家用随機過程

杜小远

2024 年 10 月 8 日

目录

1 預備知識 1
- 1.1 Markov、Chebyshev 不等式 1
- 1.2 獨立性 2
- 1.3 Borel-Cantelli 引理 2
- 1.4 隨機變量序列的收斂 3
- 1.5 大數定律 3
- 1.6 中心極限定理 3

2 鞅論 4
- 2.1 條件期望 4
- 2.2 鞅、幾乎處處收斂 5
- 2.3 杜布不等式, 鞅的 L^p 收斂, $p > 1$ . . 6
- 2.4 平方可積鞅 8
- 2.5 一致可積、L^1 收斂 9
- 2.6 可選停時定理 11
- 2.7 一維隨機游走中的應用 13

3 馬氏鏈 15
- 3.1 定義、實現 15
- 3.2 馬氏性 16
- 3.3 常返與暫留 18
- 3.4 平穩測度 19

4 遍歷論 22

5 布朗運動 25
- 5.1 定義、實現、性質 25
- 5.2 馬氏性 27
- 5.3 鞅性 29
- 5.4 伊藤公式 30

A Tricks and Useful Theorems 33

1 預備知識

1.1 Markov、Chebyshev 不等式

1.1 定理 (Markov、Chebyshev 不等式). 设 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ 单调增, 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立 *Markov* 不等式

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}f(|X|)}{f(\varepsilon)}. \tag{1}$$

特别地, 取 $f(x) = x^2$, $X = Y - \mathbb{E}Y$, 有 *Chebyshev* 不等式

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{Var} Y}{\varepsilon^2}.$$

证明只需注意到:

$$\mathbb{E}f(|X|) \geq \mathbb{E}\left(f(|X|); |X| \geq \varepsilon\right) \geq \mathbb{E}\left(f(\varepsilon)\mathbb{I}_{\{|X|\geq\varepsilon\}}\right) = f(\varepsilon)\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon).$$

1.2 獨立性

对于随机变量 $X\colon (\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{R},\mathcal{R})$, 其诱导的 σ-域为

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{R}\}.$$

随机变量、σ-域的独立来自于初等理论中对于事件独立性的推广:

- **(事件独立)** 称事件 A 与 B 独立, 如果 $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- **(σ-域独立)** 称 σ-域 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 独立, 如果任意事件 $A \in \mathcal{F}$ 和 $B \in \mathcal{G}$ 总是独立的.
- **(随机变量独立)** 称随机变量 X 和 Y 独立, 如果 $\sigma(X)$ 和 $\sigma(Y)$ 相独立.

1.3 Borel-Cantelli 引理

1.2 定理 (*Borel-Cantelli 引理*). 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为事件序列.

1. 若 $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n \ i.o.) = 0$.
2. 若 A_n 相互独立且 $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n \ i.o.) = 1$.

證明. 1. 由 $\mathbb{P}$ 上半连续、σ-可加性和 Cauchy 收敛准则:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{m\geq n}\mathbb{P}(A_m) = 0.$$

2. 由 De Morgan 律和 $\mathbb{P}$ 下半连续

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right).$$

而对任意 $m \in \mathbb{N}$, 由不等式 $\log(1-x) \leq -x$ 在 $x \in [0,1]$ 成立, 总有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) &= \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{N} A_n^c\right) = \prod_{n=m}^{\infty}(1-\mathbb{P}(A_n))\\ &= \exp\left(\sum_{n=m}^{\infty}\log(1-\mathbb{P}(A_n))\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=m}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\right) = 0.\end{aligned}$$

□

1.4 隨機變量序列的收斂

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$	$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$
$X_n \xrightarrow{a.s.} X$	$\mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$
$X_n \xrightarrow{L^p} X$	$\mathbb{E}\|X_n - X\|^p \to 0 \quad (n \to \infty)$

1.3 注. 由 *Fatou* 引理易见几乎处处收敛强于依概率收敛: 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$0 = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \geq 0.$$

由 *Markov* 不等式(1)

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p}$$

可知, L^p 收敛强于依概率收敛.

1.5 大數定律

大数定律是指, 对于独立同分布的随机变量序列 $\{X_n\}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 的均值在某种意义下收敛于期望.

1.4 定理 (弱大數定律). 设 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $\mathbb{E}|X_i| < \infty$, $\mathbb{E}X_i = \mu$, 则

$$S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

1.5 定理 (强大數定律). 设 $\{X_n\}$ 两两独立同分布, 且 $\mathbb{E}|X_i| < \infty$, $\mathbb{E}X_i = \mu$, 则

$$S_n/n \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

1.6 中心極限定理

中心极限定理研究的是, 独立随机变量和的极限分布在何种条件下为正态分布的问题.

1.6 定理 (de Moivre-Laplace).

2 鞅論

2.1 條件期望

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, 子 σ-域 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$, 随机变量 $X \in \mathcal{F}_0$ 可积. 称 Y 为 X 关于 $\mathcal{F}$ 的条件期望, 如果满足

1. $Y \in \mathcal{F}$;
2. 对任意 $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}(Y; A) = \mathbb{E}(X; A)$.

可以证明这样的的 Y 存在唯一 (a.s.), 且 $E|Y| < \infty$, 记做 $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.

2.1 定理 (條件期望的性質). *条件期望具有如下性质:*

*(1) **(全期望公式)** $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}X$; (取 $A = \Omega \in \mathcal{F}$ 即可)*

(2) 特别地, 如果 $X \in \mathcal{F}$, 则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ a.s.;

*(3) **(线性)** $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F})$;*

*(4) **(保号性/正性)** 若 $X \le Y a.s.$, 则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \le \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ a.s.;*

*(5) **(cMON)** 若 $0 \le X_n \uparrow X$, 则 $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$;*

*(6) **(cFatou)** 若 $X_n \ge 0$, 则 $\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{F}) \le \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$;*

*(7) **(cDOM)** 若 $|X_n| \le Y \in L^1$, $\forall n$, 且 $X_n \to X$ a.s., 则 $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ a.s.;*

*(8) **(cJensen)** 若 φ 为凸函数且 $\mathbb{E}X, \mathbb{E}\varphi(X) < \infty$, 则 $\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}) \ge \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$;*

*(9) **(Tower)** 若 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, 则 $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)$;*

*(10) **(" 将已知者提取出来")** 若 $X \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}|XY|, \mathbb{E}(Y) < \infty$, 则 $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.*

2.2 注. *(8) 若 φ 非线性, 记 $S = \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \colon ax + b \le \varphi(x), \forall x\}$, 则*

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}) \ge a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b, \quad \forall (a,b) \in S,$$

对右侧取上界有 Jensen 不等式成立. 特别地, 可以取 $\varphi = |\cdot|^p$, $p \ge 1$.

(10) 的证明需要从示性函数开始.

条件期望的几何解释. 若 $\mathbb{E}X^2 < \infty$, 则 $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$-可测的随机变量中使得均方误差 $\mathbb{E}(X-Y)^2$ 最小的那一个随机变量: 任取 $Z \in L^2(\mathcal{F}) \subset L^2(\mathcal{F}_0)$, 有

$$\mathbb{E}(Z(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}ZX - \mathbb{E}(\mathbb{E}(ZX|\mathcal{F})) = 0,$$

从而 $X-\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ 与 $L^2(\mathcal{F})$ 正交.

2.2 鞅、幾乎處處收斂

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 为适应于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅, 如果满足

$$(1)\ \mathbb{E}|X_n|<\infty;\quad (2)\ X_n\in\mathcal{F}_n;\quad (3)\ \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n.$$

若 (3) 中等号被替换为“$\le$”或“$\ge$”, 则相应地我们称 X_n 为上鞅或下鞅.

Doob 上穿不等式是证明所有的鞅或下鞅收敛定理的基本工具.

2.3 定理 *(Doob 上穿不等式)*. *设 X_n 为下鞅, 令 $a<b$, 定义停时序列 $(N_k)_{k\ge 0}$: $N_0=-1$,*

$$N_{2k-1}:=\inf\{m>N_{2k-2}\colon X_m\le a\},$$
$$N_{2k}:=\inf\{m>N_{2k-1}\colon X_m\ge b\}.$$

上穿的记数为可料过程

$$H_m:=\begin{cases}1, & N_{2k-1}<m\le N_{2k},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

时刻 n 上穿的次数为 $U_n:=\sup\{k\colon N_{2k}\le n\}$, 则有不等式成立:

$$(b-a)\mathbb{E}U_n\le\mathbb{E}(X_n-a)^+-\mathbb{E}(X_0-a)^+. \tag{2}$$

2.4 定理 *(鞅收斂定理)*. *1. 下鞅 X_n 满足 $\sup_m\mathbb{E}X_m^+<\infty$, 则 $X_n\overset{a.s.}{\to}X\in L^1$.*

2. 非负上鞅 X_n 有 $X_n\overset{a.s.}{\to}X$ 且 $\mathbb{E}X\le\mathbb{E}X_0$.

2.5 注. *对于非负鞅 (一定也是上鞅), 我们常用第二条说明其收敛.*

證明. 1. 注意到 $(X_n-a)^+\le X_n^++|a|$, 由定理 2.3 有

$$\mathbb{E}U_n\le\frac{\mathbb{E}X_n^++|a|}{b-a}\le\frac{\sup_m\mathbb{E}X_m^++|a|}{b-a},$$

根据单调收敛性可知随机变量 $U_n\uparrow U$, 为整个序列上穿 $[a,b]$ 的次数. 于是由控制收敛定理, $\mathbb{E}U<\infty$, U 几乎处处有界, 进而 $\{\liminf_n X_n<a<b<\limsup_n X_n\}\subset\{\lim_n U_n=\infty\}$ 为零测集. 由 (a,b) 的任意性成立

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}}\left\{\liminf_{n\to\infty}X_n<a<b<\limsup_{n\to\infty}X_n\right\}\right)=0$$

于是根据有理数的稠密性有 $\liminf_n X_n = \limsup_n X_n$ a.s., 即 $\lim_n X_n$ 几乎处处存在. 由 Fatou 引理, $\mathbb{E}X^+ \le \liminf_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty$, 另一方面

$$\mathbb{E}X^- \le \liminf_n \mathbb{E}X_n^- = \liminf_n (\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n) \le \liminf_n \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0 < \infty$$

于是 $\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}X^+ + \mathbb{E}X^- < \infty$, $X \in L^1$.

