概率论与数理统计习题课-1^{st}

其实只是一份复习提纲

2024 年 10 月 20 日

目录

1 概率论的方法论

(随机试验产生的) 事件	$\Longleftrightarrow$	(样本空间的) 集合	$\longrightarrow$	概率
事件描述	$\Longleftrightarrow$	集合运算	$\longrightarrow$	概率运算

具体地说, 事件 A、B 同时发生对应交集 $A \cap B$, A 或 B 发生对应并集 $A \cup B$, A 不发生对应余集 $\bar{A}$, A 发生但 B 不发生对应差集 $A - B$. 再对集合赋予概率, 就可以开心地计算形形色色事件的概率啦. 回忆概率的定义[1]:

1.1 定义 (概率). *设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $\mathbb{P}(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果集合函数 $\mathbb{P}(\cdot)$ 满足下列条件:*

(1) 非负性: 对每一个事件 A, 有 $\mathbb{P}(A) \geq 0$.

(2) 规范性: 对于必然事件 S, 有 $\mathbb{P}(S) = 1$.

(3) 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \ldots$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots.$$

在定义的基础上, 不难证明概率有如下性质.

(1) $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性.

(3) 若 $A\subset B$, 则 $\mathbb{P}(B-A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\geq 0$, 从而 $\mathbb{P}(B)\geq\mathbb{P}(A)$.

(4) 事件的概率总不超过 1.

(5) 逆事件的概率 $\mathbb{P}(\bar{A})=1-\mathbb{P}(A)$.

(6) 加法公式 $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

证明. (1) 对任意集合 A, 由 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cup\varnothing)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(\varnothing)$ 可得.

(2) 在可列可加性中, 取 $A_k=\varnothing$, $k>n$ 即可.

(3) 注意到 $A\cap(B-A)=\varnothing$, $A\cup(B-A)=A\cup B=B$, 由有限可加性可得.

(4) 任何事件 A 都是 S 的子集, 由上一性质有 $\mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(S)=1$.

(5) 由有限可加性可得.

(6) 由性质 (3), $\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cup B-A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

□

1.2 注. *逆事件概率在做题中常常有简化计算的作用, 关键词通常为“至少”.*

2 条件概率、独立性

2.1 基础知识

有的时候, 我们要考察在给定某些事件下另一些事件发生的概率. 这个时候需要利用已知的信息之间的关系去搭建桥梁, 进而解决概率问题. 例如, 在事件 B 发生的情况下, 事件 A 发生的概率. 此时我们考虑的样本空间应该是 B——作为先决条件, 在此基础上, 对 A 发生的概率进行重整化

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

称作事件 A 在事件 B 发生下的条件概率. 事实上, 一切概率都可以看作条件概率: 在定义1.1的记号下,

$$\mathbb{P}(A|S)=\frac{\mathbb{P}(A\cap S)}{\mathbb{P}(S)}=\frac{\mathbb{P}(A)}{1}.$$

于是条件概率 $\mathbb{P}(\cdot|A)$ 也满足概率的诸多性质. 在此基础上, 我们有三个重要公式:

- 乘法公式 $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$.
- 全概率公式 称 $B_1,\ldots,B_n$ 为 S 的一个划分, 如果 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$ 且 $B_i\cap B_j=\varnothing,\forall i,j$. 若 $B_i>0,\forall i$, 则
$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i).$$
- 贝叶斯公式 设 $B_1,\ldots,B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $\mathbb{P}(B_i)>0,\forall i$, $\mathbb{P}(A)>0$, 则
$$\mathbb{P}(B_i|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B_i)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}.$$

2.1 注. *从形式上看, 贝叶斯公式不过是条件概率定义与全概率公式的简单推论, 为什么它很重要? 辩证唯物主义告诉我们, 在一个具体的因果联系中, 原因在前, 结果在后, 二者不能混淆和颠倒. 然而在现实生活中, 我们常常需要执"果"索"因": 对于事件的结果分析可能原因. 贝叶斯公式就给了我们这种能力.*

特别地, 当 $\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ 时, 我们称事件 A 和事件 B 独立. 此时有 $\mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$, 意味着事件 A(或 B) 的发生对事件 B(或 A) 没有影响. 除非明确给出相互独立的条件, 我们通常需要计算概率来验证两者是否独立.

