Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ
Кафедра интеллектуальных информационных технологий

По лабораторной работе №1
по курсу «МРЗвИС» на тему:
«Реализация модели решения задачи на конвейерной архитектуре»

Выполнил студент группы 021702:	Локтев Константин Алексеевич
Проверил:	Бруцкий Дмитрий Сергеевич

Минск 2022

Содержание

1 Описание лабораторной, её темы и цели

Вариант: 16.
Тема: Реализация модели решения задачи на конвейерной архитектуре.
Цель: Реализовать и исследовать модель решения на конвейерной архитектуре задачи вычисления попарного произведения компонентов двух векторов чисел.

2 Постановка задачи и дополнительные теоретические сведения к ней

Дано: сгенерированные два вектора A и B заданной длины m, элементы которых являются положительными числами заданной разрядности p.
Получить: вектор значений, которые являются результатом произведения для каждой пары чисел, имеющий длину m и разрядность компонентов 2p.

а) m – количество пар;

б) p – разрядность умножаемых попарно чисел;

в) n – количество процессорных элементов в системе(3*p);

г) r – ранг задачи (количество объектов, которые в процессе решения задачи могли бы обрабатываться параллельно);

д) t – время счёта на этапах сбалансированного конвейера;

е) 2 числовых вектора равной длины.

3 Описание модели. Краткое описание особенностей.

В данной лабораторной работе была реализована модель арифметического конвейера, реализующего операцию целочисленного умножения. Для этого использовался алгоритм вычисления произведения пары 8-разрядных чисел умножением с младших разрядов со сдвигом частичной суммы влево.

3.1 Декларативное описание модели

Шаги:
1. Ввод первого вектора двоичных чисел.
2. Ввод второго вектора двоичных числа.
3. Для каждой пары множителей исходное значение частичной суммы делается равным 0.
4. Для каждого разряда каждого множителя начиная со старшего, назовём его i, выполняется следующее:
4.1. Если в i-том разряде первого множителя стоит 0 - перейти к пункту 4.3;
4.2. Прибавить к частичной сумме второй множитель;
4.3. Если текущий разряд не последний - сдвинуть частичную сумму влево и перейти к пункту 4.1.
4.4. Если текущий разряд последний, текущее значение частичной суммы считается результатом произведения текущей пары множителей и записывается в результирующий вектор.

3.2 Вход и выход:

Вход программы: два вектора двоичных чисел.
Выход программы: вектор двоичных чисел, которые являются результатом вычислений.

4 Графики

Обозначения:
n – количество этапов конвейера.
r – ранг задачи (количество обрабатываемых пар)
T_1 – время, затрачиваемое на вычисления в однопроцессорной вычислительной системе.
T_n – время, затрачиваемое на вычисления в параллельной вычислительной системе.
$K_y(n, r) = \frac{T}{T_1}$ – коэффициент ускорения
e(n , r) $= \frac{K_y}{n}$ – эффективность

