Analysis 1

Logik

Aussage - Eine Aeusserung, die entweder wahr oder falsch ist
Luegner Paradox - Das ist keine Aussage: “Dieser Satz ist falsch”

Menge (Set) - eine ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen

$\wedge$ - and
$\vee$ - or
$\dot\vee$ (XOR) - either … or …
Materiale Aequivalenz ($\Leftrightarrow$)
Logische Aequivalenz ($\equiv$) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ - Sie haben die gleichen Wahrheitstabellen

$A \Rightarrow B$ - Wenn A, dann B
$\neg B \Rightarrow \neg A$ - Kontraposition
$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Zum Beispiel:
Es hat geregnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nas
Kontraposition: Die Strasse ist nicht nass $\Rightarrow$ Es hat nicht geregnet
Das ist genauso wahr aufgrund der Physik.

Wahr: $0 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2$
Falsch: $0 < 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$

TODO: Distributions gesetz

Proofs

Beweis - eine Herleitung einer Aussage aus den Axiomen
Satz - eine Bewiesene Aussage
Lemma (oder Hilfssatz) - ein Satz, der dazu dient, einen anderen Satz zu beweisen

q.e.d. ($\blacksquare$) - end of proof

Beweiss formalisieren - Express a proof formally in terms of symbols and Limmas, can be checked by a computer.
Divide et impera - divide and conquer *Zermelo + Fraenkel Axioms* - Foundational axioms of all proofs

Beweis Methode

Modus ponens - Wird (meistens mehrmals) verwendet, um etwas zu beweisen:
$A :=$ Es hat geregnet (Premise)
Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass (Regel: $A \Rightarrow B$)
$B :=$ Die Strasse ist nass (Konklusion)

Kontraposition - Prove the Kontraposition, which subsequently proves the original statement (they are logically equivalent)
Beweisen, dass $\sqrt{2} < \sqrt{3}$:

$$A := \sqrt{2} \geq \sqrt{3} \equiv \neg\sqrt{2} < \sqrt{3}$$

Monotonie des Quadrierens:

$$x, y \geq 0$$
$$\text{Wenn } x \leq y, \text{dann ist } x^2 \leq y^2$$

$$\text{Laut der Monotonie des Quadrierens, } B := 2 \geq 3 \text{ ist wahr}$$
$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \equiv 2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3} \blacksquare$$

Widerspruch beweis
Um A zu beweisen, nehmen wir an, dass A falsch ist.
Widerspruch finden - das beweist die Aussage A

Zum Beispiel:
Beweis des Satzes $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
Nehmen wir an, dass $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ wahr ist
Lemma (Monotonie des Quadrierens): $\sqrt{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2 \geq 3$
Widerspruch: $2 \geq 3$ ist falsch, deshalb ist $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ auch falsch.
$\neg\left(\sqrt{2} \geq \sqrt{3}\right) \equiv \sqrt{2} < \sqrt{3}$ ■

It is more rigorous to prove / rewrite something through Contraposition, because we start with a false statement in contradiction.

Vollstaendige Induktion
$n \in N_0, P(n)$ ist eine Aussage
$P(0)$ ist wahr
Wenn $\forall k \in N_0$ gilt $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Dann ist $\forall n \in N_0, P(n) \equiv$ wahr
Zum Beispiel:

$$\text{Satz: } \forall n \in N_0, P(n) := \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$P(0) = \frac{0(1)}{2} = 0$$
$$\text{Sei } P(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$
$$\text{Zu zeigen } P(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$
$$P(k+1) = P(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$= 2k^2 + 3k + 1 = \frac{k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Vollstaendige Induktion gibt, dass $\forall n \in N_0, P(n)$ wahr ist. ■

Mengenlehre

Eine ungeordnete Zusammenfassung von Elemente.

$\emptyset$ - Leere Menge, hat keine Elemente
$\{\emptyset\}$ hat genau ein Element

Aussageform $\{x \mid P(x)\}$ or $\{x; P(x)\}$ - die Menge aller x, fuer die $P(x)$ gilt
Example: $\{x \mid x \in \mathbb{N}_0, x \text{ ist gerade}\}$

Russelsche Antonomie - $\{x \mid x \in X, x \notin x\} \therefore X$ ist keine Menge
Loesung: {x in X | P(x)} TODO: Understand this

$A \cap B - \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ - Intersection
$A \cup B - \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ - Union
$A \setminus B - \{x \in A \mid x \notin B\}$ - Without
$A \subseteq B$ - Jedes Element von liegt in B
$A \subseteq X, A^\complement = X \setminus A$

$(1, 2, 3)$ - *Tuple* - Ordered set
Kartesische Potenz - $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
Example:

$$X := \{0, 1\}, Y := \{\alpha, \beta\}$$
$$X \times Y := \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$$
$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

$\mathbb{R}^n$:= n-dimensionalen Koordinatenraum
$\mathbb{R}^2 = X \times Y$
$\mathbb{R}^3 = X \times Y \times Z$

De Morgan's Laws

Also apply to boolean logic, where $A, B := 1, 0$

$$(A \cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement$$
$$(A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement$$

Quantoren

They cannot simply be swapped! See the largest natural number problem in script.

$\exists$ - Existenzquantor - Es gibt
$\forall$ - Allquantor - Fuer alle

$\neg(\forall x \in X| \ P(x)) = \exists x \in X \mid \neg P(x)$

Goethe Prinzip - When a variable is renamed correctly, a statement is still logically equivalent TODO: Check script