2.2 例题

2.2 示例. *某产品的合格品率为 99%. 已知一个合格产品使用 10 年以上的概率达到 0.9, 而一个不合格产品使用 10 年以上的概率仅为 0.6. 求:*

1. 任取一个该产品, 它能使用 10 年以上的概率;

2. 已知一个产品已经使用了 10 年还能正常工作的条件下, 它是合格品的概率.

解. 设 A 表示产品为合格品, B 表示产品正常使用 10 年以上. 于是 $\mathbb{P}(A)=0.99$, $\mathbb{P}(B|A)=0.9$, $\mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A})=0.6$.

1. $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap\bar{A})=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(\bar{A})\cdot\mathbb{P}(B|\bar{A})$.

2. 本题需要我们利用贝叶斯公式计算 $\mathbb{P}(A|B)$:
$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(\bar{A})\cdot\mathbb{P}(B|\bar{A})}.$$

$\square$

2.3 示例 (贝叶斯公式的应用). 一种诊断某种癌症的试剂, 经临床试验有如下记录: 癌症患者试验的结果是阳性的概率是 95%, 非癌症患者试验的结果是阴性的概率是 95%. 现用这种试剂在某社区进行癌症普查, 设该社区发病率为 0.5%, 问某人反应为阳性时, 该如何判断他是否患有癌症?[2]

解. 设 A 表示"测试阳性"的事件, 是结果, B 表示"患癌症"的事件, 是原因. 于是题目条件可以翻译为 $\mathbb{P}(A|B) = 0.95$, $\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B}) = 0.95$, $\mathbb{P}(B) = 0.005$. 现在要计算的是他是否患癌的概率, 由贝叶斯公式,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(A|\bar{B})} \\ &= \frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+(1-0.005)\times(1-0.95)} = 8.7\%\end{aligned}$$

事实上, 这个人患癌的概率的可能性很小, 可以告诉他不必紧张, 可以去做进一步的检查. $\square$

3 一维随机变量及其分布

我们把"用来表示随机现象结果的变量"称作"随机变量". 更为数学化的定义是, 随机变量 X 是样本空间 S 上的实值函数. 我们常用大写字母 X, Y, Z 来表示随机变量, 小写字母 x, y, z 来表示它的取值.

- 如果随机变量的可能取值是有限个或者可列无限个, 则称离散型随机变量,
- 如果随机变量的可能取值范围充满了数轴的某一个区间 (a, b), 则称连续型随机变量, 这里的 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.

3.1 一维离散型随机变量及其分布

我们习惯用分布律来描述离散型随机变量: 离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_k, $k = 1, 2, \ldots$, 它的分布律为

$$\mathbb{P}\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

由于分布律的取值依然是概率, 它自然地继承了概率的如下性质:

(1) 非负性: $p_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

(2) 规范性: $\sum_k p_k = 1$.

3.1.1 $0-1$ 分布/两点分布/伯努利分布

虽然给出了三个名字, 但是都是在说同一件事情——一重伯努利试验. 伯努利试验是只有两种结果 (即两点) 的试验, 不妨记为事件 (集合)A 及其对立面 $\bar{A}$, 它的分布律为 $\mathbb{P}(A)=p, \mathbb{P}(B)=1-p$, 其中 $p\in[0,1]$.

如果我们把事件 A 和 $\{X=1\}$, 事件 $\bar{A}$ 和 $\{X=0\}$ 对应起来, 得到取值为 $0-1$ 的随机变量 X. 其分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

称这样的随机变量 X 服从参数为 p 的 $0-1$ 分布, 记做 $X\sim B(1,p)$.

3.1.2 二项分布

进一步地, 我们把伯努利试验独立地重复进行 n 次, 称为 n 重伯努利试验. 用 X 表示结果 A 出现的次数, 则其分布律为

$$\mathbb{P}\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=1,2,\ldots,$$

称 X 服从参数为 n,p 的二项分布, 记做 $X\sim B(n,p)$.