2. 下鞅 $Y_n := -X_n \le 0$ 满足 $\mathbb{E}Y_n^+ \equiv 0$. 再由 Fatou 引理, $\mathbb{E}X \le \liminf_n \mathbb{E}X_n \le \mathbb{E}X_0$.

□

2.6 示例 *(未必有 L^1 收斂性!!!)*. *考虑 $\mathbb{Z}^1$ 上的对称随机游走, $S_0 = 1$, $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, 其中 ξ_i i.i.d. 且 $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = \mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$. 记 $N := \inf\{m \colon S_m = 0\}$, 则停止过程作为非负鞅 $X_n := S_{N\wedge n}$ a.s. 收斂于 X_∞. 注意到 $\mathbb{Z}^1$ 是常返的, 于是 $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$, 即 N a.s. 有限, $X_\infty = 0$, 进而*

$$\mathbb{E}|X_n - X_\infty| = \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0 = 1.$$

2.3 杜布不等式, 鞅的 L^p 收斂, $p > 1$

下述关于有界停时的基本定理后续会被多次使用, 所使用的证明方法也是非常经典的.

2.7 定理. *设 X_n 为下鞅, 停时 N a.s. 有界, 即存在 k 使得 $\mathbb{P}(N \le k) = 1$. 则有*

$$\mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}_N \le \mathbb{E}X_k.$$

證明. 注意到 $X_{N\wedge n}$ 亦为下鞅, 于是有 $\mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}X_{N\wedge 0} \le \mathbb{E}X_{N\wedge k} = \mathbb{E}X_N$. 下面我们证明第二个不等式, 记可料过程 $K_n := \mathbb{I}_{\{N<n\}}$, 于是 $(K\cdot X)_n = X_n - X_{N\wedge n}$ 亦为下鞅, 从而有 $\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}X_N = \mathbb{E}(K\cdot X)_k \ge \mathbb{E}(K\cdot X)_0 = 0$. □

2.8 注 *(第一個不等號對于非有界停時未必成立!!!)*. *依然考虑示例 2.6, 有 $\mathbb{E}S_0 = 1 > 0 = \mathbb{E}S_N$.*

2.9 定理 (Doob 不等式)**.** *设 X_m 为下鞅, 记前 n 项正部的最大值为*

$$\bar{X}_n := \max_{0\le m\le n} X_m^+.$$

对于 $\lambda > 0$, 记 $A = \{\omega \colon \bar{X}_n(\omega) \ge \lambda\}$, 则有

$$\lambda\mathbb{P}(A) \le \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_A \le \mathbb{E}X_n^+. \tag{3}$$

證明. 记 $N := \inf\{m \colon X_m \ge \lambda\}$, 于是在 A 上有 $X_{N\wedge n} = X_N \ge \lambda$, 从而有

$$\lambda\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\lambda\mathbf{1}_A \le \mathbb{E}X_{N\wedge n}\mathbf{1}_A.$$

注意到 $N\wedge n$ 为有界停时, 于是由定理 2.7 有 $\mathbb{E}X_{N\wedge n}\le \mathbb{E}X_n$. 而在 A^c 上有 $X_{N\wedge n}=X_n$, 从而 $\mathbb{E}X_{N\wedge n}\mathbf{1}_{A^c}=\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{A^c}$, 于是 $\mathbb{E}X_{N\wedge n}\mathbf{1}_A\le \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_A$. □

2.10 示例 *(Kolmogorov 最大值不等式)*. *考虑随机游走 $S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$, 其中 ξ_i i.d.d. 期望 $\mathbb{E}\xi_i=0$, 方差 $\sigma_i^2=\mathbb{E}\xi_i^2<\infty$. 于是 S_n 为鞅, $X_n:=S_n^2$ 为下鞅. 取 $\lambda=x^2$, 由定理 2.9 可知*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le m\le n}|S_m|\ge x\right)\le \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{x^2}.$$

下面的定理说明了对于非负下鞅, 其前 n 项的 L^p 模可以被第 n 项控制. 后续在我们证明鞅的 L^p 收敛定理时, 这可以说明在适当的条件下, $\sup_n|X_n|\in L^p$.

2.11 定理 *(L^p 最大值不等式)*. *设 X_n 为下鞅, 则对 $1<p<\infty$, 成立*

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n^p)\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}(X_n^+)^p.$$

那么对于任意的鞅 Y_n, $|Y_n|$ 为非负下鞅, 记 $Y_n^*=\max_{0\le m\le n}|Y_m|$, 我们有

$$\mathbb{E}|Y_n^*|^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}|Y_n|^p.$$

證明. 我们对随机变量 $\bar{X}_n$ 做截断使其有界, 依次使用引理A.1、Doob 不等式、Fubini 定理、Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{X}_n\wedge M)^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(\bar{X}_n\wedge M\ge\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\\
&\le \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left(\lambda^{-1}\int_\Omega X_n^+\mathbb{I}_{\{\bar{X}_n\wedge M\ge\lambda\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\right)\mathrm{d}\lambda\\
&= \int_\Omega X_n^+\int_0^{\bar{X}_n\wedge M}p\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mathbb{P}=\frac{p}{p-1}\int_\Omega X_n^+(\bar{X}_n\wedge M)^{p-1}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\
&\le \frac{p}{p-1}\left[\mathbb{E}(X_n^+)^p\right]^{1/p}\left[\mathbb{E}(\bar{X}_n\wedge M)^p\right]^{1/q},
\end{aligned}$$

其中 $q=\frac{p}{p-1}$. 两边同时除以 $\left[\mathbb{E}(\bar{X}_n\wedge M)^p\right]^{1/q}$(多亏 $\wedge M$ 才有这是有限的)、同时取 p 次幂, 再令 $M\to\infty$, 由单调收敛定理可得目标不等式成立. □

2.12 示例 *(不存在 L^1 最大值不等式!!!)*. *我们沿用示例 2.6 中的记号, 非负（下）鞅 X_n 满足 $\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}S_{N\wedge n}=\mathbb{E}S_0=1$. 另一方面, 有*

$$\mathbb{P}\left(\max_m X_m\ge M\right)=\frac{1}{M},$$

于是 $\mathbb{E}(\max_m X_m)=\sum_{M=1}^\infty\mathbb{P}\left(\max_m X_m\ge M\right)=\infty$. 从而由单调收敛定理, $\mathbb{E}(\max_{1\le m\le n}X_m)\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$.

从定理 2.11 出发, 我们可以得到:

2.13 定理 (鞅的 L^p 收敛定理). 若鞅 X_n 满足 $\sup_k \mathbb{E}|X_k|^p < \infty$, $p > 1$, 则 $X_n \to X$ *a.s.* 且 L^p.

證明. 由于 $(\mathbb{E}X_n^+)^p \le (\mathbb{E}|X_n|)^p \le \mathbb{E}|X_n|^p \le \sup_k \mathbb{E}|X_k|^p < \infty$, 于是由 (下) 鞅收敛 (定理 2.4), $X_n \to X$ a.s.. 另一方面由 L^p 最大值不等式 (定理 2.11), 对任意 n 我们有

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\le m\le n}|X_m|\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_n|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_k \mathbb{E}|X_k|^p < \infty.$$

令 $n \to \infty$, 由单调收敛定理有 $\sup_k |X_k| \in L^p$. 由于 $|X_n - X|^p \le (2\sup_k |X_k|)^p$, 由控制收敛定理有 $\mathbb{E}|X_n - X|^p \to 0$. □

2.4 平方可積鞅

本节我们研究 L^2 空间中的鞅, 即平方可积鞅.

2.14 定理 (鞅增量的正交性). 设 X_n 为平方可积鞅, $m \le n$, 对任意 $Y \in L^2(\mathcal{F}_m)$ 有

$$\mathbb{E}((X_n - X_m)Y) = 0.$$

特别地, 如果 $l < m < n$, 我们有

$$\mathbb{E}((X_n - X_m)(X_m - X_l)) = 0.$$

證明. 由 Hölder 不等式, $\mathbb{E}|(X_n - X_m)Y| \le [\mathbb{E}(X_n - X_m)^2]^{\frac{1}{2}}[\mathbb{E}Y^2]^{\frac{1}{2}} < \infty$. 再由全期望公式和鞅性, 我们有

$$\mathbb{E}((X_n - X_m)Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}((X_n - X_m)Y|\mathcal{F}_m)] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}(X_n - X_m|\mathcal{F}_m)] = 0.$$

□

2.15 定理 (條件方差公式). 设 X_n 为平方可积鞅, 对于 $n \ge m$ 成立

$$\mathbb{E}((X_n - X_m)^2|\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X_n^2|\mathcal{F}_m) - X_m^2.$$

2.16 定理 (Doob 分解定理). 下鞅 X_n 存在唯一分解 $X_n = M_n + A_n$, 其中 M_n 为鞅, A_n 为可料增过程且 $A_0 = 0$.

證明. 我们先由分解的方式, 给出 A_n 应有的形式.

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n,$$

于是有 $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}$. 鉴于 $A_0 = 0$, X_n 为下鞅, 可以看出

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m - X_{m-1}|\mathcal{F}_{m-1}) \in \mathcal{F}_{n-1}$$

且为增过程. 另一方面, $M_n = X_n - A_n$ 具有鞅性:

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}.$$

□

若 X_n 为鞅, 则 X_n^2 为下鞅, 从而存在分解 $X_n^2 = M_n + A_n$,A_n 为平方变差过程:

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m^2|\mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2 = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}((X_m - X_{m-1})^2|\mathcal{F}_{m-1}) \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

2.17 定義 (平方變差過程). 记 X_n 为平方可积鞅, 存在唯一的可料增过程 A_n 使得 $X_n^2 - A_n$ 为鞅, 我们记 $\langle X\rangle_n := A_n$ 为平方变差过程, 其中

$$\langle X\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})^2|\mathcal{F}_{i-1}) \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

2.5 一致可積、L^1 收斂

事实上, 我们常用的反例 2.6 不满足诸多性质, 是因为它不满足本节我们要介绍的性质: 一致可积性 (uniformly integrable). 粗略地说, 如果这些函数积分的主要贡献不是来自函数的极大值, 则函数族是一致可积的.

