Цель работы: предложить алгоритм вычисления управляющих напряжений, подаваемых на заданное биморфное зеркало, на основе данных о форме фронта падающей волны. На основе предложенного алгоритма написать программу и проанализировать возможности зеркала.

Введение: Одним из путей улучшения характеристик современных оптических систем и расширения их возможностей является применение зеркал с управляемой отражающей поверхностью. Как правило, адаптивные зеркала используются для компенсации искажений волнового фронта излучения. В ряде задач, например, при динамической фокусировке лазерного пучка, существенное улучшение параметров оптической системы достигается за счет компенсации в первую очередь крупномасштабных искажений волнового фронта - дефокусировки, астигматизма, сферической аберрации. В этом случае бывает удобно использовать биморфные адаптивные зеркала [1], в которых отражающая поверхность управляется за счет деформаций полупассивного биморфа, образованного пьезокерамической и зеркальной пластинами. Деформация такого зеркала происходит за счет поперечного пьезоэффекта, возникающего под действием приложенного к пьезоэлектрической пластине напряжения. Отклик зеркала является существенно нелокальным. Как правило, при возбуждении одного из приводов деформируется вся пластина. Для описания такого рода деформаций удобно разлагать их по какой-либо системе функций, например, по полиномам Цернике [2], широко используемым для описания аберраций в оптических системах. Искажения волнового фронта также удобно описывать с помощью этих полиномов, что существенно используется в данной работе.

Характеристики заданного зеркала. Используется деформируемое биморфное зеркало DM2-30-17, основные технические параметры которого представлены в таблице:

Апертура зеркала, мм	40
Оптически используемый диаметр, мм	30
Толщина зеркала, мм	3.5
Число пьезо-дисков, мм	2
Диаметр пьезо-дисков, мм	30
Толщина пьезо-дисков, мм	0.35
Материал подложки	стекло LK-105
Число управляющих электродов	17
Диапазон управляющих напряжений,В	±300
Габариты держателя (включая разъемы), мм	Ø60x42

Коэффициенты разложения функций отклика DM2-30-17 по полиномам Фурье:

Channel	Voltage,	Zernike term value, μm												
#	V	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16
1	100	0.716	0.008	-0.007	-0.023	-0.001	0.022	-0.008	0.006	-0.011	-0.003	0.018	-0.003	-0.004
2	200	0.212	0.151	0.011	-0.002	0.158	0.009	-0.002	0.028	-0.059	-0.005	0.007	-0.021	-0.011
3	200	0.204	-0.018	-0.159	0.132	0.115	0.013	0.011	-0.008	-0.002	0.056	-0.021	-0.012	-0.011
4	200	0.190	-0.169	-0.040	0.193	0.013	0.018	-0.019	-0.002	0.064	0.011	-0.030	0.005	-0.013
5	200	0.199	-0.025	0.142	0.147	-0.112	0.009	0.008	0.022	0.020	-0.050	-0.018	0.023	-0.011
6	200	0.216	0.141	0.050	0.036	-0.190	-0.001	0.012	-0.001	-0.040	-0.016	-0.001	0.040	-0.010
7	200	0.210	0.033	-0.126	-0.119	-0.154	-0.001	-0.022	0.012	-0.009	0.065	0.022	0.036	-0.011
8	200	0.197	-0.123	-0.034	-0.200	-0.037	0.003	0.026	0.022	0.066	0.018	0.046	0.003	-0.016
9	200	0.216	-0.016	0.127	-0.163	0.108	-0.007	0.001	-0.010	0.010	-0.056	0.029	-0.027	-0.014
10	200	0.065	0.235	-0.172	0.018	0.042	0.020	0.056	0.050	-0.053	0.043	0.011	0.026	0.002
11	200	0.062	-0.182	-0.219	0.062	-0.008	0.024	-0.023	-0.077	0.024	0.054	0.021	0.026	0.005
12	200	0.071	-0.199	0.146	0.056	-0.026	0.027	-0.044	0.078	0.049	-0.025	0.025	-0.002	-0.004
13	200	0.067	0.175	0.205	0.022	-0.045	0.023	0.092	-0.040	-0.046	-0.055	0.011	-0.029	0.001
14	200	0.058	0.219	-0.171	-0.011	-0.049	0.018	-0.078	-0.048	-0.057	0.036	-0.009	-0.023	0.004
15	200	0.061	-0.158	-0.214	-0.042	-0.053	0.023	0.028	0.089	0.041	0.047	-0.021	-0.008	-0.005
16	200	0.054	-0.204	0.173	-0.040	-0.005	0.023	0.051	-0.085	0.032	-0.033	-0.023	0.016	0.002
17	200	0.056	0.177	0.199	-0.021	0.053	0.020	-0.100	0.017	-0.054	-0.035	-0.010	0.027	0.004

