## Zeigen Sie, dass die linear unabhängige Eigenvektoren einer normalen Matrix orthogonal sind:

$$\text{Eine Matrix ist normal} \Leftrightarrow \boldsymbol{A^T A} = \boldsymbol{A A^T}$$

Wir wollen zeigen, dass die Eigenvektoren verschiedener Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$ orthogonal zueinander sind. Nehmen wir an, dass es zumindest zwei nicht-null Eigenwerten $\lambda_1$ und $\lambda_2$ mit dazugehörige Eigenvektoren $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ von $\boldsymbol{A}$ gibt. Zu zeigen:

$$\boldsymbol{A v_1} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1}$$
$$\boldsymbol{A v_2} = \lambda_2 \boldsymbol{v_2}$$
$$\boldsymbol{v_1} \perp \boldsymbol{v_2} \Leftrightarrow < \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} > = 0$$

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normale Matrix. Erstmall zeigen wir, dass die Kerne $\boldsymbol{k}$ von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A^T}$ gleich sind:

$$\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{A k} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A^T A k} = \boldsymbol{A A^T k} = \boldsymbol{0}$$
$$\therefore \boldsymbol{A^T k} = \boldsymbol{0}$$

Deswegen sind die Kerne gleich:

$$\text{Kern } \boldsymbol{A} = \text{Kern } \boldsymbol{A^T}$$

Darüber hinaus dürfen wir sagen, dass die folgende Kerne auch gleich sind:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{k} = 0$$
$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{k} = 0$$
$$\left(\boldsymbol{A^T} - \overline{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

Deswegen ist $\boldsymbol{k}$ eine Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A^T}$, wobei die dazugehörige Eigenwerte komplexe Konjugaten einander sind.

Das können wir jetzt schliesslich verwenden, um zu zeigen, dass $\boldsymbol{v_1} \perp \boldsymbol{v_2}$. Sei:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2) < \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} > &= < \lambda_1 \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} > - < \boldsymbol{v_1}, \overline{\lambda_2} \boldsymbol{v_2} > \\ &= < \boldsymbol{A v_1}, \boldsymbol{v_2} > - < \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{A^T v_2} > \\ &= 0\end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \not\equiv \lambda_2$ folgt $< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} > = 0 \blacksquare$