Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} -z + y + 2\cdot x + w = 5 \\ 4\cdot z - 2\cdot y + 3\cdot x - w = -3 \\ z + y + x + w = 6 \\ z - y + x - 2\cdot w = 2 \end{cases}$$

[x=1,y=2,z=3,w=4]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 11 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 11 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \quad + \frac{3}{8}\,\mathrm{III}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 11 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{8} & \frac{19}{4} \end{array}\right)$$

$w = \frac{19}{4} \times \frac{-8}{11} = \frac{-38}{11}$

$-8x + \frac{38}{11} = -6$

$x =$ $\quad -\frac{13}{11}$

$y = \frac{79}{11}$

$z = \frac{12}{11}$

Sei P_k der Vektorraum der Polynome vom Grad $< k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Betrachten Sie die folgende Abbildung

$$A : P_n \to P_{n+1}$$
$$p(X) \mapsto 2p'(X) + \int_0^X p'(x)dx$$

- ○ Keine der anderen Antworten ist generell richtig.
- ○ A ist eine Lineare Abbildung nur für $n > 2$.
- ○ A ist nie eine Lineare Abbildung.
- ○ A ist eine Lineare Abbildung.

let $p(X) = x^2 + 1$, $p'(x) = 2x$

$A(p(X)) = 4x + \int_0^X 2x\,dx = 4x + x^2$

$2px = 2x^2+1$, $2px' = 4x$

$A(2p(X)) = 8x + \int_0^X 4x\,dx = 8x + 2x^2$

$2A(p(x)) = 8x + 2x^2$

$\therefore$ ist linear

$p(X) = x$, $A_p = 2 + x$

$A2_p = 2 + 2x$

Betrachten wir nun die Komposition von A aus der vorherige Aufgabe mit der *Auswertungsabbildung*

$$E_a(p(X)) = p(a)$$

für $a \in \mathbb{R}$.

Welches Polynom $p_a(X)$ repräsentiert $E_a \circ A : P_2 \to \mathbb{R}$ mit Hilfe des Rieszschen Repräsentationssatzes, wenn man P_2 mit dem inneren Produkt

$$\langle p(X), q(X)\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ausstattet?

$p_a(X) =$ x^2+a

$E_a \circ A(p(X)) = 2p'(a) + \int_0^a p'(a)da = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = q(x)$, $\frac{dv}{dx} = x+1$, $v = \frac{1}{2}x^2 + x$

let $p(X) = x+1$

$2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^a = 2 + \frac{1}{2}a^2 + a = \int_0^1 (x+1)q(x)\,dx$

$\frac{dv}{dx} = q'(x)$ $u = \frac{1}{2}x^2 + x$

$2 + \frac{1}{2}a^2 + a = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)q(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 q'(x)\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)dx$

$\frac{du}{dx} = 2x+1$

$= 1.5q(1) - \left(q(x)\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 q(x)(2x+1)dx\right)$

$2 + \frac{1}{2}a^2 + a = \cancel{1.5q(1) - 1.5q(1)} + \int_0^1 q(x)(2x+1)dx^0$

Wir betrachten die folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. Benutzen Sie x für die Variable Ihres Polynoms.

$p_A(x) =$ x^99+2024*x+1

2. Berechnen Sie die Eigenwerte von A:

___, ___, ___.

3. Geben Sie einen Eigenvektor an, der dem ersten Eigenwert entspricht.

4. Geben Sie einen Eigenvektor an, der dem zweiten Eigenwert entspricht.

5. Geben Sie einen Eigenvektor an, der dem dritten Eigenwert entspricht.

6. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

(Meine Auswahl zurücksetzen)

7. Existiert eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^3$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht?

(Meine Auswahl zurücksetzen)

$A A^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -5 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\big((-3-\lambda)(2-\lambda)\big)$$

$$= (-1-\lambda)(-6+3\lambda-2\lambda+\lambda^2)$$

$$= 6-3\lambda+2\lambda-\lambda^2+6\lambda-3\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3$$

$$= -\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda+6$$

$\lambda = -1, -3, 2$

$\lambda = -1$:

$$-\tfrac{5}{2} I \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

let $x_1 = 1$

$-2+2x_2=0, x_2=1$

$-3+3x_3=0, x_3=1$

$\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_2 = 0$

$-5x_1+5x_3=0 \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

$-5x_1 = 0, x_1 = 0$

$\therefore x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x =$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U \Sigma V^T x = b$$

$$x = V \Sigma^+ U^T b$$

$$= U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^+ U^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{9} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aussage

Sei M eine $1 \times m$ matrix. Sei $z \in \mathbb{R}^m$ nicht im ker von M. Dann kann jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ als

$$x = v + cz$$

geschrieben werden, wobei v im ker von M ist und $c \in \mathbb{R}$.

Beweis

Da $z \notin \ker(M)$, existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $x = cz$. Da dies für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt, können wir $v = 0$ setzen, was im Kern von M liegt, da $M \cdot 0 = 0$. Somit kann jeder Vektor x als $x = v + cz$ geschrieben werden.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \nexists c \mid cz = x$

$\therefore$ Falsch