Analysis 1

Logik

Aussage - Eine Aeusserung, die entweder wahr oder falsch ist
Luegner Paradox - Das ist keine Aussage: “Dieser Satz ist falsch”

Menge (Set) - eine ungeordnete Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen

$\wedge$ - and
$\vee$ - or
$\veebar$ (XOR) - either … or …
Materiale Aequivalenz ($\Leftrightarrow$)
Logische Aequivalenz ($\equiv$) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ - Sie haben die gleichen Wahrheitstabellen

$A \Leftrightarrow B$ - A genau dann wenn B
$A \Rightarrow B$ - Wenn A, dann B
$\neg B \Rightarrow \neg A$ - Kontraposition
$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Zum Beispiel:
Es hat geregnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nas
Kontraposition: Die Strasse ist nicht nass $\Rightarrow$ Es hat nicht geregnet
Das ist genauso wahr aufgrund der Physik.

Wahr: $0 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2$
Falsch: $0 < 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$

Distributive:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Proofs

Beweis - eine Herleitung einer Aussage aus den Axiomen
Satz - eine Bewiesene Aussage
Lemma (oder Hilfssatz) - ein Satz, der dazu dient, einen anderen Satz zu beweisen

q.e.d. ($\blacksquare$) - end of proof

Beweiss formalisieren - Express a proof formally in terms of symbols and Limmas, can be checked by a computer.
Divide et impera - divide and conquer *Zermelo + Fraenkel Axioms* - Foundational axioms of all proofs

Beweis Methode

Modus ponens - Wird (meistens mehrmals) verwendet, um etwas zu beweisen:
$A :=$ Es hat geregnet (Premise)
Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass (Regel: $A \Rightarrow B$)
$B :=$ Die Strasse ist nass (Konklusion)

Kontraposition - Prove the Kontraposition, which subsequently proves the original statement (they are logically equivalent)
Beweisen, dass $\sqrt{2} < \sqrt{3}$:

$$A := \sqrt{2} \geq \sqrt{3} \equiv \neg\sqrt{2} < \sqrt{3}$$

Monotonie des Quadrierens:

$$x, y \geq 0$$
$$\text{Wenn } x \leq y, \text{dann ist } x^2 \leq y^2$$

$$\text{Laut der Monotonie des Quadrierens, } B := 2 \geq 3 \text{ ist wahr}$$
$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \equiv 2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3} \blacksquare$$

Widerspruch beweis
Um A zu beweisen, nehmen wir an, dass A falsch ist.
Widerspruch finden - das beweist die Aussage A

Zum Beispiel:
Beweis des Satzes $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
Nehmen wir an, dass $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ wahr ist
Lemma (Monotonie des Quadrierens): $\sqrt{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2 \geq 3$
Widerspruch: $2 \geq 3$ ist falsch, deshalb ist $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ auch falsch.
$\neg\left(\sqrt{2} \geq \sqrt{3}\right) \equiv \sqrt{2} < \sqrt{3}$ ■

It is more rigorous to prove / rewrite something through Contraposition, because we start with a false statement in contradiction.

Vollstaendige Induktion
$n \in N_0, P(n)$ ist eine Aussage
$P(0)$ ist wahr
Wenn $\forall k \in N_0$ gilt $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Dann ist $\forall n \in N_0, P(n) \equiv$ wahr
Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{Satz: } \forall n \in N_0, P(n) &:= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \\
P(0) &= \frac{0(1)}{2} = 0 \\
\text{Sei } P(k) &= \frac{k(k+1)}{2} \\
\text{Zu zeigen } P(k+1) &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \\
P(k+1) &= P(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= 2k^2 + 3k + 1 = \frac{k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Vollstaendige Induktion gibt, dass $\forall n \in N_0, P(n)$ wahr ist. ■

Mengenlehre

Eine ungeordnete Zusammenfassung von Elemente.

$\emptyset$ - Leere Menge, hat keine Elemente
$\{\emptyset\}$ hat genau ein Element

Aussageform $\{x \mid P(x)\}$ or $\{x; P(x)\}$ - die Menge aller x, fuer die $P(x)$ gilt
Example: $\{x \mid x \in \mathbb{N}_0, x \text{ ist gerade}\}$

Russelsche Antonomie - $\{x \mid x \in X, x \notin x\}$ ist ein Paradox
Loesung: Es muss immer so definiert werden $\{x \in X \mid P(x)\}$, wo X eine Menge ist.

