ИДЗ 8.1.

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1-5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1.1.

$$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx = \int\left(3x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx = 3\cdot 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 6\sqrt{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(6\sqrt{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C\right)' = 6\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{6}{7}\cdot\left(x^{\frac{7}{6}}\right)' - \frac{4}{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + (C)' =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} = \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

2.1.

$$\int\sqrt{3+x}dx = \int(3+x)^{\frac{1}{2}}d(3+x) = \frac{2}{3}\cdot(3+x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\cdot\sqrt[2]{(3+x)^3} + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt[2]{(3+x)^3} + C\right)' = \frac{2}{3}\left((3+x)^{\frac{3}{2}}\right)' + (C)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(3+x)^{\frac{1}{3}}\cdot(3+x)' =$$

$$= \sqrt[3]{1+x}\cdot(0+1) = \sqrt[3]{1+x}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

3.1.

$$\int\frac{dx}{3-x} = -\int\frac{d(3-x)}{3-x} = -\ln|3-x| + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$(-\ln|3-x| + C)' = -(\ln|3-x|)' + (C)' = -\frac{1}{3-x}\cdot(3-x)' =$$

$$= -\frac{1}{3-x}\cdot(0-1) = \frac{1}{3-x}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

4.1.

$$\int\sin(2-3x)dx = -\frac{1}{3}\int\sin(2-3x)d(2-3x) = \frac{1}{3}\cos(2-3x) + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C\right)'=\frac{1}{3}\left(\cos(2-3x)\right)'+(C)'=\frac{1}{3}\cdot(-\sin(2-3x))\cdot(2-3x)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\sin(2-3x)\cdot(0-3)=\sin(2-3x)$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

5.1.

$$\int\frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{d(3x)}{(3x)^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{3}}{3x+\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{3}}{3x+\sqrt{3}}\right|+C,\text{ где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{3}}{3x+\sqrt{3}}\right|+C\right)'=\frac{1}{6}\left(\ln\left|3x-\sqrt{3}\right|-\ln\left|3x+\sqrt{3}\right|\right)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3x-\sqrt{3}}\cdot(3x-\sqrt{3})'-\frac{1}{3x+\sqrt{3}}\cdot(3x+\sqrt{3})'\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{3x-\sqrt{3}}-\frac{3}{3x+\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{3x+\sqrt{3}-3x+\sqrt{3}}{2(3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{2(9x^2-3)}=\frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}$$

Получена исходная подынтегральная функция, таким образом, интеграл найден правильно.

6.1.

$$\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}=(*)$$

Проведем замену:

$$t=5-4x^2\Rightarrow dt=(5-4x^2)'dx\Rightarrow dt=-8xdx\Rightarrow 2xdx=-\frac{dt}{4}$$

$$(*)=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{\sqrt{t}}{2}+C=-\frac{\sqrt{5-4x^2}}{2}+C,\text{ где } C=const$$

7.1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)+C,$$

где $C=const$

8.1.

$$\int e^{2x-7}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x-7}d(2x-7)=\frac{1}{2}e^{2x-7}+C,\text{ где } C=const$$

9.1.

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}} = (*)$$

Проведем замену: $t=\ln(2x+1) \Rightarrow dt=\frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow \frac{dx}{2x+1}=\frac{dt}{2}$

$$(*)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot 3t^{\frac{1}{3}}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\ln(2x+1)}+C,\text{ где } C=const$$

10.1.

$$\int \sin^4 2x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\sin^4 2x d(\sin 2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sin^5 2x+C=\frac{1}{10}\sin^5 2x+C,\text{ где } C=const$$

11.1

$$\int\frac{\sqrt{tg^3 x}dx}{\cos^2 x}=\int(tgx)^{\frac{3}{2}}d(tgx)=\frac{2}{5}(tgx)^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{tg^5 x}+C,\text{ где } C=const$$

12.1

$$\int\frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx=\int\frac{arctg^3 3x}{1+9x^2}dx=(*)$$

Проведем замену:

$$t=arctg3x \Rightarrow dt=\frac{3dx}{1+9x^2} \Rightarrow \frac{dx}{1+9x^2}=\frac{dt}{3}$$

$$(*)=\frac{1}{3}\int t^3dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{arctg^4 3x}{12}+C,\text{ где } C=const$$

13.1.

$$\int\frac{xdx}{e^{2x^2+4}}=\int e^{-(2x^2+4)}xdx=(*)$$

Проведем замену:

$$t=-(2x^2+4) \Rightarrow dt=-4xdx \Rightarrow xdx=-\frac{dt}{4}$$

$$(*)=-\frac{1}{4}\int e^t dt=-\frac{1}{4}e^t+C=-\frac{1}{4}e^{-(2x^2+4)}+C,\text{ где } C=const$$

14.1.

$$\int\frac{(x-1)dx}{7x^2+4}=\int\frac{\frac{1}{14}d(7x^2+4)-dx}{7x^2+4}=\frac{1}{14}\int\frac{d(7x^2+4)}{7x^2+4}-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{14}\ln(7x^2+4)-\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+\mathrm{C},\text{где } C=const$$

ИДЗ 8.2.