графическое представление функций отклика см. в Приложении.

Основной алгоритм: Предложенный алгоритм предполагает использование зеркала в системах фазового сопряжения [3, Глава 1.§4]. Будем полагать, что зеркало имеет R каналов управления. Тогда вносимое зеркалом искажение имеет вид

$$D = \sum_{j=1}^{R} a^j S_j,$$

где a^j - управляющие напряжения, $S_j = S_j(r, \theta)$ - соответствующие функции отклика. В свою очередь,

$$S_j = \sum_{i=1}^{\infty} b_j^i Z_i,$$

где b^i_j - табличные значения коэффициентов разложения функций отклика по полиномам Цернике (не указанные в таблице коэффициенты считаются равными нулю) $Z_i = Z_i(r,\theta)$ - полиномы Цернике, определяемые следующим образом:

$$Z_i(r,\theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\cos m\theta, & (i \text{ четно} \quad m \neq 0) \\ \sqrt{n+1}R_n^m(r)\sqrt{2}\sin m\theta, & (i \text{ нечетно} \quad m \neq 0) \\ \sqrt{n+1}R_n^0(r), & m = 0 \end{cases}$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)! r^{n-2s}}{s![(n+m)/2-s]![(n-m)/2-s]!},\ m < n, n-|m| \text{ - четное}$$

Условие ортогональности в круге выглядит следующим образом:

$$< Z_i Z_j > \equiv \frac{1}{\pi} \int\limits_{(0\le r\le 1)} Z_i(\overrightarrow{r}) Z_j(\overrightarrow{r})\, d^2\overrightarrow{r} = \delta_{ij}$$

и проверяется непосредственной подстановкой.
Требуется найти $A = (a^j)$. Введем функционал

$$\mathcal{F} \equiv \sum_{(r,\theta)} (D+F)^2,$$

где $F = F(r,\theta)$ - фронт падающей волны и суммирование производится по конечному набору точек (r,θ) единичного круга. Задача сводится к нахождению A, для которого $\mathcal{F} = min$, т.е.

$$\mathcal{F} = \sum_{(r,\theta)} (\sum_{j=1}^{R} a^j S_j + F)^2 = min$$

Необходимое условие на экстремум: $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a^k} = 0$, $k = \overline{1,R}$. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial a^k} \sum\limits_{j=1}^{R} a^j S_j = \sum\limits_{j=1}^{R} \delta^j_k S_j = S_k$, имеем:

$$\sum_{(r,\theta)} [2(\sum_{j=1}^{R} a^j S_j + F) S_k] = 0,$$

$$-\sum_{(r,\theta)} S_k \sum_{j=1}^{R} a^j S_j = \sum_{(r,\theta)} F S_k,$$

меняя порядок суммирования имеем окончательно

$$-\sum_{j=1}^{R} a^j \sum_{(r,\theta)} S_k S_j = \sum_{(r,\theta)} F S_k$$

Проверка на достаточность: $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^{k^2}} = \sum\limits_{(r,\theta)} 2S_k^2 \geqslant 0$. Равенство нулю достигается только если все $S_k = 0$, что в нашем случае не имеет смысла. Следовательно $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^{k^2}} > 0$ и найденные из необходимого условия значения отвечают локальному минимуму.
Пусть теперь

$$b_{kj} \equiv \sum_{(r,\theta)} S_k S_j \text{ и } c_k \equiv -\sum_{(r,\theta)} F S_k,$$