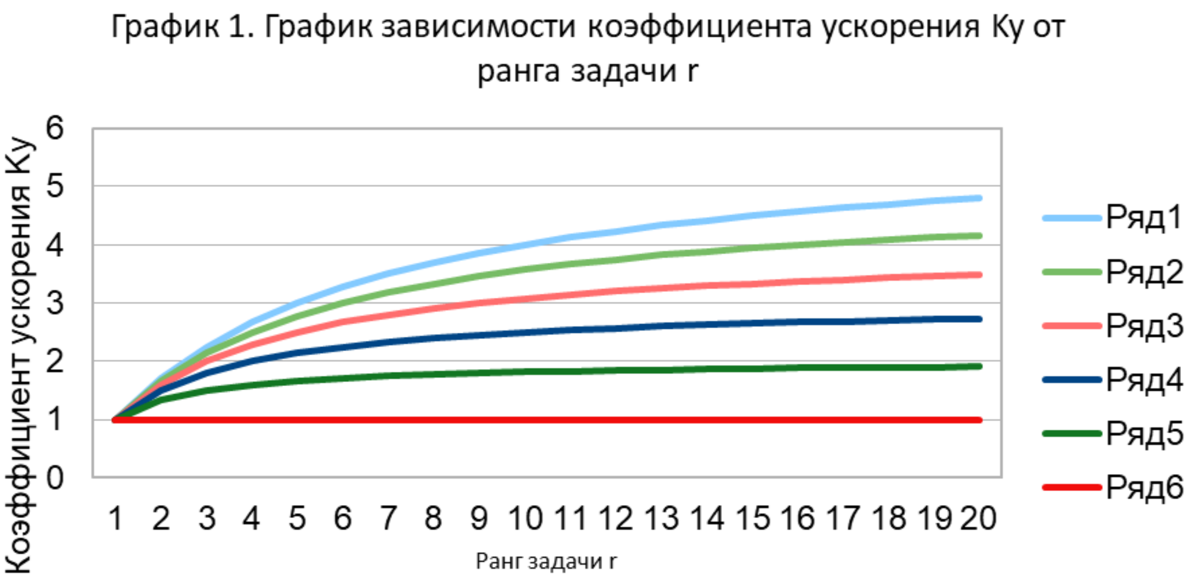


График 2. График зависимости коэффициента ускорения Ку от количества количество процессорных элементов n

