Analysis 1 - Serie 0

1. Graphen von Funktionen und Mengen

ii. Sie sind inversen einander und deshalb reflektiert ueber $x = y$

2. Ableitung

i. a)

$$f(x) := x^2$$
$$f'(x) = 2x$$

b)

$$f(y) := y^2$$
$$f'(y) := 2y$$

c)

$$f(x) := e^x$$
$$f'(x) := e^x$$

d)

$$u = x^2$$
$$f(x) := e^{x^2} = e^u$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$f'(x) := 2xe^{x^2}$$

ii. a) 0 b) 0 c) 1 d) 0

3. Integral

i. a)

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$$

c)

$$\int_{-1}^1 |x| dx = 2\int_0^1 x dx$$
$$= 1$$

c)

$$\int_{-1}^{1} |y| dy = \int_{-1}^{1} |x| dx$$
$$= 1$$

ii.

$$f(x) := \int_{1}^{x} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{1}^{x}$$
$$= \sin(x) + \sin(1)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$

iii.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

4. i) fuer jedes

ii) wahr iii) wahr iv) falsch v) wahr vi) falsch

5. Mengen

i. a) 0 b) 1 c) 2 d) 2

ii.

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$\text{Antwort: } \{1, -2\}$$

6 Folge, Konvergenz, Grenzwert i.

$$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$$
$$0, 1, 4, 9, 16, 25$$

ii.

$$0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, 3 + 2, 5 + 3, 8 + 5$$
$$1, 2, 3, 5, 8, 13$$

iii. a)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

7 Summe, Induktion

i.

$$1+2+3+4=10$$

iii. Es gilt fuer $n=1$:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

Voraussetzung: Es gilt fuer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Es gilt auch fuer $n+1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} i \text{ soll gleich } \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ sein} \\
&\sum_{i=1}^{n+1} i=\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \\
&\quad=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} \\
&\quad=\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

So ist es fuer $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

iv.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2^{i}}=2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i}}$$

Das ist eine geometrische Reihe mit $a=\frac{1}{2}, r=\frac{1}{2}$. S_{∞} davon ist:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2-1}=1 \\
&2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i}}=2 \cdot 1=2
\end{aligned}$$

Die Antwort ist 2.