2.18 定義 (一致可積). 称随机变量序列 $\{X_i\}_{i\in I}$ 一致可积, 如果有

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|; |X_i| > M\right)\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\sup_{i\in I}\int_{|X_i|>M}|X_i|\,\mathrm{d}\mathbb{P}\right) = 0. \tag{4}$$

2.19 注. 若 $\{X_i\}_{i\in I}$ 一致可积, 可以取充分大 M 使得 $\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|; |X_i| > M\right) < 1$, 于是有

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i| \le \sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|; |X_i| \le M\right) + \sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|; |X_i| > M\right) \le M + 1 < \infty.$$

2.20 注. 若存在可积随机变量 Y 使得 $|X_i| \le Y$, $i \in I$, 则由控制收敛定理, 易见 $\{X_i\}_{i\in I}$ 一致可积:

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>M\}}\right) \le \sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|\mathbb{I}_{\{Y>M\}}\right) \to 0 \quad (M\to\infty).$$

下面我们利用可积随机变量和条件概率构造一族一致可积随机变量:

2.21 定理. *给定概率空间* $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, $X \in L^1$, *则* $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\colon \mathcal{F}$ *为* $\mathcal{F}_0$ *的子* σ*-域*$\}$ *一致可积.*

2.22 注. 特别地, 取子 σ-域族为某个流 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 我们可以得到一族一致可积鞅 $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\}$.

一致可积和 L^1 收敛有如下关系:

2.23 定理. *若可积随机变量列* X_n *依概率收敛于* X, *则下述命题等价:*

(i) $\{X_n\}$ *一致可积;*

(ii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$*;*

(iii) $\mathbb{E}|X_n| \to \mathbb{E}X < \infty$.

2.24 定理. *对于下鞅* X_n, *下述命题等价:*

(i) $\{X_n\}$ *一致可积;*

(ii) $X_n \to X$ *a.s. 且* L^1*;*

(iii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

證明. $(i) \Rightarrow (ii)$ 由注 2.19, 一致可积意味着 $\sup \mathbb{E}|X_n| < \infty$, 于是由下鞅收敛定理 $X_n \to X$ a.s., 再由上一定理, $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ 由注 1.3, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, 再由上一定理可知 $\{X_n\}$ 一致可积. □

2.25 引理. *若可积随机变量* $X_n \xrightarrow{L^1} X$, *则* $\mathbb{E}(X_n; A) \to \mathbb{E}(X; A)$.

證明. $|\mathbb{E}X_m\mathbf{1}_A - \mathbb{E}X\mathbf{1}_A| \le \mathbb{E}|X_m\mathbf{1}_A - X\mathbf{1}_A| \le \mathbb{E}|X_m - X| \to 0$. □

2.26 引理. *若鞅* $X_n \xrightarrow{L^1} X$, *则* $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$.

證明. 由鞅性, 对任意 $m > n$ 有 $\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$. 换言之, 对任意 $A \in \mathcal{F}_n$, 有 $\mathbb{E}(X_m; A) = \mathbb{E}(X_n; A)$, $\forall m > n$. 上一引理说明 $\mathbb{E}(X_m; A) \to \mathbb{E}(X; A)$, 于是 $\mathbb{E}(X; A) \equiv \mathbb{E}(X_n; A)$, $\forall A \in \mathcal{F}_n$, 由定义可知 $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. □

2.27 定理. *对于鞅* X_n, *下述命题等价:*

(i) $\{X_n\}$ *一致可积;*

(ii) $X_n \to X$ *a.s.* 且 L^1;

(iii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$;

(iv) 存在随机变量 X 使得 $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$.

證明. 由定理 2.24 可知命题 $(i), (ii), (iii)$ 等价. $(iii) \Rightarrow (iv)$ 由引理 2.26 可知. $(iv) \Rightarrow (i)$ 由定理 2.21 可知这样的条件期望序列一致可积. □

2.28 定理. 若 $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$, 则 $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ *a.s.* 且 L^1.

證明. 由注 2.22 可知 $Y_n := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ 为一致可积鞅. 再由定理 2.27, 有 $Y_n \to Y_\infty$ a.s. 且 L^1. 结合 Y_n 的定义和引理 2.26, 有 $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$, 即

$$\int_A X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y_\infty \, \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}_n.$$

再由积分的可加性, 上式对于任意 $A \in \cup_n \mathcal{F}_n$ 成立. 注意到 $\cup_n \mathcal{F}_n$ 为一个 π-类, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$, 于是由 $\pi - \lambda$ 定理可知对于任意 $A \in \mathcal{F}_\infty$ 上式亦成立. 因为 $Y_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, 根据条件概率定义可知 $Y_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$. □

这一定理的直接推论为:

2.29 定理 *(Lévy 0 − 1 律)***.** 若 $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$, $A \in \mathcal{F}_\infty$, 则 $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{a.s.} \mathbf{1}_A$.

2.30 注. 借用钟开莱的一句话:"读者需要思考这个结果的意义, 并自行判断它是显而易见的还是难以置信的。"

(显而易见的) 由于 $\mathbf{1}_A \in \mathcal{F}_\infty$, $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$, 于是给定信息 $\mathcal{F}_n$, 我们关于 $\mathbf{1}_A$ 的最佳猜测应该逼近 $\mathbf{1}_A$.

(难以置信的) 设 A 在尾 σ-域 $\mathcal{T}$ 中, 于是 $\mathbf{1}_A$ 与 $\mathcal{F}_n$ 独立, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(A)$. 由 *Lévy 0-1* 律左边 *a.s.* 收敛于 $\mathbf{1}_A$, 于是 $\mathbb{P}(A) = \mathbf{1}_A$ *a.s.*, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. 换而言之, *Lévy 0-1* 律蕴含了 *Kolmogorov 0-1* 律 (定理 *A.3*).

2.6 可選停時定理

对于下鞅 X_n, 自然有 $\mathbb{E}X_m \le \mathbb{E}X_n, \forall m \le n$. 本节的中心问题是我们能否将其推广至随机时间上, 即对于 $M \le N$ 为停时, 是否有 $\mathbb{E}X_M \le \mathbb{E}X_N$.

当停时 N a.s. 有界时, 这是成立的, 事实上这是对定理 2.7 做如下推广:

2.31 示例. 设 X_n 为下鞅, $M \le N$ 为停时, 其中 $\mathbb{P}(N \le k) = 1$, 则有 $\mathbb{E}X_M \le \mathbb{E}X_N$.

證明. 对于 $\{M=N\}$, 结论显然成立, 下面我们考虑 $\{M<N\}$. 定义 $K_n = \mathbb{I}_{\{M<n\le N\}}$, 其中 $M<n\le N = \{M\le n-1\}\cap\{N\le n-1\}^c$, 于是 K_n 可料, $(K\cdot X)_n = X_{N\wedge n} - X_{M\wedge n}$ 为下鞅. 进一步地, $\mathbb{E}X_N - \mathbb{E}X_M = \mathbb{E}(K\cdot X)_k \ge \mathbb{E}(K\cdot X)_0 = 0$. □

我们还可以得到更强的结论:

2.32 示例 *(Doob 有界停时定理)*. 沿用上一示例中的记号, 我们有

$$\mathbb{E}(X_N|\mathcal{F}_M) \ge X_M,$$

其中 $\mathcal{F}_M = \{A\in\mathcal{F}\colon A\cap\{M\le n\}\in\mathcal{F}_n\}$.

證明. 由于 $\{M\le n\}\supset\{N\le n\}$, 于是对任意 $A\in\mathcal{F}_M$, 有 $A\cap\{N\le n\} = (A\cap\{M\le n\})\cap\{N\le n\}$, 其中 $A\cap\{M\le n\}\in\mathcal{F}_n$, 于是 $A\in\mathcal{F}_M\subset\mathcal{F}_N$. 定义 $L := M\mathbf{1}_A + N\mathbf{1}_{A^c}\le N$, 注意到

$$\{L\le n\} = (\{L\le n\}\cap A)\cup(\{L\le n\}\cap A^c) = (\{M\le n\}\cap A)\cup(\{N\le n\}\cap A^c)\in\mathcal{F}_n,$$

于是 L 为停时, 从而有 $\mathbb{E}X_N\ge\mathbb{E}X_L = \mathbb{E}(X_M;A)+\mathbb{E}(X_N;A^c)$. 移项可得 $\mathbb{E}(X_N;A)\ge\mathbb{E}(X_M;A)$, 从而有 $\mathbb{E}(X_N|\mathcal{F}_M)\ge X_M$. □

下面我们总是考虑无界停时.

2.33 定理. *若下鞅 X_n 一致可积, 则对任意停时 N, 停止过程 $X_{N\wedge n}$ 亦一致可积.*

證明. 由定理 2.7, 下鞅 $X^+_{N\wedge n}$ 满足 $\mathbb{E}X^+_{N\wedge n}\le X^+_n$. 再由 X^+_n 一致可积, 我们有

$$\mathbb{E}X^+_{N\wedge n}\le\mathbb{E}X^+_n\le\sup_m\mathbb{E}X^+_m<\infty,\quad\forall n.$$

于是由鞅收敛定理, $X_{N\wedge n}\xrightarrow{a.s.}X_N$ 且 $\mathbb{E}|X_N|<\infty$. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_{N\wedge n}|;|X_{N\wedge n}|>K) &= \mathbb{E}(|X_N|;|X_N|>K,N\le n)+\mathbb{E}(|X_n|;|X_n|>K,N>n)\\ &\le\mathbb{E}(|X_N|;|X_N|>K)+\mathbb{E}(|X_n|;|X_n|>K)\end{aligned}$$

随 $K\to\infty$ 趋于 0: 第一项中 $\mathbb{E}|X_N|$ 本身有界, 而 X_n 满足一致可积条件. □

2.34 定理. *若下鞅 X_n 一致可积, 则对任意停时 N, $\mathbb{E}X_0\le\mathbb{E}X_N\le\mathbb{E}X_\infty$, 其中 $X_\infty = \lim_n X_n$.*

證明. 和定理 2.7 类似, 我们首先有 $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_{N\wedge 0}\le\mathbb{E}X_{N\wedge n}\le\mathbb{E}X_n$. 令 $n\to\infty$, 由定理 2.33 和定理 2.24 可知一致可积下鞅 $X_{N\wedge n}\xrightarrow{L^1}X_N$, $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$. □

下一结论不再要求一致可积性.