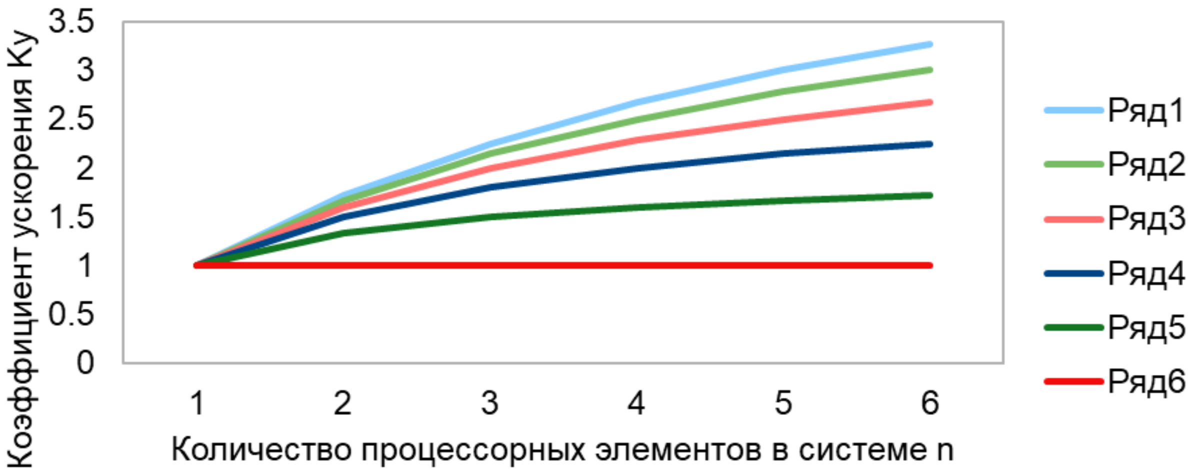


График 3. График зависимости эффективности е от ранга задачи r

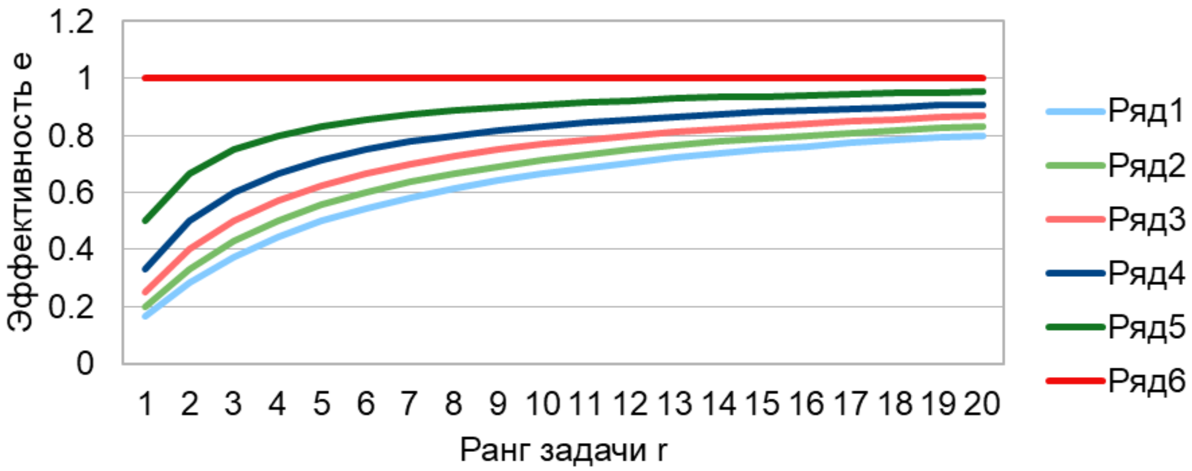
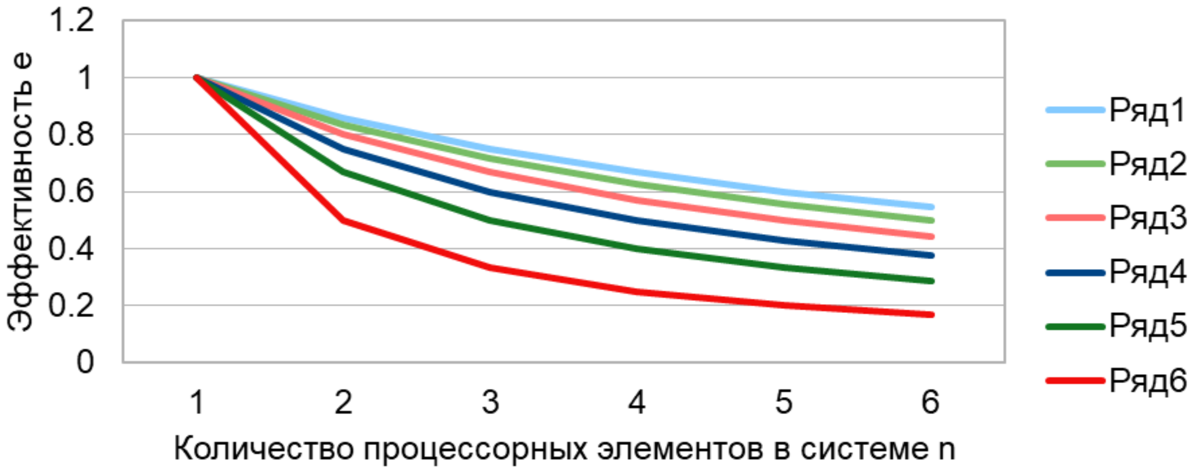


График 4. График зависимости эффективности е от количества процессорных элементов в системе n



5 Вопросы

5.1 Проверить, что модель создана верно: программа работает правильно (на всех этапах конвейера).

На вход подаются 2 вектора:
A = <5, 10, 2>
B = <2, 79, 100>
Проверка:
2 * 5 = 10 = 1010(2), 10 * 79 = 790 = 1100010110(2), 2 * 100 = 200 = 11001000(2). Результаты верны.

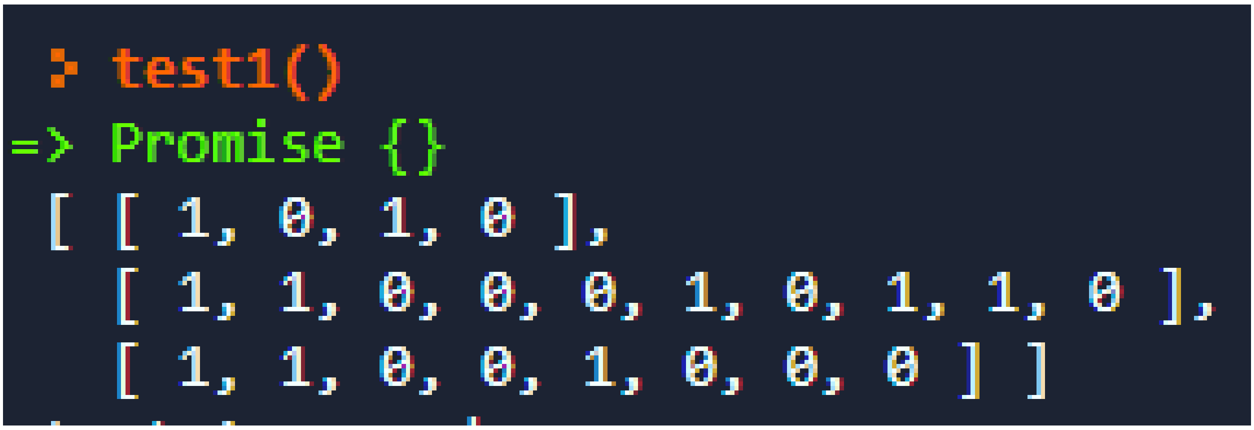


Рисунок *5.1* – Ответ программы

Ответ: полученные результаты совпадают с ожидаемыми.

5.2 Объясните на графиках точки перегиба и асимптоты.

