteční p_s (x_min) a koncový p_e (x_max) bod, které tvoří dělící přímku. Nejprve je do konvexní obálky přidán koncový bod dělicí přímky, následně je provedena lokální procedura pro horní polorovinu dělicí přímky, přidán počáteční bod dělicí přímky a provedena lokální procedura pro dolní polorovinu. Takto dostaneme body konvexní obálky ve správném pořadí.

4.3.1 Implementace metody - lokální procedura

1. Najdi bod $p = argmax_p i \in S||p_i - (p_s, p_e)||, p \in \sigma_r(p_s, p_e)$
2. If $p \neq \emptyset$:,
3. QuickHull (s, i, S, κ) // Upper Hull
4. $\kappa \longleftarrow p$
5. QuickHull (i, e, S, κ) // Lower Hull

4.3.2 Implementace metody - globální procedura

1. $\kappa = \emptyset, S_U = \emptyset S_L \emptyset$
2. $q_1 = x_min, q_3 = x_max$
3. $S_U \longleftarrow q_1$, $S_U \longleftarrow q_3$
4. $S_L \longleftarrow q_1$, $S_L \longleftarrow q_3$
5. for $p_i \in S$
6. if $(p_i \in \sigma_l(q_1, q_3))$ $S_U \longleftarrow p_i$
7. else $S_L \longleftarrow p_i$
8. $\kappa \longleftarrow q_3$
9. QuickHull $(1, 0, S_U, \kappa)$ // Upper Hull
10. $\kappa \longleftarrow q_1$
11. QuickHull $(0, 1, S_L, \kappa)$ // Lower Hull

4.4 Sweep Line

Metoda sweep line pracuje s "přepisováním"předchůdců a následníků a jelikož by se tu až nezdravě opakovala slova přechůdce a následník, samotná implementace metody bude srozumitelnější (jako ostatně vždy).

4.4.1 Implementace metody

1. Sort $P_s = sort(P) by x$
2. if $p_3 \in \sigma_L(p_1, p_2)$
3. n[1] = 2; n[2] = 3; n[3] = 1
4. p[1] = 3; p[2] = 1; p[3] = 2
5. else
6. n[1] = 3; n[3] = 2; n[2] = 1
7. p[1] = 2; p[3] = 1; p[2] = 3
8. for $p_i \in P_s, i > 3$
9. if $(y_i > y_i - 1)$
10. p[i] = i-1; n[i] = n[i-1]
11. else
12. n[i] = i-1; p[i] = p[i-1]
13. n[p[i]] = i; p[n[i]] = i;
14. while (n[n[i]]) $\in \sigma_R(i, n[i])$
15. p[n[n[i]]] = i; n[i] = n[n[i]];
16. while (p[p[i]]) $\in \sigma_L(i, p[i])$
17. n[p[p[i]]] = i; p[i] = p[p[i]];

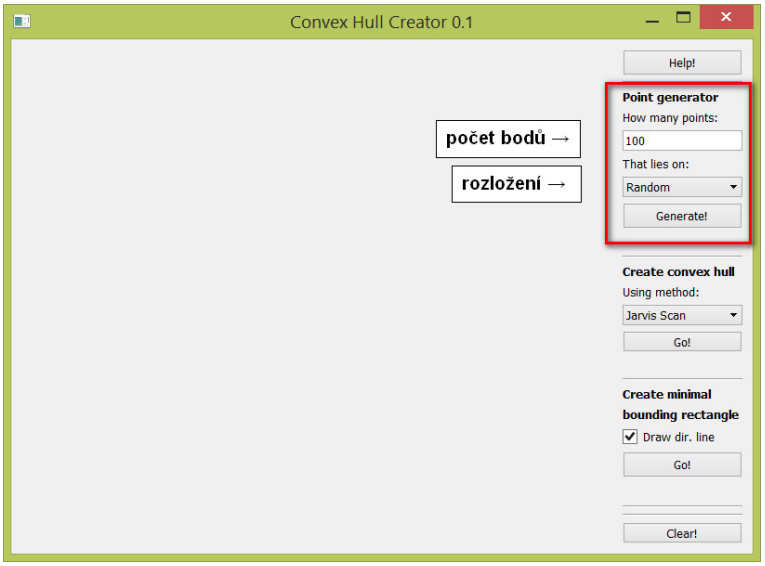
5 Problematické situace

6 Vstupní data

Vstupními daty je množina bodů, kterou lze zadat dvěma způsoby:

- klikáním na kanvas
- použitím generátoru bodů, který je součástí aplikace, přičemž se body generují dle zadaných kritérií.