Найти неопределенные интегралы

1.1.

$$\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}d(x^2+2)+2dx}{x^2+2} = -\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{2}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + \text{C} = -\frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + \text{C}, \text{где } C = const$$

2.1.

$$\int \frac{\sin 2xdx}{1+3\cos 2x} = (*)$$

Проведем замену:

$$t = 1+3\cos 2x \Rightarrow dt = -6\sin 2xdx \Rightarrow \sin 2xdx = -\frac{dt}{6}$$

$$(*) = -\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{6}\ln|t| + C = -\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x| + C, \text{ где } C = const$$

3.1.

$$\int \frac{(1-2x-x^3)dx}{1+x^2} = \int \frac{-x(x^2+1)-x+1}{x^2+1}dx = \int \left(-x + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= -\int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctgx + C, \text{где } C = const$$

4.1

$$\int \sin^2(1-x)dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2(1-x))dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2(1-x)d(2(1-x)) =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2(1-x)) + C, \text{где } C = const$$

5.1.

$$\int tg^2xdx = \int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C, \text{ где } C = const$$

6.1.

$$\int \sin 3x\cos xdx = (*)$$

Используем формулу:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$(*) = \int \frac{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)}{2} = \frac{1}{2}\int \sin 4xdx + \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C,$$

где $C = const$

7.1.

$$\int\frac{dx}{4x^2-5x+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{5}{4}x+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{5}{8}x+\frac{25}{64}+\frac{39}{64}}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{8}\right)}{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{8}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{\sqrt{39}}arctg\left(\left(x-\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{8}{\sqrt{39}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{39}}arctg\left(\frac{8x-5}{\sqrt{39}}\right)+C,\ \text{где}\ C=const$$

8.1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-8x+16)+16}}=\int\frac{d(x-4)}{\sqrt{(\sqrt{20})^2-(x-4)^2}}=$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-4}{\sqrt{20}}\right)+C,\ \text{где}\ C=const$$

9.1.

$$\int\frac{(x+1)dx}{2x^2+3x-4}=\int\frac{\frac{1}{4}d(2x^2+3x-4)+\frac{1}{4}dx}{2x^2+3x-4}=\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2+3x-4)}{2x^2+3x-4}+\frac{1}{4\cdot 2}\int\frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-2-\frac{9}{16}}=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{41}}{4}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{41}}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{41}}{4}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+\frac{1}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{41}}{4x+3+\sqrt{41}}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

10.1.

$$\int\frac{(2x-13)dx}{\sqrt{3x^2-3x-16}}=\int\frac{\frac{1}{3}d(3x^2-3x-16)-12dx}{\sqrt{3x^2-3x-16}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x^2-3x-16)}{\sqrt{3x^2-3x-16}}-\frac{12}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{16}{3}}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

ИДЗ-8.3.

Найти неопределенные интегралы

6.1.

$$\int (x+1)e^{2x}dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{e^{2x}(2x+1)}{4} + C, \text{ где } C = const$$

7.1.

$$\int \ln(x-5)dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \ln(x-5) \Rightarrow du = \frac{dx}{x-5}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$(*) = x\ln(x-5) - \int \frac{xdx}{x-5} = x\ln(x-5) - \int \frac{(x-5+5)dx}{x-5} =$$

$$= x\ln(x-5) - \int \left(1 + \frac{5}{x-5}\right)dx = x\ln(x-5) - x - 5\ln|x-5| + C, \text{ где } C = const$$

8.1.

$$\int arctg\,2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = arctg\,2x \Rightarrow du = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = x\,arctg\,2x - \int \frac{2xdx}{1+4x^2} = x\,arctg\,2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= x\,arctg\,2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C, \text{ где } C = const$$

ИДЗ-8.4.

1.1.

$$\int \frac{(3x^2+20x+9)dx}{(x^2+4x+3)(x+5)} = \int \frac{(3x^2+20x+9)dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}=\frac{3x^2+20x+9}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

$$A(x+3)(x+5)+B(x+1)(x+5)+C(x+1)(x+3)=3x^2+20x+9$$

$$A(x^2+8x+15)+B(x^2+6x+5)+C(x^2+4x+3)=3x^2+20x+9$$

$$\begin{cases}A+B+C=3\\8A+6B+4C=20\\15A+5B+3C=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=3-A-B\\4A+2B=8\\12A+2B=0\end{cases}\Rightarrow 8A=-8$$

$$A=-1; B=6; C=-2$$

$$(*)=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+3}-\frac{2}{x+5}\right)dx=-\ln|x+1|+6\ln|x+3|-2\ln|x+5|+C,\text{ где } C=const$$

2.1.

$$\int\frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}=\int\frac{(x^3-x^2+x^2+1)dx}{x^3-x^2}=\int\left(1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\right)dx=(*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$$

$$Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x^2+1$$

$$A(x^2-x)+B(x-1)+Cx^2=x^2+1$$

$$\begin{cases}A+C=1\\-A+B=0\\-B=1\end{cases}\Rightarrow B=-1; A=-1; C=2$$

$$(*)=x+\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=x-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C,\text{ где } C=const$$

