Lista 1 curvas e superfícies

Kalebe Felipe Santana Maia

Março 2024

Observações

Todas questões que pedem implementação em CAS foram feitas em arquivos separados, a n-ésima questão está no arquivo "Q**n**_lista1.ggb", sendo "**n**" o número da questão.

Questão 1

Como queremos encontrar uma parametrização do círculo $x^2+y^2=1$, a primeira ideia seria a curva $\alpha(t) = (sin(t), cos(t))$ e, observando as restrições, percebemos que essa forma de parametrização está percorrendo o círculo em sentido horário, portanto, invertemos a x(t) com y(t) e temos $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$, além disso, $\alpha(0) = (cos(0), sin(0)) = (1, 0)$, para ajeitar isso de acordo com a restrição, inserimos $\frac{\pi}{2}$ dentro do argumento de cada função, ficando com $\alpha(t) = cos(t + \frac{\pi}{2}), (sin(t + \frac{\pi}{2}))$.

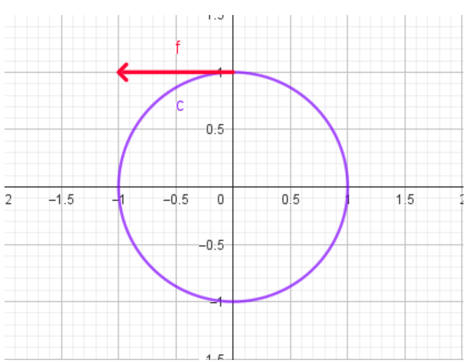

Figure 1: círculo unitário

Questão 2

Na segunda questão, encontramos a seguinte figura (sendo o vetor vermelho o vetor tangente no ponto (0,0)):

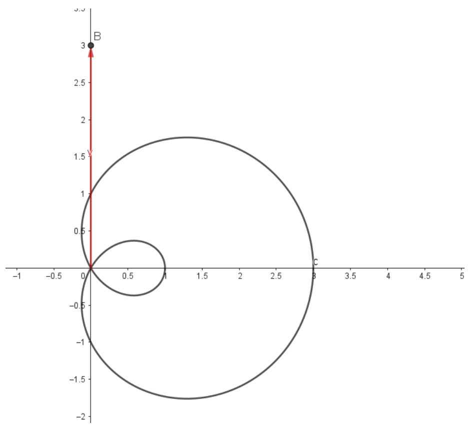

Figure 2: caracol de Pasca

Como da para perceber, o ponto [0,0] pertence ao traço da curva.

Questão 3

$$
\begin{aligned}
x^3 + xy^2 - 2ay^2 &= 0 \\
x^2(x + xt^2 - 2at^2) &= 0 \\
x(1+t^2) &= 2at^2 \\
x &= \frac{2at^2}{1+t^2} \\
y = xt &= \frac{2at^3}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

Baseado nessa equação, uma possível parametrização é $\alpha(t) = (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})$. Temos a seguinte figura:

No arquivo ggb, "a" e "rt" são variáveis que substituem os parâmetros 'a' e 't' das parametrizações e estão sendo animados, sendo a reta vermelha a tangente no ponto "t".

Essa curva foi criada com o intuito de resolver a duplicação do cubo, esse problema consiste em construir um cubo cujo o volume seja duas vezes maior, no início a ideia era utilizar somente uma régua e um compasso o que, segundo o teorema de Wantzel, é impossível.

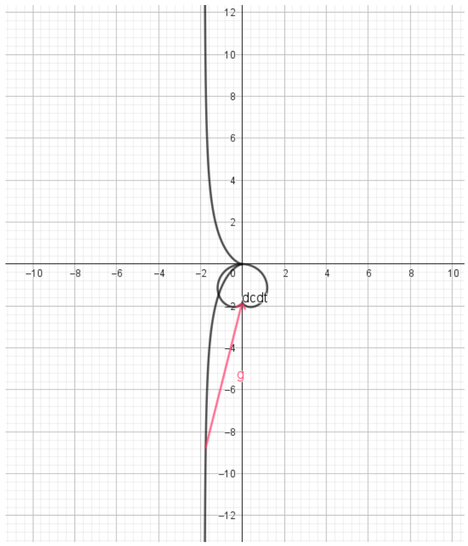

Figure 3: Cissoide de Diocles

Questão 4

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$
$$x^2(x + xt^3 - 3t) = 0$$
$$x(1 + t^3) = 3t$$
$$x = \frac{3t}{1 + t^3}$$
$$y = xt = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

utilizando a mesma base da questão anterior (y=xt) chegamos na curva $\alpha(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$. Temos o seguinte traço:

sendo o vetor vermelho o vetor tangente no ponto t.