Do generátoru bodů je třeba zadat počet bodů a následně vybrat v rozbalovacím menu požadované rozmístění - Random/Grid/Circle/Elipse/Square



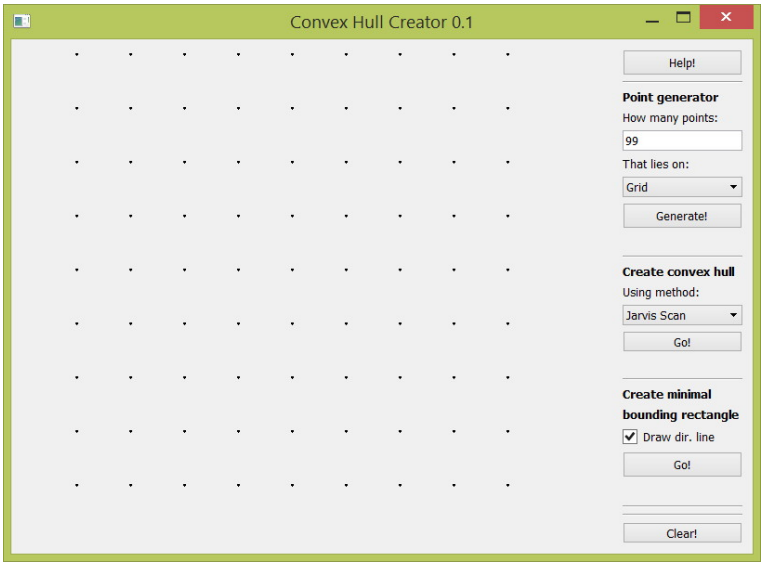
Obrázek 1: Generátor bodů

V případě, že je zadán nekorektní počet bodů pro dané rozmístění - např. pro čtverec nebo grid, je obrazen vytvořen z nejbližšího menšího možného počtu prvků.

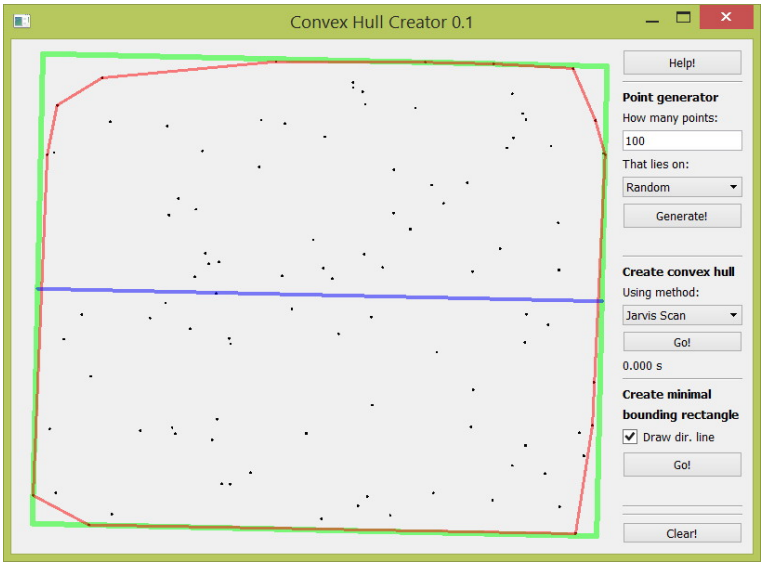
Pokud jsou body vygenerovány pomocí generátoru, je možné přidat další klikáním na kanvas.
Při špuštění generátoru jsou všechny dosud existující body vymazány.

7 Výstupní data

Výsledná data (konvexní obálka/minimální ohraničující obdélkník/hlavní směr útvaru) jsou vizualizována v kanvasu aplikace.