3.1.

$$\int\frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}=(*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+5)}=\frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

$$A(x^2+2x+5)+B(x^2-x)+C(x-1)=3x+13$$

$$\begin{cases}A+B=0\\2A-B+C=3\\5A-C=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-A\\3A+C=3\\5A-C=13\end{cases}\Rightarrow 8A=16$$

$$A=2; B=-2; C=-3$$

$$(*)=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2x-3}{(x^2+2x+5)}\right)dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-d(x^2+2x+5)-dx}{(x^2+2x+5)}=$$

$$=2\ln|x-1|-\int\frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)}-\int\frac{dx}{(x^2+2x+1+4)}=$$

$$=2\ln|x-1|-\ln(x^2+2x+5)-\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=2\ln|x-1|-\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C,\ \text{где}\ C=const$$

4.1.

$$\int\frac{5xdx}{x^4+3x^2-4}=\int\frac{5xdx}{(x^2-1)(x^2+4)}=\int\frac{5xdx}{(x+1)(x-1)(x^2+4)}=(*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)}=\frac{5x}{(x+1)(x-1)(x^2+4)}$$

$$A(x-1)(x^2+4)+B(x+1)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-1)=5x$$

$$A(x^3-x^2+4x-4)+B(x^3+x^2+4x+4)+C(x^3-x)+D(x^2-1)=5x$$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-A+B+D=0\\4A+4B-C=5\\-4A+4B-D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-A-B\\D=A-B\\5A+5B=5\\-5A+5B=0\end{cases}\Rightarrow 10B=5$$

$$B=\frac{1}{2};A=\frac{1}{2};C=-1;D=0$$

$$(*)=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{x}{(x^2+4)}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C,\ \text{где}\ C=const$$

5.1.

$$\int\frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}=(*)$$

Проведем замену:

$$x+3=t^2\Rightarrow dx=2tdt$$

$$(*)=\int\frac{2tdt}{2+t}=\int\frac{2(t+2)-4}{t+2}dt=2\int dt-4\int\frac{dt}{t+2}=2t-4\ln|t+2|\overset{t=\sqrt{x+3}}{=}$$

$$=2\sqrt{x+3}-4\ln\left|\sqrt{x+3}+2\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

6.1.

$$\int\frac{(1-\sqrt{x+1})dx}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}=(*)$$

Проведем замену:

$$x+1=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$$

$$(*)=\int\frac{(1-t^3)\cdot 6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=\int\frac{(1-t^3)\cdot 6t^2dt}{(1+t^2)}=\int\frac{-6t^5+6t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\frac{-6t^3(t^2+1)+6t(t^2+1)+6(t^2+1)-6t-6}{t^2+1}dt=\int\left(-6t^3+6t+6+\frac{-6t-6}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-6\int t^3dt+6\int tdt+6\int dt-3\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-6\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{6}{4}t^4+6\cdot\frac{t^2}{2}+6t-3\ln(t^2+1)-6arctgt+C\overset{t=\sqrt[6]{x+1}}{=}$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x+1}+6\cdot\sqrt[6]{x+1}-3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6arctg\sqrt[6]{x+1}+C,\text{ где } C=const$$

7.1.

$$\int\frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}=(*)$$

Проведем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$z=tg\frac{x}{2};x=2arctgz\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2};\sin x=\frac{2z}{1+z^2};\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$(*)=\int\frac{\frac{2dz}{(1+z^2)}}{5+2\cdot\frac{2z}{1+z^2}+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{5+5z^2+4z+3-3z^2}=2\int\frac{dz}{2z^2+4z+8}=$$

$$=\int\frac{dz}{z^2+2z+4}=\int\frac{d(z+1)}{(z+1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{z+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\text{ где } C=const$$

8.1.

$$\int\frac{dx}{8\sin^2x-16\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{8\cdot\frac{(1-\cos 2x)}{2}-8\sin 2x}=\int\frac{dx}{4-4\cos 2x-8\sin 2x}=(*)$$

Проведем замену:

$$z=tgx;x=arctgz\Rightarrow dx=\frac{dz}{1+z^2};\sin 2x=\frac{2z}{1+z^2};\cos 2x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$(*)=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4-\frac{4(1-z^2)}{1+z^2}-\frac{8\cdot 2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{4+4z^2-4+4z^2-16z}=\int\frac{dz}{8z^2-16z}=\frac{1}{8}\int\frac{dz}{z^2-2z+1-1}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{d(z-1)}{(z-1)^2-1}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1-1}{z-1+1}\right|+C=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{z-2}{z}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx}\right|+C,\text{ где } C=const$$

9.1.

$$\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx = \int \cos^2 3x (\cos 3x \sin 3x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 6x) \cdot \sin^2 6x dx = \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x + \sin^2 6x \cdot \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(1-\cos 12x)dx}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}\int \sin^2 6x d(\sin 6x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 12x dx + \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{3}\sin^3 6x + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 2x + \frac{1}{144}\sin^3 6x + C, \text{ где } C = const$$