Lego Projekten

Projekt 1 - Scherenfachwerk

Aufgabe 9

Ziel: Position vector (Karthesische Koordinaten) von J und K als Funktion von Zeit t zu berechnen.

Definitions:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\theta_{\min}(\alpha) := 29°$$
$$\theta_{\max}(\beta) := 84°$$
$$\omega_A := 1° s^{-1} = \frac{\theta}{t}$$
$$\theta := \omega_A t$$
$$\angle ABD = \angle DEG = \angle GHJ = \angle EDH = \angle HGK = \theta$$

K Ortsvektor:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= L\cos(\theta)\vec{e_x} + L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
\vec{G} &= \vec{E} - L\cos(\theta)\vec{e_x} + L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
\vec{K} &= \vec{G} + L\cos(\theta)\vec{e_x} + L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
&= L\cos(\theta)\vec{e_x} + 3L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
&= L\big(\cos(\omega_A t)\vec{e_x} + 3\sin(\omega_A t)\vec{e_y}\big)
\end{aligned}$$

J Ortsvektor:

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
\vec{H} &= \vec{E} + L\cos(\theta)\vec{e_x} + L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
\vec{J} &= \vec{H} - L\cos(\theta)\vec{e_x} + L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
&= 3L\sin(\theta)\vec{e_y} \\
&= 3L\sin(\omega_A t)\vec{e_y}
\end{aligned}$$

TODO: How can one mathematically determine that D has no x component?

Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \beta - \alpha = 55° \\
t_{\alpha\beta} &= \Delta\theta \times 1 \\
&= 55s
\end{aligned}$$

Projekt 3 - Fachwerk

Aufgabe 5

Wir nutzen das Prinzip der virtuellen Leistung. Wir entfernen Stab DE, um eine virtuelle Bewegung zu erlauben und die Reaktions-Kräfte S_{DE} zu rechnen:

$\overrightarrow{v_D}$ ist senkrecht zum Stab AD. $\overrightarrow{v_E}$ entspricht $\overrightarrow{v_D}$, wobei die x-Komponente entgegengesetzt ist.

$$\overrightarrow{v_D} = \begin{pmatrix} \cos 30 \\ -\sin 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_E} = \begin{pmatrix} -\cos 30 \\ -\sin 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Somit können wir die Leistung der beide Kräfte S_{DE} rechnen, unter der Annahme, dass es sich vorerst um Druckkräfte handelt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{S_{DE}} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{DE} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S_{DE} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3} S_{DE} \end{aligned}$$

Jetzt rechnen wir die Leistung der Kraft F, die an dem Punkt D greift:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_F = \overrightarrow{v_D} \cdot \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} \\ &= \frac{F}{2} \end{aligned}$$

Die gesamte virtuelle Leistung muss 0 sein, um sicherzustellen, dass sich das System in einem Ruhezustand befindet:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{P} = \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_{S_{DE}} &= \sqrt{3} S_{DE} + \frac{F}{2} = 0 \\ S_{DE} &= -\frac{F}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Wir haben festgestellt, dass die Reaktionskräfte S_{DE} in die entgegengesetzte Richtung wirken als angenommen. Daher sind die entsprechenden Kräfte im realen Modell Druckkräfte auf den Stab, mit der Grösse $\frac{F}{2\sqrt{3}}$.