Analysis 1

Logik

Aussage - Eine Aeusserung, die entweder wahr oder falsch ist
Luegner Paradox - Das ist keine Aussage: “Dieser Satz ist falsch”

Menge (Set) - eine ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen

$\wedge$ - and
$\vee$ - or
$\veebar$ (XOR) - either … or …
Materiale Aequivalenz ($\Leftrightarrow$)
Logische Aequivalenz ($\equiv$) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ - Sie haben die gleichen Wahrheitstabellen

$A \Leftrightarrow B$ - A genau dann wenn B
$A \Rightarrow B$ - Wenn A, dann B
$\neg B \Rightarrow \neg A$ - Kontraposition
$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Zum Beispiel:
Es hat geregnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nas
Kontraposition: Die Strasse ist nicht nass $\Rightarrow$ Es hat nicht geregnet
Das ist genauso wahr aufgrund der Physik.

Wahr: $0 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2$
Falsch: $0 < 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$

Distributive:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Proofs

Beweis - eine Herleitung einer Aussage aus den Axiomen
Satz - eine Bewiesene Aussage
Lemma (oder Hilfssatz) - ein Satz, der dazu dient, einen anderen Satz zu beweisen

q.e.d. (■) - end of proof

Beweiss formalisieren - Express a proof formally in terms of symbols and Limmas, can be checked by a computer.
Divide et impera - divide and conquer *Zermelo + Fraenkel Axioms* - Foundational axioms of all proofs

Beweis Methode

Modus ponens - Wird (meistens mehrmals) verwendet, um etwas zu beweisen:
$A :=$ Es hat geregnet (Premise)
Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass (Regel: $A \Rightarrow B$)
$B :=$ Die Strasse ist nass (Konklusion)

Kontraposition - Prove the Kontraposition, which subsequently proves the original statement (they are logically equivalent)
Beweisen, dass $\sqrt{2} < \sqrt{3}$:

$$A := \sqrt{2} \geq \sqrt{3} \equiv \neg\sqrt{2} < \sqrt{3}$$

Monotonie des Quadrierens:

$$x, y \geq 0$$
$$\text{Wenn } x \leq y, \text{dann ist } x^2 \leq y^2$$

$$\text{Laut der Monotonie des Quadrierens, } B := 2 \geq 3 \text{ ist wahr}$$
$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \equiv 2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}\blacksquare$$

Widerspruch beweis
Um A zu beweisen, nehmen wir an, dass A falsch ist.
Widerspruch finden - das beweist die Aussage A

Zum Beispiel:
Beweis des Satzes $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
Nehmen wir an, dass $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ wahr ist
Lemma (Monotonie des Quadrierens): $\sqrt{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2 \geq 3$
Widerspruch: $2 \geq 3$ ist falsch, deshalb ist $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ auch falsch.
$\neg\left(\sqrt{2} \geq \sqrt{3}\right) \equiv \sqrt{2} < \sqrt{3}$ $\blacksquare$

It is more rigorous to prove / rewrite something through Contraposition, because we start with a false statement in contradiction.

Vollstaendige Induktion
$n \in N_0, P(n)$ ist eine Aussage
$P(0)$ ist wahr
Wenn $\forall k \in N_0$ gilt $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Dann ist $\forall n \in N_0, P(n) \equiv$ wahr
Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{Satz: } \forall n \in N_0, P(n) &:= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \\
P(0) &= \frac{0(1)}{2} = 0 \\
\text{Sei } P(k) &= \frac{k(k+1)}{2} \\
\text{Zu zeigen } P(k+1) &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \\
P(k+1) &= P(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= 2k^2 + 3k + 1 = \frac{k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Vollstaendige Induktion gibt, dass $\forall n \in N_0, P(n)$ wahr ist. $\blacksquare$

Mengenlehre

Eine ungeordnete Zusammenfassung von Elemente.

$\emptyset$ - Leere Menge, hat keine Elemente
$\{\emptyset\}$ hat genau ein Element

Aussageform $\{x \mid P(x)\}$ or $\{x; P(x)\}$ - die Menge aller x, fuer die $P(x)$ gilt
Example: $\{x \mid x \in \mathbb{N}_0, x \text{ ist gerade}\}$

Russelsche Antonomie - $\{x \mid x \in X, x \notin x\}$ ist ein Paradox
Loesung: Es muss immer so definiert werden $\{x \in X \mid P(x)\}$, wo X eine Menge ist.