2.35 定理. *若上鞅 $X_n \geq 0$, 则对任意停时 N, 有 $\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_N$.*

證明. 由定理 2.7 和 Fatou 引理, $\mathbb{E}X_0 \geq \liminf_n \mathbb{E}X_{N\wedge n} \geq \mathbb{E}X_N$. □

下一定理在处理某些有界增量问题时是很有帮助的:

2.36 定理. *若存在常数 B 使得下鞅 X_n 满足 $\mathbb{E}\left(|X_{n+1}-X_n||\mathcal{F}_n\right) \leq B$ a.s. , 停时 N 满足 $\mathbb{E}N < \infty$, 则 $X_{N\wedge n}$ 一致可积, 从而 $\mathbb{E}X_N \geq \mathbb{E}X_0$.*

證明. 首先注意到 $X_{N\wedge n} = X_0 + \sum_{m=0}^{n}(X_{m+1}-X_m)\mathbb{I}_{\{m<N\}}$, 于是对任意 n, 成立

$$|X_{N\wedge n}| \leq |X_0| + \sum_{m=0}^{\infty} |X_{m+1}-X_m|\mathbb{I}_{\{N>m\}}.$$

要证 $\{X_{N\wedge n}\}$ 一致可积, 只需证明右侧期望有限, 从而 $|X_{N\wedge n}|$ 被某个可积随机变量控制. 由于 $\{N>m\} = \{N \leq m\}^c \in \mathcal{F}_m$, 于是

$$\mathbb{E}\left(|X_{m+1}-X_m|; N>m\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(|X_{m+1}-X_m||\mathcal{F}_m\right); N>m\right) \leq B\mathbb{P}(N>m),$$

进而 $\mathbb{E}\sum_m |X_{m+1}-X_m|\mathbb{I}_{\{N>m\}} \leq B\sum_m \mathbb{P}(N>m) = B\mathbb{E}N < \infty$. □

2.7 一維隨機游走中的應用

考虑一维随机游走: 初始位置 S_0 为常数, $S_n = S_{n-1}+\xi_n$, 其中 ξ_i i.i.d. 满足 $\mathbb{E}\xi_i = \mu$. 易见 $X_n = S_n - n\mu$ 为线性鞅, 再利用定理 2.36, 我们可以把固定时间推广至随机时间:

2.37 定理 (Wald 等式). *若 $S_0 = 0$, 停时 N 满足 $\mathbb{E}N < \infty$, 则 $\mathbb{E}S_N = \mu\mathbb{E}N$.*

證明. 注意到 $\mathbb{E}(|X_{n+1}-X_n||\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(|\xi_{n+1}-\mu||\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}|\xi_{n+1}-\mu| \leq \mathbb{E}|\xi_i|+\mu \leq B$. 于是 $\mathbb{E}X_N = \mathbb{E}X_0 = 0$, 即 $\mathbb{E}S_N = \mu\mathbb{E}N$. □

2.38 定理 ($\mathbb{Z}^1$ 上的對稱隨機游走). *若 $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$, 随机游走从某一点 $x \in [a,b]$ 出发, 即 $S_0 = x$, 记停时 $N = \min\{n\colon S_n \notin (a,b)\}$, 则*

(i) $\mathbb{P}_x(S_N = a) = \dfrac{b-x}{b-a}$, $\quad \mathbb{P}_x(S_N = b) = \dfrac{x-a}{b-a}$;

(ii) $\mathbb{E}_x N = (b-x)(x-a)$, $\mathbb{E}_0 N = -ab$.

證明. (i) 若连续 $(b-a)$ 次增量都是 $+1$, 则一定走出区间 $(b-a)$, 于是

$$\mathbb{P}_x(N > b-a) \leq 1-2^{-(b-a)}, \quad \mathbb{P}_x(N > m(b-a)) \leq \left(1-2^{-(b-a)}\right)^m \to 0(\text{ as } m\to\infty).$$

即 $\mathbb{P}_x(N<\infty)=1$, l 从而 $\mathbb{E}_x N=\sum_m \mathbb{P}_x(N>m)<\infty$. 此时对于鞅 S_n, 由 Wald 等式有 $\mathbb{E}_x(S_n-S_0)=\mu\mathbb{E}_x N=0$, 即 $\mathbb{E}_x S_N=\mathbb{E}_x S_0=x$. 另一方面, 因为 $S_N=b$ 或 a, 于是

$$\mathbb{E}_x S_N=a\mathbb{P}_x(S_N=a)+b\mathbb{P}_x(S_N=b)=a\mathbb{P}_x(S_N=a)+b(1-\mathbb{P}_x(S_N=a)).$$

这样我们建立了关于 $\mathbb{E}S_N$ 的两个等式, 可以解出两个目标概率的表达式.

(ii) 由 $\sigma^2=\mathbb{E}\xi_i^2=1$, 于是 $X_n:=S_n^2-n\sigma^2=S_n^2-n$ 为鞅, 进一步地, 停止过程 $X_{N\wedge n}=S_{N\wedge n}^2-N\wedge n$ 为鞅, $\mathbb{E}_x(S_{N\wedge n}^2-N\wedge n)=\mathbb{E}_x S_0^2=x^2$. 由单调收敛定理, $\mathbb{E}_x(N\wedge n)\uparrow\mathbb{E}_x N$, 于是

$$\mathbb{E}_x N=\mathbb{E}_x S_N^2-x^2=a^2\mathbb{P}_x(S_N=a)+b^2\mathbb{P}_x(S_N=b)-x^2=(b-x)(x-a).$$

$\square$

3 馬氏鏈

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 状态空间 $(S, \mathcal{S})$ 可测. 称函数 $p\colon S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ 为转移概率, 如果

(i) 对任意 $x \in S$, $A \mapsto p(x, A)$ 为 $(S, \mathcal{S})$ 上的概率测度;

(ii) 对任意 $A \in \mathcal{S}$, $x \mapsto p(x, A)$ 为可测函数.

称 X_n 为适应 $\mathcal{F}_n$, 转移概率为 p 的 Markov 链, 如果对任意 $B \in \mathcal{S}$ 有

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = p(X_n, B), \tag{5}$$

其中条件概率由条件期望给出: $\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) := \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X_{n+1} \in B\}} | \mathcal{F}_n)$.

3.1 定義、實現

给定转移概率 p, 初始分布 $X_0 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mu$, 我们可以定义一族有限维分布:

$$\mathbb{P}_\mu(X_j \in B_j, 0 \le j \le n) = \int_{B_0} \mu(\mathrm{d}x_0) \int_{B_1} p(x_0, \mathrm{d}x_1) \cdots \int_{B_n} p(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n).$$

可以看到这样的有限维分布是相容的 (由 $p(x, \cdot)$ 为 $(S, \mathcal{S})$ 上的概率测度可知第二个等号成立):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(X_j \in B_j, 0 \le j \le n; X_{n+1} \in S) &= \int_{B_0} \mu(\mathrm{d}x_0) \int_{B_1} p(x_0, \mathrm{d}x_1) \cdots \int_S p(x_n, \mathrm{d}x_{n+1}) \\ &= \int_{B_0} \mu(\mathrm{d}x_0) \int_{B_1} p(x_0, \mathrm{d}x_1) \cdots \int_{B_n} p(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) = \mathbb{P}_\mu(X_j \in B_j, 0 \le j \le n). \end{aligned}$$

于是由 Kolmogorov 扩张定理 A.2, 概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 可以唯一扩张至序列空间 $(S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu)$. 于是相应的 Markov 链可以通过坐标过程来典则实现 (同分布):

3.1 定理 (典则實現). *对于 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots) \in S^{\mathbb{N}}$, 坐标映射 (可测!)*

$$X_n\colon (S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}}) \to (S, \mathcal{S}), \quad \omega \mapsto \omega_n$$

满足(5), 即为适应流 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots X_n)$ 的 Markov 链.

證明. 事实上, 由条件期望的定义, 这相当于对任意 $A = \{X_0 \in B_0, \cdots, X_n \in B_n\} \in \mathcal{F}_n$, $B \in \mathcal{S}$, 成立

$$\mathbb{E}_\mu\left(\mathbb{I}_{\{X_{n+1} \in B\}}; A\right) = \mathbb{E}_\mu(p(X_n, B); A).$$

左边为

$$\int_A \mathbb{I}_{\{X_{n+1}\in B\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_\mu = \mathbb{P}_\mu(X_0\in B_0,\cdots,X_n\in B_n,X_{n+1}\in B)$$
$$=\int_{B_0}\mu(\mathrm{d}x_0)\int_{B_1}p(x_0,\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{B_n}p(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)p(x_n,B),$$

目标等式的右侧为 $\int_A p(X_n,B)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_\mu$, 要证两边相等, 我们先从示性函数出发: 对于 $C\in\mathcal{S}$,

$$\int_{B_0}\mu(\mathrm{d}x_0)\cdots\int_{B_n}p(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\mathbf{1}_C(x_n)=\int_{B_0}\mu(\mathrm{d}x_0)\cdots\int_{B_n\cap C}p(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)$$
$$=\mathbb{P}_\mu(X_j\in B_j,0\le j<n;X_n\in B_n\cap C)=\mathbb{P}_\mu(X_j\in C;A)=\int_A\mathbf{1}_C(X_n)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_\mu,$$

由线性性, 对于简单函数 f 成立

$$\int_{B_0}\mu(\mathrm{d}x_0)\cdots\int_{B_n}p(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)f(x_n)=\int_C f(X_n)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_\mu.$$

再由有界收敛定理, 对任意的有界可测函数 f, 上式依然成立. 特别地, 取 $f(x)=p(x,B)$.

□

若 X_n 有转移概率 p, 则有

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)=\int p(X_n,\mathrm{d}y)f(y). \tag{6}$$

3.2 馬氏性

在典则概率空间 $(S,\mathcal{S})$ 上实现 Markov 链容许我们定义推移算子, 进而叙述 Markov 性.

3.2 定義 (推移算子). 对于 $\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)\in S^{\mathbb{N}}$, 定义转移算子

$$\theta_k\colon S^{\mathbb{N}}\to S^{\mathbb{N}},\quad(\omega_0,\omega_1,\cdots)\mapsto(\omega_k,\omega_{k+1},\cdots).$$

3.3 定理 (Markov 性). 若 $Y\colon(S^{\mathbb{N}},\mathcal{S}^{\mathbb{N}})\to(\mathbb{R},\mathcal{R})$ 为有界可测函数, 则有

$$\mathbb{E}_\mu(Y\circ\theta_m|\mathcal{F}_m)=\mathbb{E}_{X_m}Y.\ (\text{即}\mathbb{E}_{\omega_m}Y)$$

Markov 性的一个直接结果是著名的 Chapman-Kolmogorov 方程.