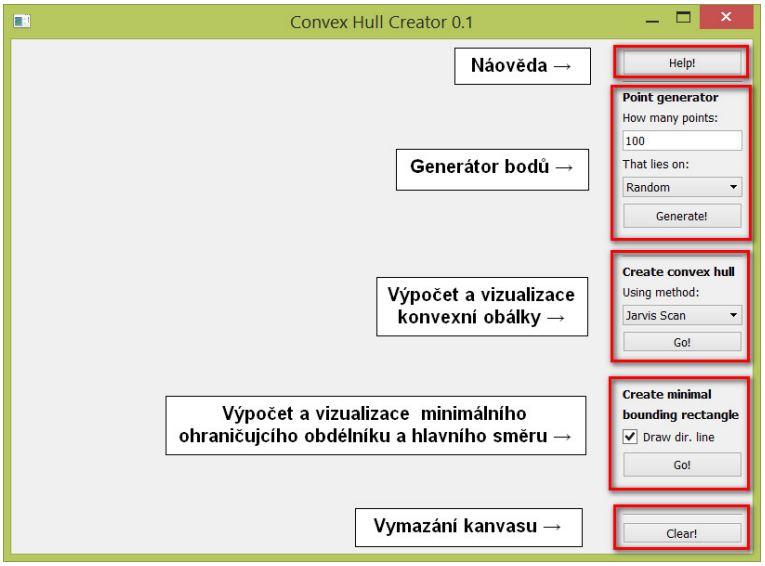


Obrázek 2: Ukázka nekorektního počtu bodů pro zadaný tvar



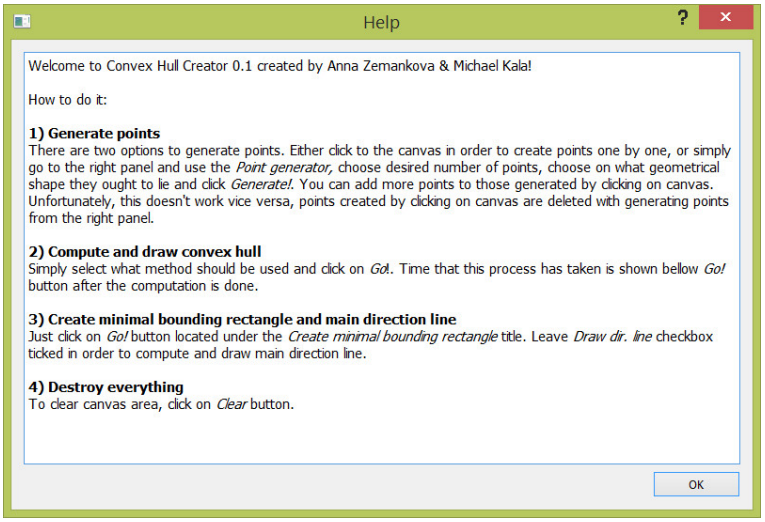
Obrázek 3: Výstupní data

8 Ukázka vytvořené aplikace



Obrázek 4: Okno aplikace

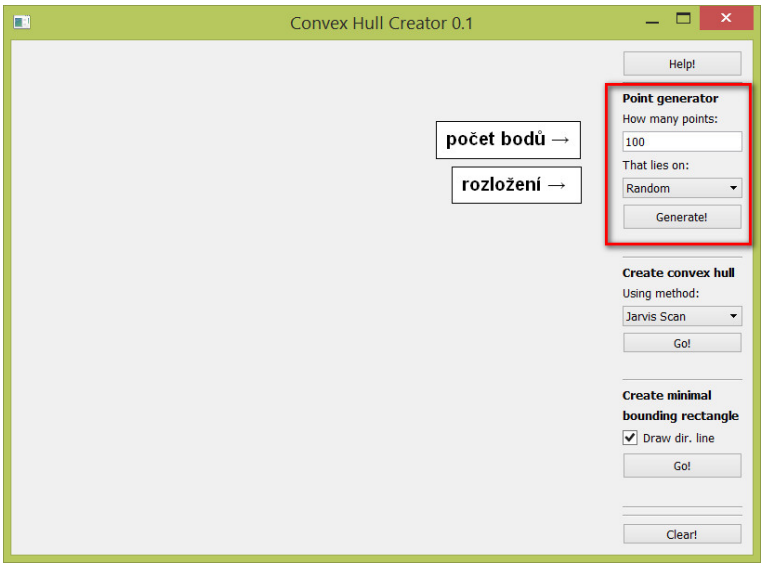
V Pravé horní části je možnost kliknutí na nápovědu "Help", poté se otevře okno s nápovědou, kde je popsán způsob zadávání vstupních dat a funkcionality aplikace.