тогда

$$b_{kj} a^j = c_k \tag{1}$$

или в матричном виде: $B * A = C$. Таким образом, получена связь (1) между управляющими напряжениями и формой падающего фронта. Можно было бы выразить искомый набор значений как $A = B^{-1} * C$, однако на практике это мало эффективно, так как, при большом числе каналов управления, требуется значительное время на обращение матрицы B. Вернемся к выражению $B * A = C$ и будем рассматривать его как матричную запись системы линейных алгебраических уравнений относительно переменных a^j. Представим матрицу B в виде произведения нижнетреугольной матрицы L с единичной главной диагональю и верхнетреугольной матрицы U:

$$B = L * U$$

Тем самым мы сведем задачу к решению двух систем с треугольными матрицами.

Алгоритм построения LU-разложения. Пусть требуется найти нижнюю треугольную матрицу $L = (l_{ij})$ и верхнюю треугольную матрицу $U = (u_{ij})$ с единицами на главной диагонали такую, что $B = L * U$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{R} l_{ij} u_{jk} = b_{ik}, \; i, k = 1, \ldots, R. \tag{2}$$

Поскольку $l_{ij} = 0$ при $i < j$, $u_{jk} = 0$ при $j < k$, $u_{jj} = 1$, то (2) есть система из R^2 уравнений относительно $R(R+1)/2$ неизвестных $l_{ij}, i \geq j$ и $R(R-1)/2$ неизвестных $u_{jk}, j < k$, всего $R(R+1)/2 + R(R-1)/2 = R^2$ неизвестных. Получим формулы для решения системы (2), которые и составляют алгоритм нахождения LU-разложения.
В силу $l_{ij} = 0$ при $i < j$, $u_{jk} = 0$ при $j < k$ сумма (2) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} l_{ij} u_{jk} = b_{ik}, \; i, k = 1, \ldots, R,$$

или

$$\left[\begin{array}{lll} \sum\limits_{j=1}^{k} l_{ij} u_{jk} = b_{ik}, & k \leq i, & i, k = 1, \ldots, R, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} l_{ij} u_{jk} = b_{ik}, & k > i, & i, k = 1, \ldots, R. \end{array} \right.$$

Выделим в первой из этих сумм отдельно случай $k = 1$, а во второй - случай $i = 1$ и учтем, что $u_{kk} = 1$ для всех $k = 1, \ldots, R$,

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{lll} l_{i1} = b_{il}, & i = 1, \ldots, R, & \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} + l_{ik} = b_{ik}, & 1 < k \leq i, & i, k = 2, \ldots, R. \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{lll} l_{11} u_{1k} = b_{1k}, & i = 2, \ldots, R, & \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} + l_{ii} u_{ik} = b_{ik}, & k > i > 1, & i, k = 2, \ldots, R. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Перегруппируем эти формулы:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} l_{i1} = b_{il}, & i = 1, \ldots, R, \\ u_{1k} = b_{1k}/l_{11} & k = 2, \ldots, R. \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{lll} l_{ik} = b_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk}, & 1 < k \leq i, & i, k = 2, \ldots, R. \\ u_{ik} = (a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk})/l_{ii}, & k > i > 1, & i, k = 2, \ldots, R. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3}$$