3.4 定理 (C-K 方程). $\mathbb{P}_x(X_{m+n}=z)=\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_m=y)\mathbb{P}_y(X_n=z)$.

證明. 由于 $\mathbb{I}_{\{X_n=z\}}\circ\theta_m=\mathbb{I}_{\{X_{n+m}=z\}}$,

$$\mathbb{P}_x(X_{m+n}=z)=\mathbb{E}_x\mathbb{I}_{\{X_{n+m}=z\}}=\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(\mathbb{I}_{\{X_{n+m}=z\}}|\mathcal{F}_m))$$
$$=\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(\mathbb{I}_{\{X_n=z\}}\circ\theta_m|\mathcal{F}_m))=\mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_m}\mathbb{I}_{\{X_n=z\}})=\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_m=y)\mathbb{P}_y(X_n=z).$$

□

强 Markov 性是指 Markov 性不止适用于固定时间, 也可以推广至随机时间.

3.5 定理 (强 *Markov* 性)**.** *若可测函数序列* $Y_n\colon (S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ *一致有界:* $|Y_n| \le M$*, 则对于停时* N*, 在* $\{N < \infty\}$ *上有*

$$\mathbb{E}_\mu(Y_N \circ \theta_N | \mathcal{F}_N) = \mathbb{E}_{X_N} Y_N.$$

證明. 设 $A \in \mathcal{F}_N$, 即有 $A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n$, 于是按 N 的取值分解, 再由 Markov 性

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu(Y_N \circ \theta_N; A \cap \{N < \infty\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_\mu(Y_n \circ \theta_n; A \cap \{N = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_\mu(\mathbb{E}_{X_n} Y_n; A \cap \{N = n\}) = \mathbb{E}_\mu(\mathbb{E}_{X_n} Y_n; A \cap \{N < \infty\}). \end{aligned}$$

□

下面两个定理是强 Markov 性的应用. 定义停时序列 $T_y^0 = 0$, $T_y^k := \inf\{n > T_y^{k-1}\colon X_n = y\}$ 为第 k 次到达 y 的时刻, 记 $T_y = T_y^1$, $\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ 为从 x 出发, 在有限时间内到达 y 的概率. 我们有如下直观结论:

3.6 定理. $\mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy} \cdot \rho_{yy}^{k-1}$.

證明. $k = 1$ 时结论是平凡的, 下面总假定 $k \ge 2$. 定义 $Y = \mathbb{I}_{\{T_y < \infty\}}$ 为有限时间到达 y 的示性函数. 令 $N = T_y^{k-1}$ 为停时, 若 $T_y^k < \infty$, 有 $Y \circ \theta_N \equiv 1$. 由全期望公式、强 Markov 性,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) &= \mathbb{E}_x(Y \circ \theta_N; N < \infty) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(Y \circ \theta_N | \mathcal{F}_N); N < \infty) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_y \mathbb{I}_{\{T_y < \infty\}}; N < \infty) = \mathbb{E}_x(\rho_{yy} \cdot \mathbb{I}_{\{N < \infty\}}) = \rho_{yy} \mathbb{P}_y(T_y^{k-1} < \infty), \end{aligned}$$

由归纳法可见结果成立. □

3.7 定理 (反射原理)**.** *设 i.i.d. 随机变量序列* (ξ_i) *的分布关于* 0 *对称, 则* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ *为对称随机游走. 若* $a > 0$*, 则*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{m \le n} S_m \ge a\right) \le 2 \cdot \mathbb{P}(S_n \ge a).$$

證明. 考虑停时 $N := \inf\{m \le n\colon S_m > a\}$ 为 S_m 首次超出 a 的时刻. 则不等式左边有

$$\mathbb{P}_0\left(\sup_{m \le n} S_m > a\right) = \mathbb{P}_0(N \le n) = \mathbb{E}_0 \mathbb{I}_{\{N \le n\}}.$$

即左边只在 $\{N \le n\}$ 时取 1, 否则取 0. 于是我们只需证明在 $\{N \le n\}$ 上有 $\mathbb{P}(S_n \ge a) \ge 1/2$. 考虑随机变量 $Y_m(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_{n-m} \ge a\}}$(这暗示了 $Y_m = 1$ 需满足 $m \le n$). 于是在 $m \le n$ 时有 $(Y_m \circ \theta_m)(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_n \ge a\}}$. 此时由全期望公式、强 Markov 性, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(S_n \ge a; N \le n) &= \mathbb{E}_0(\mathbb{I}_{\{\omega_n \ge a\}}; N \le n) = \mathbb{E}_0(Y_N \circ \theta_N; N \le n)\\ &= \mathbb{E}_0(\mathbb{E}_0(Y_N \circ \theta_N | \mathcal{F}_N); N \le n)) = \mathbb{E}_0(\mathbb{E}_{S_N} Y_N; N \le n).\end{aligned}$$

于是对于 $S_N = y \ge a$, 由 ξ_i 分布关于 0 对称, 成立

$$\mathbb{E}_{S_N} Y_N = \mathbb{E}_y \mathbb{I}_{\{S_{n-N} \ge a\}} = \mathbb{P}_y(S_{n-N} \ge a) \ge \mathbb{P}_y(S_{n-N} \ge y) \ge 1/2.$$

其中 $\mathbb{P}_y(S_{n-N} \ge y) = \mathbb{P}_y(S_{n-N} \le y)$, $\mathbb{P}_y(S_{n-N} \ge y) + \mathbb{P}_y(S_{n-N} \le y) \ge 1$. 综上, 有 $\mathbb{P}_0(S_n \ge a; N \le n) \ge \mathbb{E}_0(\frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{\{N \le n\}}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(N \le n)$, 于是命题成立. □

3.3 常返與暫留

称状态 $y \in S$ 为常返的, 如果 $\rho_{yy} = 1$, 否则是暂留的. 于是由定理 3.6 可知, 常返意味着对任意 k 有 $\mathbb{P}_y(T_y^k < \infty) = 1$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_y(T_y^k = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_y(T_y^k < \infty) = \infty,$$

由 Borel-Cantelli 第 II 引理, 可知 $\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ i.o.}) = 1$, 即 X_n 会无限次回到 y. 若 y 是暂留的, 记 $N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_n = y\}}$ 为有限时间内到达 y 的次数, 由引理 A.1 可以依如下方式计算期望

$$\mathbb{E}_x N(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(N(y) \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{yy}^{k-1} = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} < \infty.$$

事实上, 这里的 $\mathbb{E}_x N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(x, y)$. 于是有下述定理:

3.8 定理. 状态 y 是常返的 $\iff$ $\mathbb{E}_x N(y) = \infty$.

3.9 定理 (常返的傳染性)**.** 若 x 是常返的且 $\rho_{xy} > 0$, 则 y 也是常返的且有 $\rho_{yx} = 1 = \rho_{xy}$.

證明. 由于 $\rho_{xy} > 0$, $K := \inf\{k \colon p^{(k)}(x, y) > 0\}$ 存在, 于是存在点列 $\{y_1, \cdots, y_{K-1}\}$ 使得

$$p(x, y_1)p(y_1, y_2) \cdots p(y_{K-1}, y) > 0.$$

由 K 的极小性, $x \notin \{y_i\}$. 若 $\rho_{yx} < 1$, 则

$$\mathbb{P}_x(T_x = \infty) \ge p(x, y_1)p(y_1, y_2) \cdots p(y_{K-1}, y)(1 - \rho_{yx}) > 0$$

与状态 x 常返矛盾, 于是只能有 $\rho_{yx}=1$. 此时存在某个 L 使得 $p^{(L)}(y,x)>0$, 于是

$$p^{(L+n+K)}(y,y)\ge p^{(L)}(y,x)p^{(n)}(x,x)p^{(K)}(x,y),$$

关于 n 求和, 我们有

$$\mathbb{E}_yN(y)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(x,y)\ge\sum_{n=1}^{\infty}p^{(L+n+K)}(y,y)\ge p^{(L)}(y,x)\left[\sum_{n=1}^{\infty}p^{(n)}(x,x)\right]p^{(K)}(x,y)=\infty.$$

于是由上一定理, y 也是常返的. 再由 $\rho_{yx}=1>0$, 有 $\rho_{xy}=1$. □

称 $C\subset S$ 为闭的, 如果 $x\in C$ 且 $\rho_{xy}>0$ 意味着 $y\in C$. 此时对于 $x\in C$, $\mathbb{P}_x(X_n\in C)=1$ 对全体 n 成立. 称 $D\subset S$ 为不可约的, 如果 $x,y\in D$ 意味着 $\rho_{xy}>0$.

3.10 定理. *若 C 为有限闭集, 则 C 包含某个常返态. 进一步地, 若 C 不可约, 则 C 是常返的.*

證明. 若 C 中不含常返态, 即 $\rho_{yy}<1$, $\mathbb{E}_xN(y)<\infty$, $\forall x,y\in C$. 于是由 C 为有限闭集, 有

$$\infty>\sum_{y\in C}\mathbb{E}_xN(y)=\sum_{y\in C}\sum_{n=1}^{\infty}p^{(n)}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in C}p^{(n)}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n\in C)=\sum_{n=1}^{\infty}1.$$

推出矛盾, 于是 C 中一定有常返态. 若 C 不可约, 则由传染性 3.9 可知 C 是常返的. □

3.4 平穩測度

称测度 μ 是平稳的, 如果 $\mu p=\mu$, 即

$$\sum_x\mu(x)p(x,y)=\mu(y),\quad\forall y\in S,$$

这等价于 $\mathbb{P}_\mu(X_1=y)=\mu(y)$. 由 C-K 方程和归纳法可知 $\mu p^{(n)}=\mu$, 即 $\mathbb{P}_\mu(X_n=y)=\mu(y)$. 进一步地, 若 μ 为概率测度, 则称 μ 为平稳分布, 这给出了 X_n 的渐进分布: 以平稳分布 μ 为初始分布的过程的有限维分布是推移不变的.