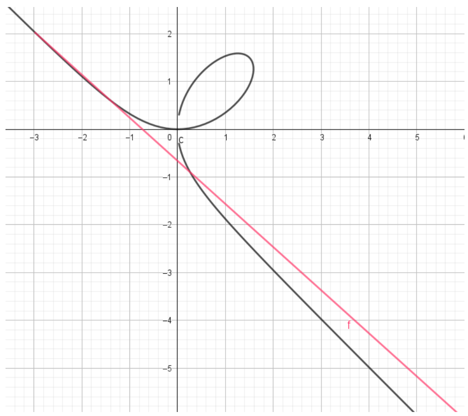

Figure 4: Folium de Descartes

Questão 5

definição: $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I \implies \alpha(t)$ é regular. Se $\alpha(t) = (t, t^2) \longrightarrow \alpha'(t) = (1, 2t)$, que é diferente de 0 para todo t, entretanto, para $\gamma(t) = (t^3, t^6) \longrightarrow \gamma'(t) = (3t^2, 6t^5)$, ou seja, para t=0, temos que $\gamma'(0) = (3 \cdot 0, 6 \cdot 0) = (0, 0)$, ou seja, $\exists t; \gamma'(t) = 0$, logo, $\gamma(t)$ não é regular.

Além disso, na imagem, é perceptível que não existe um vetor tangente da segunda curva em t=0.

A função $\phi(s)$ candidata a ser reparametrização é $\phi(s) = s^3$, entretanto, precisamos que ela seja um difeomorfismo. Ela falha por levar em uma curva que possui um ponto onde a derivada é 0.

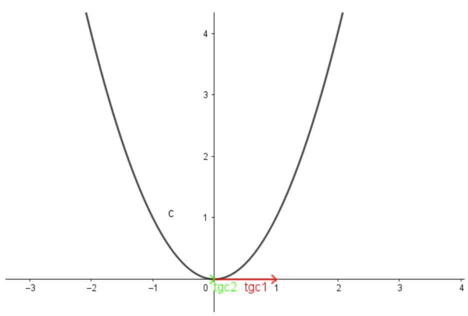

Figure 5: parabolas

O vetor vermelho é a tangente no ponto t=0 de $\alpha(t)$ e o verde é da cruva $\gamma(t)$

Questão 6

Escolhi a curva "Kampyle of Eudoxus" que possui a característica parametrização (a.sec(t), a.sec(t)tg(t))

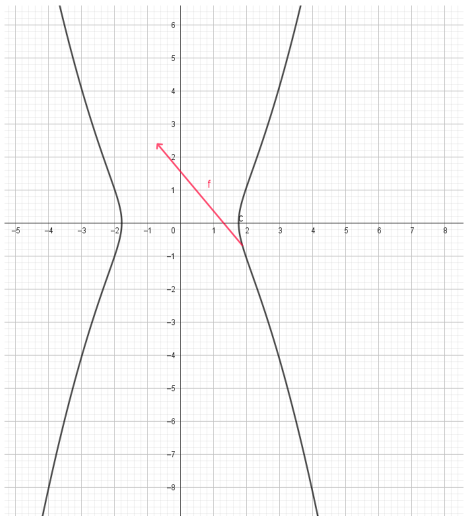

Figure 6: Kampyle of Eudoxus

Ela é uma das curvas utilizadas para dividir um ângulo em 3 partes iguais, ou seja, tissetriz utilizando apenas régua e compasso.

Além disso, podemos pensar em uma reparametrização com $y = xt$ e realizar os calculos iguais nas questões passadas, chegando em $\alpha(t) = (+-a\sqrt{1+t^2}, +-a \cdot t\sqrt{1+t^2}$

Questão 7

Sendo $\alpha(t) = (a \cdot cos(t), b \cdot sin(t))$, é fácil ver que é diferenciável, já que sin e cos são funções infinitamente deriváveis e apenas estão multiplicando constantes na curva apresentada, além disso, seno e cosseno nunca se anulam ao mesmo tempo, logo, é uma curva regular. O traço de α depende, mas ele é uma elipse ou uma circuferência, dependendo dos valores de a e b. Na primeira figura a = -2.8 e b = 1.65, enquanto na segunda figura, a = 3 e b = -3. Em resumo, se $\|a\| = \|b\|$, temos circunferência e, caso contrário, elipse.

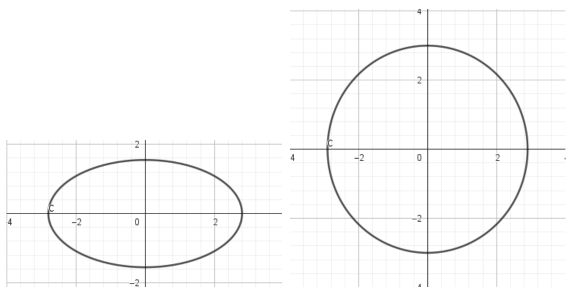

Figure 7: Traços da curva

Questão 8

Podemos utilizar $\alpha(t) = (\frac{t^3}{3} + 2, e^t - 1)$, assim, temos a curva desejada e $\alpha(0) = (2, 0)$. Resultando na seguinte curva:

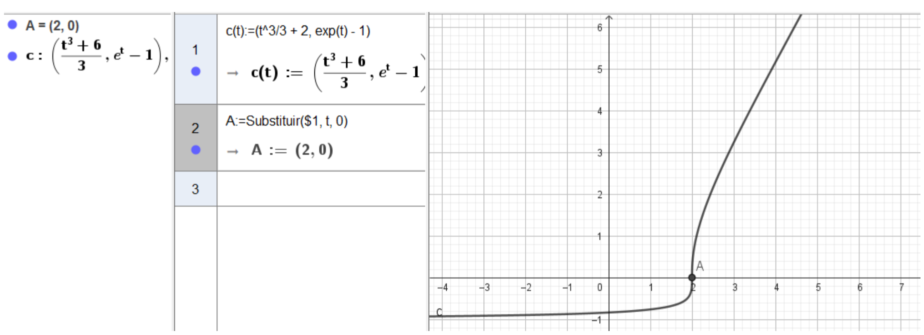

Figure 8: Traço gerado

É fácil ver que a curva é regular pois sua derivada em y(t) = e^t é diferente de 0, $\forall t$.

Questão 9

A prova da ida é trivial, uma vez que se $\|\alpha'(t)\| = c, \forall t \longrightarrow \frac{\delta\|\alpha'(t)\|^2}{\delta t} = \frac{\delta(\alpha'(t)^T \cdot \alpha'(t))}{\delta t} = \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) + \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0, \forall t$, visto que se a norma da curva é constante, a derivada dela é 0, ou seja, o produto interno $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)$ é 0 e o vetor tangente é ortogonal.

Já para a volta, sabendo que são ortogonais, temos que $\frac{\delta\|\alpha'(t)\|^2}{\delta t} = 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$, ou seja, a derivada do vetor velocidade ao quadrado é zero, o que nos diz que o vetor $\alpha''(t)$ é 0. Resultando no fato de $\|\alpha'(t)\| = c$.

Questão 10

Como $x'(t) \neq 0, \forall t$, sabemos que podemos construir uma função injetora F(x,y(x)), uma vez que o traço da curva não dobra em relação ao eixo horizontal, isso caracteriza uma função. Além disso, sendo y(t) construida como uma função dependente, em relação a x(t), e x(t) é contínua em I (pois é diferencíavel), então F(x,y(x)) é uma função diferenciável.

Questão 11

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= (e^t cos(t), e^t sin(t)) \\
\longrightarrow \|\alpha(t)\|^2 &= (e^t)^2 cos^2(t) + (e^t)^2 sin^2(t) \\
\longrightarrow \|\alpha(t)\|^2 &= e^{2t} \\
\alpha'(t) &= (e^t cos(t) - e^t sin(t), e^t sin(t) + e^t cos(t) \\
\longrightarrow \|\alpha'(t)\|^2 &= (e^t)^2 cos^2(t) - 2e^{2t} cos(t) sin(t) + (e^t)^2 sin^2(t) \\
&\quad + (e^t)^2 cos^2(t) + 2e^{2t} cos(t) sin(t) + (e^t)^2 sin^2(t) \\
\longrightarrow \|\alpha'(t)\|^2 &= 2e^{2t}
\end{aligned}
$$

Fazendo o produto vetorial, temos:

$$
\begin{aligned}
< \alpha(t), \alpha'(t) > &= e^t cos(t) \cdot [e^t(cos(t) - sin(t))] + e^t sin(t) \cdot [e^t(sin(t) + cos(t)] \\
&= e^{2t}[cos^2(t) - sin(t)cos(t) + sin^2(t) + sin(t)cos(t)] \\
&= e^{2t}
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} cos(\theta) &= \frac{< \alpha(t), \alpha'(t) >}{\|\alpha(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}} \cdot \sqrt{2e^{2t}}} \\ &= \frac{e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ou seja, o ângulo entre os dois vetores não depende de t e, pela tabela dos valores de cosseno, sabemos que o ângulo é de 45º, como comprovado na imagem abaixo que plota o traço da curva e o vetor tangente.

Na seguinte figura temos 2 etapas do vetor tangente, uma em t = 0.3 e outra em t = 0.8 e em ambas é possível ver que o ângulo é invariante em relação à t.

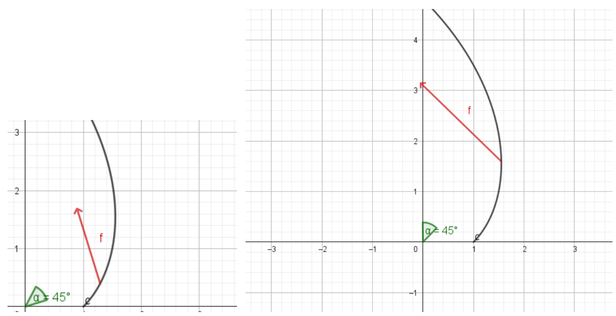

Figure 9: variação vetorTg x ângulo