当然, $n=1$ 时我们进行的是一重伯努利试验, 此时分布退化为 $0-1$ 分布.

3.1 注. *在具体应用中, 我们可能很少会看见"随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布"之类的表述——更多的是要求我们把关心的事件记为 A, 关心的事件的对立面记为 $\bar{A}$——尽管结果可能不止一种, 但我们要一分为二地看待问题. 例如经典的摸小球试验中, 可能有很多种小球, 我们关心的事情是"摸到了红球"与"没有摸到红球".*

3.1.3 几何分布

很多时候我们关心这样的问题: 摸到红球的概率为 p, 第 k 次才摸到红球的概率; 或者试验成功的概率为 p, 第 k 次才成功的概率.

即在多重伯努利试验中, 我们关心的事件发生的概率为 p, X 表示我们关心的事件首次发生时进行的试验次数, 那么 $X=k$ 意味着前 $k-1$ 次我们关心的事件并未发生, 第 k 次才发生, 于是

$$\mathbb{P}\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p.$$

我们称这样的 X 满足参数为 p 的几何分布. 这样的分布律具有几何级数的形式: 当 $p \in (0,1)$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X=k\} = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

3.1.4 超几何分布

超几何分布是描述在“有限个对象中 (无放回地、等可能地) 抽出 n 个对象, 成功抽出 k 次指定种类的对象”的分布.

例如袋中有 r 个红球和 b 个黑球, 现从中无放回地摸出 n 个球, 随机变量 X 表示摸出的红球的个数, 则当 $0 \le n \le \min\{r, b\}$ 时, 摸出 k 个红球意味着同时摸出了 $n-k$ 个黑球, 于是

$$\mathbb{P}\{X=k\} = \frac{C_r^k C_b^{n-k}}{C_{r+b}^n}.$$

3.1.5 泊松分布

若随机变量 X 的分布律为

$$\mathbb{P}\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

其中常数 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记做 $X \sim \pi(\lambda)$.

泊松定理

泊松定理告诉我们, 在一定程度上二项分布可以被的泊松分布近似.

3.2 定理 (泊松极限定理)**.** 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0,1]$ 中的实数列, 如果 $np_n \to \lambda$, 那么有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

于是当 $X \sim B(n,p)$ 中 n 较大、p 较小时, 我们引入随机变量 $Y \sim \pi(np)$, 可以对二项分布的分布律做如下近似计算:

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} = \mathbb{P}(Y=k)$$

背景: 单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上某稀有事件 (这里稀有事件是指不经常发生的事件) 发生的次数常服从泊松分布 $\pi(\lambda)$, 其中 λ 为该稀有事件发生的强度.

3.1.6 例题

对于抽样问题, 我们按下述方法确定概率模型:

$$\begin{cases}\textbf{一次取样:} & 0-1 \text{ 分布} \\ \textbf{多次取样} \begin{cases}\textbf{无放回:} & \text{超几何分布} \\ \textbf{有放回:} & \text{二项分布}\end{cases}\end{cases}$$

而"第几次才有如何如何的结果"考察的是几何分布.

3.3 示例 (二项分布)**.** *经验表明: 预订餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 20%. 如今餐厅有 50 个座位, 但预订给了 52 位顾客, 问到时顾客来到餐厅而没有座位的概率是多少?*

解. 记 X 为预订的 52 位顾客中不来就餐的顾客数, 则 $X \sim B(52, 0.2)$ 因为"顾客来到餐厅没有座位"相当于"52 位顾客中最多 1 位顾客不来就餐", 所以所求概率为

$$\mathbb{P}\{X \le 1\} = \mathbb{P}\{X = 0\} + \mathbb{P}\{X = 1\} = 0.8^{52} + 52 \times 0.8^{51} \times 0.2 = 0.0001279.$$

□

3.4 示例 (泊松定理的应用)**.** *一批产品的不合格品率为 0.02. 现从中任取 40 件进行检查, 若发现两件或两件以上不合格品就拒收这批产品. 分别用以下方法求拒收的概率:*

1. 用二项分布作精确计算;

2. 用泊松分布作近似计算.