3.11 示例 (*$\mathbb{Z}^1$ 上的非對稱隨機游走*)**.** *状态空间 $S=\mathbb{Z}$, $p(n,n+1)=p$, $p(n,n-1)=q=1-p$. $\mu\equiv1$ 显然为平凡的平稳测度, 事实上, 还有非平凡的平稳测度 $\mu(n)=(p/q)^n$:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu(n)p(n,m)=\mu(m+1)p(m+1,m)+\mu(m-1)p(m-1,m)=(p/q)^m=\mu(m).$$

称测度 μ 是可逆的, 如果对任意 $x,y\in S$, 成立

$$\mu(x)p(x,y)=\mu(y)p(y,x).$$

即从分布 μ 出发、到达的可以验证可逆测度总是平稳的. 可逆测度给出了一个可逆的 Markov 链:

3.12 定理. *设 μ 为平稳测度, Markov 链初始时刻 X_0 分布为 μ, 则对于 $0 \le m \le n$, $Y_m := X_{n-m}$ 为初始测度为 μ 的 Markov 链且转移概率为*

$$q(x,y) = \frac{\mu(y)p(y,x)}{\mu(x)},$$

称 q 为对偶转移概率. 特别地, μ 为可逆测度时 $p = q$.

可逆测度不常有而平稳测度常有, 下面给出了由常返态构造平稳测度的方法:

3.13 定理 (平稳测度存在性)**.** *设 x 为常返态, 令 $T_x := \inf\{n \ge 1 \colon X_n = x\}$. 则有平稳测度:*

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x-1} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y; T_x > n).$$

此外, 这一测度在某种意义下是唯一的:

3.14 定理 (平稳测度唯一性)**.** *若 p 是不可约、常返的, 则平稳测度在相差数乘变换下的意义下唯一.*

现在我们考虑平稳分布 π(这里强调它是一个概率测度).

3.15 定理. *若存在平稳分布 π, 则所有测度大于零的状态均常返.*

證明. 当 $\pi(y) > 0$ 时, 由 Fubini 定理, $\pi p^{(n)} = \pi$,

$$\mathbb{E}_\pi N(y) = \sum_x \left(\pi(x) \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(x,y)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(y) = \infty.$$

另一方面, 由于 $\mathbb{E}_x N(y) = \rho_{xy}/(1-\rho_{yy})$, 有

$$\infty = \mathbb{E}_\pi N(y) = \sum_x \pi(x) \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \le \frac{\sum_x \pi(x)}{1-\rho_{yy}} = \frac{1}{1-\rho_{yy}},$$

于是只能有 $\rho_{yy} = 1$. □

3.16 定理. *若 P 不可约且有平稳分布 π, 则 $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x T_x$.*

證明. 由不可约, 对任意 y 满足 $\pi(y) > 0$, 存在某个 k 使得 $p^{(k)}(y,x) > 0$, 于是 $\pi(x) > \pi(y)p^{(k)}(y,x) > 0$, $\forall x$. 再由上一定理, 所有状态都是正常返的. 根据定理 3.13,

$$\mu_x(y) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y; T_x > n)$$

给定了满足 $\mu_x(x)=1$ 的平稳测度. 下面令其满足正则条件.

$$\sum_y \mu_x(y)=\sum_y\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_X(X_n=y,T_x>n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x>n)=\mathbb{E}_xT_x.$$

于是由平稳分布的唯一性, $\pi(x)=\mu_x(x)/\mathbb{E}_xT_x=1/\mathbb{E}_xT_x$. □

称状态 x 是正常返的, 如果 $\mathbb{E}_xT_x<\infty$, 否则称零常返的.

3.17 定理. *若 P 不可约, 则下述命题等价:*

(i) 某个 x 正常返;

(ii) 存在平稳分布;

(iii) 全体状态正常返.

證明. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* 由定理 3.13, 存在平稳测度 μ_x. 再由 $\mathbb{E}_xT_x<\infty$, 根据定理 3.16 我们可以对其归一化:

$$\pi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n=y,T_x>n)/\mathbb{E}_xT_x.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* 在定理 3.16 我们说明了不可约、存在平稳分布意味着所有状态的平稳测度均大于 0, 于是 $\mathbb{E}_yT_y=1/\pi(y)<\infty$, $\forall y$. □

4 遍歷論

称序列 $(X_n)_{n\geq 0}$ 为平稳序列, 如果对任意 $k\in\mathbb{N}$, 转移序列 $(X_{k+n})_{n\geq 0}$ 与其同分布, 即对任意 m 有

$$(X_0\cdots,X_m)\overset{L}{\sim}(X_k,\cdots,X_{k+m}),\quad \forall k.$$

特别地, 取 $m=0$ 有 X_k 总与 X_0 同分布. 本节我们总是考虑如下三个经典示例:

4.1 示例. 1. *(i.i.d. 序列)* 独立同分布序列 (X_n).

2. *(Markov 链)* 具有平稳初始分布 π 的 Markov 链, 即 $\pi(A)=\int\pi(\mathrm{d}x)p(x,A)$. 此时 $\mathbb{P}(X_1\in A)=\int\pi(\mathrm{d}x_0)p(x_0,A)=\pi(A)$, 于是 $X_1\overset{L}{\sim}\pi$, 由归纳法有 $X_n\overset{L}{\sim}\pi$.

3. *($\mathbb{S}^1$ 上的旋转)* 考虑概率空间 $\Omega=[0,1)$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ 为 Lebesgue 测度. 给定 $\theta\in(0,1)$, 定义随机变量序列

$$X_n(\omega):=\omega+n\theta\mod 1=\omega+n\theta-[\omega+n\theta],$$

此时 $p(x,x+\theta-[x+\theta])=1$.

4.2 定義 (保測映射). 保测映射 $\varphi\colon\Omega\to\Omega$ 为保持测度 $\mathbb{P}$ 的连续可测自映射, 即

$$\varphi_*\mathbb{P}=\mathbb{P},\qquad \text{其中}\varphi_*\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\varphi^{-1}A).$$

称 $\varphi_*\mathbb{P}$ 为 $\mathbb{P}$ 在 φ 下的前推测度 *(pushforward measure)*. 我们记 $\varphi^0=id$, $\varphi^n=\varphi\circ\varphi^{n-1}$.

4.3 注. 对任意 $X\in\mathcal{F}$, $X_n(\omega):=X(\varphi^n\omega)$ 定义了一个平稳序列: 记 $A=\{\omega\colon(X_0(\omega),\cdots X_n(\omega))\in B\}$, 其中 $B\in\mathcal{R}^{n+1}$. 注意到 $X_{k+m}(\omega)=X(\varphi^{k+m}\omega)=X\circ\varphi^m(\varphi^k\omega)=X_m(\varphi^k\omega)$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_k(\omega),\cdots X_{k+n}(\omega))\in B)&=\mathbb{P}((X_0(\varphi^k\omega),\cdots X_n(\varphi^k\omega))\in B)=\mathbb{P}(\varphi^k\omega\in A)=\mathbb{P}(\omega\in A)\\&=\mathbb{P}((X_0(\omega),\cdots X_n(\omega))\in B).\end{aligned}$$

事实上, 每一个平稳序列都可以由可测映射与保测映射的复合来实现. 若 $(Y_n)_{n\geq 0}$ 的状态空间 $(S^{\mathbb{N}},\mathcal{S}^{\mathbb{N}})$ 容许我们使用 Kolmogorov 扩张定理 A.2 , 于是可以在序列空间 $(S^{\mathbb{N}},\mathcal{S}^{\mathbb{N}})$ 上构造唯一的概率测度, 使得坐标过程 $X_n(\omega)=\omega_n$ 与 Y_n 同分布. 那么我们令 $X(\omega)=\omega$, φ 为一阶推移算子, 即 $\varphi(\omega_0,\omega_1,\cdots)=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$. 则 φ 为保测映射且 $X_n(\omega)=X(\varphi^n\omega)$. 这样, 我们就可以引入动力系统理论中的工具来对 X_n 的渐进性质进行分析.

称 $A\in\mathcal{F}$ 为 φ-不变的, 如果有 $\varphi^{-1}(A)=A$ (这里等式成立, 如果 $\mathbb{P}(\varphi^{-1}(A)\Delta A)=0$). 记 $\mathcal{I}$ 为 φ-不变集的全体, 则 $\mathcal{I}$ 天然地构成了一个 σ-域.

4.4 定義（遍歷性）. 称 φ 为遍历的如果 $\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ 为平凡 σ-域. 换而言之, 对于 $A \in \mathcal{I}$, 只能有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 $\mathbb{P}(A) = 1$.

这说明若 φ 不是遍历的, 那么全空间可以分割为 A 和 A^c 满足 $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A^c) > 0$, $\varphi(A) = A$, $\varphi(A^c) = A^c$. 换言之, φ 是可约的.

4.5 示例. 1. *(i.i.d. 序列) 考虑样本空间 $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, φ 为推移算子. φ-不变集 A 满足*

$$\begin{aligned}\{\omega \colon \omega \in A\} &= \{\omega \colon \varphi\omega \in A\} \in \sigma(X_1, X_2, \cdots) \\ &= \{\omega \colon \varphi^n\omega \in A\} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots),\end{aligned}$$

于是 $A \in \bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots) =: \mathcal{T}$ 为尾 σ-域. 由 Kolmogorov 0-1 律 A.3 可知 $\mathcal{T}$ 平凡.

2. *(Markov 链) 若 S 不可约, $\pi > 0$, 则 $\mathcal{I}$ 平凡.*

證明. 任取 $A \in \mathcal{I}$, 于是 $\mathbf{1}_A \circ \theta_n = \mathbf{1}_A$, 于是由 Markov 性有

$$\mathbb{E}_\pi(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_\pi(\mathbf{1}_A \circ \theta_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n} \mathbf{1}_A,$$

其中 $\mathcal{F}_n$ 为 X_n 诱导的自然流, 于是由 Lévy 0-1 律 2.29, $\mathbb{E}_\pi(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) \xrightarrow{a.s.} \mathbf{1}_A$. 又 X_n 常返、不可约, 由 Borel-Cantelli 第 II 引理, 可知 $\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ i.o.}) = 1$, $\forall x, y$. 于是 $\mathbb{E}_{X_n} \mathbf{1}_A \to \mathbb{E}_x \mathbf{1}_A \equiv C$, $\forall x$. 注意到 $\mathbf{1}_A$ 为只能取 0 或 1 的随机变量, 于是 $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. □

3. *($\mathbb{S}^1$ 上的旋转) 为遍历的当且仅当 θ 为无理数.*

4.6 定理（Birkhoff 遍歷定理）. 对任意 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m \omega) \to \mathbb{E}(X | \mathcal{I}) \ \ a.s. \ 且 L^1. \tag{7}$$

更进一步地, 若 φ 遍历, 则 $\mathbb{E}(X | \mathcal{I}) = \mathbb{E}(X)$.

