Analysis 1 - Serie 1

1.1.

a) $0 + 1 = 1 \wedge 0 > 1$ false
b) $0 + 1 = 1 \vee 0 < 1$ true
c) $0 + 1 = 1 \veebar 0 < 1$ false
d) $0 > 1 \Rightarrow 0 + 1 = 0$ true
Should be $\Leftrightarrow$
e) $0 + 1 = 1 \Rightarrow 0 > 1$ false

1.2

a)

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

b, d, f, h und j) Sie haben dieselbe Taffeln, deshalb sind sie logisch aequivalent. c)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

e)

P	Q	$\neg(Q) \Rightarrow \neg P$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

g) Die Musterloesung ist falsch

P	Q	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

i)

P	Q	R	$P \land (Q \lor R)$	$(P \land Q) \lor (P \land R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

k)

P	Q	R	$P \land (Q \lor R)$	$(P \land Q) \lor R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

Sie sind nicht gleich, deshalb $P \land (Q \lor R) \not\equiv (P \land Q) \lor R$.

l) M - Menu
A - Kaffee
U - Kuchen
Moegliche Interpretationen:

$$(M \land A) \veebar U - \text{gleich wie entweder ... oder}$$
$$M \land (A \veebar U)$$

Sie sind nicht aequivalent.

1.3

a)

$$\begin{aligned} &\text{Sei } n \coloneqq 123456789 \\ 5 \cdot 4^{\frac{(3n+1)^2-1}{3}} &= 5 \cdot 4^{\frac{9n^2+6n}{3}} = 5 \cdot 4^{3n^2+2n} \\ &\text{Lemma: eine Ganze zahl Quadriert ist eine ganze Zahl.} \\ &\text{Lemma: 2 eine ganze zahl ist ganz.} \\ \therefore 3n^2 + 2n \text{ ist ganz} \\ &\text{Lemma: Eine ganze Zahl hoch eine ganze Zahl ist eine ganze Zahl} \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \cdot 4^{\frac{(3 \cdot 123456789+1)^2-1}{3}} \text{ ist ganz } \blacksquare$$

b) i) Zu beweisen $\sqrt{3} < \sqrt{5}$

$$\text{Nehmen wir an, dass } \sqrt{3} \geq \sqrt{5}$$
$$\text{Lemma: Monotonie des Quadrierens}$$
$$\therefore \sqrt{5} \leq \sqrt{3} \Rightarrow 5 \leq 3$$
$$\text{Kontraposition: } \neg(5 \leq 3) \Rightarrow \neg\left(\sqrt{5} \leq \sqrt{3}\right)$$
$$5 > 3 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{3} \blacksquare$$
$$\text{Widerspruch: } 5 \leq 3 \text{ ist falsch, therefore } \neg\left(\sqrt{3} < \sqrt{5}\right) \text{ wurde widersprochen } \blacksquare$$

ii)

$$A := \sqrt{3 + \sqrt{5}} < \sqrt{6}$$
$$\neg A = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \geq \sqrt{6}$$
$$\text{Lemma: Monotonie des Quadrierens}$$
$$\therefore \neg A \Rightarrow B$$
$$\therefore \sqrt{3 + \sqrt{5}} \geq \sqrt{6} \Rightarrow 3 + \sqrt{5} \geq 6$$
$$B := \sqrt{5} \geq 3$$
$$\text{Lemma: Monotonie des Quadrierens}$$
$$\therefore \sqrt{5} \geq 3 \Rightarrow 5 \geq 9$$
$$5 \geq 9 \text{ ist falsch} \therefore B \text{ muss auch falsch sein und } \neg B \text{ ist wahr}$$
$$\text{Kontraposition: } \neg B \Rightarrow A$$
$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{3 + \sqrt{5}} < \sqrt{6} \blacksquare$$

c) Es ist kein korrekter Beweis, da es mit einer falsche Aussage startet, die nicht zuruck zur urspruenglichen zu bewiesene Aussage hergeleitet wird.

1.4

a)

$$\text{Zu beweisen:} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\text{Es gilt fuer } n = 1 : 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$\text{Nehmen wir an, dass} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Zu zeigen:} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Beweis:} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) \blacksquare
\end{aligned}$$

1.5

Obwohl die Gruppe wegen der Behauptung eine Farbe hat, es kann eine andere Farbe zu P(1) sein. Deshalb koennnen wir das nicht fuer $k \in \mathbb{N}_{>1}, P(k)$ extrapolieren.