解. 解记 X 为抽取的 40 件产品中的不合格品数, 则 $X \sim B(40, 0.02)$, 而"拒收"就相当于 $\{X > 2\}$.

1. 拒收的概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \ge 2\} &= 1 - \mathbb{P}\{X = 0\} - \mathbb{P}\{X = 1\} \\ &= 1 - 0.98^{40} - 40 \times 0.98^{39} \times 0.02 = 0.1905.\end{aligned}$$

2. 设 $Y \sim \pi(40 \times 0.02) = \pi(0.8)$, 用泊松分布作近似计算, 可得近似值为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \ge 2\} &= 1 - \mathbb{P}\{Y = 0\} - \mathbb{P}\{Y = 1\} \\ &= 1 - e^{-0.8} - 0.8 \times e^{-0.8} = 0.1912.\end{aligned}$$

可见近似值与精确值相差 0.0007, 近似效果较好. □

3.2 一维连续型随机变量及其分布

对于某个子集 $I \subseteq \mathbb{R}$, 事件 $\{X \in I\}$ 相当于 $\{s \in S\colon X(s) \in I\}$, 于是它的概率 $\mathbb{P}\{X \in I\}$ 实际上是 $\mathbb{P}\{s \in S\colon X(s) \in I\}$. 特别地, 我们关心形如 $(-\infty, t]$ 的区间, 称

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \le t), \quad t \in \mathbb{R}$$

为 X 的分布函数. 当我们讨论的随机变量没有歧义的时候, 我们可以略去 X, 简记为 $F(t)$. 分布函数有如下性质:

(1) 单调性: $F(x)$ 是非减函数;

(2) 有界性: $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(3) 右连续性: $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x)$.[1]

反之, $\mathbb{R}$ 上任何一个具备以上三条性质实值函数, 一定是某个随机变量的分布函数, 即以上三条性质是分布函数的根本性质.

可以用分布函数 $F(t)$ 来表示下列概率:

(1) $\mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a)$;

(2) $\mathbb{P}(X < a) = F(a - 0)$;

(3) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a)$;

(4) $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) - \mathbb{P}(X < a) = F(a) - F(a - 0)$;

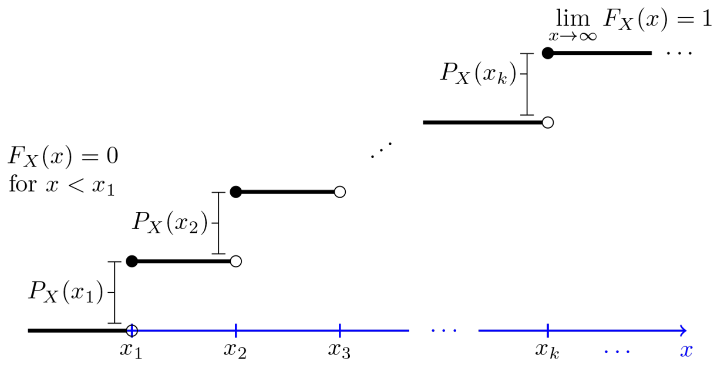
(5) $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathbb{P}(X < a) = 1 - F(a - 0)$;

(6) $\mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X \le a) = F(b) - F(a)$;

(7) $\mathbb{P}(|X| < a) = \mathbb{P}(X < a) - \mathbb{P}(X \leqslant -a) = F(a - 0) - F(-a)$.

分布函数可以用于描述任意类型的随机变量: 离散型随机变量的分布函数是右连续的阶梯函数.

[1] 证明思路大致是: 对任意 $x_n \downarrow x$, $0 \le F(x_n) - F(x) = \mathbb{P}(x < X \le x_n) \to \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.



连续型随机变量的分布函数既是右连续的, 也是左连续的, 进一步地, 在任一点的取值的概率为 $\mathbb{P}\{X = x\} = F(x) - F(x-0) = 0$.