4.7 注. 等式(7)中左侧可以看做关于时间的平均, 右侧可以看做关于空间的平均.

4.8 示例. 1. *(i.i.d. 序列) 由 $\mathcal{I}$ 平凡, 应用遍历定理*

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X_m \to \mathbb{E}X_0 \ \ a.s. \ 且 L^1.$$

其中 a.s. 收敛即强大数定律.

2. *(平稳分布的 Markov 链) 令 X_n 为可数状态空间上具有平稳分布 π 的不可约马尔可夫链, 函数 $f \colon S \to \mathbb{R}$ 满足 $\sum_x |f(x)| \pi(x) < \infty$. 应用遍历定理可得*

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) \to \sum_x f(x)\pi(x) \ \ a.s. \ 且 L^1.$$

3. *($\mathbb{S}^1$ 上的旋转)* 若 θ 为无理数, 此时 $\mathcal{I}$ 平凡. 对任意 $A \in \mathcal{B}([0,1))$, 取 $X(\omega) = \mathbf{1}_A$, 应用遍历定理可得

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{I}_{\{\varphi^m \omega \in A\}} \to |A| \quad a.s..$$

即平均到达 A 的次数等于 A 的体积.

5 布朗運動

5.1 定義、實現、性質

称实值随机过程 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一维布朗运动, 如果它满足

a. (有限维独立增量) $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 有 $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立;

b. (Gauss 过程) 对任意 $s, t \geq 0$, 有 $B_{s+t} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t)$, 即

$$\mathbb{P}(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \mathrm{d}x;$$

c. (轨道连续性) $\mathbb{P}(t \mapsto B_t \text{ 连续}) = 1$.

若初始状态满足 $B_0 = 0$, 称标准布朗运动, 其有如下等价定义, 即连续的中心 *Gauss* 过程:

a'. B_t 为 Gauss 过程, 即其任意有限维分布为正态分布;

b'. 期望 $\mathbb{E}B_s = 0$, 协方差 $\mathbb{E}B_sB_t = s \wedge t$;

c'. $t \mapsto B_t$ a.s. 连续.

5.1 注. 显然 a. 和 b. 意味着 a'.. 期望和协方差的计算利用了独立增量性: 若 $t > s$ 则

$$\mathbb{E}_0[B_tB_s] = \mathbb{E}_0[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}_0 B_s^2 = s.$$

5.2 定義 (高維布朗運動). 称 $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d) \in \mathbb{R}^d$ 为高维布朗运动, 如果 $\{B_t^i\}$ 为独立的布朗运动. 其概率密度函数为

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\|y - x\|^2}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{8}$$

布朗运动的实现是由 Weiner 给出的, 因此又称 *Weiner* 过程. 考虑空间 $C = C([0, \infty), \mathbb{R})$,

Weiner 证明了对任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $(C, \mathcal{C})$ 上的测度 $\mathbb{P}_x$, 使得 $\omega(t) =: B_t(\omega) \in C$ 为从 x 出发的布朗运动的轨道.

从定义出发, 我们立刻得到布朗运动具有如下性质:

5.3 定理 (推移不變性)**.** $\{B_t - B_0\}_{t\geq 0}$ 独立于 B_0, 且为标准布朗运动.

證明. 这等价于 B_0 和 $B_t - B_0$ 的任意有限维分布独立. 定义 $\mathcal{A}_1 := \sigma(B_0)$,

$$\mathcal{A}_2 := \bigcup_n \sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

于是 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 为独立的 π 类, 再由 $\pi - \lambda$ 定理, 有命题成立. □

由标准布朗运动的等价定义:

5.4 定理 (標度變換)**.** 若 B_t 为标准布朗运动, 对任意 $t > 0$, $K \neq 0$, $(K^{-1}B_{K^2t})_{t\geq 0}$ 亦为布朗运动. 一般情况下, 我们常用分布意义下的等式:

$$\{B_{st}\}_{s\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \{\sqrt{t}B_s\}_{s\geq 0}.$$

證明. 由于 $B_{st} \sim \mathcal{N}(0, st)$, 这与 $\sqrt{t}B_s$ 有相同的概率密度函数, 于是二者有相同的有限维分布. □

5.5 定理. 若 B_t 为标准布朗运动, 那么 $X_0 = 0$, $X_t = tB_{1/t}$ 亦为标准布朗运动.

證明. 事实上 X_t 为 Gauss 过程: 首先协方差

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = ts\mathbb{E}(B_{1/t}B_{1/s}) = ts \cdot \frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s} = t \wedge s.$$

于是 $\mathbb{E}(B_t - B_s)^2$ 关键在于证明 $\mathbb{P}(\lim_{t\downarrow 0} X_t = 0) = 1$. □

5.6 定理 (軌道的 Hölder 連續性)**.** 布朗运动轨道 *Hölder* 连续连续但几乎处处不可微. 即对几乎任意的 ω, 存在 $C = C(\omega)$ 使得

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C(\omega)|t - s|^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1/2.$$

5.7 定理. 布朗运动在分布意义下唯一, 但轨道不唯一.

證明. 考虑标准布朗运动 B_t, 则 $-B_t$ 亦为标准布朗运动, 但是

$$\mathbb{P}(\omega\colon B_t(\omega) = -B_t(\omega),\ \forall t) = 0.$$

□

5.8 定義 (一次變差、平方變差). 考慮时间 T 和 $[0,T]$ 的一个划分 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n=T$, 记 $\Delta_i=t_i-t_{i-1}$, $\delta=\min_i\Delta_i$ 为划分的细度.

5.9 引理. 若 A 连续且有有限一次变差, 那么 $\langle A\rangle=0$.

證明. 令 $A(\Delta):=\max\{|x(t_i)-x(t_{i-1})|\colon 1\le i\le n\}$, 于是在划分变细时 □

5.10 定理 (平方變差).

證明. 由于 $T=\sum_{i=1}^n\Delta_i$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^2-T\right]^2=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n(|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^2-\Delta_i)\right]^2=I_1+I_2,$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n(|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^2-\Delta_i)^2\right]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^4-2\Delta_i|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|^2+\Delta_i^2\right)\\&=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(3\Delta_i^2-2\Delta_i^2+\Delta_i^2\right)=2\sum_{i=1}^n\Delta_i^2\le 2\cdot\delta\sum_{i=1}^n\Delta_i=2\delta T\to 0.\end{aligned}$$

再由独立性,

$$\begin{aligned}I_2&=2\sum_{i<j}\mathbb{E}(|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|^2-\Delta_i)(|B_{t_{j+1}}-B_{t_j}|^2-\Delta_j)\\&=2\sum_{i<j}\mathbb{E}(|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|^2-\Delta_i)\mathbb{E}(|B_{t_{j+1}}-B_{t_j}|^2-\Delta_j)=0\end{aligned}$$

□

布朗运动的二次变差会出现在随机积分的 Itô 公式中

5.2 馬氏性

为了叙述 Markov 性, 我们引入如下记号. 记自然流流 $\mathcal{F}_s^o:=\sigma(B_r;r\le s)$, $\mathcal{F}_s^+=\cap_{t>s}\mathcal{F}_t^o$ 为右连续流. 定义推移算子 $\theta_s\colon C\to C$ 为

$$(\theta_s\omega)(t)=\omega(s+t),\ t\ge 0.$$

5.11 定理 *(Markov 性)***.** 设 Y 为有界 $\mathcal{C}$-可测函数, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\mathbb{E}_x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s^+) = \mathbb{E}_{B_s} Y,$$

其中右边为函数 $\varphi(x) := \mathbb{E}_x Y$ 在 B_s 的取值.

5.12 定理. 若 $Z \in \mathcal{C}$ 有界, 那么对任意 $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, 几乎处处意义下成立

$$\mathbb{E}_x(Z | \mathcal{F}_s^+) = \mathbb{E}_x(Z | \mathcal{F}_s^o).$$

5.13 定理 *(Blumenthal 0-1 律)***.** 若 $A \in \mathcal{F}_0^+$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}$.

證明. 由于 $\mathbb{P}_x(B_0 = x) = 1$, 于是 $\mathcal{F}_0^o = \sigma(B_0)$ 在 $\mathbb{P}_x$ 下平凡 (其中事件的概率非 0 即 1), 结合上一定理有

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{E}_x \mathbf{1}_A = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_0^o) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_0^+) = \mathbf{1}_A \in \{0, 1\}.$$

□

换而言之, 这说明说明 $\mathcal{F}_0^+$ 也是在 $\mathbb{P}_x$ 下也是平凡的. 这一结果对于研究布朗路径的局部行为非常有用. 下面我们考虑一维布朗运动.

5.14 定理. 令 $\tau := \inf\{t \geq 0 \colon B_t > 0\}$ 为到达正半轴的首中时, 则 $\mathbb{P}_0(\tau = 0) = 1$.

證明. 由于 $\{B_t > 0\} \subseteq \{\tau \leq t\}$, 结合 *Gauss* 分布对称性有 $\mathbb{P}_0(\tau \leq t) \geq \mathbb{P}_0(B_t > 0) = 1/2$, $\forall t > 0$. 令 $t \downarrow 0$ 有 $\mathbb{P}_0(\tau = 0) \geq 1/2$. 另一方面, 由于 $\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0^+$, 根据 Blumenthal 0-1 律, $\mathbb{P}_0(\tau = 0)$ 只能为 1. □

5.15 定理. 令 $T_0 := \inf\{t > 0 \colon B_t = 0\}$ 为首返时, 则 $\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$.

称随机变量 $S \colon (\Omega, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$ 为 $\mathcal{F}_t^+$ 停时, 如果 $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+$. 在连续时间下, 这又等价于 $\{S < t\} \in \mathcal{F}_t^+$:

- 若 $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+$, 则 $\{S < t\} = \bigcup_n \{S \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t^+$;
- 若 $\{S < t\} \in \mathcal{F}_t^+$, 则 $\{S \leq t\} = \bigcap_n \{S < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_t^+$.

若 T_n 为一列停时, 则 $T_n \uparrow T$ 或 $T_n \downarrow T$ 都意味着 T 为停时. 定义关于停时 S 的随机时间流

$$\mathcal{F}_S := \{A \in \mathcal{F}_\infty \colon A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+,\ \forall t \geq 0\}.$$

5.16 定理 (强 Markov 性). 设 $(s,\omega)\mapsto Y_s(\omega)$ 为有界、$\mathcal{R}\times\mathcal{C}$ 可测函数, S 为停时. 对任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 在 $\{S<\infty\}$ 上成立

$$\mathbb{E}_x(Y_S\circ\theta_S|\mathcal{F}_S)=\mathbb{E}_{B_S}Y_S,$$

其中右边为函数 $\varphi(x,t)=\mathbb{E}_xY_t$ 在 $(x,t)=(B_S,S)$ 处的取值.