$A \cap B - \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ - Intersection
$A \cup B - \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ - Union
$A \setminus B - \{x \in A \mid x \notin B\}$ - Without
$A \subseteq B$ - Jedes Element von A liegt in B
$A \subset B$ - Jedes Element von A liegt in B und A enthaelt weniger Elemente als B
$A \subseteq X, A^{\mathsf{C}} = X \setminus A$, wo X die Grundmenge ist, die jeder Element die wir betrachten enthaelt.

Distributive:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$(1, 2, 3)$ - *Tuple* - Ordered set

Kartesische Product / Potenz - $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
Example:

$$X := \{0, 1\}, Y := \{\alpha, \beta\}$$
$$X \times Y := \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$$
$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

$\mathbb{R}^n$:= n-dimensionalen Koordinatenraum
$\mathbb{R}^2 = X \times Y$
$\mathbb{R}^3 = X \times Y \times Z$

Interval Notation

$$[a, b] - a \leq x \leq b$$
$$(a, b) - a < x < b$$

Supremum - Upper bound of an open interval
Infimum - Lower bound of an open interval

De Morgan's Laws

Also apply to boolean logic, where $A, B := 1, 0$

$$(A \cap B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$$
$$(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$$

Quantoren

They cannot simply be swapped! See the largest natural number problem in script.

$\exists$ - Existenzquantor - Es gibt
$\forall$ - Allquantor - Fuer alle

$\neg(\forall x \in X |\ P(x)) = \exists x \in X \mid \neg P(x)$
$\neg(\exists x \in X |\ P(x)) = \forall x \in X \mid \neg P(x)$

Goethe Prinzip - When a variable is renamed correctly, a statement is still logically equivalent

Funktionen

Eine Funktion ist ein Tripel $f = (X, Y, G)$, wobei X und Y Mengen sind und $G \subseteq X \times Y$, sodass $\forall x \in X \exists y \in Y$, sodass $(x, y) \in G$

Domain - Set of possible inputs for a function
Codomain (Range) - Set of possible outputs of a function

Example:
Both are Quadratic funktions but are not equal:
$X := Y := \mathbb{R}, G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$
$X := \mathbb{R}, Y :=]0, \infty[, G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$

$X \to X, \mathrm{id}(x) := x$ - *Identitaets Funktion*

Bild und Urbild - Muss nicht bijektiv sein
$\mathrm{im}(X) := f(X)$ - *Bild von f*
$f : X \to \alpha, f^{-1}(Y) := \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ - *Urbild von y unter f*

Surjektiv - $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ - Es gibt fuer jeder Ausgang einige dazugehoerige Eingange
Injektiv - $\forall x, x' \in X : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ - Es gibt genau eine Ausgang fuer jeder Eingang in dem Definitionsbereich
Bijektiv - Es ist Surjektiv und Injektiv, weshalb es eine Inverse hat

Umkehrfunktion
Sei $f : X \to Y$ eine Bijektive funktion, $f^{<-1>} := Y \to X$ - *Umkehr Funktion*
The inverse can ONLY be defined when the function is Bijektiv, unlike the Urbild. When $X = Y = \mathbb{R}$ it is the reflection of the original function over the line $y = x$. It is sometimes notated as f^{-1} when the context is clear.

Do not forget to consider the given domain / range when considering if a function is bijektiv!

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$$
$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}) = [0, \infty]$$
$$f^{-1}([-\infty, 4]) = [-2, 2]$$

The inverse can be only be defined if f is Bijektiv:

$$f : [0, \infty] \to [0, \infty], f(X) := x^2$$
$$f^{<-1>} = \sqrt{X}$$

$g \circ f := g(f(x))$ - Only possible if the $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{dom}(g)$

Zahlen und Vektoren

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z} := \{..., -1, 0, 1, ...\}$
$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z \wedge n \in N\right\}$
$\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

There are infinite gaps in the number line of rational numbers. These can be filled with $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - Irrational numbers, for example $\sqrt{2}, \pi, e$.