Analysis 1

Logik

Materiale Aequivalenz ($\Leftrightarrow$)
Logische Aequivalenz ($\equiv$) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$A \Rightarrow B$ - Wenn A, dann B
$\neg B \Rightarrow \neg A$ - Kontraposition
$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Zum Beispiel:
Es hat geregnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nas
Kontraposition: Die Strasse ist nicht nass $\Rightarrow$ Es hat nicht geregnet
Das ist genauso war aufgrund der Physik.

Wahr: $0 < 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2$
Falsch: $0 < 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$

Proof methods

Modus ponens (wie man etwas in der Mathematik beweist):
$A :=$ Es hat geregnet (Premise)
Wenn es geregnet hat, dann ist die Strasse nass (Regel: $A \Rightarrow B$)
$B :=$ Die Strasse ist nass (Konklusion)

Lemma (oder Hilfssatz) - ein Satz, der dazu dient, einen anderen Satz zu beweisen

q.e.d. ($\blacksquare$) - end of proof

Beweiss formalisieren - Express a proof formally in terms of symbols and Limmas, can be checked by a computer.

Kontraposition
TODO: Review script

Widerspruch beweis
Um A zu beweisen, nehmen wir an, dass A falsch ist.
Widerspruch finden - das beweist die Aussage A

Zum Beispiel:
Beweis des Satzes $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
Nehmen wir an, dass $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$
Lemma: $\sqrt{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2 \geq 3$
Widerspruch: $2 \geq 3$ ist falsch, deshalb ist $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$ auch falsch.
$\neg\left(\sqrt{2} \geq \sqrt{3}\right) \equiv \sqrt{2} < \sqrt{3}$ $\blacksquare$

Vollstaendige Induktion
$n \in N_0, P(n)$ ist eine Aussage
$P(0)$ ist wahr
Wenn $\forall k \in N_0$ gilt $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Dann ist $\forall n \in N_0, P(n) \equiv$ wahr
Zum Beispiel:

$$\text{Satz: } \forall n \in N_0, P(n) := \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(0) = \frac{0(1)}{2} = 0$$

$$\text{Sei } P(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} P(k+1) = P(k) + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= 2k^2 + 3k + 1 = \frac{k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Vollstaendige Induktion gibt, dass $\forall n \in N_0, P(n)$ wahr ist. ■

Mengenlehre