5.3 鞅性

称连续时间随机过程 $\{X_t;0\le t<\infty\}$ 为关于流 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的鞅, 如果对任意 $s\ge t$ 有

$$\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t)=X_t.$$

除了 B_t 本身具有鞅性外, 我们还可以利用布朗运动构造出一系列鞅, 证明的关键在于增量独立, 且为 *Gauss* 过程.

5.17 定理 (布朗運動的鞅性). B_t 为关于其自然流 $\mathcal{F}_t$ 的鞅

證明. 由独立增量性, $\mathbb{E}_x(B_t|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}_x(B_t-B_s|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}_x(B_s|\mathcal{F}_s)=0+B_s$. □

5.18 定理. B_t^2 不是鞅, 向下漂移后的 B_t^2-t 为鞅.

證明. 由独立增量性, Gauss 过程性,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(B_t^2|\mathcal{F}_s)&=\mathbb{E}_x(B_s^2+2B_s(B_t-B_s)+(B_t-B_s)^2|\mathcal{F}_s)\\&=B_s^2+2B_s\mathbb{E}(B_t-B_s|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}((B_t-B_s)^2|\mathcal{F}_s)\\&=B_s^2+0+(t-s).\end{aligned}$$

□

5.19 定理. $\exp(\theta B_t-\theta^2t/2)$ 为鞅.

證明.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(\exp(\theta B_t)|\mathcal{F}_s)&=\exp(\theta B_s)\cdot\mathbb{E}(\exp(\theta(B_t-B_s)|\mathcal{F}_s)\\&=\exp(\theta B_s)\cdot\exp\left(\theta^2\frac{t-s}{2}\right).\end{aligned}$$

□

5.20 定理. 若多项式 $u(t,x)$, 满足

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

则 $u(t,B_t)$ 为鞅.

證明. 对于初始位置 $B_0 = x$ 的一维布朗运动, 由于 $B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0,t)$, 于是 B_t 的概率密度函数为

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right),$$

可以验证它满足热方程 $\partial_t p_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t$. 考虑

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbb{E}_x u(t,B_t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,y)p_t(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,y)\cdot p_t(x,y) + u(t,y)\cdot \partial_t p_t(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,y)\cdot p_t(x,y) + u(t,y)\cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0\end{aligned}$$

其中最后一步由分部积分得到, 积分的收敛性由 u 为多项式保证. 于是 $\mathbb{E}_x u(t,B_t)$ 与 t 无关. 要使条件期望等于期望, 我们需要 Markov 性令 $v(r,x) = u(s+r,x)$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(u(t,B_t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}_x(u(t,B_{t-s}\circ\theta_s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_x(v(t-s,B_{t-s})\circ\theta_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}_{B_s}v(t-s,B_{t-s}) = \mathbb{E}_{B_s}v(0,B_0) = v(0,B_s) = u(s,B_s).\end{aligned}$$

□

5.4 伊藤公式

本节我们不加证明的介绍一些定理, 主要目标其在偏微分方程中的应用.

5.21 定理 (一維 *Itô* 公式)**.** 对于 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 则

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,\mathrm{d}s \quad a.s.. \tag{9}$$

5.22 推論. 特别地, 取 $f(x) = x^2$, 有

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s\,\mathrm{d}B_s + t. \tag{10}$$

5.23 定理. 设 $g \in C(\mathbb{R})$ 满足二阶矩条件 $\mathbb{E}\int_0^t |g(B_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty$, 则 $M_t := \int_0^t g(B_s)\,\mathrm{d}B_s$ 为连续鞅. 若没有矩条件, 则 M_t 为局部鞅. 即存在一列停时 $T_n \uparrow \infty$ 使得 $M_{t\wedge T_n}$ 为鞅.

5.24 推論. 对于函数 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $\int_0^t D_i f(B_s)\,\mathrm{d}B_s^i$ 为局部鞅.

5.25 定理 (高維 Itô 公式). 对于 $f \in C^2([0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)$, 有

$$f(t,B_t)-f(0,B_0)=\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,B_s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^d\int_0^t D_i f(s,B_s)\,\mathrm{d}B_s^i+\frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(s,B_s)\,\mathrm{d}s \quad a.s..$$

與拉氏方程的聯系

我们考虑布朗运动与 Laplace 方程 $\Delta\varphi=0$ 的基本解

$$\varphi(x)=\begin{cases}\log|x|, & d=2,\\ |x|^{2-d}, & d\geq 3,\end{cases}$$

之间的联系. 定义停时 $S_r := \inf\{t\colon |B_t|=r\}$. 则对于 $|x|<R$, $\mathbb{P}_x(S_R<\infty)=1$.

5.26 引理. 若 $v\in C^2(\mathbb{R}^d)$, 且满足 $\mathbb{E}\int_0^t\sum_{i=1}^d |v(B_s)|^2\,\mathrm{d}s<\infty$, 则由 Itô 公式

$$v(B_t)-\frac{1}{2}\int_0^t \Delta v(B_s)\,\mathrm{d}s \quad \text{为连续鞅.}$$

5.27 定理. 若 $|x|<R$, 则 $\mathbb{E}_x S_R=(R^2-|x|^2)/d$.

證明. 由定理 5.18, $|B_t|^2-d\cdot t=\sum_{i=1}^d[(B_t^i)^2-t]$ 为鞅, 于是

$$|x|^2=\mathbb{E}_x|B_0|^2=\mathbb{E}_x|B_{t\wedge S_R}|^2-d\cdot\mathbb{E}_x(t\wedge S_R),$$

令 $t\to\infty$, 由轨道连续性有命题成立. □

5.28 定理. 令 $\tau=S_r\wedge S_R$, $s<R$, 则 $\varphi(x)=\mathbb{E}_x\varphi(B_\tau)$

證明. 定义径向对称函数 $\psi(x)=g(|x|)\in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, 且在 $r<|x|<R$ 上满足 $\psi(x)=\varphi(x)$. 于是由伊藤公式

$$\psi(B_{t\wedge\tau})-\psi(B_0)=\sum_{i=1}^d\int_0^{t\wedge\tau} D_i\psi(B_s)\,\mathrm{d}B_s^i+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau}\Delta\psi(B_s)\,\mathrm{d}s,$$

其中由分部积分

$$\sum_{i=1}^d\int_0^{t\wedge\tau}(D_i\psi(B_s))^2\,\mathrm{d}B_s^i=\int_0^{t\wedge\tau}|\nabla\psi(B_s)|^2\,\mathrm{d}B_s=0$$

取期望有

$$\mathbb{E}_x\psi(B_{t\wedge\tau})-\psi(x)=\frac{1}{2}\mathbb{E}_x\Delta\psi(B_s)\,\mathrm{d}s=0.$$

令 $t\to\infty$, 有命题成立. □

與熱方程中的聯系

考虑热方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u, \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

其中 $u \in C^{1,2}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^d)$, f 为有界连续函数.

5.29 定理. *若 u 满足热方程 $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$, 则 $M_s = u(t-s, B_s)$ 为 $[0,t]$ 上的局部鞅.*

證明. 由高维 Itô 公式(8), 推论 5.24 可知下式为局部鞅.

$$\begin{aligned} &u(t-s,B_s) - u(t,B_0) \\ =& \int_0^s -u_t(t-r,B_r)\,\mathrm{d}r + \sum_{i=1}^d \int_0^s D_i u(t-r,B_r)\,\mathrm{d}B_r^i + \frac{1}{2}\int_0^s \Delta u(t-r,B_r)\,\mathrm{d}r \\ =& \sum_{i=1}^d \int_0^s D_i u(t-r,B_r)\,\mathrm{d}B_r^i \end{aligned}$$

□

5.30 定理. *若 u 为初值问题的有界解, 则一定有 $u(t,x) = \mathbb{E}_x f(B_t)$.*

證明. 此时 $M_s = u(t-s,B_s)$ 在 $[0,t]$ 为有界鞅, 由鞅收斂定理有

$$\lim_{s\uparrow t} M_s = M_t \equiv f(B_t) \text{ a.s.}$$

再由 M_s 一致可积, $\mathbb{E}_x f(B_t) = \mathbb{E}_x M_t = \mathbb{E}_x M_0 = u(t,x)$. □

A Tricks and Useful Theorems

A.1 引理**.** 若 $Y \geq 0$, $p > 0$, 则有

$$\mathbb{E}Y^p = \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(Y > y) \,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

特别的, 对于 $X \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) \,\mathrm{d}x.$$

进一步地, 若 X 取值范围为 $\mathbb{N}$, 则有

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

證明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y^p &= \int_\Omega Y^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \int_0^Y p y^{p-1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{I}_{\{Y>y\}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_0^\infty p y^{p-1} \int_\Omega \mathbb{I}_{\{Y>y\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \,\mathrm{d}y = \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(Y > y) \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

A.2 定理 *(Kolmogorov 擴張定理)***.** 给定 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ 上的相容概率测度, 即

$$\mu_{n+1}\left((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}\right) = \mu_n\left((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\right).$$

则在 $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{R}^\mathbb{N})$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbb{P}$ 使得

$$\mathbb{P}(\omega\colon \omega_i \in (a_i, b_i],\ 1 \leq i \leq n) = \mu_n\left((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\right).$$

A.3 定理 *(Kolmogorov 0-1 律)***.** 记 $\mathcal{F}'_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$, $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{F}'_n$ 为尾 σ-域, $A \in \mathcal{T}$ 为尾事件. 独立随机变量序列任一尾事件的概率非 0 即 1, 即 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{P}$-平凡的.

證明. 我们将证明, 对任意 $A \in \mathcal{T}$, 有 A 与自身独立: $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$, 从而 $\mathbb{P}(A)$ 只能非 0 即 1.

(a) 自然流 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ 与 $\mathcal{F}'_n$ 独立.

□

參考文獻

[Dur19] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Cambridge University Press, 5 edition, April 2019.

[Kle20] Achim Klenke. *Probability Theory: A Comprehensive Course.* Springer International Publishing, 3 edition, 2020.

[Wil91] David Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, February 1991.