Interpolação de Dados Dispersos - Introdução a Modelagem Matemática

9.1 Exercício: Interpolação via Funções de Base Radial (RBF)

Considere o conjunto de dados abaixo constituído por pontos distintos $x_j \in \mathbb{R}$ e valores $f_j \in R$ associados a esses pontos. Determine uma função de base radial e avalie essa função nos pontos dados nos testes. Considere a seguinte função de base $\phi_j(x) = e^{-||x-x_j||^2}$

Lembrando: Queremos encontrar uma função contínua $s_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $s_f(x_i) = f_i$ para $1 \leq i \leq N$ dado por:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x),\ x \in \mathbb{R}^2$$

ou seja, precisamos obter o conjunto de coeficientes $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N} \subset \mathbb{R}$. Para isso, utilizamos as condições de interpolaçãoo e obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

resultando no sistema linear $A\alpha = f$:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear acima, conseguimos avaliar a função $s_f(x)$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

Obs.: Uma forma de construir facilmente a matriz de interpolação A:

- Calcule a matriz de distância M entre todos os pontos dados através da função `distance_matrix` contida no pacote `scipy.spatial`;
- Aplique a função de base ϕ nessa matriz, nesse caso $A = \phi(M) = e^{-M^2}$;

Conjunto de dados: Cada linha da matriz abaixo representa uma amostra do tipo (x_j^1, x_j^2, f_j)

```
np.array([[-0.132435,  0.121322, -0.396841],
      [ 0.022206, -0.253028,  0.064272],
      [ 0.189277,  0.246878,  0.518604],
      [-0.353720, -0.062568, -0.891925],
      [ 0.338860, -0.215555,  0.824920],
      [-0.114211,  0.424858, -0.275816],
      [-0.219019, -0.421707, -0.500739],
      [ 0.477176,  0.174264,  0.960294],
      [-0.498052,  0.205589, -0.948289],
      [ 0.240728, -0.514422,  0.474110],
      [ 0.178278,  0.568380,  0.333216],
      [-0.538309, -0.311961, -0.875938],
      [ 0.632472, -0.139047,  0.892913],
      [-0.386499,  0.549756, -0.608870],
      [-0.089393, -0.689840, -0.129753],
      [ 0.549340,  0.462984,  0.738047],
      [-0.739899,  0.030597, -0.728343],
      [ 0.540129, -0.537500,  0.658981],
      [-0.036162,  0.782046, -0.038058],
      [-0.514630, -0.616699, -0.565767],
      [ 0.815705,  0.109752,  0.539060],
      [-0.691510,  0.481135, -0.599958],
      [ 0.189052, -0.840354,  0.138870],
      [ 0.437461,  0.763428,  0.356128],
      [-0.855543, -0.272942, -0.398726],
      [ 0.831365, -0.384112,  0.416118],
      [-0.360294,  0.860904, -0.196213],
      [-0.321659, -0.894294, -0.140011],
      [ 0.856159,  0.449973,  0.332056],
      [-0.951246,  0.250745, -0.140885],
      [ 0.540838, -0.841127,  0.244945]])
```

Entrada: Ponto $x \in \mathbb{R}^2$
Saída: Valor da interpolação $s_f(x)$.
Para evitar qualquer tipo de arredondamento, utiliza a seguinte saída:

```
print(str(value[:4]))
```