$A \cap B - \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ - Intersection
$A \cup B - \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ - Union
$A \setminus B - \{x \in A \mid x \notin B\}$ - Without
$A \subseteq B$ - Jedes Element von A liegt in B
$A \subset B$ - Jedes Element von A liegt in B und A enthaelt weniger Elemente als B
$A \subseteq X, A^{\complement} = X \setminus A$, wo X die Grundmenge ist, die jeder Element die wir betrachten enthaelt.

Distributive:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$(1, 2, 3)$ - *Tuple* - Ordered set

Kartesische Product / Potenz - $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
Example:

$$X := \{0, 1\}, Y := \{\alpha, \beta\}$$
$$X \times Y := \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$$
$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

$\mathbb{R}^n$:= n-dimensionalen Koordinatenraum
$\mathbb{R}^2 = X \times Y$
$\mathbb{R}^3 = X \times Y \times Z$

Interval Notation

$$[a, b] - a \leq x \leq b$$
$$(a, b) - a < x < b$$

Supremum - Upper bound of an open interval
Infimum - Lower bound of an open interval

De Morgan's Laws

Also apply to boolean logic, where $A, B := 1, 0$

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$$
$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

Quantoren

They cannot simply be swapped! See the largest natural number problem in script.

$\exists$ - Existenzquantor - Es gibt
$\forall$ - Allquantor - Fuer alle
$\exists!$ - Es gibt genau ein element

$\neg(\forall x \in X |\ P(x)) = \exists x \in X \mid \neg P(x)$
$\neg(\exists x \in X |\ P(x)) = \forall x \in X \mid \neg P(x)$

Goethe Prinzip - When a variable is renamed correctly, a statement is still logically equivalent

Funktionen

Eine Funktion ist ein Tripel $f = (X, Y, G)$, wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$, sodass $\forall x \in X \exists y \in Y$, sodass $(x, y) \in G$

Domain - Set of possible inputs for a function
Codomain (Range) - Set of possible outputs of a function

Example:
Both are Quadratic funktions but are not equal:
$X := Y := \mathbb{R}, G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$
$X := \mathbb{R}, Y :=]0, \infty[, G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$

$X \to X, \mathrm{id}(x) := x$ - *Identitaets Funktion*

Bild und Urbild - Muss nicht bijektiv sein
$\mathrm{im}(X) := f(X)$ - *Bild von f*
$f : X \to \alpha, f^{-1}(Y) := \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ - *Urbild von y unter f*

Surjektiv - $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ - Es gibt fuer jeder Ausgang einige dazugehoerige Eingange
Injektiv - $\forall x, x' \in X : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ - Es gibt genau eine Ausgang fuer jeder Eingang in dem Definitionsbereich
Bijektiv - Es ist Surjektiv und Injektiv, weshalb es eine Inverse hat

Umkehrfunktion
Sei $f : X \to Y$ eine Bijektive funktion, $f^{<-1>} := Y \to X$ - *Umkehr Funktion*
The inverse can ONLY be defined when the function is Bijektiv, unlike the Urbild. When $X = Y = \mathbb{R}$ it is the reflection of the original function over the line $y = x$. It is sometimes notated as f^{-1} when the context is clear.

Do not forget to consider the given domain / range when considering if a function is bijektiv!

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$$
$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}) = [0, \infty]$$
$$f^{-1}([-\infty, 4]) = [-2, 2]$$

The inverse can be only be defined if f is Bijektiv:

$$f : [0, \infty] \to [0, \infty], f(X) := x^2$$
$$f^{<-1>} = \sqrt{X}$$

$g \circ f := g(f(x))$ - Only possible if the $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{dom}(g)$

Zahlen und Vektoren

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z} := \{..., -1, 0, 1, ...\}$
$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z \wedge n \in N\right\}$
$\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ist eine sogennante "total geordneter Koerper", da es multipliziert, addiert, subtraiert und dividiert werden kann.

There are infinite gaps in the number line of rational numbers. These can be filled with $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - Irrational numbers, for example $\sqrt{2}, \pi, e$. For example: $\nexists s \in \mathbb{Q} \mid s^2 = 2$.

Reelen Zahlen

$$\mathbb{R} := \text{reele Zahl} := \text{Dedekind Schnitt}$$
$$x \subset \mathbb{Q}$$