Асимптоты: Чтобы определить асимптоты для графиков коэффициента ускорения, необходимо рассмотреть два случая:

а) $r \to \infty$

В данном случае коэффициент ускорения ограничен значением n, ведь ранг задачи уже и так принимает максимально возможное значение, осталось только выполнить вычисления на ограниченном количестве вычислительных блоков.
Формула K_y выглядит следующим образом:
$K_y = \frac{r*n}{n+r-1}$
Следовательно, если взять предел, получим следующее выражение:
$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r*n}{n+r-1} = n$

б) $n \to \infty$

В данном случае коэффициент ускорения ограничен значением r, ведь ко-

личество процессорных элементов в системе и так принимает максимальное значение, и часть вычислительных блоков будет простаивать.
Формула K_y выглядит следующим образом:
$K_y = \frac{r*n}{n+r-1}$
Следовательно, если взять предел, получим следующее выражение:
$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r*n}{n+r-1} = r$
аналогично поступаем при нахождении и объяснении асимптот графиков эффективности:

в) $r \to \infty$
Так как эффективность показывает долю работы одного процессорного элемента, то при ограниченном количестве блоков каждый блок будет задействован в вычислениях. Следовательно, эффективность будет максимальной (ни один вычислительный блок не будет простаивать).
Формула e выглядит следующим образом:
$e = \frac{r}{n+r-1}$
Если взять предел, получим следующее выражение:
$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r}{n+r-1} = 1$

г) $n \to \infty$
В этом случае ситуация обратная: из-за того, что количество вычислительных блоков гораздо больше возможного ранга задачи, некоторые блоки будут простаивать. Следовательно, эффективность будет минимальной
Формула e выглядит следующим образом:
$e = \frac{r}{n+r-1}$
Если взять предел, получим следующее выражение:
$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r}{n+r-1} = 0$

5.3 Спрогнозируйте, как изменится вид графиков при изменении параметров модели. Если модель позволяет, то проверьте на ней правильность ответа.

Ответ:
– $K_y(r)$ и $K_y(n)$ растут при увеличении r и n (причины показаны в вопросе 6.2)
– При увеличении r значение эффективности e(r) растёт.
– При увеличении n значение эффективности e(n) снижается.

5.4 Каково соотношение между параметрами n, r, m, p модели сбалансированного конвейера?

Ответ:
p = 4
n = p*3
r = m
m – задается пользователем

5.5 Каким будет соотношение между r_1 и r_2 характеристики h, если для неё выполняется $h(n_1, r_1) = h(n_2, r_2) n_1 > n_2$?

Допустим: имеется некоторая характеристика h (эффективность e или ускорение Ky) и для неё выполняется: $h(n_1, r_1) = h(n_2, r_2) n_1 > n_2$?. **Каким будет соотношение между r_1 и r_2?**

В качестве характеристики h возьмём эффективность e. Тогда подставим формулу эффективности e:
$e = \frac{K_y}{n} = \frac{T_1}{T_n * n} = \frac{r}{n+r-1}; n \in N; r \in N$
в заданное выражение:
$e(n_1, r_1) = e(n_2, r_2);$

$$\begin{cases} \frac{r_1}{n_1+r_1-1} = \frac{r_2}{n_2+r_2-1} \\ n_1 > n_2, r_1 > r_2, n_1 > 1, \\ n_2 > 1, r_1 \geq 1, r_2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 n_2 + r_1 r_2 - r_1 = r_2 n_1 + r_1 r_2 - r_2 \\ n_1 > n_2, r_1 \neq r_2, n_1 > 1, n_2 > 1, \\ r_1 \geq 1, r_2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r_1(n_2 - 1) = r_2(n_1 - 1) \\ n_1 > n_2, r_1 \neq r_2, n_1 > 1, n_2 > 1, \\ r_1 \geq 1, r_2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2-1}{n_1-1} \\ n_1 > n_2, r_1 \neq r_2, n_1 > 1, n_2 > 1, \\ r_1 \geq 1, r_2 \geq 1, n_1 \neq r1, n_2 \neq r_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 > r_2 \\ n_1 > n_2, n_1 > 1, n_2 > 1, \\ r_1 \geq 1, r_2 \geq 1, n_1 \neq r_1, n_2 \neq r_1 \end{cases}$$

Пояснение:
По заданному условию $n_1 > n_2$ и зная, что $n_1 \in N, n_2 \in N, n_1 > 1, n_2 > 1$, потому что при $n_2 = 1$ равенство $e_1 = e_2$ будет иметь вид: $\frac{r_1}{n_1+(r_1 1)} = 1$, а из этого следует, что $n_1 = 1$, что противоречит условию $n_1 > n_2$. Соответственно, $n_1 1 > n_2 1$, из этого можно сделать вывод, что $\frac{n_1 1}{n_2 1} > 1$, а чтобы выполнялось условие равенства необходимо, чтобы и выполнялось $\frac{r_1}{r_2 > 1}$.