对于连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 若存在非负函数 $f(x)$ 使得对任意实数 x, 使得

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

那么称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数. 于是连续型随机变量 X 在某一区间的概率为

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{a \le X \le b\} = \mathbb{P}\{a \le X < b\} = \mathbb{P}\{a < X < b\} = \mathbb{P}\{a < X \le b\} \\ =&F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

概率密度函数具有如下性质:

(1) 非负性: $f(x) \ge 0$;

(2) 正则性: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

反之, $\mathbb{R}$ 上任何一个具备以上两条性质实值函数 $g(x)$, 一定是某个随机变量的概率密度函数, $G(x) := \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$ 是这个随机变量的分布函数. 换而言之, 以上两条性质是概率函数的根本性质.

3.5 定理. *若概率密度函数 f 在 x 处连续, 那么 $F'(x) = f(x)$*

3.2.1 均匀分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布, 记做 $X \sim U(a,b)$.

背景: 向区间 (a,b) 随机投点, 落点坐标 X 一定服从均匀分布 $U(a,b)$. 这里"随机投点"是指: 点落在任意相等长度的小区间上的可能性是相等的.

3.2.2 正态分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中标准差 $\sigma > 0$, 均值 μ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记做 $X \sim N(\mu, \sigma)$. 概率密度函数 $f(x)$ 形如钟形曲线, 关于 μ 对称且在 μ 处取得最大值, 于是

$$\mathbb{P}\{X \geq \mu + t\} = \mathbb{P}\{X \leq \mu - t\} = F_X(\mu - t).$$

- 固定 σ, 改变 μ 的值: 这相当于我们改变了对称轴 $x = \mu$, 函数形状不发生改变, 整体左右移动.
- 固定 μ, 改变 σ 的值: 函数对称轴不变, σ 越大, 图形越平坦, 落在 μ 附近的概率减小; σ 越小, 图形越陡峭, 落在 μ 附近的概率增大. 或者说, σ 控制了分布的分散程度.

特别地, 称分布 $N(0,1)$ 为*标准正态分布*, 其概率密度函数的形式较为简单:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

正态分布的分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t$$

是难以计算的. 对于 $X \sim N(\mu, \sigma)$, 通常我们会对它做线性变换*标准化*、再查阅标准正态分布表来得到 X 在某一区间的概率——$Z = (X - \mu)/\sigma$ 服从标准正态分布:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z \leq x\} = \mathbb{P}\{X \leq \mu + \sigma x\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s =: \Phi(x),\end{aligned}$$

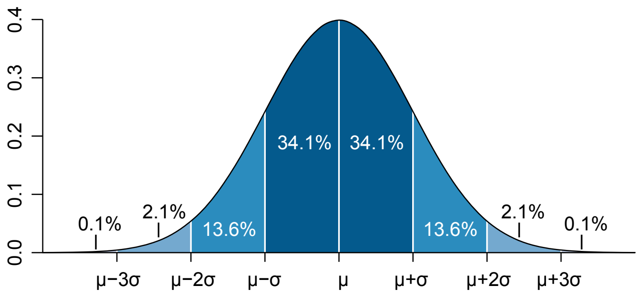
其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数. 于是

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

当 $t \geq 0$ 时, $\Phi(t)$ 可以直接查表得出; 而当 $t < 0$ 时, 利用 $\varphi(x)$ 关于 $x = 0$ 对称可得

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-t}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \Phi(-t).$$

此外, 正态分布“几乎所有”的值都在平均值正负三个标准差的范围内, 这被称为3σ 原则.



背景: 一个变量若是由大量微小的、独立的随机因素的叠加结果, 则此变量一般是服从正态分布的. 测量误差就是由量具偏差、测量环境的影响、测量技术的影响、测量人员的心理影响等随机因素叠加而成的, 所以通常认为测量误差常服从正态分布.

3.2.3 指数分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中参数 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记做 $X \sim Exp(\lambda)$. 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

指数分布具有无记忆性:

$$\mathbb{P}\{X > s + t | X > s\} = \frac{\mathbb{P}\{X > s + t\}}{\mathbb{P}\{X > s\}} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = 1 - F(t) = \mathbb{P}\{X > t\}.$$

背景: 若一个元器件 (或一台设备, 或一个系统) 遇到外来冲击时即告失效, 则首次冲击来到的时间 X(寿命) 服从指数分布. 很多产品的寿命可认为服从或近似服从指数分布.

