Analysis 1 - Serie 2

2.1

a) i. $X \coloneqq \{1, 2\}$ ii. $Y \coloneqq \{0\}$ iii. $Z \coloneqq \{1, 2, 3\}$

b)

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{1\} \\ X \cup Y &= \{0, 1, 2\} \\ X \setminus Y &= \{0\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(\text{Apfel}, 0), (\text{Apfel}, 1), (\text{Apfel}, 2), (\text{Haus}, 0), (\text{Haus}, 1), (\text{Haus}, 2)\} \\ Y^2 &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

d) S: Shaded region under the diagonal x=y, until y becomes flat at y=1
A: Shaded inside the unit circle, including its edge
A^{C}: All points outside the unit circle shaded
B: The edge of the unit circle
C: Everything to the right of and including the y-axis
$A \cap C$: Right half of the unit circle including the edge
$A \cup C$: Entire unit circle and the right side of the y-axis

2.2

a) $X = \{0\}, X^{\mathsf{C}} = \{1\}$

b) Sie sind gleich

c) Everything outside of the two circles.

d)

$$\begin{aligned} \text{Zu beweisen: } (A \cap B)^{\mathsf{C}} &= A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} \\ (A \cap B) &= \{x \in X \mid x \in A \land x \in B\} \\ (A \cap B)^{\mathsf{C}} &= \{x \in X \mid \neg(x \in A \land x \in B)\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A \lor x \notin B\} \\ &= A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}} \blacksquare \end{aligned}$$

2.3

a)

1. $1 \equiv 1$, wahr
2. Goethe Prinzip, wahr
3. Die Irrationale Zahlen, wahr

b)

1. $\forall x \in \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, ...\} : x \neq 24$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

2.4

a) falsch, es gibt eine natuerliche Zahl, die gleich oder weniger die Zahl hoch 2 ist
b) wahr, es gibt eine natuerliche Zahl, die groesser als 1 und weniger oder gleich 1 ist

c) wahr, es gibt eine Zahl zwischen 0 und unendlich, wofuer 1/eine natuerlich Zahl groesser oder gleich die Zahl ist
d) wahr, fuer alle natuerliche Zahlen, es gibt eine Zahl zwischen 0 und unendlich, die groesser als 1 ueber die natuerliche Zahl ist

2.5

a) Nicht Surjektiv, weshalb ist es keine Funktion
b) Nicht Injektiv oder Surjektiv. Keine Funktion
c) Nicht Surjektiv. Keine Funktion
d) Es ist eine Funktion.

2.6

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \\ \mathrm{im}(g) &= \mathbb{R} \\ \mathrm{im}(h) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f^{-1}((-1,4)) &= (-2,2) \\ g^{-1}([-8,-1]) &= [-2,-1] \\ h^{-1}([-1,1]) &= [-\infty,0] \end{aligned}$$

2.7

Ich bin mir nicht sicher, wie man das zeigen soll.

2.8

a) $f(y) := \frac{y}{2}$ e) $f(y) := \frac{y-1}{2}$ f) $f(y) := \frac{\ln(y)}{2}$

2.9

a)

$$\begin{aligned} g \circ f &= e^{x^2} \\ f \circ g &= (e^x)^2 \end{aligned}$$

b) $g \circ f = e^{|x|} = e^{\sqrt{5}}. f \circ g$ geht nicht, weil die Domain von f die 2 dimensionale Raum ist.

2.10

a)

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in X \mid f(x) \in (B_1 \cup B_2)\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1\} \cup \{x \in X \mid f(x) \in B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

2.11

1) Supremum: 1, Infimum: 0, Maximum: 1

2) Supremum: 1, Infimum: $\frac{1}{2}$, Minimum: 2

3) Supremum: 1, Infimum: $\frac{2}{3}$, Minimum: $\frac{2}{3}$