Из этого следует, что $r_1 > r_2$.
Ответ: $r_1 > r_2$

5.6 Определить значение r_0, при котором для несбалансированного конвейера выполняется $e(n, r_0) > e_0$. Дано: несбалансированный конвейер (заданы конкретные значения: n,t_i – времена выполнения обработки на этапах конвейера); e_0 – некоторое фиксированное значение эффективности. Определить значение r_0, при котором выполняется $e(n, r_0) > e_0$? (Получить формулу, затем подставить в неё значения параметров.)

$$\begin{cases} e(n, r_0) = \frac{K_y(n, r_0}{n}(1) \\ K_y(n, r_0) = \frac{T_1}{T_n} \\ T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max} \\ T_1 = r_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \\ t_i > 0 \\ r_0, n \in N \end{cases} \implies \begin{cases} K_y(n, r_0) = \dfrac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max}} \\ t_i > 0 \\ r_0, n \in N \end{cases} \quad (1):$$

$$\begin{cases} e(n, r_0) = \frac{K_y(n, r_0}{n} = \dfrac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n}}{n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max} \right)}(2) \\ t_i > 0 \\ r_0, n \in N \end{cases}$$

Подставим полученную формулу эффективности в исходное неравенство:

$$\begin{cases} \frac{K_y(n, r_0)}{n} = \dfrac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n}}{n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max} \right)} > e_0(3) \\ t_i > 0 \\ r_0, n \in N \end{cases}$$

Выразим r0:

$$r_0 \sum_{i=1}^{n} t_i > e_0 n \left(\sum_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max} \right)$$

$$r_0 \sum_{i=1}^{n} t_i > e_0 n \sum_{i=1}^{n} t_i + e_0 n (r_0 - 1) t_{max}$$
$$r_0 \sum_{i=1}^{n} t_i > e_0 n \sum_{i=1}^{n} t_i + e_0 n r_0 t_{max} - e_0 n t_{max}$$
$$r_0 \left(\sum_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max} \right) > e_0 n \sum_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}$$

Получим: $\begin{cases} r_0 > \dfrac{e_0 n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}} t_i > 0 \\ r_0, n \in N \end{cases}$

Так как для любого конвейера: $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max} \geq 0$

при $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max} \geq 0 :$ $\begin{cases} r_0 > \dfrac{e_0 n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}} \\ r_0 \geq 1, t_i \geq 1, n \geq 1, \\ t_{max} \geq t_i, e_0 > 0 \end{cases}$ -все условия выполняются

при $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max} < 0 :$ $\begin{cases} r_0 < \dfrac{e_0 n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}} \\ r_0 \geq 1, t_i \geq 1, n \geq 1, \\ t_{max} \geq t_i, e_0 > 0 \end{cases}$ – так как в числителе стоит положительное число, в знаменателе отрицательное, результат выражения принимает отрицательные значения. Но по условию r0 может принимать только значения $r_0 \geq 1$. Следовательно, данный случай не войдёт в итоговое решение.

при $\sum_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max} = 0$: $\begin{cases} r_0 < \dfrac{e_0 n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}} \\ r_0 \geq 1, t_i \geq 1, n \geq 1, \\ t_{max} \geq t_i, e_0 > 0 \end{cases}$ -В данном случае знаменатель выражения будет равен нулю. А в арифметике деление на ноль не имеет смысла. Данный случай также не войдёт в итоговое решение.

Ответ: $r_0 > \dfrac{e_0 n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - t_{max}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max}}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i - e_0 n t_{max} > 0$

5.7 Для несбалансированного конвейера (использовать исходные данные предыдущего вопроса) определить: $\lim\limits_{r \to \infty} e(n, r)$.

Так как e(n,r) $= \dfrac{r \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1) t_{max}\right)}$, то, по правилу Лопиталя:

$$\lim_{r \to \infty} e(n, r) = \lim_{r \to \infty} \frac{r \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1) t_{max}\right)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n t_{max}}$$

Ответ: $\lim\limits_{r \to \infty} e(n, r) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n t_{max}}$

5.8 Дан несбалансированный конвейер (использовать исходные данные предыдущего вопроса). Каким образом можно перестроить данный конвейер, чтобы для заданного r_0 выполнялось $e(n, r_0) > e_0$?