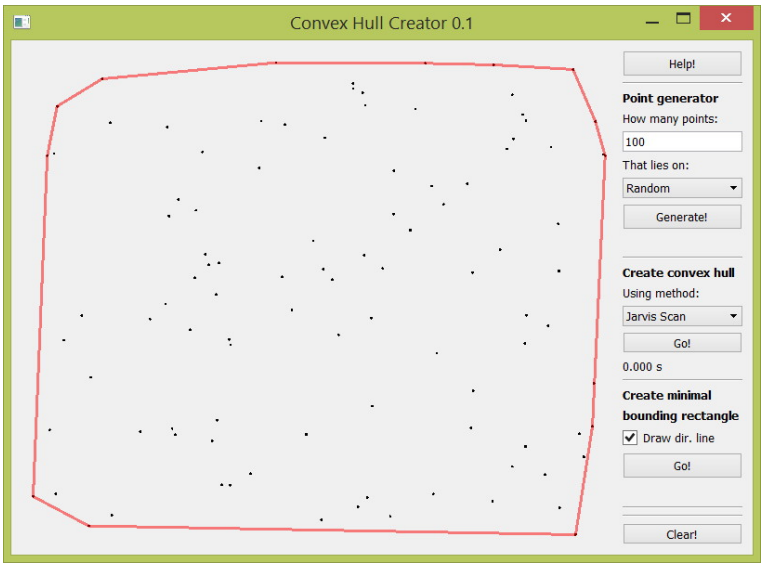
Obrázek 5: Nápověda

Nejprve je třeba zadat vstupní data - množinu bodů.

Následně je možné vybrat metodu výpočtu konvexní obálky a kliknutím na tlačítko GO v sekci Create convex hull zahájen výpočet a vizualizace konvexní obálky zadané množiny bodů. Pod tlačítkem Go je vypsán čas, jak dlouho trval výpočet.



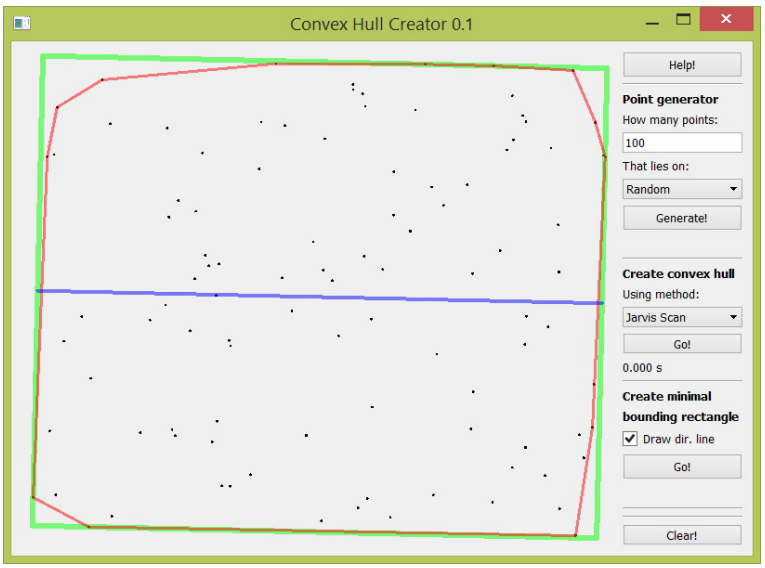
Obrázek 6: Vstupní data



Obrázek 7: Výpočet konvexní obálky

Pokud chceme spočítat minimální ohraničující obdélník, lze tak učinit kliknutím na tlačítko Go! v sekci Create inimal bounding rectangle. Pokud je v této sekci zaškrtnuta možnost draw dir. line, vykreslí se také hlavní směr útvaru.

Vše je uvedeno do původního stavu (smazány body i vypočtené vyýsledky) kliknutím na tlačítko Clear.



Obrázek 8: Výpočet hlavního směru a nejmenšího ohraničujícího obdélníku

9 Testování

10 Dokumentace

11 Závěr

Aplikace byla vzhledem ke zpracování bonusů programována tak, že vstupní i výstupní data jsou typu float, při testování doby běhu algoritmů však bylo zjištěno, že při použití datového typu float je výpočet velmi VELMI pomalý, naopak při přepsání kódu do verze pracující s integrem byl výpočet výrazně rychlejší. Bohužel už ale byly vyřešeny bonusy za předpokladu, že vstupní data jsou typu float, a proto jsou nakonec odevzdávány dvě verze - float pro funkcionality aplikace pro menší množiny bodů a integer pro testování doby běhu algortimů.

12 Reference

1. BAYER, Tomáš. Konvexní obálky [online][cit. 21.10.2018].
Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz/ bayertom/images/courses/Adk/adk4.pdf