Процесс вычисления по этим формулам строится следующим образом: вначале по первой из формул (3) вычисляются неизвестные элементы первого столбца матрицы $L: \; l_{i1}, \; , i = 1, \ldots, R$, затем по второй из формул (3) вычисляются неизвестные элементы первой строки матрицы $U: \; u_{ik}, \; k = 2, \ldots, R$ (напомним, элемент u_{11} известен, он равен 1). Далее в вычислениях участвуют только третья и четвертая из формул (3). По третьей формуле (3) вычисляются неизвестные элементы второго столбца матрицы $L: \; l_{i2}, \; , i = 2, \ldots, R$ (напомним, $l_{12} = 0$, так как L-нижняя треугольная) $l_{i2} = b_{i2} - l_{i1} u_{12}, \; i = 2, \ldots, R$. По четвертой формуле (3) вычисляются неизвестные элементы второй строки матрицы $U:\ u_{2k},\ k=3,\ldots,R$ (напомним, $u_{21}=0$, т.к. U-верхняя треугольная, $u_{22}=1$, так как U имеет единичную главную диагональ)

$$u_{2k}=(a_{2k}-l_{21}u_{1k})/l_{22},\ k=3,\ldots,R.$$

Затем по третьей формуле (3) вычисляются неизвестные элементы третьего столбца матрицы L : $l_{i3},\ ,i=3,\ldots,R$, а по четвертой формуле (3) вычисляются неизвестные элементы третьей строки матрицы $U:\ u_{3k},\ k=4,\ldots,R$ и так далее. Оценка числа операций для такого алгоритма выполнена в [4, §4].

Анализ возможностей DM2-30-17. Проведем оценку эффективности зеркала на основе написанной программы. Основную величину, по которой мы будем судить о качестве компенсации искажений, назовем "сглаживанием":

$$\Psi=\frac{S_{before}}{S_{after}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{(r,\theta)}(F-\overline{F})^2}{\sum\limits_{(r,\theta)}((F+D)-\overline{(F+D)})^2}},$$

где S_{before} - среднеквадратичное отклонение формы фронта падающей волны от плоского (на уровне среднего $\overline{F}$) до компенсации, S_{after} - после компенсации, а суммирование ведется по одному набору точек. Если $\Psi\gg 1$, то использование адаптивного зеркала оправдано. Если $\Psi=1$, то компенсация несущественна и нет смысла использовать данное адаптивное зеркало, если $\Psi<1$, то следует увеличить число точек, по которым производится аппроксимация и вычисление Ψ, а затем повторить расчет.

Оценочный расчет Ψ с помощью программы дает следующие результаты ("чистые"искажения)

искажение	наклон	дефокус	астигматизм	кома	сферич. аберр.
$\sim 0.01\lambda$	1	107	102	58	53
$\sim 0.1\lambda$	1	107	102	58	53
$\sim 1\lambda$	1	2.2	1.3	3.4	1.5
$\sim 10\lambda$	1	1	1	1	1

Несколько изображений начального фронта и его аппроксимации, полученной с помощью программы, представлены в приложении (аппроксимация по 100 точкам).

Отсюда видно, что зеркало не предназначено для компенсации наклонов (как, собственно, большинство зеркал такого типа - для компенсации наклонов можно использовать более дешевые средства), видно также, что эффективность зеркала падает с увеличением степени полинома и с ростом величины искажений. Причем оптимальный вариант его использования - значения порядка длины волны и меньше. Что касается выбранного числа точек, по которым производится аппроксимация, то опыт показывает, что увеличение этого числа на порядок со 100 точек до 1000 может увеличивать Ψ в 2 раза, однако увеличивает на порядок время вычислений.

Вывод. Получен алгоритм (1)(3) для вычисления управляющих напряжений для данного зеркала, на основе алгоритма написана программа. С помощью программы исследованы возможности зеркала.

Список литературы

[1] М.А.Воронцов, А.В.Корябин, В.И.Шмальгаузен "Управляемые оптические системы"М.: Наука 1988

[2] М.Борн, Э.Вольф "Основы оптики"М.: Наука 1973

[3] М.А.Воронцов, В.И.Шмальгаузен "Принципы адаптивной оптики"М.: Наука 1985

[4] К.Ю.Богачев "Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений"М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ им. М.В.Ломоносова. 1998