Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^5 indem Sie die Matrix zuerst diagonalisieren.

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda = 2$ or 1

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0, \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0, \quad x = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^2 = S D \cancel{S^{-1} S} D S^{-1} = S D^2 S^{-1}$$

$$\therefore A^5 = S D^5 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -32 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -31 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} -8 & -24 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind 4 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und 16 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Matrix B, so dass $B^2 = A$:

$B =$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -24 \\ 12 & 28 \end{pmatrix} \checkmark$$

Betrachten Sie die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Das Ziel dieser Übung ist es, sie zu diagonalisieren.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. Benutzen Sie x als Variable Ihres Polynoms.

$p_A(x) =$ ______

2. Berechnen Sie die Eigenwerte von A. Füllen Sie bitte alle drei Felder aus um ihre Antwort auszuwerten.

$x_1 =$ ______, $x_2 =$ ______, $x_3 =$ ______.

3. Bestimmen Sie 3 linear unabhängige Eigenvektoren zu den obigen Eigenwerten. Der erste Eigenvektor sollte zum ersten Eigenwert gehören, den Sie angegeben haben, und so weiter. Zur Auswertung sollte der entsprechende Eigenwert ebenfalls ausgefüllt worden sein.

$v_1 = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}$.

4. Die symmetrische Matrix A ist ähnlich zur folgenden Diagonalmatrix:

$D = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

5. Geben Sie eine reguläre Matrix P an, so dass $P^{-1}AP = D$:

$P = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ -1-\lambda & (-1-\lambda)(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & (-1-\lambda)(1+\lambda)-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{matrix}$$

$$p_A(x) = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda-\lambda-\lambda^2-1)$$

$$= (\lambda^2+2\lambda+2)(1+\lambda)(-2-\lambda)\ (-2-3\lambda-\lambda^2)$$

$$= -\cancel{2\lambda^2} - \cancel{3\lambda^3} - \cancel{\lambda^4} - \cancel{4\lambda} - \cancel{6\lambda^2} - \cancel{2\lambda^3} - 4 \cancel{-6\lambda} - \cancel{2\lambda^2}$$

$$= -\lambda^4 - 5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 10\lambda - 4$$

$$\therefore \lambda = -1, -2$$

Finden Sie die 3×3 Matrix A, so dass gilt:

$$(x \quad y \quad z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cancel{5 \cdot z^2} + \cancel{8 \cdot y \cdot z} + \cancel{4 \cdot x \cdot z} - \cancel{y^2} + \cancel{8 \cdot x \cdot y} + \cancel{4 \cdot x^2}$$

$A =$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 4x + 4y \quad 2z \\ 4x \quad - y + 4z \\ 2x + 4y + 5z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 4x^2 + \cancel{4yx} + \cancel{2zx} \\ + \cancel{4xy} - \cancel{y^2} + \cancel{4zy} \\ + \cancel{2xz} + \cancel{4yz} + \cancel{5z^2} \end{matrix}$$