3.2.4 例题

3.6 示例 (概率密度函数). 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是概率密度函数, 求证:

$$h(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)g(x), \quad 0 \le \alpha \le 1$$

也是概率密度函数,

证明. 只需验证 $h(x)$ 满足非负性与正则性即可: 由于 $\alpha f(x) \ge 0$, $(1-\alpha)g(x) \ge 0$, 从而 $h(x) \ge 0$, 此外

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

□

3.7 示例 (均匀分布). 设 K 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布, 求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率.

解. 方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的充要条件是

$$\{K^2 - 4 \ge 0\} = \{K \le -2\} \cup \{K \ge 2\}.$$

而 $K \sim U(1,6)$, 因此所求概率为

$$\mathbb{P}\{K \le 2\} + \mathbb{P}\{K \ge 2\} = 0 + \int_2^6 \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x = 0.75$$

□

3.8 示例 (正态分布). 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma)$, 试问: 随着 σ 的增大, 概率 $\mathbb{P}(|X-\mu| < \sigma)$ 是如何变化的?

证明.

$$\mathbb{P}\{|X-\mu| < \sigma\} = \mathbb{P}\left\{-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6826.$$

于是概率 $\mathbb{P}(|X-\mu| < \sigma)$ 与 σ 无关. 这也是 3σ 原则的来源. □

3.9 示例 (指数分布、二项分布)**.** *设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分钟计) 服从指数分布, 其密度函数为*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟他就离开. 他一年要到银行 5 次, 以 Y 表示一年内他未等到服务而离开窗口的次数, 试求 $\mathbb{P}(Y \ge 1)$.

解. $Y \sim B(5, p)$, 其中 $p = \mathbb{P}\{X > 10\} = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\,\mathrm{d}x = e^{-2}$, 所以得

$$\mathbb{P}(Y \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - (1-p)^5 = 1 - (1-e^{-2})^5 \approx 0.5167.$$

□

3.3 随机变量函数的分布

若 X 为离散型随机变量, 那么它的函数 $Y = g(X)$ 也一定是离散型随机变量. 设 X 的可能取值集合为 $\{x_k\}$, 那么 Y 的可能取值集合为 $\{g(x_k)\}$. 如果其中有某些值相等, 则把那些相等的值分别合并, 并把对应的概率相加即可得到 Y 的分布律.

若连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, 考虑随机变量 $Y = g(X)$, 我们先求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{g(X) \le y\},$$

再通过求导得出 Y 密度函数. 特别地, 当 $g(x)$ 严格单调, 其反函数 $h(y)$ 导函数连续时,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & a < y < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{1}$$

3.3.1 例题

3.10 示例**.** *设 $X \sim U(0,1)$.*

1. *求 $Y = e^X$ 的概率分布.*

2. *求 $Y = -2\ln X$ 的概率分布.*

解. X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

1. 注意到 $Y = e^X > 0$, 于是 $y \le 0$ 时, $F_Y(y) = 0$, 从而 $f_Y(y) = 0$. 当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{e^X \le y\} = \mathbb{P}\{X \le \ln y\} = F_X(\ln y).$$

于是

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(\ln y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y}, & 0 < \ln y < 1, \\ 0, & \ln y < 0 或 \ln y > 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y}, & 1 < y < e, \\ 0, & 0 < y < 1 或 y > e. \end{cases}$$

综上, 我们有

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y}, & 1 < y < e, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

2. 由于 $X \in (0,1)$, $Y > 0$. 于是于是 $y \le 0$ 时, $F_Y(y) = 0$, 从而 $f_Y(y) = 0$. 当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{-2\ln X \le y\} = \mathbb{P}\{X \ge e^{-y/2}\} = 1 - F_X(e^{-y/2}).$$

于是

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[1 - F_X(e^{-y/2})\right] = -f_X(e^{-y/2}) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right) = \frac{1}{2}e^{-y/2}.$$

综上,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

当然, 这里的的 e^x, $-2\ln x$ 都满足严格单调、反函数的导数连续, 我们也可以用式(1)得到结果. □

参考文献

[1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第五版. 高等教育出版社, 2020.

[2] 韦来生, 张伟平. 数理统计[M]. 第三版. 科学出版社, 2024.