Zeigen Sie, dass die linear unabhängige Eigenvektoren einer normalen Matrix orthogonal sind:

Eine Matrix ist normal $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \Leftrightarrow$ TODO: Not sure if i can say this Sie ist invertierbar

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normale Matrix. Erstmall zeigen wir, dass die Kerne von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ gleich sind:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$$
$$\textbf{Kern } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

Was auch als

$$(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{k} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$
$$\left((\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

und

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{k} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

geschrieben werden kann.

Deswegen sind die Kerne gleich:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{Kern } \boldsymbol{A} = \text{Kern } \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$$

Dank der Fundamentalsatz der Linearen Algebra, dürfen wir sagen dass:

$$\text{Kern } \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \perp \text{Bild } \boldsymbol{A} \therefore \text{Kern } \boldsymbol{A} \perp \text{Bild } \boldsymbol{A}$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass die Eigenvektoren verschiedener Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$ orthogonal zueinander sind. Nehmen wir an, dass es zumindest zwei nicht-null Eigenwerten λ_1 und λ_2 mit dazugehörige Eigenvektoren $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ von $\boldsymbol{A}$ gibt. Es folgt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_1} = \lambda_1\boldsymbol{v_1} \in \text{Bild } \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_2} = \lambda_2\boldsymbol{v_2} \in \text{Bild } \boldsymbol{A}$$
$$\therefore \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \perp \text{Kern } \boldsymbol{A}$$

Es gibt ein λ_k so dass $\|\boldsymbol{v_k}\| = 1$ Da $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist (todo ist es?), das Kern ist einfach nur das null vektor $\mathbf{0}$.

$$< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} >= 0?$$