Воспользуемся неравенством (3) из задания №6.6 и преобразуем его в следующее неравенство: $\dfrac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max}\right)} > \dfrac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n_0} t_i}{n_0\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max}\right)}$

Учитывая, что

$$\begin{cases} n_0\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max}\right) > 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i > 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = \sum\limits_{i=1}^{n_0} t_i \\ r_0, n \in N \end{cases}$$

получаем $\frac{1}{n} > \frac{1}{n_0}, n < n_0$. Это означает, что для выполнения заданного условия необходимо, чтобы n в перестроенном конвейере было меньше, чем n_0 в конвейере до перестроения. При этом необходимо, чтобы при объединение этапов максимальное время этапа на перестроенном конвейере было равно максимальному времени этапа на конвейере до перестроения. Необходимо объединять этапы конвейера таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$1 \le n < \frac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{e_0\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1)t_{max}\right)}$$

Следует учесть, что объединять мы можем только соседние этапы.
Приведём примеры решения такой задачи на конкретных данных:

Пример 1

Пусть:
$r_0 = 3$
$n_0 = 8$
$t_i = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$

Тогда $e_0 = 0,27$ (по формуле (2) задания №6.6).

Перестроим конвейер следующим образом:
$r_0 = 3$
$n_0 = 4$ (объединены : 1-й со 2-м, 3-й с 4-м, 5-й с 6-м, 7-й с 8-м).
$t_i = 2, 4, 6, 8$
Тогда $e = 0, 42.e > e_0$, что соответствует условию задачи.

Пример 2
Пусть:
$r_0 = 5$
$n_0 = 6$
$t_i = 6, 1, 4, 3, 2, 5$
Вычислим эффективность получившегося конвейера:
$e_0 = \frac{5*21}{6*(21+(5-1)*6} = 0, 389$

Перестроим конвейер:
$r_0 = 5$
$n_0 = 4$
$t_i = 6, 5, 5, 5$
Пересчитаем эффективность:
e(n,r)$=\frac{521}{4(21+(51)6} = 0, 583.$
Неравенство e$>e_0$ также выполняется.

Ответ: $1 \leq n < \frac{r_0 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{e_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + (r_0 - 1) t_{max} \right)}$

5.9 Каким образом можно перестроить несбалансированный конвейер, чтобы добиться максимальной скорости работы? Дан несбалансированный конвейер (использовать исходные данные предыдущего вопроса) и значение минимального кванта времени t_0 (условной временной единицы). Каким образом нужно перестроить данный конвейер, чтобы получить максимально быстрый конвейер? Получить для него формулы $K_y(n, r), e(n, r)$?

Данный конвейер необходимо перестроить так, чтобы он был сбалансированным и каждый этап выполнялся за минимальный квант времени t_0, т.е. разделить этапы конвейера, которые длятся дольше, чем t_0, на более мелкие этапы, которые будут длиться t_0. Количество этапов в этом сбалансированном конвейере будет равняться:

$$n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0}$$

Тогда:

$$K_y(n, r) = \frac{T_1}{T_n} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{T_0} rt}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1 \right) t_0} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} r}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1}$$

$$e(n, r) = \frac{K_y}{n} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} r}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1 \right) \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0}} = \frac{r}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1}$$

Ответ: $K_y(n, r) = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} r}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1}, e(n, r) = \frac{r}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{t_0} + r - 1}$

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы была реализована и исследована модель сбалансированного конвейера для вычисления произведения пары 8-разрядных чисел умножением с младших разрядов со сдвигом множимого (частичного произведения) влево.
Были исследованы числовые характеристики конвейерной архитектуры: коэффициент ускорения K_y и эффективность e.

Список использованных источников

[1] Ивашенко., В. П. Модели решения задач в интеллектуальных системах. В 2 ч. Ч. 1 : М74 Формальные модели обработки информации и параллельные модели решения задач : учеб.-метод. пособие / В. П. Ивашенко. — 2020.

[2] Heinrich, Joe. MIPS R400 Microprocessot User's Manual / Joe Heinrich. — Inc: 2011.

[3] D, Michael. Unerstanding CPU Pipelining Through Simulation Programming / Michael D. — Inc: 2005.